BAB II
DASAR TEORI

Pada dasar teori ini dibahas beberapa definisi dan contoh yang digunakan sebagai dasar memahami *Left Almost Modules* (LA-modul) dan acuan dalam pembahasan.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, anggota dari himpunan tidak kosong dapat dikaitkan dengan operasi penjumlahan, operasi pergandaan atau beberapa operasi biner lainnya. Berikut ini diberikan definisi dari *cartesian product*, relasi, relasi ekuivalensi, pemetaan, dan operasi biner berdasarkan Battacharya, dkk. (1990), Andari (2015), dan Durbin (1992).

Definisi 2.1.1 (*Cartesian Product*)
Misalkan $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. Himpunan semua pasangan terurut (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$ disebut *cartesian product* dari himpunan A dan B, dinotasikan $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

Definisi 2.1.2 (Relasi)
Misalkan $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. R disebut sebagai relasi dari A ke B jika R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Serta R disebut relasi pada himpunan A jika R adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

Definisi 2.1.3 (Relasi Ekuivalensi)
Misalkan $R \neq \emptyset$ dan R adalah relasi pada himpunan X, R disebut relasi ekuivalensi jika memenuhi aksioma sebagai berikut.

i. Refleksif, $\forall x \in X$ berlaku $(x, x) \in R$,
ii. Simetris, $\forall x, y \in X$ jika $(x, y) \in R$, maka $(y, x) \in R$,
iii. Transitif, $\forall x, y, z \in X$ jika $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in R$, maka $(x, z) \in R$.

Jika R merupakan relasi ekuivalensi maka dapat dibentuk kelas ekuivalensi dari $a \in X$ yang merupakan himpunan semua anggota X yang berelasi R dengan a, dinotasikan sebagai $[a] = \{x \in X | aRx\}$

Contoh 2.1.4
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, jika R relasi pada $\mathbb{Z}$ didefinisikan

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b(mod 4)$$
$$\Leftrightarrow a - b = 4k,$$
$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } k \in \mathbb{Z},$$

maka R merupakan suatu relasi ekuivalensi.

Bukti :
Akan ditunjukkan R memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif.

1. Refleksif, $\forall a \in \mathbb{Z}$ maka jelas $a \equiv a(mod\, 4)$, karena $\exists k \in \mathbb{Z}$, yaitu $k = 0, \ni a - a = 4 \cdot 0 = 0$.
2. Simetris, ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dimana $k \in \mathbb{Z}$ dengan $a \equiv b\ (mod\, 4)$, artinya $a - b = 4k$. Kemudian kalikan dengan (-1) diperoleh $b - a = -4k$, dengan kata lain $b \equiv a(mod\, 4)$.
3. Transitif, ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$
$$a \equiv b(mod\, 4) \Leftrightarrow a - b = 4k, k \in \mathbb{Z}$$
$$b \equiv c(mod\, 4) \Leftrightarrow b - c = 4l, l \in \mathbb{Z}$$
Subtitusikan $b = c + 4l$ dalam persamaan sehingga diperoleh
$$a - c = a - (c + 4l) = 4k$$
$$a - c = 4k + 4l$$
$$a - c = 4(k + l),$$
maka dapat disimpulkan bahwa $a \equiv c(mod\, 4)$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti R adalah relasi ekuivalensi.

Kelas ekuivalensi dari R ditunjukkan sebagai berikut:

$$[a] = \{x \in X | aRx\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} | a \equiv x(mod\, 4)\}$$

sehingga

$$[0] = \{\dots, -4,0,4,8, \dots\}$$
$$[1] = \{\dots, -3,1,5,9, \dots\}$$
$$[2] = \{\dots, -2,2,6,10, \dots\}$$
$$[3] = \{\dots, -1,3,7,11, \dots\}$$

Kelas ekuivalensi secara umum dikenal sebagai anggota dari himpunan bilangan bulat modulo 4, $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)
Misalkan $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. Suatu relasi f dari A ke B disebut pemetaan jika $\forall a \in A, \exists!\, b \in B, \ni (a, b) \in f$. Pemetaan f dari A ke B, dinotasikan

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ a &\mapsto f(a) = b \end{aligned}$$

Dengan kata lain, f adalah pemetaan jika $a = b$, maka $f(a) = f(b)$, $\forall a, b \in A$.
Pada pemetaan f dari A ke B, himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) dari f. Suatu pemetaan $f: A \to B$ disebut:

1. Pemetaan satu-satu (injektif), jika $\forall a, b \in A$ dengan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.
2. Pemetaan onto (surjektif), jika $\forall b \in B, \exists a \in A, \ni b = f(a)$.
3. Pemetaan bijektif, jika f injektif dan surjektif.

Contoh 2.1.6
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Jika didefinisikan suatu relasi f sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

dengan $f(x) = x^2 + 3x + 4$, maka f adalah suatu pemetaan.

Bukti :
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, jika $a = b$, maka $a^2 = b^2$, sehingga

$$a^2 + 3 \cdot a + 4 = b^2 + 3 \cdot b + 4$$
$$f(a) = f(b)$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x \in \mathbb{Z}$. Jadi terbukti f adalah suatu pemetaan yang surjektif.

Definisi 2.1.7 (Operasi Biner)
Misalkan $S \neq \emptyset$. Suatu fungsi $*$ disebut operasi biner pada S, yaitu

$$\begin{aligned} *: S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto a * b \in S \end{aligned}$$

Operasi biner menandakan sifat tertutup, yaitu $\forall a, b \in S$, berlaku $a * b \in S$.

2.2 Grupoid dan Semigrup

Grupoid adalah suatu himpunan yang disertai dengan satu operasi biner. Semigrup merupakan suatu struktur aljabar yang disertai dengan satu operasi biner dan memenuhi assosiatif. Berikut ini diberikan definisi grupoid berdasarkan Kandasamy (2002) dan semigrup berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.2.1 (Grupoid)
Misalkan $G \neq \emptyset$. G yang disertai dengan operasi biner $*$ disebut sebagai grupoid dan dinotasikan dengan $(G,*)$ sedemikian sehingga $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.

Contoh 2.2.2
Diberikan himpunan bilangan bulat dengan operasi pergandaan. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},\cdot)$ merupakan grupoid.

Bukti:
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}$. Karena $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z},\cdot)$ merupakan grupoid.

Definisi 2.2.3 (Semigrup)
Misalkan $S \neq \emptyset$ yang disertai dengan operasi biner $*$ dan dinotasikan $(S,*)$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma berikut:
1. Tertutup.
   $\forall a, b \in S, \exists! c \in S, a * b = c.$
2. Assosiatif.
   $\forall a, b, c \in S, (a * b) * c = a * (b * c).$

Contoh 2.2.4
Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup.

Bukti:
1. Tertutup.
   $\forall a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b \in \mathbb{N}$
2. Assosiatif.
   $\forall a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup.

2.3 Grup

Grup merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari grup, grup komutatif, subgrup dan koset berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.3.1 (Grup)
Misalkan $G \neq \emptyset$ yang disertai dengan operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut:
1. Tertutup.
   $\forall a, b \in G, \exists! c \in G, a * b = c.$
2. Assosiatif.
   $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c).$
3. Mempunyai elemen identitas.
   $\exists e \in G, \forall a \in G, e * a = a * e = a.$
4. Setiap elemen mempunyai invers.
   $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a * (a^{-1}) = a^{-1} * a = e.$

Contoh 2.3.2
Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.

Bukti:
Pada himpunan bulat berlaku sifat:
1. Tertutup.
   $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Assosiatif.
   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Memiliki elemen identitas.
   Elemen identitas dari $(\mathbb{Z}, +)$ adalah 0, karena $0 + a = a + 0 = a$.
4. Setiap elemen memiliki invers.
   Invers dari a adalah $-a$, karena $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Berdasarkan 1, 2, 3, dan 4, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup.

Contoh 2.3.3

Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ disertai dengan operasi biner $+$ merupakan grup. Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan grup.

Bukti:

Ambil $A, B, C \in K$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

i. Tertutup.

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

ii. Assosiatif.

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) \\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

iii. Mempunyai elemen identitas, yaitu $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Karena $E + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+a & 0+b \\ 0+c & 0+d \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{bmatrix} = A + E = E$, sehingga

$$E + A = A + E = E.$$

iv. Setiap elemen memiliki invers.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$, sehingga

$$A + (-A) = -A + A = E.$$

Definisi 2.3.4 (Grup Komutatif)
Suatu grup $(G,*)$ disebut grup komutatif (grup Abelian), jika $\forall a,b \in G$ berlaku hukum komutatif, yaitu $a * b = b * a$.

Contoh 2.3.5
Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},+)$ grup komutatif.

Bukti :
Misalkan ambil $a,b \in \mathbb{Z}$, maka berlaku $a + b = b + a$. Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z},+)$ merupakan suatu grup komutatif.

Definisi 2.3.6 (Subgrup)
Misalkan G adalah suatu grup dan $H \neq \emptyset, H \subseteq G$. H disebut subgrup dari G, jika H merupakan sebuah grup terhadap operasi biner yang sama dengan G.

Contoh 2.3.7
$(\mathbb{Z},+)$ merupakan grup. Akan ditunjukkan bahwa $(2\mathbb{Z},+)$ dengan $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Z},+)$.

Bukti:
Pada himpunan bilangan bulat berlaku sifat:
1. Tertutup.
   $\forall 2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$, maka $2a + 2b \in 2\mathbb{Z}$.
2. Assosiatif.
   $\forall 2a, 2b, 2c \in 2\mathbb{Z}$, maka berlaku
   $$(2a + 2b) + 2c = 2a + (2b + 2c).$$
3. Mempunyai elemen identitas, yaitu 0.
   Karena $0 + 2a = 2a + 0 = 2a$
4. Setiap elemen mempunyai invers.
   $\forall 2a \in 2\mathbb{Z}, \exists -2a \in 2\mathbb{Z}, \ni 2a + (-2a) = 2a - 2a = 0.$

Berdasarkan 1, 2, 3, dan 4, terbukti bahwa $(2\mathbb{Z},+)$ merupakan suatu subgrup dari $(\mathbb{Z},+)$.

Teorema 2.3.8
Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup dan $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika $\forall a,b \in G$ berlaku:

1. $\forall a, b \in H, a * b \in H$.
2. $\forall a \in H, \exists a^{-1} \in H$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui H adalah subgrup G. Akan dibuktikan ketentuan 1 dan 2. Karena H subgrup, berarti H merupakan grup, sehingga berlaku sifat tertutup, assosiatif, mempunyai elemen satuan dan setiap elemen mempunyai invers. Jadi ketentuan 1 dan 2 dipenuhi.

($\Leftarrow$)

Diketahui berlaku ketentuan 1 dan 2. Akan dibuktikan H subgrup. Sifat tertutup telah dipenuhi oleh ketentuan 1. Sifat assosiatif dengan sendirinya dipenuhi karena semua elemen H juga elemen G. Mempunyai elemen identitas. Ambil $a \in H$, dari ketentuan 2, $a^{-1} \in H$. Sekarang ambil $a, a^{-1} \in H$. Karena $a, a^{-1} \in H$ dan berlaku sifat tertutup, maka $a * a^{-1} = e \in H$, sehingga diperoleh $e \in H$. Setiap elemen mempunyai invers dipenuhi oleh ketentuan 2.

Contoh 2.3.9

Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$.

Diberikan

$$K = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, K \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$L = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$M = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Akan ditunjukkan K, L, M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Bukti:

i. Ambil $A, B \in K$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K.$$

Selanjutnya ambil $A \in K$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, terdapat

$$-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K,$$

sehingga $A + (-A) = -A + A = E$. Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa K merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

ii. Ambil $A, B \in L$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ b + d & 0 \end{bmatrix} \in L.$$

Selanjutnya ambil $A \in L$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, terdapat

$$-A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in L,$$

sehingga $A + (-A) = -A + A = E$. Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa L merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

iii. Ambil $A, B \in M$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix} \in M.$$

Selanjutnya ambil $A \in M$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, terdapat

$$-A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \in M,$$

sehingga $A + (-A) = -A + A = E$. Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.3.10

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup dan $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. H merupakan merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika

$$\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H.$$

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Diketahui H adalah subgrup G. Akan dibuktikan berlaku $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$. Jika H subgrup, maka Teorema 2.3.7 berlaku. Karena menurut Teorema 2.3.1 ketentuan 2, setiap elemen dari H mempunyai invers, sehingga jika $b \in H$, maka $b^{-1} \in H$. Selanjutnya menurut Teorema 2.3.7 ketentuan 1, berlaku $a, b^{-1} \in H, a * b^{-1} \in H$. Jadi, terbukti $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$)
Diketahui berlaku $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$. Akan dibuktikan H subgrup. Menurut ketentuan, berarti jika diambil $a, a^{-1} \in H$, maka $a * a^{-1} = e \in H$. Ambil $e, a \in H$, maka menurut ketentuan, berlaku $e * a^{-1} = a^{-1} \in H$. Demikian juga jika diambil

$$e, b \in H, e * b^{-1} = b^{-1} \in H,$$

sehingga $b \in H, b^{-1} \in H \ldots i)$. Selanjutnya jika $a, b^{-1} \in H$, maka $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H \ldots ii)$. Dari $i)$ dan $ii)$, menurut Teorema 2.3.7, maka H merupakan subgrup.

Contoh 2.3.11
Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$.
Diberikan

$$K = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, K \subseteq M_2(\mathbb{R})$$
$$L = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$
$$M = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Akan ditunjukkan K, L, M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Bukti:

i. Ambil $A, B \in K$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K.$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa K merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

ii. Ambil $A, B \in L$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a - c & 0 \\ b - d & 0 \end{bmatrix} \in L.$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa L merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

iii. Ambil $A, B \in M$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a - c & 0 \\ 0 & b - d \end{bmatrix} \in M.$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.3.12 (Koset)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $a \in G$ dan H adalah suatu subgrup dari $G, \forall a \in G$,

1. $a * H = \{a * h | h \in H\}$, disebut koset kiri relatif terhadap H.
2. $H * a = \{h * a | h \in H\}$, disebut koset kanan relatif terhadap H.

Contoh 2.3.13
Diketahui $(\mathbb{Z}, +)$ grup dan $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$. Akan ditentukan banyaknya koset di $\mathbb{Z}$ relatif terhadap $2\mathbb{Z}$.

Bukti:
$0 + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$
$1 + 2\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$2 + 2\mathbb{Z} = \{0 \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} = 2\mathbb{Z}$
$3 + 2\mathbb{Z} = 1 + 2\mathbb{Z}$
dan seterusnya, sehingga banyaknya koset ada 2 yaitu $2\mathbb{Z}$ dan $1 + 2\mathbb{Z}$.

2.4 Ring

Ring merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh ring berdasarkan Whitelaw (1995), Battacharya dkk. (1990), Fraleigh (1944), dan Andari (2014).

Definisi 2.4.1 (Ring)
Misalkan $R \neq \emptyset$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner, misalkan terhadap penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. R disebut ring jika memenuhi aksioma berikut:

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.

2. $(R,\ \cdot)$ merupakan semigrup.
3. Berlaku hukum distributif, $\forall a, b, c \in R$, berlaku
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Jika dalam pergandaan, $\forall a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$, maka R disebut ring komutatif.

Contoh 2.4.2
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring.

Bukti:
Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring dengan memenuhi aksioma berikut.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif.
   Berdasarkan Contoh 2.3.4, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup komutatif.
2. $(\mathbb{Z},\ \cdot)$ adalah semigrup.
   i. Tertutup.
      $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.
   ii. Assosiatif.
      $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Memenuhi hukum distributif.
   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku
   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring.

4. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$, sehingga $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif.

Contoh 2.4.3
Diberikan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real, yaitu

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring.

Bukti:
Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ berlaku

1. $(M_2(\mathbb{R}),+)$ merupakan grup komutatif
   Berdasarkan Contoh 2.3.3, $(M_2(\mathbb{R}),+)$ merupakan grup komutatif.
2. $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$ merupakan semigrup.
   i. Tertutup
   $$A\cdot B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$
   ii. Assosiatif.
   $$\begin{aligned}&(A\cdot B)\cdot C\\
&=\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(ae+bg)p+(af+bh)r & (ae+bg)q+(af+bh)s\\ (ce+dg)p+(cf+dh)r & (ce+dg)q+(cf+dh)s\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}aep+bgp+afr+bhr & aeq+bgq+afs+bhs\\ cep+dgp+cfr+dhr & ceq+dgq+cfs+dhs\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}ep+fr & eq+fs\\ gp+hr & gq+hs\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}\right)\\
&=A\cdot(B\cdot C)\end{aligned}$$
   sehingga $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.
3. Berlaku hukum distributif.
   a. Distributif kanan.
   $$\begin{aligned}&A\cdot(B+C)\\
&=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}\right)\\
&=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e+p & f+q\\ g+r & h+s\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}a(e+p)+b(g+r) & a(f+q)+b(h+s)\\ c(e+p)+d(g+r) & c(f+q)+d(h+s)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}ae+ap+bg+br & af+aq+bh+bs\\ ce+cp+dg+dr & cf+cq+dh+ds\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}ae+(ap+bg)+br & af+(aq+bh)+bs\\ ce+(cp+dg)+dr & cf+(cq+dh)+ds\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}ae+(bg+ap)+br & af+(bh+aq)+bs\\ ce+(dg+cp)+dr & cf+(dh+cq)+ds\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+bg+ap+br & af+bh+aq+bs \\ ce+dg+cp+dr & cf+dh+cq+ds \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= A \cdot B + A \cdot C$$

b. Distributif kiri.

$$(A+B) \cdot C$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (a+e)p+(b+f)r & (a+e)q+(b+f)s \\ (c+g)p+(d+h)r & (c+g)q+(d+h)s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+ep+br+fr & aq+eq+bs+fs \\ cp+gp+dr+hr & cq+gq+ds+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+(ep+br)+fr & aq+(eq+bs)+fs \\ cp+(gp+dr)+hr & cq+(gq+ds)+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+br+ep+fr & aq+bs+eq+fs \\ cp+dr+gp+hr & cq+ds+gq+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ep+fr & eq+fs \\ gp+hr & gq+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= A \cdot C + B \cdot C$$

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring.

4. $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tidak berlaku $A \cdot B = B \cdot A$.

Karena

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix}$$

sehingga $A \cdot B \neq B \cdot A$. Jadi, $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ bukan merupakan ring komutatif.

Definisi 2.4.4 (Ring dengan Elemen Identitas)
Misalkan $R \neq \emptyset$ yang dilengkapi dua operasi biner. $(R, +, \cdot)$ merupakan suatu ring.

- Jika $\exists 1_R \in R, \ni \forall a \in R, 1_R \cdot a = a$, maka 1_R disebut elemen identitas kiri.
- Jika $\exists 1_R \in R, \ni \forall a \in R, a \cdot 1_R = a$, maka 1_R disebut elemen identitas kanan.
- Jika $\exists 1_R \in R, \ni \forall a \in R, 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$, maka 1_R disebut elemen identitas.

Contoh 2.4.5
Berdasarkan Contoh 2.4.2, akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identias.

Bukti:
Elemen identitas dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah 1.
Karena $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{Z}$, sehingga $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identitas.

Contoh 2.4.6
Berdasarkan Contoh 2.4.3, akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identitas.

Bukti:
Elemen identitas dari $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ adalah $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Karena
$$E \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
dan
$$A \cdot E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
sehingga $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identitas.

2.5 Modul

Modul merupakan suatu struktur aljabar yang menggabungkan struktur grup dan ring. Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan modul berdasarkan Battacharya, dkk. (1990) dan Andari (2015).

Definisi 2.5.1 (Modul Kiri)
Misalkan $(M, +)$ adalah suatu grup komutatif dan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Serta diberikan pula operasi biner,

$$\begin{aligned} *: R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto * (r, m) = r * m. \end{aligned}$$

Himpunan M disebut modul kiri atas R, atau ditulis $M: R -$modul kiri, jika memenuhi ketiga aksioma berikut:

1. $r * (m_1 + m_2) = r * m_1 + r * m_2$,
2. $(r_1 + r_2) * m = r_1 * m + r_2 * m$,
3. $(r_1 \cdot r_2) * m = r_1 \cdot (r_2 * m)$,

$\forall\, r, r_1, r_2 \in R, \forall\, m, m_1, m_2 \in M$.

Contoh 2.5.2
Diberikan himpunan vektor di $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks vertikal dan ring berupa himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diberikan pula operasi biner

$$\cdot : M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) \mapsto \cdot \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ai + bj \\ ci + dj \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}^2, +)$ merupakan grup komutatif.
   a. Tertutup

      Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$, berlaku

$$P + Q = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i + k \\ j + l \end{bmatrix}$$

Karena $i, j, k, l \in \mathbb{R}, \ni i+k, j+l \in \mathbb{R}$. Jadi, $\begin{bmatrix} i+k \\ j+l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$.

b. Assosiatif

Ambil sebarang $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, yaitu

$P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned}
(P+Q)+R &= \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i+k \\ j+l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (i+k)+m \\ (j+l)+n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i+(k+m) \\ j+(l+n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+m \\ l+n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}\right) \\
&= P + (Q+R)
\end{aligned}$$

sehingga $(P+Q)+R = P+(Q+R)$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$.

c. Elemen identitas adalah $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Karena $E + P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+i \\ 0+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$.

$$P + E = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+0 \\ j+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix},$$

sehingga $E + P = P + E = P$.

d. Setiap elemen mempunyai invers.

Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Invers dari $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ adalah $-P = \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix}$, karena $P + (-P) = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e. Komutatif.

Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$, berlaku

$$P + Q = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (i+k) \\ (j+l) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (k+i) \\ (l+j) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= Q + P$$

sehingga $P + Q = Q + P$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi, dengan menggunakan sifat pergandaan matriks dengan vektor:

1. Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, berlaku
$$A \cdot (P + Q) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i+k \\ j+l \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a(i+k) + b(j+l) \\ c(i+k) + d(j+l) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + (ak + bj) + bl \\ ci + (ck + dj) + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + (bj + ak) + bl \\ ci + (dj + cj) + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj + ak + bl \\ ci + dj + ck + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj \\ ci + dj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ak + bl \\ ck + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$
$$= A \cdot P + A \cdot Q$$

2. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku
$$(A + B) \cdot P = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (a+e)i + (b+f)j \\ (c+g)i + (d+h)j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + (ei + bj) + fj \\ ci + (gi + dj) + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj + ei + fj \\ ci + dj + gi + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj \\ ci + bj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ei + fj \\ gi + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

3. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku

$$(A \cdot B) \cdot P = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (ae + bg)i + (af + bh)j \\ (ce + dg)i + (cf + dh)j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei + (bgi + afj) + bhj \\ cei + (dgi + cfj) + dhj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei + afj + bgi + bhj \\ cei + cfj + dgi + dhj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ei + fj \\ gi + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)$$
$$= A \cdot (B \cdot P)$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian dia atas bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Definisi 2.5.3 (Modul Kanan)
Misalkan $(M, +)$ adalah suatu grup komutatif dan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Serta diberikan pula operasi biner,

$$*: M \times R \to M$$
$$(m, r) \mapsto * (m, r) = m * r.$$

Himpunan M disebut modul kanan atas R, atau biasa ditulis $M: R -$ modul kanan, jika memenuhi ketiga aksioma pergandaan berikut:

1. $(m_1 + m_2) * r = m_1 * r + m_2 * r$,
2. $m * (r_1 + r_2) = m * r_1 + m * r_2$,
3. $m * (r_1 \cdot r_2) = (m * r_1) \cdot r_2$,

$\forall\, r, r_1, r_2 \in R, \forall\, m, m_1, m_1 \in M$.

Contoh 2.5.4

Diberikan himpunan vektor di $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks horizontal. dan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diberikan pula operasi biner

$$\cdot : M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\left([i \quad j], \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \mapsto \cdot \left([i \quad j], \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= [ia + jc \quad ib + jd].$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}^2, +)$ merupakan grup komutatif.

a. Tertutup.

Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j], Q = [k \quad l]$, berlaku

$$P + Q = [i \quad j] + [k \quad l]$$
$$= [i + k \quad j + l]$$

Karena $i, j, k, l \in \mathbb{R}$, $i + j, k + l \in \mathbb{R}$,
Sehingga $[i + k \quad j + l] \in \mathbb{R}^2$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$.

b. Assosiatif.

Ambil sebarang $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, yaitu $x = [i \quad j], y = [k \quad l]$, dan $z = [m \quad n]$, berlaku.

$$(P + Q) + R = ([i \quad j] + [k \quad l]) + [m \quad n]$$
$$= [i + k \quad j + l] + [m \quad n]$$
$$= [i + (k + m) \quad j + (l + n)]$$

$$
\begin{aligned}
&= [i \quad j] + [k+m \quad l+n] \\
&= [i \quad j] + ([k \quad l] + [m \quad n]) \\
&= P + (Q + R)
\end{aligned}
$$

sehingga $(P+Q)+R = P+(Q+R)$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$.

c. Elemen identitas adalah $E = [0 \quad 0]$.
Karena $E + P = [0 \quad 0] + [i \quad j] = [0+i \quad 0+j] = [i \quad j]$

d. Setiap elemen mempunyai invers.
Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j]$. Invers dari $P = [i \quad j]$ adalah $-P = [-i \quad -j]$, karena

$$P + (-P) = [i \quad j] + [-i \quad -j] = [0 \quad 0].$$

e. Komutatif.
Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j], Q = [k \quad l]$, berlaku

$$
\begin{aligned}
P + Q &= [i \quad j] + [k \quad l] \\
&= [(i+k) \quad (j+l)] \\
&= [k+i \quad l+j] \\
&= [k \quad l] + [i \quad j] \\
&= Q + P
\end{aligned}
$$

sehingga $P + Q = Q + P$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi dengan menggunakan sifat pergandaan matriks dengan vektor:

1. Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j], Q = [k \quad l]$. Ambil sebarang $A \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, berlaku

$$
\begin{aligned}
&(P+Q) \cdot A \\
&= ([i \quad j] + [k \quad l]) \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= [i+k \quad j+l] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= [(i+k) \cdot a + (j+l) \cdot c \quad (i+k) \cdot b + (j+l) \cdot d] \\
&= [ia + (ka + jc) + lc \quad ib + (kb + jd) + ld] \\
&= [ia + jc + ka + lc \quad ib + jd + kb + ld] \\
&= [ia + jc \quad ib + jd] + [ka + lc \quad kb + ld] \\
&= [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + [k \quad l] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= P \cdot A + Q \cdot A
\end{aligned}
$$

2. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j]$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku
$$P \cdot (A + B)$$
$$= [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$
$$= [i \cdot (a+e) + j \cdot (c+g) \quad i \cdot (b+f) + j \cdot (d+h)]$$
$$= [ia + (ie + jc) + jg \quad ib + (if + jd) + jh]$$
$$= [ia + jc + ie + jg \quad ib + jd + if + jh]$$
$$= [ia + jc \quad ib + jd] + [ie + jg \quad if + jh]$$
$$= [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= P \cdot A + P \cdot B$$
3. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j]$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku
$$P \cdot (A \cdot B)$$
$$= [i \quad j] \cdot \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right)$$
$$= [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$
$$= [i(ae + bg) + j(ce + dg) \quad i(af + bh) + j(cf + dh)]$$
$$= [iae + (ibg + jce) + jdg \quad iaf + (ibh + jcf) + jdh]$$
$$= [iae + jce + ibg + jdg \quad iaf + jcf + ibh + jdh]$$
$$= [ia + jc \quad ib + jd] \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= \left([i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= (P \cdot A) \cdot B$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian dia atas bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2 -$ modul kanan.

Definisi 2.5.5 (Bimodul)
Misalkan $(M, +)$ adalah suatu grup komutatif dan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring. Jika M adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas R, maka M disebut bimodul.

Untuk mempermudah penulisan, pembahasan mengenai modul di skripsi ini mengacu kepada bimodul dan ditulis sebagai modul.

Contoh 2.5.6
Misalkan $\mathbb{Z}_5$ adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas ring $\mathbb{Z}$. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_5 : \mathbb{Z}$ −bimodul.

Bukti:
i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tabel 2.2 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$.

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x} = a + 6k_1$, $\bar{y} = b + 6k_2$ dan $\bar{z} = c + 6k_3$ berlaku:

a. Tertutup.
Pada Tabel 2.1 terlihat bahwa $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$.
$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &= (a + 5k_1) + (b + 5k_2) \\ &= (a + b) + 5(k_1 + k_2),\ k_{1,} k_2 \in \mathbb{Z} \\ &= \overline{x + y} \in \mathbb{Z}_5 \end{aligned}$$

b. Assosiatif.
$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \big((a + 5k_1) + (b + 5k_2)\big) + (c + 5k_3)$$

$$= (a + b + c) + 5(k_1 + k_2 + k_3)\ ,\ k_{1,}k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$
$$= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$
$$\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (a + 5k_1) + \big((b + 5k_2) + (c + 5k_3)\big)$$
$$= (a + b + c) + 5(k_1 + k_2 + k_3)\ ,\ k_{1,}k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$
$$= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

sehingga $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$.

c. Elemen identitas adalah $e = \bar{0}$.
Misalkan $\bar{e} = 0 + 5k_4$, maka $\bar{x} + \bar{e} = \bar{e} + \bar{x} = \bar{x}$

$$\bar{x} + \bar{e} = (a + 5k_1) + (0 + 5k_4)$$
$$= (a + 0) + 5(k_1 + k_4)\ ,\ k_{1,}k_4 \in \mathbb{Z}$$
$$= \bar{x} + \bar{e}$$
$$= \bar{x}$$

d. Setiap elemen mempunyai invers. Pada Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa:

Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
Invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$, karena $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$
Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$, karena $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$
Invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$, karena $\bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$
Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$, karena $\bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$

e. Komutatif.

$$\bar{x} + \bar{y} = (a + 6k_1) + (b + 6k_2)$$
$$= a + 6k_1 + b + 6k_2\ ,\ k_{1,}k_2 \in \mathbb{Z}$$
$$= b + 6k_2 + a + 6k_1$$
$$= \bar{y} + \bar{x}$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.1.

1. $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$.
Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$ dan $r \in \mathbb{Z}$, yaitu
$\bar{x} = a + 5k_1, \bar{y} = b + 5k_2$, berlaku

$$r \cdot (x + y) = r \cdot \big((a + 5k_1) + (b + 5k_2)\big)$$
$$= r \cdot (a + 5k_1) + r \cdot (b + 5k_2)$$
$$= (ra + r5k_1) + (rb + r5k_2)$$
$$= r(a + 5k_1) + r(b + 5k_2)$$
$$= r \cdot \bar{x} + r \cdot \bar{y}$$

2. $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$.
Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x} = a + 5k_1$, berlaku

$$\begin{aligned}(r_1+r_2)\cdot\bar{x} &= (r_1+r_2)\cdot(a+5k_1)\\ &= (r_1+r_2)\cdot a+(r_1+r_2)\cdot 5k_1\\ &= r_1a+r_2a+r_15k_1+r_25k_1\\ &= (r_1a+r_15k_1)+(r_2a+r_25k_1)\\ &= r_1(a+5k_1)+r_2(a+5k_1)\\ &= r_1\cdot\bar{x}+r_2\cdot\bar{x}\end{aligned}$$

3. $(r_1\cdot r_2)\cdot m = r_1\cdot(r_2\cdot m)$.
   Ambil sebarang $r_1,r_2\in\mathbb{Z}$ dan $\bar{x}\in\mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x}=a+5k_1$, berlaku

$$\begin{aligned}(r_1\cdot r_2)\cdot\bar{x} &= (r_1\cdot r_2)\cdot(a+5k_1)\\ &= (r_1\cdot r_2)\cdot a+(r_1\cdot r_2)\cdot 5k_1\\ &= r_1r_2a+r_1r_25k_1\\ &= r_1(r_2a+r_25k_1)\\ &= r_1(r_2(a+5k_1))\\ &= r_1\cdot(r_2\cdot\bar{x})\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_5:\mathbb{Z}-$ modul kiri.

iii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.3.

1. $(m_1+m_2)\cdot r = m_1\cdot r+m_2\cdot r$.
   Ambil sebarang $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{Z}_5$ dan $r\in\mathbb{Z}$, yaitu
   $\bar{x}=a+5k_1,\bar{y}=b+5k_2$, berlaku

$$\begin{aligned}(\bar{x}+\bar{y})\cdot r &= \big((a+5k_1)+(b+5k_2)\big)\cdot r\\ &= (ar+5k_1r)+(br+5k_2r)\\ &= (a+5k_1)\cdot r+(b+5k_2)\cdot r\\ &= \bar{x}\cdot r+\bar{y}\cdot r\end{aligned}$$

2. $m\cdot(r_1+r_2) = m\cdot r_1+m\cdot r_2$.
   Ambil sebarang $r_1,r_2\in\mathbb{Z}$ dan $\bar{x}\in\mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x}=a+5k_1$, berlaku

$$\begin{aligned}\bar{x}\cdot(r_1+r_2) &= (a+5k_1)\cdot(r_1+r_2)\\ &= ar_1+(ar_2+5k_1r_1)+5k_1r_2\\ &= ar_1+5k_1r_1+ar_2+5k_1r_2\\ &= (ar_1+5k_1r_1)+(ar_2+5k_1r_2)\\ &= (a+5k_1)\cdot r_1+(a+5k_1)\cdot r_2\\ &= \bar{x}\cdot r_1+\bar{x}\cdot r_2\end{aligned}$$

3. $m\cdot(r_1\cdot r_2) = (m\cdot r_1)\cdot r_2$.
   Ambil sebarang $r_1,r_2\in\mathbb{Z}$ dan $\bar{x}\in\mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x}=a+5k_1$, berlaku

$$
\begin{aligned}
\bar{x}\cdot(r_1\cdot r_2) &= (a+5k_1)\cdot(r_1\cdot r_2)\\
&= a\cdot(r_1\cdot r_2)+5k_1\cdot(r_1\cdot r_2)\\
&= ar_1r_2+5k_1r_1r_2\\
&= (ar_1+5k_1r_1)r_2\\
&= ((a+5k_1)r_1)r_2\\
&= (\bar{x}\cdot r_1)\cdot r_2
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathbb{Z}_5:\mathbb{Z}-$ modul kanan.

Dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $\mathbb{Z}_5:\mathbb{Z}-$ bimodul.

Jika ring pada modul merupakan ring dengan elemen satuan, maka dapat dimunculkan suatu definisi baru.

Contoh 2.5.7

Diberikan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Didefinisikan pemetaan

$$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$(r,a+ib)\mapsto\cdot(r,a+ib)=r\cdot(a+ib)=ra+rib.$$
$$\cdot:\mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$$
$$(a+ib,r)\mapsto\cdot(a+ib,r)=(a+ib)\cdot r=ar+ibr.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{C}:\mathbb{R}-$ bimodul.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{C},+)$ merupakan grup komutatif.
   Ambil sebarang $x,y,z\in\mathbb{C}$, yaitu $x=a+ib$, $y=c+id$ dan $z=e+if$ berlaku:
   a. Tertutup.

$$
\begin{aligned}
x+y &= (a+ib)+(c+id)\\
&= (a+c)+i(b+d)\\
&= x+y\in\mathbb{C}
\end{aligned}
$$

   b. Assosiatif.

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= \big((a+ib)+(c+id)\big)+(e+if)\\
&= \big((a+c)+i(b+d)\big)+(e+if)\\
&= (a+c+e)+i(b+d+f)\\
x+(y+z) &= (a+ib)+\big((c+id)+(e+if)\big)\\
&= (a+ib)+\big((c+e)+i(d+f)\big)\\
&= (a+c+e)+i(b+d+f)
\end{aligned}
$$

   sehingga $(x+y)+z=x+(y+z)$.

c. Elemen identitas adalah $e = 0 + i0$.

Misalkan $e = 0 + i0$, sehingga $x + e = e + x = x$.

$$\begin{aligned} x + e &= (a + ib) + (0 + i0) \\ &= (a + 0) + i(b + 0) \\ &= (0 + a) + i(0 + b) = (a + ib) \end{aligned}$$

d. Setiap elemen mempunyai invers.

Invers dari $x = a + ib$ adalah $-x = -(a + ib)$, karena

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (a + ib) + \big(-(a + ib)\big) \\ &= (a + ib) - (a + ib) \\ &= (a - a) + i(b - b) \\ &= 0 + i0 \end{aligned}$$

e. Komutatif.

$$\begin{aligned} x + y &= (a + ib) + (c + id) \\ &= (a + c) + i(b + d) \\ &= (c + a) + i(d + b) \\ &= (c + id) + (a + ib) \\ &= y + x \end{aligned}$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.1.

1. $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$ dan $r \in \mathbb{R}$, yaitu

$x = a + ib, y = c + id$ dan $r = p + iq$ berlaku

$$\begin{aligned} r \cdot (x + y) &= r \cdot \big((a + ib) + (c + id)\big) \\ &= r \cdot \big((a + c) + i(b + d)\big) \\ &= r \cdot (a + c) + r \cdot i(b + d) \\ &= ra + rc + rib + rid \\ &= ra + rib + rc + rid \\ &= r \cdot (a + ib) + r \cdot (c + id) \\ &= r \cdot x + r \cdot y \end{aligned}$$

2. $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$.

Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \cdot x &= (r_1 + r_2) \cdot (a + ib) \\ &= r_1 a + r_1 ib + r_2 a + r_2 ib \\ &= r_1 \cdot (a + ib) + r_2 \cdot (a + ib) \\ &= r_1 \cdot x + r_2 \cdot x \end{aligned}$$

3. $(r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$.

Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku

$(r_1 \cdot r_2) \cdot x = (r_1 \cdot r_2) \cdot (a + ib)$
$= r_1 r_2 a + r_1 r_2 ib$
$= r_1 \cdot (r_2 a + r_2 ib)$
$= r_1 \cdot (r_2 \cdot (a + ib)$
$= r_1 \cdot (r_2 \cdot x)$

Jadi, $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ modul kiri.

iii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.3.

1. $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r.$
   Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$ dan $r \in \mathbb{R}$, yaitu
   $x = a + ib, y = c + id$ dan $r = p + iq$ berlaku
   $(x + y) \cdot r = \big((a + ib) + (c + id)\big) \cdot r$
   $= \big((a + c) + i(b + d)\big) + r$
   $= (a + c) \cdot r + i(b + d) \cdot r$
   $= ar + cr + ibr + idr$
   $= ar + ibr + cr + idr$
   $= (a + ib) \cdot r + (c + id) \cdot r$
   $= x \cdot r + y \cdot r$
2. $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2.$
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku
   $x \cdot (r_1 + r_2) = (a + ib) \cdot (r_1 + r_2)$
   $= ar_1 + ar_2 + ibr_1 + ibr_2$
   $= ar_1 + ibr_1 + ar_2 + ibr_2$
   $= (a + ib) \cdot r_1 + (a + ib) \cdot r_2$
   $= x \cdot r_1 + x \cdot r_2$
3. $m \cdot (r_1 \cdot r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2.$
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku
   $x \cdot (r_1 \cdot r_2) = (a + ib) \cdot (r_1 \cdot r_2)$
   $= ar_1 r_2 + ibr_1 r_2$
   $= (ar_1 + ibr_1) \cdot r_2$
   $= ((a + ib) \cdot r_1) \cdot r_2$
   $= (x \cdot r_1) \cdot r_2$

Jadi, $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ modul kanan.

Dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ bimodul.

Jika ring pada modul merupakan ring dengan elemen satuan, maka dapat dimunculkan suatu definisi baru.

Definisi 2.5.8 (Modul Uniter Kiri)
Misalkan $M: R-$ modul dan R adalah ring dengan elemen satuan. Modul M disebut modul uniter kiri jika $\forall m \in M$, berlaku $1_R * m = m$, dengan 1_R merupakan elemen satuan di R.

Contoh 2.5.9
Berdasarkan Contoh 2.5.2, himpunan $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks vertikal dengan $1_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan suatu modul uniter kiri dengan ring $M_2(\mathbb{R})$ dan operasi pergandaan bilangan riil.

Definisi 2.5.10 (Modul Uniter Kanan)
Misalkan $M: R-$ modul dan R adalah ring dengan elemen satuan. Modul M disebut modul uniter kiri jika $\forall m \in M$, berlaku $m * 1_R = m$, dengan 1_R merupakan elemen satuan di R.

Contoh 2.5.11
Berdasarkan Contoh 2.5.4, himpunan $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks horizontal dengan $1_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan suatu modul uniter kanan dengan ring $M_2(\mathbb{R})$ dan operasi pergandaan bilangan riil.

Conttoh 2.5.12
Berdasarkan Contoh 2.5.6, himpunan $\mathbb{Z}_5$ merupakan suatu bimodul uniter dengan ring $\mathbb{Z}$ dan operasi pergandaan bilangan bulat.

Definisi 2.5.13 (Submodul)
Misalkan $M: R-$modul (M adalah modul atas ring R). $N \subseteq M, N \neq \emptyset$. Himpunan N disebut submodul dari M jika memenuhi:

a. $(N, +)$ merupakan subgrup dari $(M, +)$,
b. $\forall r \in R, \forall n \in N, rn \in N$.

Contoh 2.5.14
Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.
Diberikan $L = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$.

Akan ditunjukkan L merupakan submodul dari M.

Bukti:

Ambil $A, B \in L$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{bmatrix} \in L.$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa L merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Selanjutnya ambil $A \in L$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, diperoleh

$$R \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bf & 0 \\ ce+df & 0 \end{bmatrix} \in L.$$

Karena L subgrup dan $RA \in L$, maka L merupakan submodul dari $M_2(\mathbb{R})$.

Lemma 2.5.15

Misalkan $M: R-$ modul (M adalah modul atas ring R), dan $N \subseteq M$. N disebut submodul dari modul M jika dan hanya jika memenuhi:

i. $0 \in N$,

ii. $\forall n_1, n_2 \in N, n_1 - n_2 \in N$,

iii. $\forall n \in N, \forall r \in R, rn \in N$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui N submodul dari modul M. Akan dibuktikan: N memenuhi i. ii. iii. Karena N adalah submodul dari M, maka berdasarkan Definisi 2.5.5 (a), $(N,+)$ merupakan subgrup dari $(M,+)$, sehingga jelas (i) dan (ii) dipenuhi. Kemudian karena N adalah submodul dari M, maka menurut Definisi 2.5.5 (b), berarti memenuhi (iii).

($\Leftarrow$)

Diketahui: berlaku (i), (ii), (iii). Akan dibuktikan: N submodul dari modul M. Dari (i), $0 \in N$ dan (ii), $(\forall n_1, n_2 \in N), n_1 - n_2 \in N$, artinya N adalah subgrup M. Kemudian dari (iii), berarti memenuhi Definisi 2.5.5 bagian (b). Jadi terbukti N merupakan submodul dari modul M.

Definisi 2.5.16 (Ideal modul)
Misalkan M adalah suatu modul dan N adalah subset tak kosong dari M. N disebut ideal kiri jika memenuhi:

1. $\forall a, b \in N$ berlaku $a - b \in N$,
2. $\forall a \in N, \forall r \in M$ berlaku $ra \in N$.

M disebut ideal kanan jika memenuhi:

1. $\forall a, b \in N$ berlaku $a - b \in N$,
2. $\forall a \in N, \forall r \in M$ berlaku $ar \in N$.

N disebut ideal dua sisi jika N merupakan ideal kiri dan kanan.

Contoh 2.5.17
Diketahui $\mathbb{Z}: \mathbb{Z}$ −modul. Ambil $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Dapat ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}: \mathbb{Z} -$ modul.

Bukti:
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$ dan $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$. Ambil sebarang $a, b \in 2\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$. Untuk $a = 2k_1$ dan $b = 2k_2$ dimana $k_1, k_2 \in 2\mathbb{Z}$ berlaku:

1. $a - b = 2k_1 - 2k_2 = 2(k_1 - k_2) \in 2\mathbb{Z}$.
2. $a \cdot r = 2k_1 \cdot r = r \cdot 2k_1 = r \cdot a \in 2\mathbb{Z}$.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $2Z$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.5.18 (Elemen Identitas pada Modul)
Suatu elemen e dalam modul M disebut elemen identitas pada M jika $e * a = a * e = a, \forall a \in R$.

Definisi 2.5.19 (Modul Faktor)
Misalkan $M: R -$ modul dan N merupakan submodul dari M. M/N adalah himpunan koset-koset dari N di M, terhadap operasi penjumlahan, M/N merupakan modul dan disebut sebagai modul faktor. $M/N = \{a + N, b + N, c + N, \ldots\}, a, b, c, \ldots \in M$.
Didefinisikan:

$$(a + N) + (b + N) = (a + b) + N,$$
$$r(a + N) = ra + N, r \in R.$$

Dengan operasi seperti di atas, M/N disebut modul faktor atau *quotient modul*.

Contoh 2.5.20
Diketahui $\mathbb{Z}: \mathbb{Z}-$ modul dan $2\mathbb{Z}$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ merupakan modul faktor.

Bukti:
Koset-koset yang berada di $\mathbb{Z}$ adalah $2\mathbb{Z}$ dan $1+2\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ merupakan modul. Pertama akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

Tabel 2.3 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$+$	$2\mathbb{Z}$	$1+2\mathbb{Z}$
$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	$1+2\mathbb{Z}$
$1+2\mathbb{Z}$	$1+2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$

i. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, merupakan grup komutatif
   a. Tertutup.
      Pada Tabel 2.3 terlihat bahwa $\forall a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ berlaku $a+b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   b. Assosiatif.
      Ambil $x, y, z \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x = 2\mathbb{Z}, y = 1+2\mathbb{Z}, z = 2\mathbb{Z}$ berlaku
$$\begin{aligned}(x+y)+z &= \big(2\mathbb{Z} + (1+2\mathbb{Z})\big) + 2\mathbb{Z} \\ &= (1+2\mathbb{Z}) + 2\mathbb{Z} = 1+2\mathbb{Z} \\ x+(y+z) &= 2\mathbb{Z} + ((1+2\mathbb{Z}) + 2\mathbb{Z}) \\ &= 2\mathbb{Z} + (1+2\mathbb{Z}) = 1+2\mathbb{Z}\end{aligned}$$
      sehingga $(x+y)+z = x+(y+c)$.
   c. Elemen identitas adalah $e = 2\mathbb{Z}$. Karena berlaku
$$e + x = x + e = x$$
$$2\mathbb{Z} + (1+2\mathbb{Z}) = (1+2\mathbb{Z}) + 2\mathbb{Z} = 1+2\mathbb{Z}$$
$$2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$$
   d. Setiap elemen mempunyai invers.
      Pada Tabel 2.3 dapat dilihat bahwa, invers dari $2\mathbb{Z}$ adalah $2\mathbb{Z}$, karena $2\mathbb{Z}+2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. Invers dari $1+2\mathbb{Z}$ adalah $1+2\mathbb{Z}$, karena $(1+2\mathbb{Z}) + (1+2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$.
   e. Berlaku sifat komutatif
      Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$., yaitu $x = 2\mathbb{Z}, y = 1+2\mathbb{Z}$.
$$\begin{aligned}x+y &= 2\mathbb{Z} + (1+2\mathbb{Z}) \\ &= (1+2\mathbb{Z}) + 2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$= 1 + 2\mathbb{Z}$$

Berdasarkan i, ii, iii, iv, dan v terbukti bahwa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$ merupakan grup komutatif.

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi.

a. $$\begin{aligned} r[(a + 2\mathbb{Z}) + (b + 2\mathbb{Z})] &= r[(a + b) + 2\mathbb{Z}] \\ &= [r(a + b) + 2\mathbb{Z} \\ &= (ra + rb) + 2\mathbb{Z} \\ &= (ra + 2\mathbb{Z}) + (rb + 2\mathbb{Z}) \\ &= r(a + 2\mathbb{Z}) + r(b + 2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} (r_1 + r_2)(a + 2\mathbb{Z}) &= (r_1 + r_2)a + 2\mathbb{Z} \\ &= (r_1 a + r_2 a) + 2\mathbb{Z} \\ &= (r_1 a + 2\mathbb{Z}) + (r_2 + 2\mathbb{Z}) \\ &= r_1 (a + 2\mathbb{Z}) + r_2 (a + 2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} (r_1 r_2)(a + 2\mathbb{Z}) &= [r_1 r_2 (a + 2\mathbb{Z})] \\ &= r_1 r_2 a + 2\mathbb{Z} \\ &= r_1 (r_2 a) + 2\mathbb{Z} \\ &= r_1 [r_2 (a + 2\mathbb{Z})] \end{aligned}$$

$\forall r, r_1, r_2 \in R, \forall (a + 2\mathbb{Z}) + (b + 2\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} -$ modul.

Definisi 2.5.21 (Homomorfisma Modul)

Misalkan M dan M' masing-masing merupakan suatu modul atas ring R. Didefinisikan pemetaan $\rho: M \to M'$. ρ disebut homomorfisma modul jika dipenuhi:

1. $\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b), \forall a, b \in M$.
2. $\rho(ra) = r\rho(a), \forall a, b \in M, \forall r \in R$.

Misalkan M dan M' masing-masing adalah modul atas ring R dan ρ: $M \to M'$ adalah suatu homomorfisma. Maka ρ disebut:

- Epimorfisma yaitu suatu homomorfisma yang surjektif (onto).
- Monomorfisma yaitu suatu homomorfisma yang injektif (satu-satu).
- Isomorfisma yaitu suatu homomorfisma yang bijektif (injektif dan surjektif).
- Endomorfisma yaitu suatu homomorfisma dari modul M ke dirinya sendiri.

- Automorfisma yaitu suatu isomorfisma dari modul M ke dirinya sendiri.

Contoh 2.5.22
Diberikan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dan $M_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real. $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ modul dan $M_2(\mathbb{R}): \mathbb{R} -$ modul.
Didefinisikan:

$$f: \mathbb{C} \to M_2[\mathbb{R}]$$
$$a + ib \mapsto f(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa f adalah homomorfisma modul.

Bukti:
Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}$, untuk $x = a + ib$ dan $y = c + id$, maka
$f(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ dan $f(c + id) = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$, sehingga berlaku:

1. Terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f\big((a + ib) + (c + id)\big) \\ &= f[(a + c) + i(b + d)] \\ &= \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \\ &= f(a + ib) + f(c + id) \end{aligned}$$

2. Terhadap pergandaan.

$$\begin{aligned} f(rx) &= f\big(r(a + ib)\big) \\ &= f(ra + rib) \\ &= \begin{bmatrix} ra & rb \\ -rb & ra \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= rf(a + ib) = rf(x) \end{aligned}$$

Jadi, f merupakan homomorfisma modul.

Definisi 2.5.23 (Hasil Jumlah Langsung)
Misalkan R adalah suatu ring. M adalah modul atas R dan $N_1, N_2, \ldots, N_k$ masing-masing adalah submodul dari M. M disebut hasil jumlah langsung (*internal direct sum*) dari submodul $N_1, N_2, \ldots, N_k$, jika memenuhi

$$i. M = \sum_{i=1}^{k} N_i \,,$$

$$ii. N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\} \text{ ,untuk } 1 \leq i \leq k.$$

M disebut hasil jumlah langsung dari submodul $N_1, N_2, \ldots, N_k$, biasa diberi notasi $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$.

Contoh 2.5.24
Diketahui $\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z} -$ modul, $N_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\}, N_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ masing-masing adalah submodul dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan $Z_6 = N_1 \oplus N_2$.

Bukti:
Akan ditunjukkan N_1, N_2 submodul dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.4 Operasi pengurangan pada N_1.

$-$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$

Tabel 2.5 Operasi pengurangan pada N_2.

$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 2.4 dan Tabel 2.5, maka dapat disimpulkan bahwa N_1 dan N_2 merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.
Selanjutnya ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{x} \in N_1$, yaitu $\bar{x} = a + 6k_1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} r \cdot \bar{x} &= r \cdot (a + 6k_1) \\ &= ra + r6k_1 \in N_1. \end{aligned}$$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{y} \in N_2$, yaitu $\bar{y} = b + 6k_1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} r \cdot \bar{y} &= r \cdot (b + 6k_1) \\ &= rb + r6k_1 \in N_2. \end{aligned}$$

Karena N_1 dan N_2 merupakan subgrup dan $r \cdot \bar{x} \in N_1$ dan $r \cdot \bar{y} \in N_2$, jadi dapat disimpulkan bahwa N_1 dan N_2 merupakan submodul dari $\mathbb{Z}_6$.

Akan ditunjukkan bahwa N_1 dan N_2 merupakan hasil tambah langsung.

i. $N_1 + N_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_6$

ii. $N_1 \cap N_2 = \{0\}$

Jadi, $\mathbb{Z}_6 = N_1 \oplus N_2$.

2.6 LA-Grup dan LA-Semigrup

Left almost group (LA-grup) merupakan suatu struktur aljabar yang disertai dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh LA-grup berdasarkan Gaketem (2013). Kemudian diberikan definisi dan contoh LA-semigrup berdasarkan Kazim dan Naseeruddin (1977).

Definisi 2.6.1 (LA-Semigrup)

Misalkan $G \neq \emptyset$ dan disertai operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut *left almost semigroup* (LA-semigrup), jika memenuhi hukum invertif kiri yaitu:

$$(a * b) * c = (c * b) * a, \forall a, b, c \in G$$

Contoh 2.6.2

Diberikan $S = \{a, b, c\}$ yang dilengkapi dengan operasi $*$ yang didefinisikan pada Tabel 2.6. Akan dibuktikan bahwa $(S,*)$ merupakan LA-semigrup yang bukan semigrup.

Tabel 2.6 Operasi $(*)$ pada S.

$*$	a	b	c
a	c	c	b
b	b	b	b
c	b	b	b

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa $(S,*)$ merupakan LA-semigrup memenuhi hukum invertif kiri.

   Ambil sebarang $x, y \in S$, yaitu $x = a, y = b, z = c$

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (a * b) * c \\ &= c * c = b \\ (z * y) * x &= (c * b) * a \\ &= b * a = b\end{aligned}$$

   sehingga $(x * y) * z = (z * y) * x$.

2. Akan dibuktikan bahwa $(S,*)$ bukan semigrup
   i. Tertutup.
      Pada Tabel 2.6 terlihat bahwa $\forall x, y \in S$ berlaku $x * y \in S$.
   ii. Assosiatif.
      Ambil sebarang $x, y, z \in S$. Untuk $x = a, y = b, z = c$ berlaku

$$(x * y) * z = (a * b) * c = c * c = b$$
$$x * (y * z) = a * (b * c) = a * b = c$$

      sehingga $(x * y) * z \neq x * (y * z)$.

Karena $(S,*)$ tidak memenuhi assosiatif, maka $(S,*)$ bukan semigrup. Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $(S,*)$ merupakan LA-semigrup dan bukan semigrup.

Definisi 2.6.3 (LA-Grup)

Misalkan $G \neq \emptyset$ dan disertai operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut *left almost group* (LA-grup), jika memenuhi beberapa aksioma berikut

1. Hukum invertif kiri, yaitu
$$(a * b) * c = (c * b) * a, \forall a, b, c \in G.$$
2. Mempunyai elemen identitas kiri, yaitu
$$\exists e \in G, \ni e * a = a, \forall a \in G.$$
3. Setiap elemen mempunyai invers kiri, yaitu
$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a^{-1} * a = e.$$

Contoh 2.6.4

Diberikan $P = \{a, b, c, d\}$ yang dilengkapi dengan operasi $\odot$ seperti yang didefinisikan pada Tabel 2.7. Akan dibuktikan bahwa P merupakan LA-grup dan bukan grup.

Tabel 2.7 Operasi pergandaan pada P.

$\odot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	b
d	b	c	d	a

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa $(P,\odot)$ merupakan LA-grup

1. Memenuhi hukum invertif kiri

   Ambil sebarang $x,y,z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

$$(x \odot y) \odot z = (a \odot b) \odot c$$
$$= b \odot c = b$$
$$(z \odot y) \odot x = (c \odot b) \odot a$$
$$= d \odot a = b$$

   sehingga $(x \odot y) \odot z = (z \odot y) \odot x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.

2. Mempunyai elemen identitas kiri

   Elemen identitas kiri dari $(P,\odot)$ adalah $a \ni \forall x \in P$ berlaku $a \odot x = x$.

3. Setiap elemen mempunyai invers kiri

   Invers a adalah a, karena $a \odot a = a$

   Invers b adalah b, karena $b \odot b = a$

   Invers c adalah c, karena $c \odot c = a$

   Invers d adalah d, karena $d \odot d = a$

ii. Akan dibuktikan bahwa $(P,\odot)$ bukan grup.

1. Tertutup.

   Pada Tabel 2.7 terlihat bahwa $\forall x, y \in P$ berlaku $x \odot y \in P$.

2. Assosiatif.

   Ambil sebarang $x,y,z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$, diperoleh

$$(x \odot y) \odot z = (a \odot b) \odot c$$
$$= b \odot c = b$$
$$x \odot (y \odot z) = a \odot (b \odot c)$$
$$= a \odot b = b$$

sehingga $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.

3. Memiliki elemen identitas

   Elemen identitasnya adalah a, namun hanya berlaku identitas kiri saja. Tidak berlaku identitas kanan karena $a \odot e \neq a$.

   Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(P,\odot)$, tidak memenuhi aksioma yang ketiga, maka $(P,\odot)$, bukan grup.

$(P,\odot)$ tidak memiliki elemen identitas kanan serta berdasarkan i.) dan ii.) terbukti bahwa $(P,\odot)$ merupakan LA-grup dan bukan grup.

2.7 *Left Almost Ring* (LA-Ring)

Left almost ring (LA-ring) merupakan suatu bentuk struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh LA-ring berdasarkan Yusuf (2006).

Definisi 2.7.1 (LA-ring)
Misalkan R adalah suatu himpunan tidak kosong memuat minimal dua elemen yang dilengkapi dua operasi biner, misalkan terhadap penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. $(R, +, \cdot)$, disebut LA-ring jika memenuhi:

1. $(R, +)$ merupakan LA-grup.
2. $(R, \cdot)$ merupakan LA-semigrup.
3. Berlaku hukum distributif yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

   $a(b + c) = (ab) + (ac)$ hukum distributif kiri,

   dan

   $(a + b)c = (ac) + (bc)$ hukum distributif kanan.

Contoh 2.7.2
Diberikan $N = \{a, b, c, d, e\}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ yang didefinisikan pada Tabel 2.8 dan Tabel 2.9. Akan dibuktikan bahwa N merupakan LA-ring N.

Tabel 2.8 Operasi penjumlahan pada N.

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	e	a	b	c	d
c	d	e	a	b	c
d	c	d	e	a	b
e	b	c	d	e	a

Tabel 2.9 Operasi pergandaan pada N.

$\odot$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

Bukti:

1. $(N,*)$ merupakan LA-grup
   i. Memenuhi hukum invertif kiri
      Ambil sebarang $x, y, z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh
      $$\begin{aligned}(x * y) * z &= (a * b) * c \\ &= b * c = b \\ (z * y) * x &= (c * b) * a \\ &= e * a = b\end{aligned}$$
      sehingga$(x * y) * z = (z * y) * x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.
   ii. Mempunyai elemen identitas kiri
      Elemen identitas kiri dari $(N,*)$ adalah a sehingga $\forall a \in N$ berlaku $a * x = a$.
   iii. Setiap elemen mempunyai invers kiri
      Invers a adalah a, karena $a \odot a = a$
      Invers b adalah b, karena $b \odot b = a$
      Invers c adalah c, karena $c \odot c = a$
      Invers d adalah d, karena $d \odot d = a$

sehingga$(x * y) * z = (z * y) * x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in N$.

Berdasarkan i, ii, dan iii terbukti bahwa $(N,*)$ merupakan LA-grup.

2. $(N,\odot)$ merupakan LA-semigrup

   Memenuhi hukum invertif kiri

   Ambil sebarang $x, y, z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

$$(x \odot y) \odot z = (a \odot b) \odot c$$
$$= b \odot c = b$$
$$(z \odot y) \odot x = (c \odot b) \odot a$$
$$= d \odot a = b$$

   sehingga$(x \odot y) \odot z = (z \odot y) \odot x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.

   Terbukti bahwa $(N,\odot)$ merupakan LA-semigrup.

3. Berlaku hukum distributif

   Ambil sebarang $x, y, z \in N$, yaitu $x = a, y = b, z = c$, diperoleh

$$x \odot (y * z) = a \odot (b * c)$$
$$= a \odot b = a$$
$$(x \odot y) * (x \odot z) = (a \odot b) * (a \odot c)$$
$$= a * a = a$$
$$(x * y) \odot z = (a * b) \odot c$$
$$= b \odot c = c$$
$$(x \odot z) * (y \odot z) = (a \odot c) * (b \odot c)$$
$$= a * c = c$$

   Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in N$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(N,*,\odot)$ merupakan LA-ring.

Contoh 2.7.3

Diberikan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}), + \cdot)$ merupakan suatu LA-ring.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan LA-ring.
   1. $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan LA-grup.
      a. Memenuhi hukum invertif kiri

Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ berlaku

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(e+p) & b+(f+q) \\ c+(g+r) & d+(h+s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+p)+e & (b+q)+f \\ (c+r)+g & (d+s)+h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p+(a+e) & q+(b+f) \\ r+(c+g) & s+(d+h) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (p+e)+a & (q+f)+b \\ (r+g)+c & (s+h)+d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (p+e) & (q+f) \\ (r+g) & (s+h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= (C+B)+A
\end{aligned}
$$

sehingga $(A+B)+C = (C+B)+A$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$.

b. Mempunyai elemen identitas kiri.

Elemen identitas kiri dari $(M_2(\mathbb{R}), +)$ adalah $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\ni \forall A \in K$ berlaku $E + A = A$.

c. Setiap elemen mempunyai invers kiri

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sehingga $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$. Karena $-A + A = E$.

$$
\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(-a) & b+(-b) \\ c+(-c) & d+(-d) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}),+)$ merupakan LA-grup.

2. $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$ merupakan LA-semigrup
   Memenuhi hukum invertif kiri
   Ambil sebarang $A,B,C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ berlaku

$$(A \cdot B) \cdot C$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (ae+bg)p+(af+bh)r & (ae+bg)q+(af+bh)s \\ (ce+dg)p+(cf+dh)r & (ce+dg)q+(cf+dh)s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aep+bgp+afr+bhr & aeq+bgq+afs+bhs \\ cep+dgp+cfr+dhr & ceq+dgq+cfs+dhs \end{bmatrix}$$
$$(C \cdot B) \cdot A$$
$$= \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} pe+qg & pf+qh \\ re+sg & rf+sh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (pe+qg)a+(pf+qh)c & (pe+qg)b+(pf+qh)d \\ (re+sg)a+(rf+sh)c & (re+sg)b+(rf+sh)d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} pea+qga+pfc+qhc & peb+qgb+pfd+qhd \\ rea+sga+rfc+shc & reb+sgb+rfd+shd \end{bmatrix}$$
$$(A \cdot B) \cdot C \neq (C \cdot B) \cdot A$$

   Terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$ bukan merupakan LA-semigrup karena tidak memenuhi hukum invertif kiri.

Contoh 2.7.3
Diberikan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.
$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\}.$$
Akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}),+\ \cdot)$ merupakan suatu LA-ring.

Bukti:
i. Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ merupakan LA-ring.
   1. $(M_2(\mathbb{R}),+)$ merupakan LA-grup.

a. Memenuhi hukum invertif kiri.

Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$ berlaku

$$\begin{aligned}
(A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + (c + e) & 0 \\ 0 & b + (d + f) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a + e) + c & 0 \\ 0 & (b + f) + d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e + (a + c) & 0 \\ 0 & f + (b + d) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (e + c) + a & 0 \\ 0 & (f + d) + b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (e + c) & 0 \\ 0 & (f + d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\
&= (C + B) + A
\end{aligned}$$

sehingga $(A + B) + C = (C + B) + A$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$.

b. Mempunyai elemen identitas kiri.

Elemen identitas kiri dari $(M_2(\mathbb{R}), +)$ adalah $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\ni$ $\forall A \in K$ berlaku $E + A = A$.

c. Setiap elemen mempunyai invers kiri

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, sehingga $-A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$. Karena $-A + A = E$.

$$\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + (-a) & 0 \\ 0 & b + (-b) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a - a & 0 \\ 0 & b - b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan LA-grup.

2. $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$ merupakan LA-semigrup
   Memenuhi hukum invertif kiri
   Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
   $$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \text{ berlaku}$$
   $$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot C &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ace & 0 \\ 0 & bdf \end{bmatrix} \\ (C \cdot B) \cdot A &= \left(\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ec & 0 \\ 0 & fd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} eca & 0 \\ 0 & fdb \end{bmatrix}\end{aligned}$$
   sehingga $(A \cdot B) \cdot C = (C \cdot B) \cdot A$.

Jadi, terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +,\cdot)$ merupakan LA-ring.

Contoh 2.7.4

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $\mathbb{Z}[x]$ adalah himpunan polinomial dengan koefisien dari polinomnya anggota dari $\mathbb{Z}$. Misalkan

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = \sum_i a_ix^i,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_0x^0 = \sum_i b_ix^i.$$

Didefinisikan hukum komposisi terhadap penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut.

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots$$
$$\begin{aligned}f(x) \cdot g(x) = a_0b_0x^0 &+ (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 \\ &+ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}[x], + \cdot)$ merupakan LA-ring.

Bukti:

1. $(\mathbb{Z}[x], +)$ merupakan LA-grup.
   a. Memenuhi hukum invertif kiri
      Ambil sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu
      $$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_ix^i = \sum_i a_ix^i,$$
      $$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_ix^i = \sum_i b_ix^i,$$
      $$h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_ix^i = \sum_i c_ix^i,$$
      berlaku
      $$\big(f(x) + g(x)\big) + h(x)$$
      $$= [(a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots] + c_0x^0 + c_1x^1 + \cdots$$
      $$= [(a_0 + b_0) + c_0]x^0 + [(a_1 + b_1) + c_1]x^1 + \cdots$$
      $$= [a_0 + (b_0 + c_0)]x^0 + [a_1 + (b_1 + c_1)]x^1 + \cdots$$
      $$= [(a_0 + c_0) + b_0]x^0 + [(a_1 + c_1) + b_1]x^1 + \cdots$$
      $$= [c_0 + (a_0 + b_0)]x^0 + [c_1 + (a_1 + b_1)]x^1 + \cdots$$
      $$= [(c_0 + b_0) + a_0)]x^0 + [(c_1 + b_1) + a_1]x^1 + \cdots$$
      $$= [(c_0 + b_0)x^0 + (c_1 + b_1)x^1 + \cdots] + a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots$$
      $$= \big(h(x) + g(x)\big) + f(x)$$
      sehingga $(f(x) + g(x)) + h(x) = \big(h(x) + g(x)\big) + f(x)$.
      Dengan cara yang sama berlaku $\forall f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
   b. Mempunyai elemen identitas kiri
      Elemen identitas kiri dari $(\mathbb{Z}[x], +)$ adalah
      $$e(x) = 0x^0 + 0x^1 + \cdots,$$
      sedemikian sehingga $\forall f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku
      $$e(x) + f(x) = x.$$
   c. Setiap elemen mempunyai invers kiri
      Jika $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots$, maka inversnya adalah
      $$-f(x) = -a_0x^0 - a_1x^1 - \cdots$$
      Karena $f(x) + \big(-f(x)\big) = 0 = 0x^0 + 0x^1 + \cdots$

   Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[x], +)$ merupakan LA-grup.
2. $(\mathbb{Z}[x], \cdot)$ merupakan LA-semigrup.
   Ambil sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \sum_i a_ix^i,$$
$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots = \sum_i b_ix^i,$$
$$h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots = \sum_i c_ix^i,$$

berlaku

$$\begin{aligned}
&\big((f(x)\cdot g(x)\big)\cdot h(x) \\
&= [(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)\cdot(b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots)] \\
&\quad \cdot (c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots) \\
&= [a_0b_0x^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots] \\
&\quad \cdot (c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots) \\
&= a_0b_0c_0x^0 + (a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0 + a_0b_0c_1)x^1 \\
&\quad + (a_0b_2c_0 + a_1b_1c_0 + a_2b_0c_0 + a_0b_1c_1 + a_1b_0c_1 + a_0b_0c_2)x^2 \\
&\quad + \cdots \\
&= [c_0b_0x^0 + (c_0b_1 + c_1b_0)x^1 + (c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0)x^2 + \cdots] \\
&\quad \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) \\
&= (h(x)\cdot g(x))\cdot f(x)
\end{aligned}$$

sehingga $\big((f(x)\cdot g(x)\big)\cdot h(x) = \big(h(x)\cdot g(x)\big)\cdot f(x)$. Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[x], +\,\cdot)$ merupakan LA-ring.

Definisi 2.7.5 (LA-Ring dengan Elemen Identitas Kiri)

Jika LA-Ring R memiliki elemen identitas kiri e, maka

$$e + e \neq e, e + 0 \neq e, e = (e + 0)^2.$$