LA-MODUL

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
AFIFAH RAMADHANI
135090401111009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2017

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

LA-MODUL

oleh:
AFIFAH RAMADHANI
135090401111009

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 6 September 2017
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dra. Ari Andari, MS
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Afifah Ramadhani**
NIM	**: 135090401111009**
Jurusan	**: Matematika**
Judul Skripsi	**: LA-Modul**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di Daftar Pustaka dalam skripsi ini hanya sebagai referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 6 September 2017
Yang Menyatakan,

Afifah Ramadhani
NIM 135090401111009

LA-MODUL

ABSTRAK

Left almost modules (LA-modul) merupakan pengembangan konsep dari modul yang berupa penggabungan konsep LA-grup dan LA-ring. LA-modul memenuhi aksioma LA-grup untuk operasi penjumlahan, LA-semigrup untuk operasi pergandaan serta distributif. Irisan dua LA-submodul dari suatu LA-modul merupakan LA-submodul. Teorema isomorfisma LA-modul merupakan kasus khusus dari teorema modul dengan pembuktian yang serupa.

Kata kunci: LA-semigrup, LA-grup, LA-ring, LA-modul, isomorfisma.

LA-MODUL

ABSTRACT

Left almost module (LA-module) is an extended concept of the module as well as the incorporation of the concept of LA-group and LA-ring. Left almost module is an LA-group under addition operation, LA-semigrup under multiplication operation and satisfy distributive. The intersection of two LA-submodule of a LA-module is a LA-submodule. Isomorphism theorem of LA-module is a special case of isomorphism theorem of module with a similar proof.

Keywords: LA-semigroup, LA-group, LA-ring, LA-module, isomorphism.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi berjudul "LA-Modul" dengan lancar dan tepat waktu. Penulis menyadari bahwa selama proses penyusunan skripsi ada banyak pihak yang telah berkontribusi. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih atas segala bantuan dan dukungan kepada:

1. Dra. Ari Andari, M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah memberikan nasihat, saran, kritik yang sangat bermanfaat untuk penulis dan selalu sabar dalam menjelaskan materi kepada penulis selama proses penyusunan hingga skripsi dapat diselesaikan.
2. Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D dan Vira Hari Krisnawati, S.Si., M.Sc, selaku Dosen Penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T, selaku Dosen Penasehat Akademik penulis atas masukan dan arahan selama kuliah.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si., Ph.D, selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Segenap dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmu pengetahuan yang bermanfaat bagi penulis kelak, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Septi Dwi Handayani (Ibu), Edy Susanto (Bapak), Maulina Nur Fajrin, S.Si. (Kakak), Adyatma Kusuma Wijaya (Adik), dan seluruh keluarga yang selalu memotivasi, mendoakan, dan memberi nasihat selama penyusunan skripsi berlangsung.
7. Adisti Winarti Nainggolan, S.Si., I Kadek Endi Pradika, S.Si., Renaldy Rizky Ramadhan, S.Si., Novenia Hefar Kanthohe, S.Si., Yenny Nur Apriliantari, S.Si., dan Rara Angelina Puspita Hadi, S.Tp yang selalu setia memberikan semangat,

menjadi teman diskusi, menghibur penulis ketika jenuh dan putus asa, memotivasi dan mengingatkan apabila penulis berbuat salah.

8. Joedo Errasjid yang akan segera menyandang gelar Sarjana Teknik yang telah berbagi waktu, tenaga beserta pikiran, dan memotivasi selama penyelesaian skripsi.
9. Teman-teman Matematika 2013 yang selalu memberikan dukungan, semangat, dan motivasi untuk penulis agar segera menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan tepat waktu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan rahmat-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak yang dapat disampaikan melalui email afifahramadhani@yahoo.co.id. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 6 September 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\sim$	: Relasi
$A \times B$	: Hasil kali *Cartesian*
$\forall$	: Untuk setiap
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\emptyset$	: Himpunan kosong
$\ni$	: Sehingga
$\in$	: Elemen atau anggota dari himpunan
$\exists$	: Terdapat
$\exists!$	: Terdapat dengan tunggal
$\odot$	: Operasi pergandaan (*Circle dot*)
$\oplus$	: Operasi penjumlahan (*Circle plus*)
$\mathbb{Z}_n$	: Himpunan bilangan bulat modulo
$\subset$ atau $\subseteq$	: Subset atau himpunan bagian
$\blacksquare$	: Akhir dari sebuah bukti
$\varphi: N \rightarrow N'$	: Pemetaan dari N ke N'
$\cap$	: Operasi irisan
$\cup$	: Operasi union
$\cong$	: φ isomorfik
$\equiv$	: Kongruensi

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Beberapa contoh struktur aljabar adalah grup, ring, dan modul. Grup merupakan struktur aljabar dengan satu operasi biner sedangkan ring adalah struktur aljabar dengan dua operasi biner dan modul merupakan gabungan struktur grup dan ring.

Dalam teori grup dan ring terdapat beberapa konsep yang dikembangkan, antara lain *Left Almost Semigroups* (LA-semigrup), *Left Almost Groups* (LA-grup), dan *Left Almost Ring* (LA-ring). Kazim dan Naseeruddin (1977) memperkenalkan LA-semigrup atau bisa juga disebut *Abel-Grassmann's Grupoid* (AG-grupoid) yang harus memenuhi hukum invertif kiri. Kemudian, Mushtaq dan Kamran (1996) memperkenalkan LA-grup sebagai bentuk khusus dari LA-semigrup yang sifat-sifatnya mendekati grup komutatif. Berdasarkan Yusuf (2006) yang mengembangkan konsep LA-grup dan LA-semigrup menjadi suatu konsep baru yang dikenal sebagai *Left Almost Ring* (LA-ring).

Selanjutnya berdasarkan Tariq Shah, dkk. (2011) yang menulis sebuah artikel yang berjudul *On Left Almost Modules* (LA-modul). Artikel tersebut membahas definisi, sifat-sifat dasar LA-modul, LA-submodul, LA-modul faktor, homomorfisma LA-modul), dan *direct sum* (hasil jumlah langsung). Pada artikel tersebut terdapat hal yang menarik untuk dibahas yaitu struktur LA-modul yang berbeda dengan modul. Oleh karena itu, pada Skripsi ini akan mengulas kembali mengenai LA-modul.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang dibahas pada Skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana sifat dasar pada LA-modul?
2. Bagaimana teorema pada LA-submodul dan LA-modul faktor?

3. Bagaimana teorema serta proposisi pada homomorfisma LA-modul?
4. Bagaimana teorema pada hasil jumlah langsung dari LA-submodul suatu LA-modul?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari Skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Membahas sifat dasar pada LA-modul.
2. Membahas dan membuktikan teorema pada LA-submodul dan LA-modul faktor.
3. Membahas dan membuktikan teorema serta proposisi pada homomorfisma LA-modul.
4. Membahas dan membutikan teorema pada hasil jumlah langsung dari LA-submodul suatu LA-modul.

BAB II
DASAR TEORI

Pada dasar teori ini dibahas beberapa definisi dan contoh yang digunakan sebagai dasar memahami *Left Almost Modules* (LA-modul) dan acuan dalam pembahasan.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, anggota dari himpunan tidak kosong dapat dikaitkan dengan operasi penjumlahan, operasi pergandaan atau beberapa operasi biner lainnya. Berikut ini diberikan definisi dari *cartesian product,* relasi, relasi ekuivalensi, pemetaan, dan operasi biner berdasarkan Battacharya, dkk. (1990), Andari (2015), dan Durbin (1992).

Definisi 2.1.1 (*Cartesian Product*)
Misalkan $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. Himpunan semua pasangan terurut (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$ disebut *cartesian product* dari himpunan A dan B, dinotasikan $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

Definisi 2.1.2 (Relasi)
Misalkan $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. R disebut sebagai relasi dari A ke B jika R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Serta R disebut relasi pada himpunan A jika R adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

Definisi 2.1.3 (Relasi Ekuivalensi)
Misalkan $R \neq \emptyset$ dan R adalah relasi pada himpunan X, R disebut relasi ekuivalensi jika memenuhi aksioma sebagai berikut.

i. Refleksif, $\forall x \in X$ berlaku $(x, x) \in R$,
ii. Simetris, $\forall x, y \in X$ jika $(x, y) \in R$, maka $(y, x) \in R$,
iii. Transitif, $\forall x, y, z \in X$ jika $(x, y) \in R$ dan $(y, z) \in R$, maka $(x, z) \in R$.

Jika R merupakan relasi ekuivalensi maka dapat dibentuk kelas ekuivalensi dari $a \in X$ yang merupakan himpunan semua anggota X yang berelasi R dengan a, dinotasikan sebagai $[a] = \{x \in X | aRx\}$

Contoh 2.1.4
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, jika R relasi pada $\mathbb{Z}$ didefinisikan

$$\begin{aligned} aRb &\Leftrightarrow a \equiv b(mod 4) \\ &\Leftrightarrow a - b = 4k, \\ &\forall a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

maka R merupakan suatu relasi ekuivalensi.

Bukti :
Akan ditunjukkan R memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif.

1. Refleksif, $\forall a \in \mathbb{Z}$ maka jelas $a \equiv a(mod\, 4)$, karena $\exists k \in \mathbb{Z}$, yaitu $k = 0, \ni a - a = 4 \cdot 0 = 0$.
2. Simetris, ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dimana $k \in \mathbb{Z}$ dengan $a \equiv b\ (mod\, 4)$, artinya $a - b = 4k$. Kemudian kalikan dengan (-1) diperoleh $b - a = -4k$, dengan kata lain $b \equiv a(mod\, 4)$.
3. Transitif, ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$

   $$a \equiv b(mod\, 4) \Leftrightarrow a - b = 4k, k \in \mathbb{Z}$$
   $$b \equiv c(mod\, 4) \Leftrightarrow b - c = 4l, l \in \mathbb{Z}$$

   Subtitusikan $b = c + 4l$ dalam persamaan sehingga diperoleh

   $$\begin{aligned} a - c &= a - (c + 4l) = 4k \\ a - c &= 4k + 4l \\ a - c &= 4(k + l), \end{aligned}$$

   maka dapat disimpulkan bahwa $a \equiv c(mod\, 4)$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti R adalah relasi ekuivalensi.

Kelas ekuivalensi dari R ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [a] &= \{x \in X | aRx\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} | a \equiv x(mod\, 4)\} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -4, 0, 4, 8, \dots\} \\ [1] &= \{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ [2] &= \{\dots, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ [3] &= \{\dots, -1, 3, 7, 11, \dots\} \end{aligned}$$

Kelas ekuivalensi secara umum dikenal sebagai anggota dari himpunan bilangan bulat modulo 4, $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)

Misalkan $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. Suatu relasi f dari A ke B disebut pemetaan jika $\forall a \in A, \exists!\, b \in B, \ni (a, b) \in f$. Pemetaan f dari A ke B, dinotasikan

$$f: A \to B$$
$$a \mapsto f(a) = b$$

Dengan kata lain, f adalah pemetaan jika $a = b$, maka $f(a) = f(b)$, $\forall a, b \in A$.

Pada pemetaan f dari A ke B, himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) dari f. Suatu pemetaan $f: A \to B$ disebut:

1. Pemetaan satu-satu (injektif), jika $\forall a, b \in A$ dengan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.
2. Pemetaan onto (surjektif), jika $\forall b \in B, \exists a \in A, \ni b = f(a)$.
3. Pemetaan bijektif, jika f injektif dan surjektif.

Contoh 2.1.6

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Jika didefinisikan suatu relasi f sebagai berikut.

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto f(x),$$

dengan $f(x) = x^2 + 3x + 4$, maka f adalah suatu pemetaan.

Bukti :

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, jika $a = b$, maka $a^2 = b^2$, sehingga

$$a^2 + 3 \cdot a + 4 = b^2 + 3 \cdot b + 4$$
$$f(a) = f(b)$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x \in \mathbb{Z}$. Jadi terbukti f adalah suatu pemetaan yang surjektif.

Definisi 2.1.7 (Operasi Biner)

Misalkan $S \neq \emptyset$. Suatu fungsi $*$ disebut operasi biner pada S, yaitu

$$\begin{aligned} *: S \times S &\to S \\ (a,b) &\mapsto a * b \in S \end{aligned}$$

Operasi biner menandakan sifat tertutup, yaitu $\forall a, b \in S$, berlaku $a * b \in S$.

2.2 Grupoid dan Semigrup

Grupoid adalah suatu himpunan yang disertai dengan satu operasi biner. Semigrup merupakan suatu struktur aljabar yang disertai dengan satu operasi biner dan memenuhi assosiatif. Berikut ini diberikan definisi grupoid berdasarkan Kandasamy (2002) dan semigrup berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.2.1 (Grupoid)
Misalkan $G \neq \emptyset$. G yang disertai dengan operasi biner $*$ disebut sebagai grupoid dan dinotasikan dengan $(G,*)$ sedemikian sehingga $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.

Contoh 2.2.2
Diberikan himpunan bilangan bulat dengan operasi pergandaan. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},\cdot)$ merupakan grupoid.

Bukti:
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}$. Karena $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z},\cdot)$ merupakan grupoid.

Definisi 2.2.3 (Semigrup)
Misalkan $S \neq \emptyset$ yang disertai dengan operasi biner $*$ dan dinotasikan $(S,*)$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma berikut:
1. Tertutup.
$$\forall a, b \in S, \exists! c \in S, a * b = c.$$
2. Assosiatif.
$$\forall a, b, c \in S, (a * b) * c = a * (b * c).$$

Contoh 2.2.4
Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup.

Bukti:

1. Tertutup.
   $\forall a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b \in \mathbb{N}$
2. Assosiatif.
   $\forall a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup.

2.3 Grup

Grup merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari grup, grup komutatif, subgrup dan koset berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.3.1 (Grup)
Misalkan $G \neq \emptyset$ yang disertai dengan operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut:

1. Tertutup.
   $\forall a, b \in G, \exists! c \in G, a * b = c.$
2. Assosiatif.
   $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c).$
3. Mempunyai elemen identitas.
   $\exists e \in G, \forall a \in G, e * a = a * e = a.$
4. Setiap elemen mempunyai invers.
   $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a * (a^{-1}) = a^{-1} * a = e.$

Contoh 2.3.2
Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.

Bukti:
Pada himpunan bulat berlaku sifat:

1. Tertutup.
   $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Assosiatif.
   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Memiliki elemen identitas.
   Elemen identitas dari $(\mathbb{Z}, +)$ adalah 0, karena $0 + a = a + 0 = a$.

4. Setiap elemen memiliki invers.
   Invers dari a adalah $-a$, karena $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Berdasarkan 1, 2, 3, dan 4, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup.

Contoh 2.3.3

Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ disertai dengan operasi biner $+$ merupakan grup. Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan grup.

Bukti:

Ambil $A, B, C \in K$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

i. Tertutup.

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

ii. Assosiatif.

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) \\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

iii. Mempunyai elemen identitas, yaitu $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Karena $E + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+a & 0+b \\ 0+c & 0+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{bmatrix} = A + E = E,$$ sehingga

$$E + A = A + E = E.$$

iv. Setiap elemen memiliki invers.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$, sehingga

$$A + (-A) = -A + A = E.$$

Definisi 2.3.4 (Grup Komutatif)

Suatu grup $(G,*)$ disebut grup komutatif (grup Abelian), jika $\forall a, b \in G$ berlaku hukum komutatif, yaitu $a * b = b * a$.

Contoh 2.3.5

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ grup komutatif.

Bukti :

Misalkan ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, maka berlaku $a + b = b + a$. Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup komutatif.

Definisi 2.3.6 (Subgrup)

Misalkan G adalah suatu grup dan $H \neq \emptyset, H \subseteq G$. H disebut subgrup dari G, jika H merupakan sebuah grup terhadap operasi biner yang sama dengan G.

Contoh 2.3.7

$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup. Akan ditunjukkan bahwa $(2\mathbb{Z}, +)$ dengan $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$.

Bukti:

Pada himpunan bilangan bulat berlaku sifat:

1. Tertutup.
   $\forall 2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$, maka $2a + 2b \in 2\mathbb{Z}$.
2. Assosiatif.
   $\forall 2a, 2b, 2c \in 2\mathbb{Z}$, maka berlaku
   $$(2a + 2b) + 2c = 2a + (2b + 2c).$$
3. Mempunyai elemen identitas, yaitu 0.
   Karena $0 + 2a = 2a + 0 = 2a$
4. Setiap elemen mempunyai invers.
   $\forall 2a \in 2\mathbb{Z}, \exists -2a \in 2\mathbb{Z}, \ni 2a + (-2a) = 2a - 2a = 0.$

Berdasarkan 1, 2, 3, dan 4, terbukti bahwa $(2\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$.

Teorema 2.3.8
Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup dan $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika $\forall a, b \in G$ berlaku:

1. $\forall a, b \in H, a * b \in H$.
2. $\forall a \in H, \exists a^{-1} \in H$.

Bukti:
$(\Rightarrow)$
Diketahui H adalah subgrup G. Akan dibuktikan ketentuan 1 dan 2. Karena H subgrup, berarti H merupakan grup, sehingga berlaku sifat tertutup, assosiatif, mempunyai elemen satuan dan setiap elemen mempunyai invers. Jadi ketentuan 1 dan 2 dipenuhi.
$(\Leftarrow)$
Diketahui berlaku ketentuan 1 dan 2. Akan dibuktikan H subgrup. Sifat tertutup telah dipenuhi oleh ketentuan 1. Sifat assosiatif dengan sendirinya dipenuhi karena semua elemen H juga elemen G. Mempunyai elemen identitas. Ambil $a \in H$, dari ketentuan 2, $a^{-1} \in H$. Sekarang ambil $a, a^{-1} \in H$. Karena $a, a^{-1} \in H$ dan berlaku sifat tertutup, maka $a * a^{-1} = e \in H$, sehingga diperoleh $e \in H$. Setiap elemen mempunyai invers dipenuhi oleh ketentuan 2.

Contoh 2.3.9
Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$.
Diberikan

$$K = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, K \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$L = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$M = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Akan ditunjukkan K, L, M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Bukti:

i. Ambil $A, B \in K$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K.$$

Selanjutnya ambil $A \in K$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, terdapat

$$-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K,$$

sehingga $A + (-A) = -A + A = E$. Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa K merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

ii. Ambil $A, B \in L$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ b + d & 0 \end{bmatrix} \in L.$$

Selanjutnya ambil $A \in L$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, terdapat

$$-A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in L,$$

sehingga $A + (-A) = -A + A = E$. Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa L merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

iii. Ambil $A, B \in M$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix} \in M.$$

Selanjutnya ambil $A \in M$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, terdapat

$$-A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \in M,$$

sehingga $A + (-A) = -A + A = E$. Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.3.10

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup dan $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. H merupakan merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika

$$\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H.$$

Bukti:

(⇒)

Diketahui H adalah subgrup G. Akan dibuktikan berlaku $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$. Jika H subgrup, maka Teorema 2.3.7 berlaku. Karena menurut Teorema 2.3.1 ketentuan 2, setiap elemen dari H mempunyai invers, sehingga jika $b \in H$, maka $b^{-1} \in H$. Selanjutnya menurut Teorema 2.3.7 ketentuan 1, berlaku $a, b^{-1} \in H, a * b^{-1} \in H$. Jadi, terbukti $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$.

(⇐)

Diketahui berlaku $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$. Akan dibuktikan H subgrup. Menurut ketentuan, berarti jika diambil $a, a^{-1} \in H$, maka $a * a^{-1} = e \in H$. Ambil e,$a \in H$, maka menurut ketentuan, berlaku $e * a^{-1} = a^{-1} \in H$. Demikian juga jika diambil

$$e, b \in H, e * b^{-1} = b^{-1} \in H,$$

sehingga $b \in H, b^{-1} \in H \ldots i)$. Selanjutnya jika $a, b^{-1} \in H$, maka $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H \ldots ii)$. Dari $i)$ dan $ii)$, menurut Teorema 2.3.7, maka H merupakan subgrup.

Contoh 2.3.11

Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$.

Diberikan

$$K = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, K \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$L = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$M = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

Akan ditunjukkan K, L, M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Bukti:

i. Ambil $A, B \in K$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K.$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa K merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

ii. Ambil $A, B \in L$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{bmatrix} \in L.$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa L merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

iii. Ambil $A, B \in M$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{bmatrix} \in M.$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa M merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.3.12 (Koset)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $a \in G$ dan H adalah suatu subgrup dari $G, \forall a \in G$,

1. $a * H = \{a * h | h \in H\}$, disebut koset kiri relatif terhadap H.
2. $H * a = \{h * a | h \in H\}$, disebut koset kanan relatif terhadap H.

Contoh 2.3.13

Diketahui $(\mathbb{Z}, +)$ grup dan $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$. Akan ditentukan banyaknya koset di $\mathbb{Z}$ relatif terhadap $2\mathbb{Z}$.

Bukti:

$0 + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$

$1 + 2\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$2 + 2\mathbb{Z} = \{0 \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} = 2\mathbb{Z}$

$3 + 2\mathbb{Z} = 1 + 2\mathbb{Z}$

dan seterusnya, sehingga banyaknya koset ada 2 yaitu $2\mathbb{Z}$ dan $1 + 2\mathbb{Z}$.

2.4 Ring

Ring merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh ring berdasarkan Whitelaw (1995), Battacharya dkk. (1990), Fraleigh (1944), dan Andari (2014).

Definisi 2.4.1 (Ring)
Misalkan $R \neq \emptyset$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner, misalkan terhadap penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. R disebut ring jika memenuhi aksioma berikut:
1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.
2. $(R, \cdot)$ merupakan semigrup.
3. Berlaku hukum distributif, $\forall a, b, c \in R$, berlaku
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Jika dalam pergandaan, $\forall a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$, maka R disebut ring komutatif.

Contoh 2.4.2
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring.

Bukti:
Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring dengan memenuhi aksioma berikut.
1. $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif.
   Berdasarkan Contoh 2.3.4, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup komutatif.
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ adalah semigrup.
   i. Tertutup.
      $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.
   ii. Assosiatif.
      $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Memenuhi hukum distributif.
   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku
   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring.

4. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$, sehingga $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif.

Contoh 2.4.3

Diberikan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real, yaitu

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ berlaku

1. $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan grup komutatif
   Berdasarkan Contoh 2.3.3, $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan grup komutatif.
2. $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ merupakan semigrup.
   i. Tertutup
   $$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$
   ii. Assosiatif.
   $$\begin{aligned}
   &(A \cdot B) \cdot C \\
   &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} (ae + bg)p + (af + bh)r & (ae + bg)q + (af + bh)s \\ (ce + dg)p + (cf + dh)r & (ce + dg)q + (cf + dh)s \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} aep + bgp + afr + bhr & aeq + bgq + afs + bhs \\ cep + dgp + cfr + dhr & ceq + dgq + cfs + dhs \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ep + fr & eq + fs \\ gp + hr & gq + hs \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \right) \\
   &= A \cdot (B \cdot C)
   \end{aligned}$$
   sehingga $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
3. Berlaku hukum distributif.
   a. Distributif kanan.
   $$A \cdot (B + C)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e+p & f+q \\ g+r & h+s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a(e+p)+b(g+r) & a(f+q)+b(h+s) \\ c(e+p)+d(g+r) & c(f+q)+d(h+s) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+ap+bg+br & af+aq+bh+bs \\ ce+cp+dg+dr & cf+cq+dh+ds \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+(ap+bg)+br & af+(aq+bh)+bs \\ ce+(cp+dg)+dr & cf+(cq+dh)+ds \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+(bg+ap)+br & af+(bh+aq)+bs \\ ce+(dg+cp)+dr & cf+(dh+cq)+ds \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+bg+ap+br & af+bh+aq+bs \\ ce+dg+cp+dr & cf+dh+cq+ds \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= A \cdot B + A \cdot C$$

b. Distributif kiri.

$$(A+B) \cdot C$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (a+e)p+(b+f)r & (a+e)q+(b+f)s \\ (c+g)p+(d+h)r & (c+g)q+(d+h)s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+ep+br+fr & aq+eq+bs+fs \\ cp+gp+dr+hr & cq+gq+ds+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+(ep+br)+fr & aq+(eq+bs)+fs \\ cp+(gp+dr)+hr & cq+(gq+ds)+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+br+ep+fr & aq+bs+eq+fs \\ cp+dr+gp+hr & cq+ds+gq+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ep+fr & eq+fs \\ gp+hr & gq+hs \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$= A \cdot C + B \cdot C$$

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring.

4. $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tidak berlaku $A \cdot B = B \cdot A$.
   Karena

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}$$

   sehingga $A \cdot B \neq B \cdot A$. Jadi, $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ bukan merupakan ring komutatif.

Definisi 2.4.4 (Ring dengan Elemen Identitas)

Misalkan $R \neq \emptyset$ yang dilengkapi dua operasi biner. $(R, +, \cdot)$ merupakan suatu ring.

- Jika $\exists 1_R \in R, \ni \forall a \in R, 1_R \cdot a = a$, maka 1_R disebut elemen identitas kiri.
- Jika $\exists 1_R \in R, \ni \forall a \in R, a \cdot 1_R = a$, maka 1_R disebut elemen identitas kanan.
- Jika $\exists 1_R \in R, \ni \forall a \in R, 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$, maka 1_R disebut elemen identitas.

Contoh 2.4.5

Berdasarkan Contoh 2.4.2, akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identias.

Bukti:

Elemen identitas dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah 1.

Karena $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{Z}$, sehingga $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identitas.

Contoh 2.4.6

Berdasarkan Contoh 2.4.3, akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identitas.

Bukti:

Elemen identitas dari $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ adalah $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Karena $E \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dan

$A \cdot E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

sehingga $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen identitas.

2.5 Modul

Modul merupakan suatu struktur aljabar yang menggabungkan struktur grup dan ring. Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan modul berdasarkan Battacharya, dkk. (1990) dan Andari (2015).

Definisi 2.5.1 (Modul Kiri)

Misalkan $(M, +)$ adalah suatu grup komutatif dan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Serta diberikan pula operasi biner,

$$*: R \times M \to M$$
$$(r, m) \mapsto *(r, m) = r * m.$$

Himpunan M disebut modul kiri atas R, atau ditulis $M: R-$modul kiri, jika memenuhi ketiga aksioma berikut:

1. $r * (m_1 + m_2) = r * m_1 + r * m_2$,
2. $(r_1 + r_2) * m = r_1 * m + r_2 * m$,
3. $(r_1 \cdot r_2) * m = r_1 \cdot (r_2 * m)$,

$\forall\, r, r_1, r_2 \in R, \forall\, m, m_1, m_2 \in M$.

Contoh 2.5.2

Diberikan himpunan vektor di $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks vertikal dan ring berupa himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Diberikan pula operasi biner

$$\cdot : M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right) \mapsto \cdot \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ai + bj \\ ci + dj \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}^2, +)$ merupakan grup komutatif.

a. Tertutup

Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$, berlaku

$$P + Q = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i + k \\ j + l \end{bmatrix}$$

Karena $i, j, k, l \in \mathbb{R}, \ni i + k, j + l \in \mathbb{R}$. Jadi, $\begin{bmatrix} i + k \\ j + l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$.

b. Assosiatif

Ambil sebarang $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, yaitu

$P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned}(P + Q) + R &= \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i + k \\ j + l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (i + k) + m \\ (j + l) + n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i + (k + m) \\ j + (l + n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + m \\ l + n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}\right) \\ &= P + (Q + R)\end{aligned}$$

sehingga $(P + Q) + R = P + (Q + R)$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$.

c. Elemen identitas adalah $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Karena $E + P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + i \\ 0 + j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$.

$$P + E = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i + 0 \\ j + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix},$$

sehingga $E + P = P + E = P$.

d. Setiap elemen mempunyai invers.

Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Invers dari $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ adalah $-P = \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix}$, karena $P + (-P) = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e. Komutatif.

Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned} P + Q &= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (i + k) \\ (j + l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (k + i) \\ (l + j) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\ &= Q + P \end{aligned}$$

sehingga $P + Q = Q + P$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi, dengan menggunakan sifat pergandaan matriks dengan vektor:

1. Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned} A \cdot (P + Q) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i + k \\ j + l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(i + k) + b(j + l) \\ c(i + k) + d(j + l) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} ai + (ak + bj) + bl \\ ci + (ck + dj) + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + (bj + ak) + bl \\ ci + (dj + cj) + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj + ak + bl \\ ci + dj + ck + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj \\ ci + dj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ak + bl \\ ck + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$
$$= A \cdot P + A \cdot Q$$

2. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku

$$(A + B) \cdot P = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (a + e)i + (b + f)j \\ (c + g)i + (d + h)j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + (ei + bj) + fj \\ ci + (gi + dj) + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj + ei + fj \\ ci + dj + gi + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ai + bj \\ ci + bj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ei + fj \\ gi + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

3. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku

$$(A \cdot B) \cdot P = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae+bg)i + (af+bh)j \\ (ce+dg)i + (cf+dh)j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei + (bgi + afj) + bhj \\ cei + (dgi + cfj) + dhj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei + afj + bgi + bhj \\ cei + cfj + dgi + dhj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ei + fj \\ gi + hj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)$$
$$= A \cdot (B \cdot P)$$
Jadi, dapat disimpulkan dari uraian dia atas bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Definisi 2.5.3 (Modul Kanan)

Misalkan $(M, +)$ adalah suatu grup komutatif dan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Serta diberikan pula operasi biner,

$$*: M \times R \to M$$
$$(m, r) \mapsto * (m, r) = m * r.$$
Himpunan M disebut modul kanan atas R, atau biasa ditulis $M : R -$ modul kanan, jika memenuhi ketiga aksioma pergandaan berikut:

1. $(m_1 + m_2) * r = m_1 * r + m_2 * r$,
2. $m * (r_1 + r_2) = m * r_1 + m * r_2$,
3. $m * (r_1 \cdot r_2) = (m * r_1) \cdot r_2$,

$\forall\, r, r_1, r_2 \in R, \forall\, m, m_1, m_1 \in M$.

Contoh 2.5.4

Diberikan himpunan vektor di $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks horizontal. dan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$
Diberikan pula operasi biner

$$\cdot : M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\left([i \quad j], \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \mapsto \cdot \left([i \quad j], \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= [ia + jc \quad ib + jd].$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}^2, +)$ merupakan grup komutatif.

a. Tertutup.
Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j], Q = [k \quad l]$, berlaku

$$\begin{aligned} P + Q &= [i \quad j] + [k \quad l] \\ &= [i + k \quad j + l] \end{aligned}$$

Karena $i, j, k, l \in \mathbb{R}$, $i + j, k + l \in \mathbb{R}$,
Sehingga $[i + k \quad j + l] \in \mathbb{R}^2$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$.

b. Assosiatif.
Ambil sebarang $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, yaitu $x = [i \quad j], y = [k \quad l]$, dan $z = [m \quad n]$, berlaku.

$$\begin{aligned} (P + Q) + R &= ([i \quad j] + [k \quad l]) + [m \quad n] \\ &= [i + k \quad j + l] + [m \quad n] \\ &= [i + (k + m) \quad j + (l + n)] \\ &= [i \quad j] + [k + m \quad l + n] \\ &= [i \quad j] + ([k \quad l] + [m \quad n]) \\ &= P + (Q + R) \end{aligned}$$

sehingga $(P + Q) + R = P + (Q + R)$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$.

c. Elemen identitas adalah $E = [0 \quad 0]$.
Karena $E + P = [0 \quad 0] + [i \quad j] = [0 + i \quad 0 + j] = [i \quad j]$

d. Setiap elemen mempunyai invers.
Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j]$. Invers dari $P = [i \quad j]$ adalah $-P = [-i \quad -j]$, karena

$$P + (-P) = [i \quad j] + [-i \quad -j] = [0 \quad 0].$$

e. Komutatif.
Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = [i \quad j], Q = [k \quad l]$, berlaku

$$\begin{aligned} P + Q &= [i \quad j] + [k \quad l] \\ &= [(i + k) \quad (j + l)] \\ &= [k + i \quad l + j] \\ &= [k \quad l] + [i \quad j] \\ &= Q + P \end{aligned}$$

sehingga $P+Q=Q+P$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall P,Q\in\mathbb{R}^2$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi dengan menggunakan sifat pergandaan matriks dengan vektor:

1. Ambil sebarang $P,Q\in\mathbb{R}^2$, yaitu $P=[i \quad j], Q=[k \quad l]$. Ambil sebarang $A\in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, berlaku
$$\begin{aligned}
&(P+Q)\cdot A\\
&=([i \quad j]+[k \quad l])\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\\
&=[i+k \quad j+l]\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\\
&=[(i+k)\cdot a+(j+l)\cdot c \quad (i+k)\cdot b+(j+l)\cdot d]\\
&=[ia+(ka+jc)+lc \quad ib+(kb+jd)+ld]\\
&=[ia+jc+ka+lc \quad ib+jd+kb+ld]\\
&=[ia+jc \quad ib+jd]+[ka+lc \quad kb+ld]\\
&=[i \quad j]\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+[k \quad l]\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\\
&=P\cdot A+Q\cdot A
\end{aligned}$$

2. Ambil sebarang $P\in\mathbb{R}^2$, yaitu $P=[i \quad j]$. Ambil sebarang $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku
$$\begin{aligned}
&P\cdot(A+B)\\
&=[i \quad j]\cdot\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\\
&=[i\cdot(a+e)+j\cdot(c+g) \quad i\cdot(b+f)+j\cdot(d+h)]\\
&=[ia+(ie+jc)+jg \quad ib+(if+jd)+jh]\\
&=[ia+jc+ie+jg \quad ib+jd+if+jh]\\
&=[ia+jc \quad ib+jd]+[ie+jg \quad if+jh]\\
&=[i \quad j]\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+[i \quad j]\cdot\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\\
&=P\cdot A+P\cdot B
\end{aligned}$$

3. Ambil sebarang $P\in\mathbb{R}^2$, yaitu $P=[i \quad j]$. Ambil sebarang $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku
$$P\cdot(A\cdot B)$$

$$= [i \quad j] \cdot \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right)$$
$$= [i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$
$$= [i(ae + bg) + j(ce + dg) \quad i(af + bh) + j(cf + dh)]$$
$$= [iae + (ibg + jce) + jdg \quad iaf + (ibh + jcf) + jdh]$$
$$= [iae + jce + ibg + jdg \quad iaf + jcf + ibh + jdh]$$
$$= [ia + jc \quad ib + jd] \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= \left([i \quad j] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= (P \cdot A) \cdot B$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian dia atas bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2 -$ modul kanan.

Definisi 2.5.5 (Bimodul)

Misalkan $(M, +)$ adalah suatu grup komutatif dan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring. Jika M adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas R, maka M disebut bimodul.

Untuk mempermudah penulisan, pembahasan mengenai modul di skripsi ini mengacu kepada bimodul dan ditulis sebagai modul.

Contoh 2.5.6

Misalkan $\mathbb{Z}_5$ adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas ring $\mathbb{Z}$. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_5 : \mathbb{Z}$ −bimodul.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tabel 2.2 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$.

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x} = a + 6k_1$, $\bar{y} = b + 6k_2$ dan $\bar{z} = c + 6k_3$ berlaku:

a. Tertutup.
   Pada Tabel 2.1 terlihat bahwa $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$.
   $$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &= (a + 5k_1) + (b + 5k_2) \\ &= (a + b) + 5(k_1 + k_2)\,,\ k_{1,}k_2 \in \mathbb{Z} \\ &= \bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_5 \end{aligned}$$
b. Assosiatif.
   $$\begin{aligned} (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \big((a + 5k_1) + (b + 5k_2)\big) + (c + 5k_3) \\ &= (a + b + c) + 5(k_1 + k_2 + k_3)\,,\ k_{1,}k_2, k_3 \in \mathbb{Z} \\ &= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \\ \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) &= (a + 5k_1) + \big((b + 5k_2) + (c + 5k_3)\big) \\ &= (a + b + c) + 5(k_1 + k_2 + k_3)\,,\ k_{1,}k_2, k_3 \in \mathbb{Z} \\ &= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \end{aligned}$$
   sehingga $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$.
c. Elemen identitas adalah $e = \bar{0}$.
   Misalkan $\bar{e} = 0 + 5k_4$, maka $\bar{x} + \bar{e} = \bar{e} + \bar{x} = \bar{x}$
   $$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{e} &= (a + 5k_1) + (0 + 5k_4) \\ &= (a + 0) + 5(k_1 + k_4)\,,\ k_{1,}k_4 \in \mathbb{Z} \\ &= \bar{x} + \bar{e} \\ &= \bar{x} \end{aligned}$$
d. Setiap elemen mempunyai invers. Pada Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa:
   Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
   Invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$, karena $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$
   Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$, karena $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$
   Invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$, karena $\bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$
   Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$, karena $\bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$

e. Komutatif.

$$\begin{aligned}\bar{x}+\bar{y} &= (a+6k_1)+(b+6k_2)\\ &= a+6k_1+b+6k_2\ ,\ k_{1,}k_2\in\mathbb{Z}\\ &= b+6k_2+a+6k_1\\ &= \bar{y}+\bar{x}\end{aligned}$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.1.

1. $r\cdot(m_1+m_2)=r\cdot m_1+r\cdot m_2$.

   Ambil sebarang $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{Z}_5$ dan $r\in\mathbb{Z}$, yaitu $\bar{x}=a+5k_1,\bar{y}=b+5k_2$, berlaku

$$\begin{aligned}r\cdot(x+y) &= r\cdot\big((a+5k_1)+(b+5k_2)\big)\\ &= r\cdot(a+5k_1)+r\cdot(b+5k_2)\\ &= (ra+r5k_1)+(rb+r5k_2)\\ &= r(a+5k_1)+r(b+5k_2)\\ &= r\cdot\bar{x}+r\cdot\bar{y}\end{aligned}$$

2. $(r_1+r_2)\cdot m=r_1\cdot m+r_2\cdot m$.

   Ambil sebarang $r_1,r_2\in\mathbb{Z}$ dan $\bar{x}\in\mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x}=a+5k_1$, berlaku

$$\begin{aligned}(r_1+r_2)\cdot\bar{x} &= (r_1+r_2)\cdot(a+5k_1)\\ &= (r_1+r_2)\cdot a+(r_1+r_2)\cdot 5k_1\\ &= r_1a+r_2a+r_1 5k_1+r_2 5k_1\\ &= (r_1a+r_1 5k_1)+(r_2a+r_2 5k_1)\\ &= r_1(a+5k_1)+r_2(a+5k_1)\\ &= r_1\cdot\bar{x}+r_2\cdot\bar{x}\end{aligned}$$

3. $(r_1\cdot r_2)\cdot m=r_1\cdot(r_2\cdot m)$.

   Ambil sebarang $r_1,r_2\in\mathbb{Z}$ dan $\bar{x}\in\mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x}=a+5k_1$, berlaku

$$\begin{aligned}(r_1\cdot r_2)\cdot\bar{x} &= (r_1\cdot r_2)\cdot(a+5k_1)\\ &= (r_1\cdot r_2)\cdot a+(r_1\cdot r_2)\cdot 5k_1\\ &= r_1r_2a+r_1r_2 5k_1\\ &= r_1(r_2a+r_2 5k_1)\\ &= r_1(r_2(a+5k_1))\\ &= r_1\cdot(r_2\cdot\bar{x})\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_5:\mathbb{Z}-$ modul kiri.

iii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.3.

1. $(m_1+m_2)\cdot r=m_1\cdot r+m_2\cdot r$.

Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$ dan $r \in \mathbb{Z}$, yaitu $\bar{x} = a + 5k_1, \bar{y} = b + 5k_2$, berlaku

$$
\begin{aligned}
(\bar{x} + \bar{y}) \cdot r &= \big((a + 5k_1) + (b + 5k_2)\big) \cdot r \\
&= (ar + 5k_1 r) + (br + 5k_2 r) \\
&= (a + 5k_1) \cdot r + (b + 5k_2) \cdot r \\
&= \bar{x} \cdot r + \bar{y} \cdot r
\end{aligned}
$$

2. $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$.
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x} = a + 5k_1$, berlaku

$$
\begin{aligned}
\bar{x} \cdot (r_1 + r_2) &= (a + 5k_1) \cdot (r_1 + r_2) \\
&= ar_1 + (ar_2 + 5k_1 r_1) + 5k_1 r_2 \\
&= ar_1 + 5k_1 r_1 + ar_2 + 5k_1 r_2 \\
&= (ar_1 + 5k_1 r_1) + (ar_2 + 5k_1 r_2) \\
&= (a + 5k_1) \cdot r_1 + (a + 5k_1) \cdot r_2 \\
&= \bar{x} \cdot r_1 + \bar{x} \cdot r_2
\end{aligned}
$$

3. $m \cdot (r_1 \cdot r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$.
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$, yaitu $\bar{x} = a + 5k_1$, berlaku

$$
\begin{aligned}
\bar{x} \cdot (r_1 \cdot r_2) &= (a + 5k_1) \cdot (r_1 \cdot r_2) \\
&= a \cdot (r_1 \cdot r_2) + 5k_1 \cdot (r_1 \cdot r_2) \\
&= ar_1 r_2 + 5k_1 r_1 r_2 \\
&= (ar_1 + 5k_1 r_1) r_2 \\
&= ((a + 5k_1) r_1) r_2 \\
&= (\bar{x} \cdot r_1) \cdot r_2
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathbb{Z}_5 : \mathbb{Z} -$ modul kanan.

Dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $\mathbb{Z}_5 : \mathbb{Z} -$ bimodul.

Jika ring pada modul merupakan ring dengan elemen satuan, maka dapat dimunculkan suatu definisi baru.

Contoh 2.5.7

Diberikan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Didefinisikan pemetaan

$$
\begin{aligned}
&\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
&(r, a + ib) \mapsto \cdot (r, a + ib) = r \cdot (a + ib) = ra + rib. \\
&\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\
&(a + ib, r) \mapsto \cdot (a + ib, r) = (a + ib) \cdot r = ar + ibr.
\end{aligned}
$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{C} : \mathbb{R} -$ bimodul.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{C}, +)$ merupakan grup komutatif.
Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$, $y = c + id$ dan $z = e + if$ berlaku:

a. Tertutup.

$$\begin{aligned} x + y &= (a + ib) + (c + id) \\ &= (a + c) + i(b + d) \\ &= x + y \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

b. Assosiatif.

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \big((a + ib) + (c + id)\big) + (e + if) \\ &= \big((a + c) + i(b + d)\big) + (e + if) \\ &= (a + c + e) + i(b + d + f) \\ x + (y + z) &= (a + ib) + \big((c + id) + (e + if)\big) \\ &= (a + ib) + \big((c + e) + i(d + f)\big) \\ &= (a + c + e) + i(b + d + f) \end{aligned}$$

sehingga $(x + y) + z = x + (y + z)$.

c. Elemen identitas adalah $e = 0 + i0$.
Misalkan $e = 0 + i0$, sehingga $x + e = e + x = x$.

$$\begin{aligned} x + e &= (a + ib) + (0 + i0) \\ &= (a + 0) + i(b + 0) \\ &= (0 + a) + i(0 + b) = (a + ib) \end{aligned}$$

d. Setiap elemen mempunyai invers.
Invers dari $x = a + ib$ adalah $-x = -(a + ib)$, karena

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (a + ib) + \big(-(a + ib)\big) \\ &= (a + ib) - (a + ib) \\ &= (a - a) + i(b - b) \\ &= 0 + i0 \end{aligned}$$

e. Komutatif.

$$\begin{aligned} x + y &= (a + ib) + (c + id) \\ &= (a + c) + i(b + d) \\ &= (c + a) + i(d + b) \\ &= (c + id) + (a + ib) \\ &= y + x \end{aligned}$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.1.

1. $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$.

   Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$ dan $r \in \mathbb{R}$, yaitu $x = a + ib, y = c + id$ dan $r = p + iq$ berlaku

$$
\begin{aligned}
r \cdot (x + y) &= r \cdot \big((a + ib) + (c + id)\big) \\
&= r \cdot \big((a + c) + i(b + d)\big) \\
&= r \cdot (a + c) + r \cdot i(b + d) \\
&= ra + rc + rib + rid \\
&= ra + rib + rc + rid \\
&= r \cdot (a + ib) + r \cdot (c + id) \\
&= r \cdot x + r \cdot y
\end{aligned}
$$

2. $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$.

   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku

$$
\begin{aligned}
(r_1 + r_2) \cdot x &= (r_1 + r_2) \cdot (a + ib) \\
&= r_1 a + r_1 ib + r_2 a + r_2 ib \\
&= r_1 \cdot (a + ib) + r_2 \cdot (a + ib) \\
&= r_1 \cdot x + r_2 \cdot x
\end{aligned}
$$

3. $(r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$.

   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku

$$
\begin{aligned}
(r_1 \cdot r_2) \cdot x &= (r_1 \cdot r_2) \cdot (a + ib) \\
&= r_1 r_2 a + r_1 r_2 ib \\
&= r_1 \cdot (r_2 a + r_2 ib) \\
&= r_1 \cdot (r_2 \cdot (a + ib) \\
&= r_1 \cdot (r_2 \cdot x)
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ modul kiri.

iii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi untuk Definisi 2.5.3.

1. $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$.

   Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$ dan $r \in \mathbb{R}$, yaitu $x = a + ib, y = c + id$ dan $r = p + iq$ berlaku

$$
\begin{aligned}
(x + y) \cdot r &= \big((a + ib) + (c + id)\big) \cdot r \\
&= \big((a + c) + i(b + d)\big) + r \\
&= (a + c) \cdot r + i(b + d) \cdot r
\end{aligned}
$$

$$= ar + cr + ibr + idr$$
$$= ar + ibr + cr + idr$$
$$= (a + ib) \cdot r + (c + id) \cdot r$$
$$= x \cdot r + y \cdot r$$

2. $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$.
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku
   $$x \cdot (r_1 + r_2) = (a + ib) \cdot (r_1 + r_2)$$
   $$= ar_1 + ar_2 + ibr_1 + ibr_2$$
   $$= ar_1 + ibr_1 + ar_2 + ibr_2$$
   $$= (a + ib) \cdot r_1 + (a + ib) \cdot r_2$$
   $$= x \cdot r_1 + x \cdot r_2$$
3. $m \cdot (r_1 \cdot r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$.
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{C}$, yaitu $x = a + ib$ berlaku
   $$x \cdot (r_1 \cdot r_2) = (a + ib) \cdot (r_1 \cdot r_2)$$
   $$= ar_1 r_2 + ibr_1 r_2$$
   $$= (ar_1 + ibr_1) \cdot r_2$$
   $$= ((a + ib) \cdot r_1) \cdot r_2$$
   $$= (x \cdot r_1) \cdot r_2$$

   Jadi, $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ modul kanan.

Dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ bimodul.

Jika ring pada modul merupakan ring dengan elemen satuan, maka dapat dimunculkan suatu definisi baru.

Definisi 2.5.8 (Modul Uniter Kiri)

Misalkan $M: R -$ modul dan R adalah ring dengan elemen satuan. Modul M disebut modul uniter kiri jika $\forall m \in M$, berlaku $1_R * m = m$, dengan 1_R merupakan elemen satuan di R.

Contoh 2.5.9

Berdasarkan Contoh 2.5.2, himpunan $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks vertikal dengan $1_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan suatu modul uniter kiri dengan ring $M_2(\mathbb{R})$ dan operasi pergandaan bilangan riil.

Definisi 2.5.10 (Modul Uniter Kanan)
Misalkan $M: R-$ modul dan R adalah ring dengan elemen satuan. Modul M disebut modul uniter kiri jika $\forall m \in M$, berlaku $m * 1_R = m$, dengan 1_R merupakan elemen satuan di R.

Contoh 2.5.11
Berdasarkan Contoh 2.5.4, himpunan $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks horizontal dengan $1_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan suatu modul uniter kanan dengan ring $M_2(\mathbb{R})$ dan operasi pergandaan bilangan riil.

Conttoh 2.5.12
Berdasarkan Contoh 2.5.6, himpunan $\mathbb{Z}_5$ merupakan suatu bimodul uniter dengan ring $\mathbb{Z}$ dan operasi pergandaan bilangan bulat.

Definisi 2.5.13 (Submodul)
Misalkan $M: R-$modul (M adalah modul atas ring R). $N \subseteq M, N \neq \emptyset$. Himpunan N disebut submodul dari M jika memenuhi:

a. $(N, +)$ merupakan subgrup dari $(M, +)$,
b. $\forall r \in R, \forall n \in N, rn \in N$.

Contoh 2.5.14
Misalkan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.
Diberikan $L = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, L \subseteq M_2(\mathbb{R})$.
Akan ditunjukkan L merupakan submodul dari M.

Bukti:
Ambil $A, B \in L$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh
$$A - B = \begin{bmatrix} a - c & 0 \\ b - d & 0 \end{bmatrix} \in L.$$
Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa L merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{R})$.

Selanjutnya ambil $A \in L$ dan $R \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, diperoleh

$$R \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bf & 0 \\ ce + df & 0 \end{bmatrix} \in L.$$

Karena L subgrup dan $RA \in L$, maka L merupakan submodul dari $M_2(\mathbb{R})$.

Lemma 2.5.15

Misalkan $M: R-$ modul (M adalah modul atas ring R), dan $N \subseteq M$. N disebut submodul dari modul M jika dan hanya jika memenuhi:

i. $0 \in N$,
ii. $\forall n_1, n_2 \in N, n_1 - n_2 \in N$,
iii. $\forall n \in N, \forall r \in R, rn \in N$.

Bukti:

(⇒)

Diketahui N submodul dari modul M. Akan dibuktikan: N memenuhi i. ii. iii. Karena N adalah submodul dari M, maka berdasarkan Definisi 2.5.5 (a), $(N, +)$ merupakan subgrup dari $(M, +)$, sehingga jelas (i) dan (ii) dipenuhi. Kemudian karena N adalah submodul dari M, maka menurut Definisi 2.5.5 (b), berarti memenuhi (iii).

(⇐)

Diketahui: berlaku (i), (ii), (iii). Akan dibuktikan: N submodul dari modul M. Dari (i), $0 \in N$ dan (ii), $(\forall n_1, n_2 \in N), n_1 - n_2 \in N$, artinya N adalah subgrup M. Kemudian dari (iii), berarti memenuhi Definisi 2.5.5 bagian (b). Jadi terbukti N merupakan submodul dari modul M.

Definisi 2.5.16 (Ideal modul)

Misalkan M adalah suatu modul dan N adalah subset tak kosong dari M. N disebut ideal kiri jika memenuhi:

1. $\forall a, b \in N$ berlaku $a - b \in N$,
2. $\forall a \in N, \forall r \in M$ berlaku $ra \in N$.

M disebut ideal kanan jika memenuhi:

1. $\forall a, b \in N$ berlaku $a - b \in N$,

2. $\forall a \in N, \forall r \in M$ berlaku $ar \in N$.

N disebut ideal dua sisi jika N merupakan ideal kiri dan kanan.

Contoh 2.5.17

Diketahui $\mathbb{Z}:\mathbb{Z}-$modul. Ambil $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Dapat ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}:\mathbb{Z}-$ modul.

Bukti:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ dan $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$. Ambil sebarang $a, b \in 2\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$. Untuk $a = 2k_1$ dan $b = 2k_2$ dimana $k_1, k_2 \in 2\mathbb{Z}$ berlaku:

1. $a - b = 2k_1 - 2k_2 = 2(k_1 - k_2) \in 2\mathbb{Z}$.
2. $a \cdot r = 2k_1 \cdot r = r \cdot 2k_1 = r \cdot a \in 2\mathbb{Z}$.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $2Z$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.5.18 (Elemen Identitas pada Modul)

Suatu elemen e dalam modul M disebut elemen identitas pada M jika $e * a = a * e = a, \forall a \in R$.

Definisi 2.5.19 (Modul Faktor)

Misalkan $M{:}R-$ modul dan N merupakan submodul dari M. M/N adalah himpunan koset-koset dari N di M, terhadap operasi penjumlahan, M/N merupakan modul dan disebut sebagai modul faktor. $M/N = \{a + N, b + N, c + N, \dots\}, a, b, c, \dots \in M$.

Didefinisikan:

$$(a + N) + (b + N) = (a + b) + N,$$
$$r(a + N) = ra + N, r \in R.$$

Dengan operasi seperti di atas, M/N disebut modul faktor atau *quotient modul*.

Contoh 2.5.20

Diketahui $\mathbb{Z}:\mathbb{Z}-$ modul dan $2\mathbb{Z}$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ merupakan modul faktor.

Bukti:

Koset-koset yang berada di $\mathbb{Z}$ adalah $2\mathbb{Z}$ dan $1+2\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ merupakan modul. Pertama akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

Tabel 2.3 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$+$	$2\mathbb{Z}$	$1+2\mathbb{Z}$
$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	$1+2\mathbb{Z}$
$1+2\mathbb{Z}$	$1+2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$

i. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, merupakan grup komutatif
   a. Tertutup.
      Pada Tabel 2.3 terlihat bahwa $\forall a+2\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ berlaku $a+b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   b. Assosiatif.
      Ambil $x, y, z \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $x = 2\mathbb{Z}, y = 1+2\mathbb{Z}, z = 2\mathbb{Z}$ berlaku
      $$\begin{aligned}(x+y)+z &= \big(2\mathbb{Z}+(1+2\mathbb{Z})\big)+2\mathbb{Z}\\ &= (1+2\mathbb{Z})+2\mathbb{Z} = 1+2\mathbb{Z}\\ x+(y+z) &= 2\mathbb{Z}+((1+2\mathbb{Z})+2\mathbb{Z})\\ &= 2\mathbb{Z}+(1+2\mathbb{Z}) = 1+2\mathbb{Z}\end{aligned}$$
      sehingga $(x+y)+z = x+(y+c)$.
   c. Elemen identitas adalah $e = 2\mathbb{Z}$. Karena berlaku
      $$e+x = x+e = x$$
      $$2\mathbb{Z}+(1+2\mathbb{Z}) = (1+2\mathbb{Z})+2\mathbb{Z} = 1+2\mathbb{Z}$$
      $$2\mathbb{Z}+2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$$
   d. Setiap elemen mempunyai invers.
      Pada Tabel 2.3 dapat dilihat bahwa, invers dari $2\mathbb{Z}$ adalah $2\mathbb{Z}$, karena $2\mathbb{Z}+2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. Invers dari $1+2\mathbb{Z}$ adalah $1+2\mathbb{Z}$, karena $(1+2\mathbb{Z})+(1+2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$.
   e. Berlaku sifat komutatif
      Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$., yaitu $x = 2\mathbb{Z}, y = 1+2\mathbb{Z}$.
      $$\begin{aligned}x+y &= 2\mathbb{Z}+(1+2\mathbb{Z})\\ &= (1+2\mathbb{Z})+2\mathbb{Z}\\ &= 1+2\mathbb{Z}\end{aligned}$$
      Berdasarkan i, ii, iii, iv, dan v terbukti bahwa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

ii. Akan ditunjukkan bahwa ketiga aksioma dipenuhi.
   a. $r[(a+2\mathbb{Z})+(b+2\mathbb{Z})] = r[(a+b)+2\mathbb{Z}]$

$$= [r(a+b) + 2\mathbb{Z}$$
$$= (ra + rb) + 2\mathbb{Z}$$
$$= (ra + 2\mathbb{Z}) + (rb + 2\mathbb{Z})$$
$$= r(a + 2\mathbb{Z}) + r(b + 2\mathbb{Z})$$

b. $(r_1 + r_2)(a + 2\mathbb{Z}) = (r_1 + r_2)a + 2\mathbb{Z}$
$$= (r_1 a + r_2 a) + 2\mathbb{Z}$$
$$= (r_1 a + 2\mathbb{Z}) + (r_2 + 2\mathbb{Z})$$
$$= r_1 (a + 2\mathbb{Z}) + r_2(a + 2\mathbb{Z})$$

c. $(r_1 r_2)(a + 2\mathbb{Z}) = [r_1 r_2(a + 2\mathbb{Z})]$
$$= r_1 r_2 a + 2\mathbb{Z}$$
$$= r_1 (r_2 a) + 2\mathbb{Z}$$
$$= r_1 [r_2(a + 2\mathbb{Z})]$$

$\forall r, r_1, r_2 \in R, \forall (a + 2\mathbb{Z}) + (b + 2\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Dari uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}: \mathbb{Z} -$ modul.

Definisi 2.5.21 (Homomorfisma Modul)

Misalkan M dan M' masing-masing merupakan suatu modul atas ring R. Didefinisikan pemetaan $\rho: M \to M'$. ρ disebut homomorfisma modul jika dipenuhi:

1. $\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b), \forall a, b \in M$.
2. $\rho(ra) = r\rho(a), \forall a, b \in M, \forall r \in R$.

Misalkan M dan M' masing-masing adalah modul atas ring R dan $\rho: M \to M'$ adalah suatu homomorfisma. Maka ρ disebut:

- Epimorfisma yaitu suatu homomorfisma yang surjektif (onto).
- Monomorfisma yaitu suatu homomorfisma yang injektif (satu-satu).
- Isomorfisma yaitu suatu homomorfisma yang bijektif (injektif dan surjektif).
- Endomorfisma yaitu suatu homomorfisma dari modul M ke dirinya sendiri.
- Automorfisma yaitu suatu isomorfisma dari modul M ke dirinya sendiri.

Contoh 2.5.22

Diberikan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dan $M_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real. $\mathbb{C}: \mathbb{R} -$ modul dan $M_2(\mathbb{R}): \mathbb{R} -$ modul.
Didefinisikan:

$$f: \mathbb{C} \to M_2[\mathbb{R}]$$
$$a + ib \mapsto f(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa f adalah homomorfisma modul.

Bukti:
Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}$, untuk $x = a + ib$ dan $y = c + id$, maka
$f(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ dan $f(c + id) = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$, sehingga berlaku:

1. Terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f\big((a + ib) + (c + id)\big) \\ &= f[(a + c) + i(b + d)] \\ &= \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \\ &= f(a + ib) + f(c + id) \end{aligned}$$

2. Terhadap pergandaan.

$$\begin{aligned} f(rx) &= f\big(r(a + ib)\big) \\ &= f(ra + rib) \\ &= \begin{bmatrix} ra & rb \\ -rb & ra \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= rf(a + ib) = rf(x) \end{aligned}$$

Jadi, f merupakan homomorfisma modul.

Definisi 2.5.23 (Hasil Jumlah Langsung)
Misalkan R adalah suatu ring. M adalah modul atas R dan $N_1, N_2, \dots, N_k$ masing-masing adalah submodul dari M. M disebut

hasil jumlah langsung (*internal direct sum*) dari submodul $N_1, N_2, \dots, N_k$, jika memenuhi

$$i. M = \sum_{i=1}^{k} N_i \,,$$

$$ii. N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\} \text{, untuk } 1 \leq i \leq k.$$

M disebut hasil jumlah langsung dari submodul $N_1, N_2, \dots, N_k$, biasa diberi notasi $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$.

Contoh 2.5.24
Diketahui $\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z} -$ modul, $N_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\}, N_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ masing-masing adalah submodul dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan $Z_6 = N_1 \oplus N_2$.

Bukti:
Akan ditunjukkan N_1, N_2 submodul dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.4 Operasi pengurangan pada N_1.

$-$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$

Tabel 2.5 Operasi pengurangan pada N_2.

$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 2.4 dan Tabel 2.5, maka dapat disimpulkan bahwa N_1 dan N_2 merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.
Selanjutnya ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{x} \in N_1$, yaitu $\bar{x} = a + 6k_1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} r \cdot \bar{x} &= r \cdot (a + 6k_1) \\ &= ra + r6k_1 \in N_1. \end{aligned}$$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{y} \in N_2$, yaitu $\bar{y} = b + 6k_1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} r \cdot \bar{y} &= r \cdot (b + 6k_1) \\ &= rb + r6k_1 \in N_2. \end{aligned}$$

Karena N_1 dan N_2 merupakan subgrup dan $r \cdot \bar{x} \in N_1$ dan $r \cdot \bar{y} \in N_2$, jadi dapat disimpulkan bahwa N_1 dan N_2 merupakan submodul dari $\mathbb{Z}_6$.

Akan ditunjukkan bahwa N_1 dan N_2 merupakan hasil tambah langsung.

i. $N_1 + N_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_6$

ii. $N_1 \cap N_2 = \{0\}$

Jadi, $\mathbb{Z}_6 = N_1 \oplus N_2$.

2.6 LA-Grup dan LA-Semigrup

Left almost group (LA-grup) merupakan suatu struktur aljabar yang disertai dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh LA-grup berdasarkan Gaketem (2013). Kemudian diberikan definisi dan contoh LA-semigrup berdasarkan Kazim dan Naseeruddin (1977).

Definisi 2.6.1 (LA-Semigrup)

Misalkan $G \neq \emptyset$ dan disertai operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut *left almost semigroup* (LA-semigrup), jika memenuhi hukum invertif kiri yaitu:

$$(a * b) * c = (c * b) * a, \forall a, b, c \in G$$

Contoh 2.6.2

Diberikan $S = \{a, b, c\}$ yang dilengkapi dengan operasi $*$ yang didefinisikan pada Tabel 2.6. Akan dibuktikan bahwa $(S,*)$ merupakan LA-semigrup yang bukan semigrup.

Tabel 2.6 Operasi $(*)$ pada S.

$*$	a	b	c
a	c	c	b
b	b	b	b
c	b	b	b

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa $(S,*)$ merupakan LA-semigrup memenuhi hukum invertif kiri.
   Ambil sebarang $x, y \in S$, yaitu $x = a, y = b, z = c$
   $$\begin{aligned}(x * y) * z &= (a * b) * c \\ &= c * c = b \\ (z * y) * x &= (c * b) * a \\ &= b * a = b\end{aligned}$$
   sehingga $(x * y) * z = (z * y) * x$.
2. Akan dibuktikan bahwa $(S,*)$ bukan semigrup
   i. Tertutup.
      Pada Tabel 2.6 terlihat bahwa $\forall x, y \in S$ berlaku $x * y \in S$.
   ii. Assosiatif.
      Ambil sebarang $x, y, z \in S$. Untuk $x = a, y = b, z = c$ berlaku
      $$(x * y) * z = (a * b) * c = c * c = b$$
      $$x * (y * z) = a * (b * c) = a * b = c$$
      sehingga $(x * y) * z \neq x * (y * z)$.

Karena $(S,*)$ tidak memenuhi assosiatif, maka $(S,*)$ bukan semigrup. Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $(S,*)$ merupakan LA-semigrup dan bukan semigrup.

Definisi 2.6.3 (LA-Grup)
Misalkan $G \neq \emptyset$ dan disertai operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut *left almost group* (LA-grup), jika memenuhi beberapa aksioma berikut

1. Hukum invertif kiri, yaitu
   $$(a * b) * c = (c * b) * a, \forall a, b, c \in G.$$
2. Mempunyai elemen identitas kiri, yaitu
   $$\exists e \in G, \ni e * a = a, \forall a \in G.$$
3. Setiap elemen mempunyai invers kiri, yaitu
   $$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a^{-1} * a = e.$$

Contoh 2.6.4
Diberikan $P = \{a, b, c, d\}$ yang dilengkapi dengan operasi $\odot$ seperti yang didefinisikan pada Tabel 2.7. Akan dibuktikan bahwa P merupakan LA-grup dan bukan grup.

Tabel 2.7 Operasi pergandaan pada P.

$\odot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	b
d	b	c	d	a

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa $(P,\odot)$ merupakan LA-grup

1. Memenuhi hukum invertif kiri

   Ambil sebarang $x, y, z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

   $$\begin{aligned}(x \odot y) \odot z &= (a \odot b) \odot c \\ &= b \odot c = b \\ (z \odot y) \odot x &= (c \odot b) \odot a \\ &= d \odot a = b\end{aligned}$$

   sehingga$(x \odot y) \odot z = (z \odot y) \odot x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.

2. Mempunyai elemen identitas kiri

   Elemen identitas kiri dari $(P,\odot)$ adalah $a \ni \forall x \in P$ berlaku $a \odot x = x$.

3. Setiap elemen mempunyai invers kiri

   Invers a adalah a, karena $a \odot a = a$

   Invers b adalah b, karena $b \odot b = a$

   Invers c adalah c, karena $c \odot c = a$

   Invers d adalah d, karena $d \odot d = a$

ii. Akan dibuktikan bahwa $(P,\odot)$ bukan grup.

1. Tertutup.

   Pada Tabel 2.7 terlihat bahwa $\forall x, y \in P$ berlaku $x \odot y \in P$.

2. Assosiatif.

   Ambil sebarang $x, y, z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$, diperoleh

   $$\begin{aligned}(x \odot y) \odot z &= (a \odot b) \odot c \\ &= b \odot c = b \\ x \odot (y \odot z) &= a \odot (b \odot c) \\ &= a \odot b = b\end{aligned}$$

sehingga $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.

3. Memiliki elemen identitas

   Elemen identitasnya adalah a, namun hanya berlaku identitas kiri saja. Tidak berlaku identitas kanan karena $a \odot e \neq a$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(P, \odot)$, tidak memenuhi aksioma yang ketiga, maka $(P, \odot)$, bukan grup.

$(P, \odot)$ tidak memiliki elemen identitas kanan serta berdasarkan i.) dan ii.) terbukti bahwa $(P, \odot)$ merupakan LA-grup dan bukan grup.

2.7 *Left Almost Ring* (LA-Ring)

Left almost ring (LA-ring) merupakan suatu bentuk struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh LA-ring berdasarkan Yusuf (2006).

Definisi 2.7.1 (LA-ring)

Misalkan R adalah suatu himpunan tidak kosong memuat minimal dua elemen yang dilengkapi dua operasi biner, misalkan terhadap penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. $(R, +, \cdot)$, disebut LA-ring jika memenuhi:

1. $(R, +)$ merupakan LA-grup.
2. $(R, \cdot)$ merupakan LA-semigrup.
3. Berlaku hukum distributif yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$a(b + c) = (ab) + (ac) \text{ hukum distributif kiri,}$$

dan

$$(a + b)c = (ac) + (bc) \text{ hukum distributif kanan.}$$

Contoh 2.7.2

Diberikan $N = \{a, b, c, d, e\}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ yang didefinisikan pada Tabel 2.8 dan Tabel 2.9. Akan dibuktikan bahwa N merupakan LA-ring N.

Tabel 2.8 Operasi penjumlahan pada N.

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	e	a	b	c	d
c	d	e	a	b	c
d	c	d	e	a	b
e	b	c	d	e	a

Tabel 2.9 Operasi pergandaan pada N.

$\odot$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

Bukti:

1. $(N,*)$ merupakan LA-grup
   i. Memenuhi hukum invertif kiri
   Ambil sebarang $x, y, z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh
   $$(x * y) * z = (a * b) * c$$
   $$= b * c = b$$
   $$(z * y) * x = (c * b) * a$$
   $$= e * a = b$$
   sehingga$(x * y) * z = (z * y) * x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.
   ii. Mempunyai elemen identitas kiri
   Elemen identitas kiri dari $(N,*)$ adalah a sehingga $\forall a \in N$ berlaku $a * x = a$.
   iii. Setiap elemen mempunyai invers kiri
   Invers a adalah a, karena $a \odot a = a$
   Invers b adalah b, karena $b \odot b = a$
   Invers c adalah c, karena $c \odot c = a$
   Invers d adalah d, karena $d \odot d = a$

sehingga$(x * y) * z = (z * y) * x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in N$.
Berdasarkan i, ii, dan iii terbukti bahwa $(N,*)$ merupakan LA-grup.

2. $(N,\odot)$ merupakan LA-semigrup
   Memenuhi hukum invertif kiri
   Ambil sebarang $x, y, z \in P$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh
$$(x \odot y) \odot z = (a \odot b) \odot c$$
$$= b \odot c = b$$
$$(z \odot y) \odot x = (c \odot b) \odot a$$
$$= d \odot a = b$$
   sehingga$(x \odot y) \odot z = (z \odot y) \odot x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in P$.
   Terbukti bahwa $(N,\odot)$ merupakan LA-semigrup.
3. Berlaku hukum distributif
   Ambil sebarang $x, y, z \in N$, yaitu $x = a, y = b, z = c$, diperoleh
$$x \odot (y * z) = a \odot (b * c)$$
$$= a \odot b = a$$
$$(x \odot y) * (x \odot z) = (a \odot b) * (a \odot c)$$
$$= a * a = a$$
$$(x * y) \odot z = (a * b) \odot c$$
$$= b \odot c = c$$
$$(x \odot z) * (y \odot z) = (a \odot c) * (b \odot c)$$
$$= a * c = c$$
   Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in N$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(N,*,\odot)$ merupakan LA-ring.

Contoh 2.7.3
Diberikan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.
$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$
Akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}), + \cdot)$ merupakan suatu LA-ring.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan LA-ring.
   1. $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan LA-grup.
      a. Memenuhi hukum invertif kiri

Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ berlaku

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(e+p) & b+(f+q) \\ c+(g+r) & d+(h+s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+p)+e & (b+q)+f \\ (c+r)+g & (d+s)+h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p+(a+e) & q+(b+f) \\ r+(c+g) & s+(d+h) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (p+e)+a & (q+f)+b \\ (r+g)+c & (s+h)+d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (p+e) & (q+f) \\ (r+g) & (s+h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= (C+B)+A
\end{aligned}$$

sehingga $(A+B)+C = (C+B)+A$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$.

b. Mempunyai elemen identitas kiri.

Elemen identitas kiri dari $(M_2(\mathbb{R}), +)$ adalah $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\ni \forall A \in K$ berlaku $E + A = A$.

c. Setiap elemen mempunyai invers kiri

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sehingga $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$. Karena $-A + A = E$.

$$\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(-a) & b+(-b) \\ c+(-c) & d+(-d) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}),+)$ merupakan LA-grup.

2. $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$ merupakan LA-semigrup

   Memenuhi hukum invertif kiri

   Ambil sebarang $A,B,C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu

   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ berlaku

$$(A \cdot B) \cdot C$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae+bg)p+(af+bh)r & (ae+bg)q+(af+bh)s \\ (ce+dg)p+(cf+dh)r & (ce+dg)q+(cf+dh)s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aep+bgp+afr+bhr & aeq+bgq+afs+bhs \\ cep+dgp+cfr+dhr & ceq+dgq+cfs+dhs \end{bmatrix}$$

$$(C \cdot B) \cdot A$$

$$= \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pe+qg & pf+qh \\ re+sg & rf+sh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (pe+qg)a+(pf+qh)c & (pe+qg)b+(pf+qh)d \\ (re+sg)a+(rf+sh)c & (re+sg)b+(rf+sh)d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pea+qga+pfc+qhc & peb+qgb+pfd+qhd \\ rea+sga+rfc+shc & reb+sgb+rfd+shd \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C \neq (C \cdot B) \cdot A$$

   Terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$ bukan merupakan LA-semigrup karena tidak memenuhi hukum invertif kiri.

Contoh 2.7.3

Diberikan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}),+\cdot)$ merupakan suatu LA-ring.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ merupakan LA-ring.

   1. $(M_2(\mathbb{R}),+)$ merupakan LA-grup.

a. Memenuhi hukum invertif kiri.

Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu
$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$ berlaku

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(c+e) & 0 \\ 0 & b+(d+f) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+e)+c & 0 \\ 0 & (b+f)+d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e+(a+c) & 0 \\ 0 & f+(b+d) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (e+c)+a & 0 \\ 0 & (f+d)+b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (e+c) & 0 \\ 0 & (f+d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\
&= (C+B)+A
\end{aligned}$$

sehingga $(A+B)+C = (C+B)+A$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$.

b. Mempunyai elemen identitas kiri.

Elemen identitas kiri dari $(M_2(\mathbb{R}), +)$ adalah $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\ni \forall A \in K$ berlaku $E + A = A$.

c. Setiap elemen mempunyai invers kiri

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, sehingga $-A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$. Karena $-A + A = E$.

$$\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(-a) & 0 \\ 0 & b+(-b) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a-a & 0 \\ 0 & b-b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan LA-grup.

2. $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$ merupakan LA-semigrup

   Memenuhi hukum invertif kiri

   Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu

   $$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \text{ berlaku}$$

   $$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ace & 0 \\ 0 & bdf \end{bmatrix} \\ (C \cdot B) \cdot A &= \left(\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ec & 0 \\ 0 & fd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} eca & 0 \\ 0 & fdb \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   sehingga $(A \cdot B) \cdot C = (C \cdot B) \cdot A$.

Jadi, terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +,\cdot)$ merupakan LA-ring.

Contoh 2.7.4

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $\mathbb{Z}[x]$ adalah himpunan polinomial dengan koefisien dari polinomnya anggota dari $\mathbb{Z}$. Misalkan

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = \sum_i a_ix^i,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_0x^0 = \sum_i b_ix^i.$$

Didefinisikan hukum komposisi terhadap penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut.

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots$$

$$f(x) \cdot g(x) = a_0b_0x^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}[x], + \cdot)$ merupakan LA-ring.

Bukti:

1. $(\mathbb{Z}[x], +)$ merupakan LA-grup.
   a. Memenuhi hukum invertif kiri
   Ambil sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_ix^i = \sum_i a_ix^i,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_ix^i = \sum_i b_ix^i,$$

$$h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_ix^i = \sum_i c_ix^i,$$

   berlaku

$$\big((f(x) + g(x)\big) + h(x)$$
$$= [(a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots] + c_0x^0 + c_1x^1 + \cdots$$
$$= [(a_0 + b_0) + c_0]x^0 + [(a_1 + b_1) + c_1]x^1 + \cdots$$
$$= [a_0 + (b_0 + c_0)]x^0 + [a_1 + (b_1 + c_1)]x^1 + \cdots$$
$$= [(a_0 + c_0) + b_0]x^0 + [(a_1 + c_1) + b_1]x^1 + \cdots$$
$$= [c_0 + (a_0 + b_0)]x^0 + [c_1 + (a_1 + b_1)]x^1 + \cdots$$
$$= [(c_0 + b_0) + a_0)]x^0 + [(c_1 + b_1) + a_1]x^1 + \cdots$$
$$= [(c_0 + b_0)x^0 + (c_1 + b_1)x^1 + \cdots] + a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots$$
$$= \big(h(x) + g(x)\big) + f(x)$$

   sehingga $(f(x) + g(x)) + h(x) = \big(h(x) + g(x)\big) + f(x)$.
   Dengan cara yang sama berlaku $\forall f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

   b. Mempunyai elemen identitas kiri
   Elemen identitas kiri dari $(\mathbb{Z}[x], +)$ adalah

$$e(x) = 0x^0 + 0x^1 + \cdots,$$

   sedemikian sehingga $\forall f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku

$$e(x) + f(x) = x.$$

   c. Setiap elemen mempunyai invers kiri
   Jika $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots$, maka inversnya adalah

$$-f(x) = -a_0x^0 - a_1x^1 - \cdots$$

   Karena $f(x) + \big(-f(x)\big) = 0 = 0x^0 + 0x^1 + \cdots$

   Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[x], +)$ merupakan LA-grup.

2. $(\mathbb{Z}[x], \cdot)$ merupakan LA-semigrup.

Ambil sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \sum_i a_ix^i,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots = \sum_i b_ix^i,$$

$$h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots = \sum_i c_ix^i,$$

berlaku

$$\begin{aligned}
&\big((f(x)\cdot g(x)\big)\cdot h(x) \\
&= [(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)\cdot(b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots)] \\
&\quad \cdot (c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots) \\
&= [a_0b_0x^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots] \\
&\quad \cdot (c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots) \\
&= a_0b_0c_0x^0 + (a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0 + a_0b_0c_1)x^1 \\
&\quad + (a_0b_2c_0 + a_1b_1c_0 + a_2b_0c_0 + a_0b_1c_1 + a_1b_0c_1 + a_0b_0c_2)x^2 \\
&\quad + \cdots \\
&= [c_0b_0x^0 + (c_0b_1 + c_1b_0)x^1 + (c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0)x^2 + \cdots] \\
&\quad \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) \\
&= (h(x)\cdot g(x))\cdot f(x)
\end{aligned}$$

sehingga $\big((f(x)\cdot g(x)\big)\cdot h(x) = \big(h(x)\cdot g(x)\big)\cdot f(x)$. Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[x], +\,\cdot)$ merupakan LA-ring.

Definisi 2.7.5 (LA-Ring dengan Elemen Identitas Kiri)

Jika LA-Ring R memiliki elemen identitas kiri e, maka

$$e + e \neq e, e + 0 \neq e, e = (e + 0)^2.$$

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas definisi, sifat, proposisi, teorema, lemma serta contoh yang berkaitan dengan LA-modul atas LA-ring, LA-submodul, LA-modul faktor, dan homomorfisma LA-modul berdasarkan Tariq Shah dkk. (2011).

3.1 *Left Almost Modules* (LA-Modul)

Left almost modul (LA-modul) merupakan pengembangan dari konsep modul. Berikut ini diberikan definisi dan contoh LA-modul.

Definisi 3.1.1 (LA-modul)
Misalkan $(M,+)$ adalah suatu LA-grup dan $(R,+,\cdot)$ adalah suatu LA-ring dengan elemen identitas kiri 1. Serta diberikan pula operasi biner,

$$*: R \times M \to M$$
$$(r,m) \mapsto * (r,m) = r * m.$$

Himpunan M disebut LA-modul kiri atas R, jika memenuhi keempat aksioma berikut:

1. $r * (m_1 + m_2) = r * m_1 + r * m_2$,
2. $(r_1 + r_2) * m = r_1 * m + r_2 * m$,
3. $(r_1 * r_2) * m = r_2 * (r_1 * m)$,
4. $1.m = m$,

$\forall r, r_1, r_2 \in R, \forall m, m_1, m_1 \in M$.

Contoh 3.1.2
Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[x]: \mathbb{Z}$ LA-modul.

Bukti:

3. Berdasarkan Contoh 2.7.3, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[x],+)$ merupakan LA-grup.
4. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.
   a. Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu
   $$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \sum_i a_ix^i,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots = \sum_i b_ix^i,$$
$$h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_0x^0 = \sum_i c_ix^i,$$

berlaku

$$r \cdot \big(f(x) + g(x)\big)$$
$$= r\big[(a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots + (a_p + b_p)x^p + \cdots\big]$$
$$= \big[r(a_0 + b_0)x^0 + r(a_1 + b_1)x^1 + \cdots + r(a_p + b_p)x^p + \cdots\big]$$
$$= ra_0 + rb_0 + ra_1x^1 + rb_1x^1 + \cdots + ra_px^p + rb_px^p + \cdots$$
$$= (ra_0 + ra_1x^1 + \cdots ra_px^p + \cdots) + (rb_0 + rb_1x^1 + \cdots$$
$$+rb_px^p + \cdots)$$
$$= rf(x) + rg(x)$$

$\forall\, r \in \mathbb{Z}, \forall\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

b. Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = \sum_i a_ix^i$, berlaku

$$(r_1 + r_2) \cdot f(x)$$
$$= (r_1 + r_2) \cdot a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots$$
$$= (r_1 + r_2)a_0x^0 + (r_1 + r_2)a_1x^1 + (r_1 + r_2)a_2x^2 + \cdots$$
$$= (r_1a_0x^0 + r_2a_0x^0) + (r_1a_1x^1 + r_2a_1x^1)$$
$$+(r_1a_2x^2 + r_2a_2x^2) + \cdots$$
$$= (r_1a_0x^0 + r_1a_1x^1 + r_1a_2x^2 + \cdots)$$
$$+(r_2a_0x^0 + r_2a_1x^1 + r_2a_2x^2 + \cdots)$$
$$= r_1 \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) + r_2$$
$$\cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)$$
$$= r_1f(x) + r_2f(x)$$

$\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, \forall\, f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

c. Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = \sum_i a_ix^i$, berlaku

$$(r_1 \cdot r_2) \cdot f(x)$$
$$= (r_1r_2)(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)$$
$$= (r_1r_2)a_0x^0 + (r_1r_2)a_1x^1 + (r_1r_2)a_2x^2 + \cdots$$
$$= (r_2r_1)a_0x^0 + (r_2r_1)a_1x^1 + (r_2r_1)a_2x^2 + \cdots$$
$$= r_2(r_1a_0x^0) + r_2(r_1a_1x^1) + r_2(r_1a_2x^2) + \cdots$$
$$= r_2(r_1f(x))$$

$\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, \forall\, f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

d. $1 \cdot f(x) = 1 \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0)$
$= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = f(x)$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ merupakan suatu LA-modul.

Contoh 3.1.3

Diberikan $N = \{a, b, c, d, e\}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ yang didefinisikan pada Tabel 2.8 dan Tabel 2.9.

$$\odot : N \times N \to N$$
$$(r, m) \mapsto \odot\,(r, m) = r \odot m$$

Akan dibuktikan bahwa N merupakan LA-modul atas LA-ring N.

Bukti:

i. Akan dibuktikan $(N, *, \odot)$ merupakan LA-ring.
   Pada Contoh 2.7.2, sudah dibuktikan bahwa $(N, *, \odot)$ merupakan LA-ring.

ii. Akan dibuktikan N merupakan LA-modul.
   1. $(N, +)$ merupakan LA-grup
      Pada Contoh 2.7.2, sudah dibuktikan bahwa $(N, +)$ merupakan LA-grup.

iii. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.
   a. $r \odot (m_1 * m_2) = (r \odot m_1) * (r \odot m_2)$
      $\forall\, r \in N, \forall\, m_1, m_2 \in N$.
      Aksioma ini merupakan hukum distributif kiri yang juga sudah dibuktikan pada Contoh 2.7.2.
   b. $(r_1 * r_2) \odot m = (r_1 * m) \odot (r_2 * m)$
      $\forall\, r_1, r_2 \in N, \forall\, m \in N$.
      Aksioma ini merupakan hukum distributif kanan yang juga sudah dibuktikan pada Contoh 2.7.2.
   c. $r_1 \odot (r_2 \odot m) = r_2 \odot (r_1 \odot m), \forall\, r_1, r_2 \in N, \forall\, m \in N$.
      Ambil sebarang $r_1, r_2 \in N$ dan $m \in N$.
      Untuk $r_1 = a + 4k_1, r_2 = b, m = c$, maka diperoleh
      $$r_1 \odot (r_2 \odot m) = a \odot (b \odot c) = a \odot c = a$$
      $$r_2 \odot (r_1 \odot m) = b \odot (a \odot c) = b \odot a = a$$
      Dengan cara yang sama berlaku $\forall r_1, r_2 \in N$ dan $m \in N$.
   d. $n \odot m = m, \exists n \in N, \forall m \in N, n = b$.
      $$m = a, b \odot a = a$$

$$m = b, b \odot b = b$$
$$m = c, b \odot c = c$$
$$m = d, b \odot d = d$$
$$m = e, b \odot e = e$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $(N,*,\odot)$ merupakan suatu LA-modul tetapi bukan modul.

Contoh 3.1.4

Diberikan $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ yang didefinisikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2.

$$\odot: K \times K \to K$$
$$(r, m) \mapsto \odot\,(r, m) = r \odot m$$

Akan dibuktikan bahwa K merupakan LA-modul atas LA-ring K.

Tabel 3.1 Operasi $*$ pada K.

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	f	a	b	c	d	e
c	e	f	a	b	c	d
d	d	e	f	a	b	c
e	c	d	e	f	a	b
f	b	c	d	e	f	a

Tabel 3.2 Operasi $\odot$ pada K

$\odot$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e	f
c	a	c	e	a	c	e
d	a	d	a	d	a	d
e	a	e	c	a	e	c
f	a	f	e	d	c	b

Bukti:

i. Akan dibuktikan $(K,*,\odot)$ merupakan LA-ring.
   1. $(K,*)$ merupakan LA-grup.
      a. Memenuhi hukum invertif kiri

Ambil sebarang $x, y, z \in K$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

$$(x * y) * z = (a * b) * c = b * c = b$$
$$(z * y) * x = (c * b) * a = e * a = b$$

sehingga $(x * y) * z = (z * y) * x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.

b. Mempunyai elemen identitas kiri

Elemen identitas kiri dari $(K,*)$ adalah a sedemikian sehingga $\forall x \in K$ berlaku $a * x = x$.

c. Setiap elemen mempunyai invers kiri

Invers a adalah a, karena $a * a = a$
Invers b adalah b, karena $b * b = a$
Invers c adalah c, karena $c * c = a$
Invers d adalah d, karena $d * d = a$
Invers e adalah e, karena $e * e = a$
Invers f adalah f, karena $f * f = a$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(K,*)$ merupakan LA-grup.

2. $(K,\odot)$ merupakan LA-semigrup

Memenuhi hukum invertif kiri

Ambil sebarang $x, y, z \in K$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

$$(x \odot y) \odot z = (a \odot b) \odot c = a \odot c = a$$
$$(z \odot y) \odot x = (c \odot b) \odot a = d \odot a = a$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.

Terbukti bahwa $(K,\odot)$ merupakan LA-semigrup.

5. Berlaku hukum distributif

Ambil sebarang $x, y, z \in K$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

- Distributif kanan

$$(x \odot y) * z = (a \odot b) * c = a \odot c = a$$
$$(x \odot z) * (y \odot z) = (a \odot c) * (b \odot c) = a * a = a$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.

- Distributif kiri

$$x \odot (y * z) = a \odot (b * c) = a \odot b = a$$
$$(x \odot y) * (x \odot z) = (a \odot b) * (a \odot c) = a * a = a$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(K,*,\odot)$ merupakan LA-ring.

ii. Akan dibuktikan K merupakan LA-modul.

1. $(K,+)$ merupakan LA-grup
   Pada (i) sudah dibuktikan bahwa $(K,+)$ merupakan LA-grup.
2. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.
   a. $r \odot (m_1 * m_2) = (r \odot m_1) * (r \odot m_2)$
   $\forall\, r \in K, \forall\, m_1, m_2 \in K.$
   Aksioma ini merupakan hukum distributif kiri yang juga sudah dibuktikan pada (i).
   b. $(r_1 * r_2) \odot m = (r_1 * m) \odot (r_2 * m)$
   $\forall\, r_1, r_2 \in K, \forall\, m \in K.$
   Aksioma ini merupakan hukum distributif kanan yang juga sudah dibuktikan pada (i).
   c. $r_1 \odot (r_2 \odot m) = r_2 \odot (r_1 \odot m), \forall\, r_1, r_2 \in K, \forall\, m \in K.$
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in K$ dan $m \in K$. Untuk $r_1 = a, r_2 = b, m = c$, maka diperoleh
   $$r_1 \odot (r_2 \odot m) = a \odot (b \odot c) = a \odot c = a$$
   $$r_2 \odot (r_1 \odot m) = b \odot (a \odot c) = b \odot a = a$$
   Dengan cara yang sama berlaku $\forall r_1, r_2 \in K$ dan $m \in K$.
   d. $n \odot m = m, \exists n \in K, \forall m \in K, n = b.$
   $$m = a, b \odot a = a$$
   $$m = b, b \odot b = b$$
   $$m = c, b \odot c = c$$
   $$m = d, b \odot d = d$$
   $$m = e, b \odot e = e$$
   $$m = f, b \odot f = f$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $(K,*,\odot)$ merupakan suatu LA-modul tetapi bukan modul.

Contoh 3.1.5

Diberikan himpunan vektor di $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks vertikal dan ring berupa himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diberikan pula operasi biner

$$\cdot : M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right) \mapsto \cdot \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ai \\ bj \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Bukti:

iii. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}^2, +)$ merupakan LA-grup.

f. Memenuhi hukum invertif kiri.

Ambil sebarang $P, Q, S \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ berlaku

$$\begin{aligned}
(P+Q)+S &= \left[\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i+k \\ j+l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i+(k+m) \\ j+(l+n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (i+m)+k \\ (j+n)+l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m+(i+k) \\ n+(j+l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m+(i+k) \\ n+(j+l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (m+k)+i \\ (n+l)+j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (m+k) \\ (n+l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = (S+Q)+P
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q, S \in \mathbb{R}^2$.

g. Mempunyai elemen identitas kiri.

Elemen identitas kiri dari $\mathbb{R}^2$ adalah $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

Karena $E + P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+i \\ 0+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$.

h. Setiap elemen mempunyai invers kiri.

Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Invers dari $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ adalah $-P = \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix}$, karena $-P + P = \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi, dengan menggunakan sifat pergandaan matriks dengan vektor:

4. Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned}
A \cdot (P + Q) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i + k \\ j + l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(i + k) + 0(j + l) \\ 0(i + k) + b(j + l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + (ak + 0j) + 0l \\ 0i + (0k + bj) + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + (0j + ak) + 0l \\ 0i + (bj + 0j) + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + 0j + ak + 0l \\ 0i + bj + 0k + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + 0j \\ 0i + bj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ak + 0l \\ 0k + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \\
&= A \cdot P + A \cdot Q
\end{aligned}$$

5. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned}
(A + B) \cdot P &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a + c)i \\ (b + d)j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + ci + 0j \\ 0i + bj + dj \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} ai + ci \\ bj + dj \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai \\ bj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ci \\ dj \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= A \cdot P + B \cdot P
\end{aligned}
$$

6. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, berlaku

$$
\begin{aligned}
(A \cdot B) \cdot P &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} aci \\ bdj \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cai \\ dbj \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ai \\ bj \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) \\
&= B \cdot (A \cdot P)
\end{aligned}
$$

7. $E_R \cdot P = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ci \\ dj \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian dia atas bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan LA-modul atas $M_2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1.6

JIka R adalah LA-ring dan M merupakan suatu LA-modul atas R, maka berlaku ketentuan berikut.

1. Jika 0_M merupakan elemen identitas di M, maka $r0_M = 0_M$,
2. $0_R a = 0_M$,
3. $(-r)a = -ra = r(-a)$,
4. $(-r)(-a) = ra$,

   $\forall r \in R$ dan $a \in M$.

Bukti:

1. Jika 0_M adalah elemen identitas di M, maka

$$a + 0_M = 0_M + a = a, \forall a \in M,$$

sehingga berlaku $r(a+0_M)=ra$. Sedangkan, $r0_M+ra=ra$, juga menyatakan $0_M+ra=ra$. Perhatikan persamaan $r0_M+ra=ra$ dan $0_M+ra=ra$. Dari kedua persamaan tersebut, maka didapatkan $r0_M=0_M$.

2. Jika 0_R adalah elemen identitas di R, maka $r0_R=0_Rr=0_R$, $\forall r\in R$, sehingga berlaku $0_Ra=a0_R\in M$. Akibatnya adalah $0_Ra=a0_R=0_M$, sehingga $0_Ra=0_M$.
3. Misalkan $a\in M$ dan $r\in R$, maka terdapat $ra\in M$. Karena $ra\in M$, maka terdapat $-(ra)\in M$, sehingga $-(ra)+ra=0_M$, juga menyatakan $(-r)a+ra=0_M$, dan $r(-a)+ra=0_M$. Dari ketiga persamaan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa $(-r)a=-(ra)=r(-a)$.
4. Misalkan $r\in R, a\in M$, maka terdapat $-r\in R$ dan $-a\in M$. Karena $-ra\in M$, maka terdapat $-(-ra)\in M$, sehingga $ra\in M$.

3.2 *Left Almost Submodules* (LA-Submodul) dan *Factor Left Almost Modules* (LA-Modul Faktor)

Left almost submodules (LA-submodul) merupakan bagian dari LA-modul. Sedangkan *factor left almost modules* merupakan perluasan konsep dari LA-modul. Berikut ini diberikan definisi, contoh, teorema serta proposisi pada LA-submodul dan LA-modul faktor.

Definisi 3.2.1 (LA-Submodul)
Misalkan $M:R-$ LA-modul dan $N\neq\emptyset, N\subseteq M$. Himpunan N disebut LA-submodul dari M, jika terhadap hukum komposisi yang sama dengan M, N merupakan LA-submodul.

Teorema 3.2.2
Misalkan $N\neq\emptyset$. N merupakan suatu LA-subgrup dari LA-modul M atas LA-ring R. N disebut LA-submodul atas R, jika dan hanya jika
i. $m-n\in N, \forall m,n\in N$.
ii. $r*n\in N, \forall r\in R, \forall n\in N$.

Bukti:
$\Rightarrow$

Diketahui N adalah LA-submodul atas R. Akan dibuktikan berlaku i dan ii. Karena N adalah LA-submodul, sehingga N juga merupakan LA-modul dan akibatnya berlaku i. Karena operasi pergandaan skalar yang berlaku pada M juga berlaku pada N, maka berlaku ii.

$\Leftarrow$
Diketahui berlaku i dan ii. Akan dibuktikan N adalah LA-submodul. Karena berlaku i, sehingga menurut Definisi 3.2.1 N merupakan LA-subgrup dari M. Karena berlaku ii, sehingga operasi pergandaan skalar di M juga berlaku di N. Karena N merupakan himpunan bagian dari M dan operasi pergandaan skalar di M juga berlaku di N, sehingga aksioma-aksioma LA-modul di M juga berlaku di N. Jadi, N merupakan LA-submodul dari M.

Contoh 3.2.2
Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan operasi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ merupakan LA-modul. $S = \{a, d\}$ merupakan himpunan bagian dari K. S dengan operasi yang sama dengan K, didefiniskan pada Tabel 3.3 dan tabel 3.4. Akan ditunjukkan bahwa S merupakan LA-submodul dari K.

Tabel 3.3 Operasi $*$ pada S

$*$	a	d
a	a	d
d	d	a

Tabel 3.4 Operasi $\odot$ pada S

$\odot$	a	d
a	a	a
d	a	d

Bukti:
i. $(S,*)$ merupakan LA-grup
   1. Mempunyai elemen identitas kiri
      Elemen identitas kiri dari $(S,*)$ adalah a sedemikian sehingga $\forall x \in S$ berlaku $a * x = x$.
   2. Setiap elemen mempunyai invers kiri

Invers a adalah a, karena $a * a = a$
Invers d adalah d, karena $d * d = a$

3. Memenuhi hukum invertif kiri

Ambil sebarang $x, y, z \in S$, yaitu $x = a, y = d, z = d$, berlaku

$$(x * y) * z = (a * d) * d = d * d = a$$
$$(z * y) * x = (d * d) * a = a * a = a$$

sehingga $(x * y) * z = (z * y) * x$, dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in S$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(S,*)$ merupakan LA-grup.

ii. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.

1. $r \odot (m_1 * m_2) = (r \odot m_1) * (r \odot m_2)$
$\forall\, r \in S, \forall\, m_1, m_2 \in S$.
Ambil sebarang $r \in S$ dan $m_1, m_2 \in S$, yaitu
$r = a, m_1 = d, m_2 = d$, berlaku

$$r \odot (m_1 * m_2) = a \odot (d * d) = a \odot a = a$$
$$\begin{aligned}(r \odot m_1) * (r \odot m_2) &= (a \odot d) * (a \odot d) \\ &= a * a = a\end{aligned}$$

2. $(r_1 * r_2) \odot m = (r_1 * m) \odot (r_2 * m)$
$\forall\, r_1, r_2 \in S, \forall\, m \in S$.
Ambil sebarang $r_1, r_2 \in S$ dan $m \in S$, yaitu
$r_1 = a, r_2 = d, m = d$, berlaku

$$(r_1 * r_2) \odot m = (a * d) \odot d = d \odot d = d$$
$$\begin{aligned}(r_1 \odot m) * (r_2 \odot m) &= (a \odot d) * (d \odot d) \\ &= a * d = d\end{aligned}$$

3. $r_1 \odot (r_2 \odot m) = r_2 \odot (r_1 \odot m), \forall\, r_1, r_2 \in S, \forall\, m \in S$.
Ambil sebarang $r_1, r_2 \in N$ dan $m \in N$, yaitu
$r_1 = a, r_2 = d, m = d$, berlaku

$$r_1 \odot (r_2 \odot m) = a \odot (d \odot d) = a \odot d = a$$
$$r_2 \odot (r_1 \odot m) = d \odot (a \odot d) = d \odot a = a$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall r_1, r_2 \in S$ dan $m \in S$.

4. $n \odot m = m, \exists n \in S, \forall m \in S$.

$$m = a, d \odot a = a$$
$$m = d, d \odot d = d$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa S juga merupakan suatu LA-modul.

Teorema 3.2.3
Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. Jika A dan B masing-masing LA-submodul dari M atas R, maka $A \cap B$ juga merupakan LA-submodul M.

Bukti:
Ambil $r \in R$ dan $a \in A \cap B$, maka $a \in A$ dan $a \in B$. Karena A dan B adalah LA-submodul, maka berlaku $ra \in A$ dan $ra \in B$, sehingga dapat disimpulkan $ra \in A \cap B$.
Jadi, terbukti bahwa $A \cap B$ merupakan LA-submodul dari M.

Contoh 3.2.4
Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan operasi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ merupakan LA-modul. $S = \{a, d\}$ dan $R = \{a, c, e\}$ merupakan himpunan bagian dari K. Akan dibuktikan bahwa $S \cap R$ merupakan LA-submodul dari K.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa $S \cap R = \{a\}$ merupakan LA-submodul dari K.
Ambil $r \in K$ dan $a \in S \cap R$, maka $a \in S$ dan $a \in R$. Karena S dan R adalah LA-submodul dari K, maka berlaku $ra \in S$ dan $ra \in R$, sehingga $ra \in S \cap R$. Karena $ra \in S \cap R$, maka $S \cap R$ merupakan LA-submodul dari K.

Teorema 3.2.5
Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R dengan identitas kiri 1. Jika A dan B masing-masing LA-submodul dari M, maka $A + B$ merupakan LA-submodul dari M.

Bukti:
Ambil $r \in R$ dan $x \in A + B$, maka $x = a_1 + b_1$. Karena A dan B masing-masing LA-submodul, berlaku

$$rx = ra_1 + rb_1 \in A + B.$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas, terbukti $A + B$ merupakan LA-submodul M.

Contoh 3.2.6

Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan operasi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ merupakan LA-modul. $S = \{a, d\}$ dan $R = \{a, c, e\}$ merupakan himpunan bagian dari K. Akan dibuktikan bahwa $S + R$ merupakan LA-submodul dari K.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $S + R = \{a, c, d, e\}$ merupakan LA-submodul dari K.

Ambil $r \in K$ dan $x \in S + R$, maka $x = a_1 + b_1$. Karena A dan B masing-masing LA-submodul, berlaku

$$rx = ra_1 + rb_1 \in S + R.$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas, terbukti $S + R$ merupakan LA-submodul K.

Definisi 3.2.8 (Ideal pada LA-modul)

Misalkan M adalah LA-modul dan I adalah LA-submodul dari M.

1. I disebut ideal kiri dari M jika $MI \subseteq I$.
2. I disebut ideal kanan dari M jika $\forall n, m \in M$ dan $i \in I$, berlaku $(i + n)m - nm \in I$.

Jika memenuhi keduanya maka I disebut ideal dua sisi.

Contoh 3.2.9

Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ merupakan LA-modul. Kemudian diberikan $S = \{a, d\}$. Akan dibuktikan bahwa S merupakan ideal pada LA-modul K.

Bukti:

Berikut ini diberikan operasi $K \odot S$ pada Tabel 3.7.

Tabel 3.5 Operasi $K \odot S$

$\odot$	a	d
a	a	a
b	a	d
c	a	a
d	a	d

e	a	a
f	a	d

1. Pada Tabel 3.7 dapat dilihat bahwa $K \odot S \subseteq S$. Maka terbukti S merupakan ideal kiri di K.
2. Ambil $m, n \in K$ dan $i \in S$. Untuk $m = c, n = b, i = d$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} (i * n) \odot m - n \odot m &= (i * n) \odot m * (n \odot m)^{-1} \\ &= (d * b) \odot c * (b \odot c)^{-1} \\ &= (e \odot c) * c^{-1} \\ &= c * c = a \end{aligned}$$

   $a \in S$, maka aksioma terpenuhi. Terbukti bahwa S merupakan ideal kanan di K.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa S merupakan ideal di K.

Lemma 3.2.10
Menggunakan operasi kanonik dengan memilih representasi, $(A+m)+(A+n) = A+(m+n)$, himpunan M/A merupakan suatu LA-grup. A, kelas ekuivalensi dari $0 \in M$ merupakan elemen identitas kiri dari M/A. Didefinisikan pemetaan

$$\varphi: M \to M/A, \varphi(m) = A + m$$

merupakan suatu homomorfisma surjektif LA-grup.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan terdefinisi dengan baik. Misalkan $A + m = A + m'$ dan $A + n = A + n'$. Menunjukkan bahwa $m \in A + m'$ dan $n \in A + n'$, sehingga $m = a + m'$ dan $n = b + n', \forall a, b \in A$. Kemudian,

$$\begin{aligned} m + n &= (a + m') + (b + n') \\ &= (a + b) + (m' + n') \in A + (m' + n'), \end{aligned}$$

sehingga $A + (m + n) = A + (m' + n')$.

Definisi 3.2.11 (LA-Modul Faktor)
Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. N adalah LA-submodul dari M. Didefinisikan $M/N = \{N + x | x \in M\}$. M/N adalah himpunan koset-koset dari N di M, dimana $m, n \in M$ ekuivalen jika $m - n \in N$. M/N merupakan LA-modul dan disebut

sebagai LA-modul faktor. $M/N = \{N + a, N + b, N + c, \ldots\}, a, b, c, \ldots \in M$.
Didefinisikan

$$(N + a) + (N + b) = N + (a + b)$$
$$r(N + a) = N + ra, r \in R.$$

Contoh 3.2.12
Diberikan LA-modul $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan ideal $S = \{a, d\}$ di K. Akan dibuktikan bahwa K/S merupakan LA-modul faktor.
Bukti:
Jika $S = \{a, d\}$, maka

$$S * a = \{a, d\}$$
$$S * b = \{b, e\}$$
$$S * c = \{c, f\}$$
$$S * d = \{d, a\} = S * a$$

sehingga $K/S = \{S * a, S * b, S * c\}$.
Akan dibuktikan K/S merupakan LA-modul faktor.

Tabel 3.6 Operasi penjumlahan pada K/S

$*$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * a$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * b$	$S * c$	$S * a$	$S * b$
$S * c$	$S * b$	$S * c$	$S * a$

Tabel 3.7 Operasi pergandaan pada K/S

$\odot$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * a$	$S * a$	$S * a$	$S * a$
$S * b$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * c$	$S * a$	$S * c$	$S * b$

1. $(K/S, *)$ merupakan LA-grup.
   a. Mempunyai elemen identitas kiri
      Elemen identitas kiri dari $(K/S, *)$ adalah $S * a$ sehingga untuk setiap $x \in K/S$ berlaku $S * a * x = S * a$.
   b. Setiap elemen mempunyai invers kiri
      Invers $S * a$ adalah $S * a$ karena $(S * a) * (S * a) = S * a$
      Invers $S * b$ adalah $S * b$ karena $(S * b) * (S * b) = S * a$

Invers $S * c$ adalah $S * c$ karena $(S * c) * (S * c) = S * a$

c. Memenuhi hukum invertif kiri

Ambil sebarang $x, y, z \in K/S$.

Untuk $x = S * a, y = S * b, z = S * c$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \big((S * a) * (S * b)\big) * (S * c)\\ &= (S * b) * (S * c)\\ &= S * b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z * y) * x &= \big((S * c) * (S * b)\big) * (S * a)\\ &= (S * c) * (S * a)\\ &= S * b\end{aligned}$$

sehingga $(x * c) * y = (z * y) * x$.

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(K/S,*)$ merupakan LA-grup.

2. Akan diibuktikan bahwa keempat aksioma dipenuhi.

Ambil sebarang $a, b \in K/S$ dan $r, r_1, r_2 \in K$. Untuk $a = S * a, b = S * b, r = a, r_1 = b, r_2 = c$, maka diperoleh

a. $r(a + b) = ra + rb$

$$\begin{aligned}r \odot (a * b) &= a \odot [(S * a) * (S * b)]\\ &= a \odot (S * a) = a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(r \odot a) * (r \odot b) &= [a \odot (S * a)] * [a \odot (S * b)]\\ &= a * a = a\end{aligned}$$

b. $(r_1 + r_2)a = r_1 a + r_2 a$

$$\begin{aligned}(r_1 * r_2) \odot a &= (a * b) \odot (S * a)\\ &= b \odot (S * a)\\ &= S * a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(r_1 \odot a) * (r_2 \odot a) &= [a \odot (S * a)] * [b \odot (S * a)]\\ &= a * (S * a)\\ &= S * a\end{aligned}$$

c. $(r_1 \odot r_2) \odot a = r_2 \odot (r_1 \odot a)$

$$\begin{aligned}(r_1 \odot r_2) \odot a &= (a \odot b) \odot (S * a)\\ &= a \odot (S * a)\\ &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_2 \odot (r_1 \odot a) &= b \odot [a \odot (S * a)]\\ &= b \odot a\\ &= a\end{aligned}$$

d. $r_1 \odot a = a$

$$r_1 \odot a = b \odot (S * a) = (S * a)$$

3.3 *Left Almost Modules Homomorphism* (Homomorfisma LA-Modul)

Seperti halnya pada modul, terdapat konsep homomorfisma modul. Pada *left almost modul* (LA-modul) juga dikenal adanya *left almost modules homomorphism* (homomorfisma LA-modul). Berikut ini diberikan definisi dan teorema isomorfisma dari homomorfisma LA-modul.

Definisi 3.3.1 (Homomorfisma LA-modul)

Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M, N masing-masing adalah LA-modul atas R. Pemetaan $\varphi: M \to N$ disebut homomorfisma LA-modul jika memenuhi

1. $\varphi(m+n) = \varphi(n) + \varphi(m)$
2. $\varphi(rm) = r\varphi(m)$, $\forall n, m \in N$.

Jika $N = M$, maka φ disebut endomorfisma.

Jika φ injektif satu-satu, maka φ disebut monomorfisma.

M disebut isomorfik pada N, ditandai dengan $M \cong N$, jika terdapat suatu isomorfisma dari M ke N.

Contoh 3.3.2

Diberikan LA-modul $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan LA-submodul $S = \{a, d\}$ di K.

Akan dibuktikan bahwa

$$f: K \to K/S$$
$$x \mapsto f(x) = S * x$$

merupakan homomorfisma LA-modul.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, r \in K$, yaitu $x = a, y = c$, sehingga berlaku

1. Terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(a * c) \\ &= S * a * c \\ &= (S * a) * (S * c) \\ &= f(a) * f(c) \end{aligned}$$

2. Terhadap pergandaan.

$$f(r \odot x) = f(r \odot a)$$

$$= S * r \odot a$$
$$= (S * r) \odot (S * a)$$
$$= r \odot f(a)$$

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $f: K \to K/S$ merupakan homomorfisma LA-modul.

Definisi 3.3.3 (Kernel)

Misalkan $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma LA-modul. Kernel dari φ, $Ker(\varphi)$ didefinisikan sebagai $Ker\varphi = \{m \in M: \varphi(m) = 0_M\}$.

Contoh 3.3.4

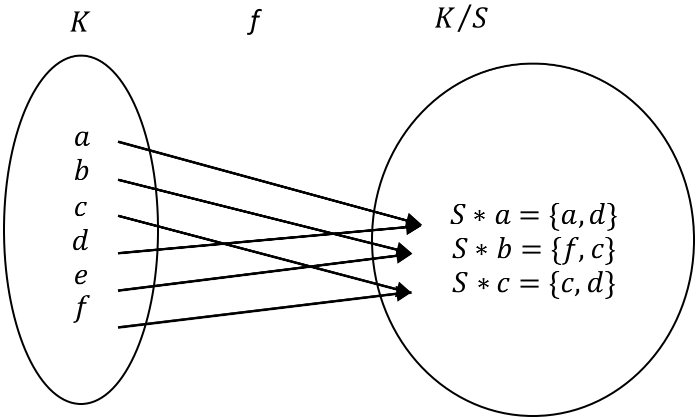
Diberikan K dan K/S masing-masing adalah LA-modul dengan $S = \{a, d\}$. Pemetaan $f: K \to K/S$

$$x \mapsto f(x) = S * x.$$

Akan dicari $Ker(f)$.

Bukti:

Elemen e pada K/S adalah $S * a$, maka pemetaan $f: K \to K/S$ sebagai berikut.



Gambar 3.1 Kernel f pada pemetaan $f: K \to K/S$

Pada Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa terdapat beberapa elemen K yang dipetakan ke elemen $e = S * a$ di K/S. Maka $Ker(f) = \{a, d\}$.

Teorema 3.3.5

Misalkan M dan M' masing-masing adalah LA-modul. $\varphi: M \to M'$ adalah homomorfisma dari M ke M', maka

1. Jika 0_M merupakan elemen identitas di M, maka $\varphi(0_M) = 0_{M'}$.
2. Jika $a \in M$, maka $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.
3. Jika A merupakan LA-submodul dari M, maka $\varphi(A)$ merupakan LA-submodul dari M'.
4. Jika B merupakan LA-submodul dari M', maka $\varphi^{-1}(B)$ merupakan LA-submodul dari M.

Bukti:

1. Karena 0_M merupakan elemen identitas di M,
$$a + 0_M = 0_M + a = a, \forall a \in M,$$
sehingga berlaku $\varphi(a + 0_M) = \varphi(0_M + a) = \varphi(a)$. Karena φ homomorfisma, maka diperoleh:
i. $\varphi(a + 0_M) = \varphi(a) + \varphi(0_M) = \varphi(a)$ dan
ii. $\varphi(0_M + a) = \varphi(0_M) + \varphi(a) = \varphi(a)$.
Jadi, diperoleh $\varphi(a) + \varphi(0_M) = \varphi(0_M) + \varphi(a) = \varphi(a), \forall a \in M$ dan dengan demikian $\varphi(0_M) = 0_{M'}$, yaitu elemen identitas di M'.
2. Ambil sebarang $a \in M$ sedemikian sehingga berlaku
$$a + (-a) = (-a) + a = 0_M.$$
Karena $a + (-a) = (-a) + a = 0_M$, maka berlaku
$$\varphi\big(a + (-a)\big) = \varphi\big((-a) + a\big) = \varphi(0_M).$$
Karena φ homomorfisma dan menurut 1 berlaku $\varphi(0_M) = 0_{M'}$, maka diperoleh:
i. $\varphi(a + (-a)) = \varphi(a) + \varphi(-a) = 0_{M'}$ dan
ii. $\varphi((-a) + a) = \varphi(-a) + \varphi(a) = 0_{M'}$.
Jadi, diperoleh $\varphi(a) + \varphi(-a) = \varphi(-a) + \varphi(a) = 0_{M'}, \forall a \in M$ dan dengan demikian berlaku $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.
3. Ambil sebarang $a, b \in \varphi(A)$, maka $a = \varphi(x)$ dan $b = \varphi(y)$ untuk suatu $x, y \in A$. Diperhatikan, $a - b = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)$. Karena A LA-submodul dan $x, y \in A$, maka menurut Lemma 2.5.16 berlaku $x - y \in A$ dan $a - b = \varphi(x - y) \in \varphi(A)$. Ambil sebarang $r \in R$ dan diperhatikan bahwa $ra = r\varphi(x) = \varphi(rx)$. Karena A LA-submodul, maka menurut Lemma 2.5.16

berlaku $rx \in A$ dan $ra = \varphi(rx) \in \varphi(A)$. Jadi, menurut Lemma 2.5.16 terbukti bahwa $\varphi(A)$ merupakan LA-submodul.

4. Ambil sebarang $a, b \in \varphi^{-1}(B)$, maka $\varphi(a) = k_1$ dan $\varphi(b) = k_2$, untuk suatu $k_1, k_2 \in B$. Karena B LA-submodul, maka menurut Lemma 2.5.16, berlaku $k_1 - k_2 \in B$ dan dengan demikian $k_1 - k_2 = \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) \in B$, sehingga berlaku $a - b \in \varphi^{-1}(B)$. Ambil sebarang $r \in R$ dan diperhatikan bahwa $rk_1 = r\varphi(a) = \varphi(ra)$. Karena B submodul, maka menurut Lemma 2.5.16, berlaku $rk_1 = \varphi(ra) \in B$ dan dengan demikian $ra \in \varphi^{-1}(B)$. Jadi, menurut Lemma 2.5.16 terbukti bahwa $\varphi^{-1}(B)$ merupakan LA-submodul

Proposisi 3.3.6

Misalkan R adalah suatu LA-ring. M dan N masing-masing adalah suatu LA-modul R dan pemetaan $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma LA-modul. φ merupakan monomorfisma LA-modul jika dan hanya jika $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Misalkan φ monomorfisma LA-modul. Ambil $a \in \operatorname{Ker} \varphi$. Maka $\varphi(a) = 0'$, karena φ homomorfisma LA-modul maka berlaku $\varphi(0) = 0'$. Karena φ adalah satu-satu, maka diperoleh $a = 0$. Akibatnya $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

$(\Leftarrow)$

Misalkan $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ dan misalkan $\varphi(a) = \varphi(b)$. Diperoleh $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, sehingga $\varphi(a - b) = 0$. Karena $\varphi(a - b) = 0$, maka $a - b \in \operatorname{Ker} \varphi$. Karena $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, maka $a - b = 0$, yaitu $a = b$. Terbukti $\varphi(a) = \varphi(b)$ maka $a = b$. Jadi φ satu-satu.

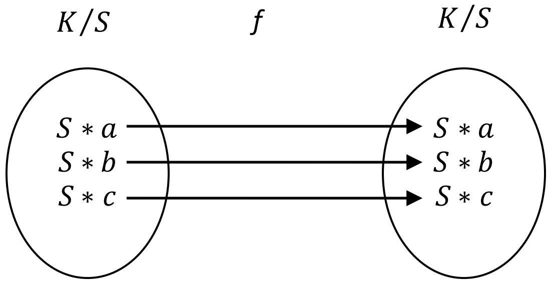
Contoh 3.3.8

Diberikan K adalah LA-modul dengan $S = \{a, d\}$ adalah LA-submodul di K.

Pemetaan $f: K/S \to K/S$

$$S * x \mapsto f(S * x) = S * x$$

Tunjukkan bahwa f monomorfisma jika dan hanya jika Ker $f = S * a$



Gambar 3.2 Pemetaan $f: K/S \to K/S$

Bukti:

($\Rightarrow$)

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa pemetaan $f: K/S \to K/S$ merupakan monomorfisma. Maka Ker $f = S * a$.

($\Leftarrow$)

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa Ker $f = \{S * a\}$.
Karena $S * a$ merupakan elemen identitas pada K/S, maka Ker $f = \{0\}$. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan monomorfisma.

1. f merupakan homomorfisma LA-modul

   i. $f(a * b) = S * (a * b)$
   $= (S * a) * (S * b)$
   $= f(a) * f(b)$

   ii. $f(r \odot a) = S * (r \odot a)$
   $= (S * r) \odot (S * a)$
   $= r \odot f(a)$

   Berdasarkan i) dan ii) terbukti bahwa f merupakan homomorfisma LA-modul.

2. f merupakan injektif.

   f merupakan injektif karena

$$f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$
$$f(S * a) = f(S * a) \to S * a = S * a$$
$$f(S * b) = f(S * b) \to S * b = S * b$$
$$f(S * c) = f(S * c) \to S * c = S * c$$

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa f merupakan monomorfisma.

Pembuktian kanan dan kiri terpenuhi maka terbukti bahwa f monomorfisma jika dan hanya jika $\ker f = \{0\}$.

Teorema 3.3.7 (Teorema Isomorfisma I)

Misalkan R adalah suatu LA-ring. M dan N masing-masing adalah LA-modul atas R. $\theta: M \to N$ adalah suatu homomorfisma dari M ke N. Jika θ adalah epimorfisma, maka $M/Ker\theta \cong N$.

Bukti:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & N \\
M/Ker\theta \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Gambar 3.3 Diagram Teorema Isomorfisma I

Didefinisikan $\varphi : M \to N$

$$a \to \varphi(a) = a'$$
$$b \to \varphi(b) = b'$$
$$\sigma : M \to M/\text{Ker}\,\varphi$$
$$a \to \sigma(a) = N + a$$
$$b \to \sigma(b) = N + b$$
$$\theta : M/\text{Ker}\,\varphi \to N$$
$$N + a \to \theta(N + a) = \varphi(a) = a'$$
$$N + b \to \theta(N + b) = \varphi(b) = b'$$

Akan dibuktikan $\varphi: M \to N$ merupakan isomorfisma. Misalkan $\text{Ker}\,\varphi = K$.

i. Pemetaan

Ambil $K + a, K + b \in M/K$, dimana $a, b \in M$. Maka

$$K + a = K + b$$
$$K + a - b = K$$

$$a - b \in K$$
$$a - b \in Ker\ \varphi$$
$$\varphi(a - b) = 0$$
$$\varphi(a) - \varphi(b) = 0$$
$$\varphi(a) = \varphi(b)$$
$$\theta(K + a) = \theta(K + b)$$

ii. Injektif

Ambil $a + K, b + K \in M/K$, dimana $a, b \in M$. Maka

$$\theta(K + a) = \theta(K + b)$$
$$\varphi(a) = \varphi(b)$$
$$\varphi(a) - \varphi(b) = 0$$
$$\varphi(a - b) = 0$$
$$a - b \in Ker\ \varphi$$
$$a - b \in K$$
$$K + a - b = K$$
$$K + a = K + b$$

iii. Surjektif

Karena $N = \varphi(N)$ maka untuk setiap $\varphi(a)$ di N terdapatlah $K + a$ di M/K sedemikian sehingga $\theta(K + a) = \varphi(a)$.

iv. Homomorfisma

1. $\theta\big((K + a) + (K + b)\big) = \theta(K + (a + b))$
$$= \varphi(a + b)$$
$$= \varphi(a) + \varphi(b)$$
$$= \theta(K + a) + (K + b)$$

2. $\theta\big(r(K + a)\big) = \theta(K + ra)$
$$= \varphi(ra)$$
$$= r\varphi(a)$$
$$= r\theta(K + a)$$

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv dapat disimpulkan bahwa θ merupakan isomorfisma.

Teorema 3.3.8 (Teorema Isomorfisma II)

Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M adalah suatu LA-modul atas R. Jika A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari M, maka
$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B).$$

Bukti:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & \dfrac{A+B}{A} \\
\dfrac{B}{A \cap B} \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Gambar 3.4 Diagram Teorema Isomorfisma II

Jika $A + B$ adalah LA-submodul, maka $A + B$ merupakan LA-modul. A adalah LA-submodul dari $A + B$, sehingga $\frac{A+B}{A}$ merupakan LA-modul faktor.

1. Jika $A \cap B$ adalah LA-submodul dari B, maka $\frac{B}{A \cap B}$ merupakan suatu LA-modul.
   Akan ditunjukkan $A \cap B$ adalah LA-submodul dari B.
   a. Misalkan A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari B. Ambil $a \in A \cap B$ dan $c \in B$, berlaku $ca \in A$ dan $ca \in B$, sehingga $ca \in A \cap B$. Karena $ca \in A \cap B$, sehingga $B(A \cap B) \subseteq A \cap B$.
   b. Misalkan A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari B. Ambil $a, b \in A \cap B$, maka $a, b \in A$ dan $a, b \in B$. Karena A dan B LA-submodul, berlaku $a - b \in A$ dan $a - b \in B$, sehingga $a - b \in A \cap B$.

   Berdasarkan a dan b dapat disimpulkan bahwa $A \cap B$ adalah LA-submodul dari B, sehingga $\frac{B}{A \cap B}$ merupakan LA-modul.
2. φ : homomorfisma LA-modul yang surjektif.
   Didefinisikan $\varphi : B \rightarrow \frac{A+B}{A}$

$$x \rightarrow \varphi(x) = A + a + x = A + a$$

Ambil $x, y \in B$ maka

$$\varphi(x+y) = A + (x+y) = (A+x) + (A+y)$$
$$= \varphi(A+x) + \varphi(A+y)$$
$$\varphi(xy) = A + (xy) = (A+x)(A+y)$$
$$= \varphi(A+x)\varphi(A+y)$$

Jadi terbukti φ adalah homomorfisma LA-modul. Selanjutnya akan dibuktikan φ surjektif.

$\forall a + A \in \dfrac{A+B}{A}$, $\exists a \in B, \ni \varphi(a) = A + a$. Jadi φ surjektif.

Karena φ merupakan homomorfisma LA-modul yang surjektif, maka $Im\ \varphi = \dfrac{A+B}{A}$.

3. Ker $\varphi = A \cap B$

$$Ker\ \varphi = \{x \in B : \varphi(x) = 0\}$$
$$= \{x \in B : \varphi(x) = A\}$$
$$= \{x \in B : A + x = A\}$$
$$= \{x \in B : x \in A\}$$
$$= A \cap B$$

Jadi, $Ker\ \varphi = A \cap B$.

Berdasarkan Teorema 3.3.7 diperoleh $\dfrac{B}{Ker\varphi} \cong \dfrac{A+B}{A}$. Jadi, φ merupakan isomorfisma atau $\dfrac{A+B}{A} \cong \dfrac{B}{A \cap B}$.

Contoh 3.3.11

Diberikan $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ merupakan LA-modul. Kemudian diberikan $S = \{a, d\}$ dan $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ masing-masing adalah LA-submodul di K. Akan dibuktikan bahwa $\dfrac{S * P}{S} \cong \dfrac{P}{S \cap P}$.

Bukti:

Didefinisikan $\varphi : P \to \dfrac{S * P}{S}$

$$x \mapsto \varphi(x) = S * s * x = S * x$$

$S * P = \{a, b, c, d, e, f\}$, sehingga $\frac{S*P}{S} = \{S * a, S * b, S * c\}$.

Kemudian $S \cap P = \{a, d\}$, sehingga $\frac{P}{S \cap P} = \{S * a, S * b, S * c\}$.

Akan dibuktikan bahwa

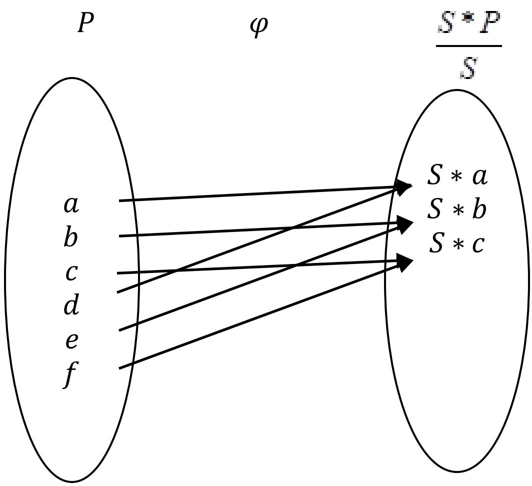
1. φ merupakan homomorfisma LA-modul yang surjektif

   Ambil sebarang $x = a, y = c \in P$ sehingga berlaku

   i. $\varphi(x * y) = \varphi(a * c)$
   $= \varphi(c)$
   $= S * c$
   $= (S * a) * (S * c)$
   $= \varphi(a) * \varphi(c)$

   ii. $\varphi(r \odot x) = \varphi(r \odot a)$
   $= r \odot \varphi(a)$
   $= r \odot (S * a)$
   $= r \odot \varphi(a)$

Jadi terbukti φ adalah homomorfisma LA-modul. Selanjutnya akan dibuktikan φ surjektif.



Gambar 3.5 Pemetaan $\varphi : P \to \frac{S*P}{S}$

Pada Gambar 3.5 dapat dilihat bahwa untuk setiap $S * x \in \dfrac{S*P}{S}$ terdapatlah $x \in P$ sedemikian sehingga $\varphi(x) = S * x$. Jadi φ surjektif.

Karena φ merupakan homomorfisma yang surjektif,

maka $Im\ \varphi = \dfrac{S*P}{S}$.

2. Ker $\varphi = S \cap P$.

Pada Gambar 3.5 dapat dilihat bahwa Ker $\varphi = \{a, d\}$, maka terbukti bahwa ker $\varphi = S \cap P$.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa φ merupakan isomorfisma atau

$$\frac{S*P}{S} \cong \frac{P}{S \cap P}.$$

Teorema 3.3.9 (Teorema Isomorfisma III)

Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M adalah suatu LA-modul atas R. A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari M. Jika $I \subseteq J$, maka

$$M/B \cong (M/A)/(B/A).$$

Bukti:

$$\begin{tikzcd}
M/A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & M/B \\
\dfrac{M/A}{B/A} \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Gambar 3.6 Diagram Teorema Isomorfisma III

Akan dibuktikan bahwa

i. M/A merupakan LA-modul.

Karena M merupakan LA-modul dan A merupakan LA-submodul dari M, maka M/A merupakan LA-modul.

ii. M/B merupakan suatu LA-modul.
Karena M merupakan LA-modul dan B merupakan LA-submodul dari M, maka M/B merupakan LA-modul.

iii. Jika B/A adalah LA-submodul di M/A maka $\frac{M/A}{B/A}$ merupakan suatu LA-modul.
Akan ditunjukkan B/A ideal dari M/A.

a. Ambil sebarang $A+x \in B/A, x \in B$. Karena $A \subseteq B \subseteq M$, maka $x \in M$ sehingga $A+x \in M/A$. Jadi $B/A \subseteq M/A$.
b. Ambil $x \in B/A$, maka $x = A+a$ dan $y \in M/A$, maka $y = A+a$ dengan $a \in B$ dan $b \in M$. Sehingga diperoleh
$$xy = (A+a)(A+b) = A+(ab), ab \in B.$$
Karena $B \subseteq M$, maka $ab \in M$, sehingga $A+(ab) \subseteq M$.
c. Ambil $x \in B/A$ dan $y, z \in M/A$ maka $x = A+a, y = A+b$, dan $z = A+c$ dengan $x \in B$ dan $a, b, c \in M$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(x+y)z - yz &= \big((A+a)+(A+b)\big)(A+c) - \big((A+b)(A+c)\big)\\ &= ((a+b)+A)(A+c) - A + (bc)\\ &= A + (ac+bc) - A(bc)\\ &= A + (ac+bc-bc)\\ &= A + ac, ac \in B\end{aligned}$$

Jadi, $(x+y)z - yz \in B/A$.

Berdasarkan a, b, dan c dapat disimpulkan bahwa B/A adalah LA-submodul dari M/A. Selanjutnya karena M/A LA-modul dan B/A adalah LA-submodul dari M/A, sehingga $\frac{M/A}{B/A}$ merupakan LA-modul.

iv. φ merupakan homomorfisma yang surjektif.
Didefinisikan $\varphi : M/A \to B/A$
$$A+x \to \varphi(A+x) = B+x$$
Ambil $A+x, A+y \in M/A$, maka berlaku

1. $\varphi\big((A+x)+(A+y)\big) = \varphi(A+(x+y))$
$$= A+(x+y)$$

$$= (B + x) + (B + y)$$
$$= \varphi(B + x) + \varphi(B + y)$$

2. $\varphi\big(r(A + x)\big) = \varphi(A + (rx))$
$$= B + (rx)$$
$$= r(B + x)$$
$$= r\varphi(B + x)$$

Terbukti homomorfisma LA-modul.
Selanjutnya akan ditunjukkan φ surjektif.
Karena $\forall B + x \in M/B, \exists A + x \in M/A, \ni \varphi(a + A) = a + B$.
Jadi, $\mathrm{Im}\,\varphi = M / B$.

v. Ker $\varphi = \dfrac{B}{A}$

$$Ker\ \varphi = \{A + x \in M/A : \varphi(A + x) = B\}$$
$$= \{A + x \in M/A : B + x = B\}$$
$$= \{A + x \in M/A : x \in B\}$$
$$= \{A + x \in B/A\}$$
$$= B/A$$

Berdasarkan Teorema 3.3.7 diperoleh $\dfrac{B/A}{Ker\varphi} \cong M/B$. Jadi, φ isomorfisma atau $\dfrac{M/A}{B/A} \cong M/B$.

3.4 *Direct Sum* (Hasil Jumlah Langsung)

Seperti halnya pada modul, pada LA-modul juga terdapat konsep *direct sum* (hasil jumlah langsung). Berikut ini diberikan definisi dan teorema yang berkaitan dengan *direct sum* LA-modul.

Definisi 3.4.1
Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. $N_1, N_2, \dots, N_k$ masing-masing adalah LA-submodul dari LA-modul M. M disebut hasil jumlah langsung (*internal direct sum*) dari $N_1, N_2, \dots, N_k$, jika memenuhi

$i.\ M = \sum_{i=1}^{k} N_i$

$$ii. N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\}$$

untuk $1 \leq i \leq k$.

M disebut hasil jumlah langsung dari LA-submodul $N_1, N_2, \dots, N_k$, biasa diberi notasi $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$.

Contoh 3.4.2

$Z_{12}: Z-$ LA-modul, $N_1 = \{\bar{0}\}, N_2 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}, N_3 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ adalah LA-submodul dari Z_{12}. Akan ditunjukkan apakah

$$Z_{12} = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3.$$

Bukti:

i. $N_1 + N_2 + N_3 = \{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = Z_{12}$

ii. $N_1 \cap (N_2 + N_3) = \{\bar{0}\} \cap [\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}] = \{\bar{0}\}$

$N_2 \cap (N_1 + N_3) = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} \cap [\{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}] = \{\bar{0}\}$

$N_3 \cap (N_1 + N_2) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} \cap [\{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}] = \{\bar{0}\}$

Syarat (i). dan (ii). dipenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa $Z_{12} = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$.

Teorema 3.4.5

Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. Jika $M_1, M_2, \dots, M_k$ adalah LA-submodul dari M, maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. M adalah *direct sum* (hasil jumlah langsung).
2. $\forall m \in M$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai bentuk $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ dengan $m_i \in M_i$.

Bukti:

$(1) \Rightarrow (2)$

Diketahui M adalah hasil jumlah langsung dari M_i. Ini berarti $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$, sehingga memenuhi

$$i. M = \sum_{i=1}^{k} M_i$$

$$ii. N_i \cap \sum_{i \neq j} M_j = \{0\}$$

untuk $1 \leq i \leq k$.

Dari (i), jika $m \in M$ dan $m_i \in M_i$, maka jelas berlaku

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Ini berarti ketentuan (2) dipenuhi. Tinggal membuktikan ketunggalannya. Misalkan ada pernyataan lain, yaitu

$$m = m_1' + m_2' + \cdots + m_i' = \sum_{i=1}^{k} m_i{}',$$

maka

$$m_i - m_1' = \sum_{i=1}^{k} m_j - m_j' \in M_i \cap \sum_{i=1}^{k} M_j = \{0\}.$$

Ini berarti $m_i - m_1'$, yaitu pernyataan (2) tunggal.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Diketahui $\forall m \in M$ dinyatakan secara tunggal sebagai bentuk $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ dengan $m_i \in M_i$.

Yang harus dibuktikan, yaitu

$$i.\, M = \sum_{i=1}^{k} M_i$$

$$ii.\, N_i \cap \sum_{i \neq j} M_j = \{0\}$$

untuk $1 \leq i \leq k$.

Dari yang diketahui jelas berlaku (i). Kemudian karena ketunggalan pernyataan tersebut,

Jika $m \in M_1$, maka $m = m + 0 + \cdots + 0 + 0 + \cdots + 0$.

Jika $m \in M_2$, maka $m = 0 + m + \cdots + 0 + 0 + \cdots + 0$.

.

.

Jika $m \in M_i$, maka $m = 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 + \cdots + m$. Akibatnya,

$$M_i \cap \sum_{i \neq j} M_j = \{0\},$$

untuk $1 \leq i \leq k$, yaitu (ii) dipenuhi. Karena (i) dan (ii), maka dapat di simpulkan bahwa M merupakan hasil tambah langsung dari M_i.

BAB IV
KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan mengenai *left almost modules*, dapat diberikan beberapa kesimpulan:

1. *Left almost modules* (LA-modul) merupakan pengembangan konsep modul.
2. Setiap modul merupakan LA-modul, namun suatu LA-modul belum tentu modul.
3. Irisan tak kosong dari dua LA-submodul merupakan suatu LA-submodul.
4. Teorema Isomorfisma LA-modul merupakan kasus khusus dari Teorema Isomorfisma modul dengan pembuktian yang serupa.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2014. *Ring, Field dan Daerah Integral*. Malang: UB Press.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Malang: UB Press.

Andari, A. 2015. *Pengantar Teori Modul.* Malang: UB Press.

Bhattacharya, P.B, S.K. Jain dan S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University Press.

Fraleigh, J.B. 1944. *A First Course In Abstract Algebra*. John Willey and Sons, Inc. New York

Gaketem, T. 2013. Quasi-Ideals of A P-Regular Near Left Almost Rings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 87, no. 2, 219-227.

Hartley, B. Dan T. O. Hawkes. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra*. Chapman and Hall LTD. London.

Kandasamy,W.B. 2002. *Groupoid ad Smarandache Groupoids.* Department of Mathematics, Indian Institute of Technology. Chennay, India.

Kazim, M.A dan Naseeruddin, M. 1977. On Almost Semigroups. *Aligarh. Bull. Math.* No 2, 1-7.

Mushtaq, Q dan Kamran, M.S. 1996. On Left Almost Groups. *Proc. Pak. Acad. of Science.* No. 33, 1-2.

Shah, M. dan A. Ali. 2011. Some Structural Properties of AG-Group. *International Mathematical Forum.* Vol. 6, no. 34, 1661-1667.

S.M. Yusuf. 2006. On Left Almost Ring. *Proc. of* 7^{th} *International Pure Math. Conference.*

Tariq Shah, R. ur Fazal dan R. Muhammad. 2011. On Near Left Almost Rings. *International Mathematical Forum.* Vol. 6, 2011, no. 23, 1103-1111.

Tariq Shah, R. Muhammad dan A. Gauhar. 2011. On Left Almost Modules. *International J. Contemp. Math. Sciences.* Vol. 6, 2011, no. 21, 999-1006.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. London: Blackie Academic & Professional.