BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas definisi, sifat, proposisi, teorema, lemma serta contoh yang berkaitan dengan LA-modul atas LA-ring, LA-submodul, LA-modul faktor, dan homomorfisma LA-modul berdasarkan Tariq Shah dkk. (2011).

3.1 *Left Almost Modules* (LA-Modul)

Left almost modul (LA-modul) merupakan pengembangan dari konsep modul. Berikut ini diberikan definisi dan contoh LA-modul.

Definisi 3.1.1 (LA-modul)
Misalkan $(M,+)$ adalah suatu LA-grup dan $(R,+,\cdot)$ adalah suatu LA-ring dengan elemen identitas kiri 1. Serta diberikan pula operasi biner,

$$\begin{aligned} *: R \times M &\to M \\ (r,m) &\mapsto * (r,m) = r * m. \end{aligned}$$

Himpunan M disebut LA-modul kiri atas R, jika memenuhi keempat aksioma berikut:

1. $r * (m_1 + m_2) = r * m_1 + r * m_2$,
2. $(r_1 + r_2) * m = r_1 * m + r_2 * m$,
3. $(r_1 * r_2) * m = r_2 * (r_1 * m)$,
4. $1.m = m$,

$\forall\, r, r_1, r_2 \in R, \forall\, m, m_1, m_1 \in M.$

Contoh 3.1.2
Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}[x]:\mathbb{Z}$ LA-modul.

Bukti:
1. Berdasarkan Contoh 2.7.3, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}[x],+)$ merupakan LA-grup.
2. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.
   a. Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu
   $$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \sum_i a_ix^i,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots = \sum_i b_ix^i,$$
$$h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_0x^0 = \sum_i c_ix^i,$$

berlaku

$$r \cdot \big(f(x) + g(x)\big)$$
$$= r\big[(a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \cdots + (a_p + b_p)x^p + \cdots\big]$$
$$= \big[r(a_0 + b_0)x^0 + r(a_1 + b_1)x^1 + \cdots + r(a_p + b_p)x^p + \cdots\big]$$
$$= ra_0 + rb_0 + ra_1x^1 + rb_1x^1 + \cdots + ra_px^p + rb_px^p + \cdots$$
$$= (ra_0 + ra_1x^1 + \cdots ra_px^p + \cdots) + (rb_0 + rb_1x^1 + \cdots$$
$$+rb_px^p + \cdots)$$
$$= rf(x) + rg(x)$$

$\forall\, r \in \mathbb{Z}, \forall\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

b. Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = \sum_i a_ix^i$, berlaku

$$(r_1 + r_2) \cdot f(x)$$
$$= (r_1 + r_2) \cdot a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots$$
$$= (r_1 + r_2)a_0x^0 + (r_1 + r_2)a_1x^1 + (r_1 + r_2)a_2x^2 + \cdots$$
$$= (r_1a_0x^0 + r_2a_0x^0) + (r_1a_1x^1 + r_2a_1x^1)$$
$$+(r_1a_2x^2 + r_2a_2x^2) + \cdots$$
$$= (r_1a_0x^0 + r_1a_1x^1 + r_1a_2x^2 + \cdots)$$
$$+(r_2a_0x^0 + r_2a_1x^1 + r_2a_2x^2 + \cdots)$$
$$= r_1 \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) + r_2$$
$$\cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)$$
$$= r_1f(x) + r_2f(x)$$

$\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, \forall\, f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

c. Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, yaitu $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = \sum_i a_ix^i$, berlaku

$$(r_1 \cdot r_2) \cdot f(x)$$
$$= (r_1r_2)(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)$$
$$= (r_1r_2)a_0x^0 + (r_1r_2)a_1x^1 + (r_1r_2)a_2x^2 + \cdots$$
$$= (r_2r_1)a_0x^0 + (r_2r_1)a_1x^1 + (r_2r_1)a_2x^2 + \cdots$$
$$= r_2(r_1a_0x^0) + r_2(r_1a_1x^1) + r_2(r_1a_2x^2) + \cdots$$
$$= r_2(r_1f(x))$$

$\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, \forall\, f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

d. $1 \cdot f(x) = 1 \cdot (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0)$

$$= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_0x^0 = f(x)$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $(\mathbb{Z}[x], +,\cdot)$ merupakan suatu LA-modul.

Contoh 3.1.3

Diberikan $N = \{a, b, c, d, e\}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ yang didefinisikan pada Tabel 2.8 dan Tabel 2.9.

$$\odot: N \times N \to N$$

$$(r, m) \mapsto \odot\,(r, m) = r \odot m$$

Akan dibuktikan bahwa N merupakan LA-modul atas LA-ring N.

Bukti:

i. Akan dibuktikan $(N,*,\odot)$ merupakan LA-ring.
   Pada Contoh 2.7.2, sudah dibuktikan bahwa $(N,*,\odot)$ merupakan LA-ring.

ii. Akan dibuktikan N merupakan LA-modul.
   1. $(N, +)$ merupakan LA-grup
      Pada Contoh 2.7.2, sudah dibuktikan bahwa $(N, +)$ merupakan LA-grup.

iii. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.
   a. $r \odot (m_1 * m_2) = (r \odot m_1) * (r \odot m_2)$
      $\forall\, r \in N, \forall\, m_1, m_2 \in N$.
      Aksioma ini merupakan hukum distributif kiri yang juga sudah dibuktikan pada Contoh 2.7.2.
   b. $(r_1 * r_2) \odot m = (r_1 * m) \odot (r_2 * m)$
      $\forall\, r_1, r_2 \in N, \forall\, m \in N$.
      Aksioma ini merupakan hukum distributif kanan yang juga sudah dibuktikan pada Contoh 2.7.2.
   c. $r_1 \odot (r_2 \odot m) = r_2 \odot (r_1 \odot m), \forall\, r_1, r_2 \in N, \forall\, m \in N$.
      Ambil sebarang $r_1, r_2 \in N$ dan $m \in N$.
      Untuk $r_1 = a + 4k_1, r_2 = b, m = c$, maka diperoleh
      $$r_1 \odot (r_2 \odot m) = a \odot (b \odot c) = a \odot c = a$$
      $$r_2 \odot (r_1 \odot m) = b \odot (a \odot c) = b \odot a = a$$
      Dengan cara yang sama berlaku $\forall r_1, r_2 \in N$ dan $m \in N$.
   d. $n \odot m = m, \exists n \in N, \forall m \in N, n = b$.
      $$m = a, b \odot a = a$$
      $$m = b, b \odot b = b$$

$$m = c, b \odot c = c$$
$$m = d, b \odot d = d$$
$$m = e, b \odot e = e$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $(N,*,\odot)$ merupakan suatu LA-modul tetapi bukan modul.

Contoh 3.1.4

Diberikan $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ yang didefinisikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2.

$$\odot: K \times K \to K$$
$$(r, m) \mapsto \odot\,(r, m) = r \odot m$$

Akan dibuktikan bahwa K merupakan LA-modul atas LA-ring K.

Tabel 3.1 Operasi $*$ pada K.

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	f	a	b	c	d	e
c	e	f	a	b	c	d
d	d	e	f	a	b	c
e	c	d	e	f	a	b
f	b	c	d	e	f	a

Tabel 3.2 Operasi $\odot$ pada K

$\odot$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e	f
c	a	c	e	a	c	e
d	a	d	a	d	a	d
e	a	e	c	a	e	c
f	a	f	e	d	c	b

Bukti:

i. Akan dibuktikan $(K,*,\odot)$ merupakan LA-ring.

   1. $(K,*)$ merupakan LA-grup.

      a. Memenuhi hukum invertif kiri

Ambil sebarang $x, y, z \in K$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

$$(x * y) * z = (a * b) * c = b * c = b$$
$$(z * y) * x = (c * b) * a = e * a = b$$

sehingga $(x * y) * z = (z * y) * x$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.

b. Mempunyai elemen identitas kiri
Elemen identitas kiri dari $(K,*)$ adalah a sedemikian sehingga $\forall x \in K$ berlaku $a * x = x$.

c. Setiap elemen mempunyai invers kiri
Invers a adalah a, karena $a * a = a$
Invers b adalah b, karena $b * b = a$
Invers c adalah c, karena $c * c = a$
Invers d adalah d, karena $d * d = a$
Invers e adalah e, karena $e * e = a$
Invers f adalah f, karena $f * f = a$

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(K,*)$ merupakan LA-grup.

2. $(K,\odot)$ merupakan LA-semigrup
Memenuhi hukum invertif kiri
Ambil sebarang $x, y, z \in K$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

$$(x \odot y) \odot z = (a \odot b) \odot c = a \odot c = a$$
$$(z \odot y) \odot x = (c \odot b) \odot a = d \odot a = a$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.
Terbukti bahwa $(K,\odot)$ merupakan LA-semigrup.

3. Berlaku hukum distributif
Ambil sebarang $x, y, z \in K$, yaitu $x = a, y = b, z = c$ diperoleh

- Distributif kanan

$$(x \odot y) * z = (a \odot b) * c = a \odot c = a$$
$$(x \odot z) * (y \odot z) = (a \odot c) * (b \odot c) = a * a = a$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.

- Distributif kiri

$$x \odot (y * z) = a \odot (b * c) = a \odot b = a$$
$$(x \odot y) * (x \odot z) = (a \odot b) * (a \odot c) = a * a = a$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in K$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(K,*,\odot)$ merupakan LA-ring.

ii. Akan dibuktikan K merupakan LA-modul.

1. $(K, +)$ merupakan LA-grup
   Pada (i) sudah dibuktikan bahwa $(K, +)$ merupakan LA-grup.
2. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.
   a. $r \odot (m_1 * m_2) = (r \odot m_1) * (r \odot m_2)$
      $\forall\, r \in K, \forall\, m_1, m_2 \in K.$
      Aksioma ini merupakan hukum distributif kiri yang juga sudah dibuktikan pada (i).
   b. $(r_1 * r_2) \odot m = (r_1 * m) \odot (r_2 * m)$
      $\forall\, r_1, r_2 \in K, \forall\, m \in K.$
      Aksioma ini merupakan hukum distributif kanan yang juga sudah dibuktikan pada (i).
   c. $r_1 \odot (r_2 \odot m) = r_2 \odot (r_1 \odot m), \forall\, r_1, r_2 \in K, \forall\, m \in K.$
      Ambil sebarang $r_1, r_2 \in K$ dan $m \in K$. Untuk $r_1 = a, r_2 = b, m = c$, maka diperoleh
      $$r_1 \odot (r_2 \odot m) = a \odot (b \odot c) = a \odot c = a$$
      $$r_2 \odot (r_1 \odot m) = b \odot (a \odot c) = b \odot a = a$$
      Dengan cara yang sama berlaku $\forall r_1, r_2 \in K$ dan $m \in K$.
   d. $n \odot m = m, \exists n \in K, \forall m \in K, n = b.$
      $$m = a, b \odot a = a$$
      $$m = b, b \odot b = b$$
      $$m = c, b \odot c = c$$
      $$m = d, b \odot d = d$$
      $$m = e, b \odot e = e$$
      $$m = f, b \odot f = f$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa $(K,*,\odot)$ merupakan suatu LA-modul tetapi bukan modul.

Contoh 3.1.5

Diberikan himpunan vektor di $\mathbb{R}^2$ yang direpresentasikan sebagai matriks vertikal dan ring berupa himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real.

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diberikan pula operasi biner

$$\cdot : M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) \mapsto \cdot \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ai \\ bj \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2 : M_2(\mathbb{R}) -$ modul kiri.

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}^2, +)$ merupakan LA-grup.

a. Memenuhi hukum invertif kiri.

Ambil sebarang $P, Q, S \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ berlaku

$$\begin{aligned}
(P+Q)+S &= \left[\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i+k \\ j+l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i+(k+m) \\ j+(l+n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (i+m)+k \\ (j+n)+l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m+(i+k) \\ n+(j+l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m+(i+k) \\ n+(j+l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (m+k)+i \\ (n+l)+j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (m+k) \\ (n+l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = (S+Q)+P
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall P, Q, S \in \mathbb{R}^2$.

b. Mempunyai elemen identitas kiri.

Elemen identitas kiri dari $\mathbb{R}^2$ adalah $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

Karena $E + P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+i \\ 0+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$.

c. Setiap elemen mempunyai invers kiri.

Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Invers dari $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ adalah $-P = \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix}$, karena $-P + P = \begin{bmatrix} -i \\ -j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi, dengan menggunakan sifat pergandaan matriks dengan vektor:

1. Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned}
A \cdot (P + Q) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i + k \\ j + l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(i + k) + 0(j + l) \\ 0(i + k) + b(j + l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + (ak + 0j) + 0l \\ 0i + (0k + bj) + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + (0j + ak) + 0l \\ 0i + (bj + 0j) + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + 0j + ak + 0l \\ 0i + bj + 0k + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + 0j \\ 0i + bj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ak + 0l \\ 0k + bl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \\
&= A \cdot P + A \cdot Q
\end{aligned}$$

2. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned}
(A + B) \cdot P &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a + c)i \\ (b + d)j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + ci + 0j \\ 0i + bj + dj \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai + ci \\ bj + dj \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai \\ bj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ci \\ dj \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= A \cdot P + B \cdot P$$

3. Ambil sebarang $P \in \mathbb{R}^2$, yaitu $P = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$. Ambil sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, berlaku
$$(A \cdot B) \cdot P = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aci \\ bdj \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cai \\ dbj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ai \\ bj \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \right)$$
$$= B \cdot (A \cdot P)$$
4. $E_R \cdot P = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ci \\ dj \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian dia atas bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan LA-modul atas $M_2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1.6

JIka R adalah LA-ring dan M merupakan suatu LA-modul atas R, maka berlaku ketentuan berikut.

1. Jika 0_M merupakan elemen identitas di M, maka $r0_M = 0_M$,
2. $0_R a = 0_M$,
3. $(-r)a = -ra = r(-a)$,
4. $(-r)(-a) = ra$,

   $\forall r \in R$ dan $a \in M$.

Bukti:

1. Jika 0_M adalah elemen identitas di M, maka
$$a + 0_M = 0_M + a = a, \forall a \in M,$$
sehingga berlaku $r(a + 0_M) = ra$. Sedangkan, $r0_M + ra = ra$, juga menyatakan $0_M + ra = ra$. Perhatikan persamaan $r0_M + ra = ra$ dan $0_M + ra = ra$. Dari kedua persamaan tersebut, maka didapatkan $r0_M = 0_M$.

2. Jika 0_R adalah elemen identitas di R, maka $r0_R = 0_R r = 0_R$, $\forall r \in R$, sehingga berlaku $0_R a = a0_R \in M$. Akibatnya adalah $0_R a = a0_R = 0_M$, sehingga $0_R a = 0_M$.
3. Misalkan $a \in M$ dan $r \in R$, maka terdapat $ra \in M$. Karena $ra \in M$, maka terdapat $-(ra) \in M$, sehingga $-(ra) + ra = 0_M$, juga menyatakan $(-r)a + ra = 0_M$, dan $r(-a) + ra = 0_M$. Dari ketiga persamaan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa $(-r)a = -(ra) = r(-a)$.
4. Misalkan $r \in R, a \in M$, maka terdapat $-r \in R$ dan $-a \in M$. Karena $-ra \in M$, maka terdapat $-(-ra) \in M$, sehingga $ra \in M$.

3.2 *Left Almost Submodules* (LA-Submodul) dan *Factor Left Almost Modules* (LA-Modul Faktor)

Left almost submodules (LA-submodul) merupakan bagian dari LA-modul. Sedangkan *factor left almost modules* merupakan perluasan konsep dari LA-modul. Berikut ini diberikan definisi, contoh, teorema serta proposisi pada LA-submodul dan LA-modul faktor.

Definisi 3.2.1 (LA-Submodul)
Misalkan $M: R -$ LA-modul dan $N \neq \emptyset, N \subseteq M$. Himpunan N disebut LA-submodul dari M, jika terhadap hukum komposisi yang sama dengan M, N merupakan LA-submodul.

Teorema 3.2.2
Misalkan $N \neq \emptyset$. N merupakan suatu LA-subgrup dari LA-modul M atas LA-ring R. N disebut LA-submodul atas R, jika dan hanya jika
i. $m - n \in N, \forall m, n \in N$.
ii. $r * n \in N, \forall r \in R, \forall n \in N$.

Bukti:
$\Rightarrow$
Diketahui N adalah LA-submodul atas R. Akan dibuktikan berlaku i dan ii. Karena N adalah LA-submodul, sehingga N juga merupakan LA-modul dan akibatnya berlaku i. Karena operasi pergandaan skalar yang berlaku pada M juga berlaku pada N, maka berlaku ii.

$\Leftarrow$
Diketahui berlaku i dan ii. Akan dibuktikan N adalah LA-submodul. Karena berlaku i, sehingga menurut Definisi 3.2.1 N merupakan LA-subgrup dari M. Karena berlaku ii, sehingga operasi pergandaan skalar di M juga berlaku di N. Karena N merupakan himpunan bagian dari M dan operasi pergandaan skalar di M juga berlaku di N, sehingga aksioma-aksioma LA-modul di M juga berlaku di N. Jadi, N merupakan LA-submodul dari M.

Contoh 3.2.2
Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan operasi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ merupakan LA-modul. $S = \{a, d\}$ merupakan himpunan bagian dari K. S dengan operasi yang sama dengan K, didefiniskan pada Tabel 3.3 dan tabel 3.4. Akan ditunjukkan bahwa S merupakan LA-submodul dari K.

Tabel 3.3 Operasi $*$ pada S

$*$	a	d
a	a	d
d	d	a

Tabel 3.4 Operasi $\odot$ pada S

$\odot$	a	d
a	a	a
d	a	d

Bukti:
i. $(S,*)$ merupakan LA-grup
1. Mempunyai elemen identitas kiri
   Elemen identitas kiri dari $(S,*)$ adalah a sedemikian sehingga $\forall x \in S$ berlaku $a * x = x$.
2. Setiap elemen mempunyai invers kiri
   Invers a adalah a, karena $a * a = a$
   Invers d adalah d, karena $d * d = a$
3. Memenuhi hukum invertif kiri
   Ambil sebarang $x, y, z \in S$, yaitu $x = a, y = d, z = d$, berlaku
   $$(x * y) * z = (a * d) * d = d * d = a$$

$$(z * y) * x = (d * d) * a = a * a = a$$

sehingga $(x * y) * z = (z * y) * x$, dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in S$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(S,*)$ merupakan LA-grup.

ii. Akan ditunjukkan bahwa keempat aksioma dipenuhi.

1. $r \odot (m_1 * m_2) = (r \odot m_1) * (r \odot m_2)$
   $\forall\, r \in S, \forall\, m_1, m_2 \in S$.
   Ambil sebarang $r \in S$ dan $m_1, m_2 \in S$, yaitu
   $r = a, m_1 = d, m_2 = d$, berlaku
   $$r \odot (m_1 * m_2) = a \odot (d * d) = a \odot a = a$$
   $$(r \odot m_1) * (r \odot m_2) = (a \odot d) * (a \odot d)$$
   $$= a * a = a$$
2. $(r_1 * r_2) \odot m = (r_1 * m) \odot (r_2 * m)$
   $\forall\, r_1, r_2 \in S, \forall\, m \in S$.
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in S$ dan $m \in S$, yaitu
   $r_1 = a, r_2 = d, m = d$, berlaku
   $$(r_1 * r_2) \odot m = (a * d) \odot d = d \odot d = d$$
   $$(r_1 \odot m) * (r_2 \odot m) = (a \odot d) * (d \odot d)$$
   $$= a * d = d$$
3. $r_1 \odot (r_2 \odot m) = r_2 \odot (r_1 \odot m), \forall\, r_1, r_2 \in S, \forall\, m \in S$.
   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in N$ dan $m \in N$, yaitu
   $r_1 = a, r_2 = d, m = d$, berlaku
   $$r_1 \odot (r_2 \odot m) = a \odot (d \odot d) = a \odot d = a$$
   $$r_2 \odot (r_1 \odot m) = d \odot (a \odot d) = d \odot a = a$$
   Dengan cara yang sama berlaku $\forall r_1, r_2 \in S$ dan $m \in S$.
4. $n \odot m = m, \exists n \in S, \forall m \in S$.
   $$m = a, d \odot a = a$$
   $$m = d, d \odot d = d$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas bahwa S juga merupakan suatu LA-modul.

Teorema 3.2.3

Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. Jika A dan B masing-masing LA-submodul dari M atas R, maka $A \cap B$ juga merupakan LA-submodul M.

Bukti:
Ambil $r \in R$ dan $a \in A \cap B$, maka $a \in A$ dan $a \in B$. Karena A dan B adalah LA-submodul, maka berlaku $ra \in A$ dan $ra \in B$, sehingga dapat disimpulkan $ra \in A \cap B$.
Jadi, terbukti bahwa $A \cap B$ merupakan LA-submodul dari M.

Contoh 3.2.4
Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan operasi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ merupakan LA-modul. $S = \{a, d\}$ dan $R = \{a, c, e\}$ merupakan himpunan bagian dari K. Akan dibuktikan bahwa $S \cap R$ merupakan LA-submodul dari K.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa $S \cap R = \{a\}$ merupakan LA-submodul dari K.
Ambil $r \in K$ dan $a \in S \cap R$, maka $a \in S$ dan $a \in R$. Karena S dan R adalah LA-submodul dari K, maka berlaku $ra \in S$ dan $ra \in R$, sehingga $ra \in S \cap R$. Karena $ra \in S \cap R$, maka $S \cap R$ merupakan LA-submodul dari K.

Teorema 3.2.5
Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R dengan identitas kiri 1. Jika A dan B masing-masing LA-submodul dari M, maka $A + B$ merupakan LA-submodul dari M.

Bukti:
Ambil $r \in R$ dan $x \in A + B$, maka $x = a_1 + b_1$. Karena A dan B masing-masing LA-submodul, berlaku

$$rx = ra_1 + rb_1 \in A + B.$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas, terbukti $A + B$ merupakan LA-submodul M.

Contoh 3.2.6
Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan operasi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ merupakan LA-modul. $S = \{a, d\}$ dan $R = \{a, c, e\}$ merupakan himpunan bagian dari K. Akan dibuktikan bahwa $S + R$ merupakan LA-submodul dari K.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa $S + R = \{a, c, d, e\}$ merupakan LA-submodul dari K.
Ambil $r \in K$ dan $x \in S + R$, maka $x = a_1 + b_1$. Karena A dan B masing-masing LA-submodul, berlaku

$$rx = ra_1 + rb_1 \in S + R.$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas, terbukti $S + R$ merupakan LA-submodul K.

Definisi 3.2.8 (Ideal pada LA-modul)
Misalkan M adalah LA-modul dan I adalah LA-submodul dari M.
1. I disebut ideal kiri dari M jika $MI \subseteq I$.
2. I disebut ideal kanan dari M jika $\forall n, m \in M$ dan $i \in I$, berlaku $(i + n)m - nm \in I$.

Jika memenuhi keduanya maka I disebut ideal dua sisi.

Contoh 3.2.9
Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ merupakan LA-modul. Kemudian diberikan $S = \{a, d\}$. Akan dibuktikan bahwa S merupakan ideal pada LA-modul K.

Bukti:
Berikut ini diberikan operasi $K \odot S$ pada Tabel 3.7.

Tabel 3.5 Operasi $K \odot S$

$\odot$	a	d
a	a	a
b	a	d
c	a	a
d	a	d
e	a	a
f	a	d

1. Pada Tabel 3.7 dapat dilihat bahwa $K \odot S \subseteq S$. Maka terbukti S merupakan ideal kiri di K.
2. Ambil $m, n \in K$ dan $i \in S$. Untuk $m = c, n = b, i = d$ sehingga berlaku

$$
\begin{aligned}
(i * n) \odot m - n \odot m &= (i * n) \odot m * (n \odot m)^{-1} \\
&= (d * b) \odot c * (b \odot c)^{-1} \\
&= (e \odot c) * c^{-1} \\
&= c * c = a
\end{aligned}
$$

$a \in S$, maka aksioma terpenuhi. Terbukti bahwa S merupakan ideal kanan di K.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa S merupakan ideal di K.

Lemma 3.2.10

Menggunakan operasi kanonik dengan memilih representasi, $(A + m) + (A + n) = A + (m + n)$, himpunan M/A merupakan suatu LA-grup. A, kelas ekuivalensi dari $0 \in M$ merupakan elemen identitas kiri dari M/A. Didefinisikan pemetaan

$$\varphi: M \to M/A, \varphi(m) = A + m$$

merupakan suatu homomorfisma surjektif LA-grup.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan terdefinisi dengan baik. Misalkan $A + m = A + m'$ dan $A + n = A + n'$. Menunjukkan bahwa $m \in A + m'$ dan $n \in A + n'$, sehingga $m = a + m'$ dan $n = b + n', \forall a, b \in A$. Kemudian,

$$
\begin{aligned}
m + n &= (a + m') + (b + n') \\
&= (a + b) + (m' + n') \in A + (m' + n'),
\end{aligned}
$$

sehingga $A + (m + n) = A + (m' + n')$.

Definisi 3.2.11 (LA-Modul Faktor)

Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. N adalah LA-submodul dari M. Didefinisikan $M/N = \{N + x | x \in M\}$. M/N adalah himpunan koset-koset dari N di M, dimana $m, n \in M$ ekuivalen jika $m - n \in N$. M/N merupakan LA-modul dan disebut sebagai LA-modul faktor. $M/N = \{N + a, N + b, N + c, \ldots\}, a, b, c, \ldots \in M$. Didefinisikan

$$(N + a) + (N + b) = N + (a + b)$$
$$r(N + a) = N + ra, r \in R.$$

Contoh 3.2.12

Diberikan LA-modul $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan ideal $S = \{a, d\}$ di K. Akan dibuktikan bahwa K/S merupakan LA-modul faktor.

Bukti:
Jika $S = \{a, d\}$, maka

$$S * a = \{a, d\}$$
$$S * b = \{b, e\}$$
$$S * c = \{c, f\}$$
$$S * d = \{d, a\} = S * a$$

sehingga $K/S = \{S * a, S * b, S * c\}$.
Akan dibuktikan K/S merupakan LA-modul faktor.

Tabel 3.6 Operasi penjumlahan pada K/S

$*$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * a$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * b$	$S * c$	$S * a$	$S * b$
$S * c$	$S * b$	$S * c$	$S * a$

Tabel 3.7 Operasi pergandaan pada K/S

$\odot$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * a$	$S * a$	$S * a$	$S * a$
$S * b$	$S * a$	$S * b$	$S * c$
$S * c$	$S * a$	$S * c$	$S * b$

1. $(K/S, *)$ merupakan LA-grup.
   a. Mempunyai elemen identitas kiri
      Elemen identitas kiri dari $(K/S, *)$ adalah $S * a$ sehingga untuk setiap $x \in K/S$ berlaku $S * a * x = S * a$.
   b. Setiap elemen mempunyai invers kiri
      Invers $S * a$ adalah $S * a$ karena $(S * a) * (S * a) = S * a$
      Invers $S * b$ adalah $S * b$ karena $(S * b) * (S * b) = S * a$
      Invers $S * c$ adalah $S * c$ karena $(S * c) * (S * c) = S * a$
   c. Memenuhi hukum invertif kiri
      Ambil sebarang $x, y, z \in K/S$.
      Untuk $x = S * a, y = S * b, z = S * c$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \big((S * a) * (S * b)\big) * (S * c)\\ &= (S * b) * (S * c)\\ &= S * b\end{aligned}$$
$$(z * y) * x = \big((S * c) * (S * b)\big) * (S * a)$$

$$= (S * c) * (S * a)$$
$$= S * b$$

sehingga $(x * c) * y = (z * y) * x$.

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa $(K/S,*)$ merupakan LA-grup.

2. Akan diibuktikan bahwa keempat aksioma dipenuhi.
   Ambil sebarang $a, b \in K/S$ dan $r, r_1, r_2 \in K$. Untuk $a = S * a, b = S * b, r = a, r_1 = b, r_2 = c$, maka diperoleh
   a. $r(a + b) = ra + rb$
   $$r \odot (a * b) = a \odot [(S * a) * (S * b)]$$
   $$= a \odot (S * a) = a$$
   $$(r \odot a) * (r \odot b) = [a \odot (S * a)] * [a \odot (S * b)]$$
   $$= a * a = a$$
   b. $(r_1 + r_2)a = r_1 a + r_2 a$
   $$(r_1 * r_2) \odot a = (a * b) \odot (S * a)$$
   $$= b \odot (S * a)$$
   $$= S * a$$
   $$(r_1 \odot a) * (r_2 \odot a) = [a \odot (S * a)] * [b \odot (S * a)]$$
   $$= a * (S * a)$$
   $$= S * a$$
   c. $(r_1 \odot r_2) \odot a = r_2 \odot (r_1 \odot a)$
   $$(r_1 \odot r_2) \odot a = (a \odot b) \odot (S * a)$$
   $$= a \odot (S * a)$$
   $$= a$$
   $$r_2 \odot (r_1 \odot a) = b \odot [a \odot (S * a)]$$
   $$= b \odot a$$
   $$= a$$
   d. $r_1 \odot a = a$
   $$r_1 \odot a = b \odot (S * a) = (S * a)$$

3.3 *Left Almost Modules Homomorphism* (Homomorfisma LA-Modul)

Seperti halnya pada modul, terdapat konsep homomorfisma modul. Pada *left almost modul* (LA-modul) juga dikenal adanya *left almost modules homomorphism* (homomorfisma LA-modul). Berikut ini diberikan definisi dan teorema isomorfisma dari homomorfisma LA-modul.

Definisi 3.3.1 (Homomorfisma LA-modul)
Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M,N masing-masing adalah LA-modul atas R. Pemetaan $\varphi: M \to N$ disebut homomorfisma LA-modul jika memenuhi

1. $\varphi(m+n) = \varphi(n) + \varphi(m)$
2. $\varphi(rm) = r\varphi(m), \forall n,m \in N.$

Jika $N = M$, maka φ disebut endomorfisma.
Jika φ injektif satu-satu, maka φ disebut monomorfisma.
M disebut isomorfik pada N, ditandai dengan $M \cong N$, jika terdapat suatu isomorfisma dari M ke N.

Contoh 3.3.2
Diberikan LA-modul $K = \{a,b,c,d,e,f\}$ dan LA-submodul $S = \{a,d\}$ di K.
Akan dibuktikan bahwa

$$f: K \to K/S$$
$$x \mapsto f(x) = S * x$$

merupakan homomorfisma LA-modul.

Bukti:
Ambil sebarang $x,y,r \in K$, yaitu $x = a, y = c$, sehingga berlaku

1. Terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned} f(x*y) &= f(a*c) \\ &= S*a*c \\ &= (S*a)*(S*c) \\ &= f(a)*f(c) \end{aligned}$$

2. Terhadap pergandaan.

$$\begin{aligned} f(r \odot x) &= f(r \odot a) \\ &= S*r \odot a \\ &= (S*r) \odot (S*a) \\ &= r \odot f(a) \end{aligned}$$

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $f: K \to K/S$ merupakan homomorfisma LA-modul.

Definisi 3.3.3 (Kernel)
Misalkan $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma LA-modul. Kernel dari φ, $Ker(\varphi)$ didefinisikan sebagai $Ker\varphi = \{m \in M: \varphi(m) = 0_M\}$.

Contoh 3.3.4

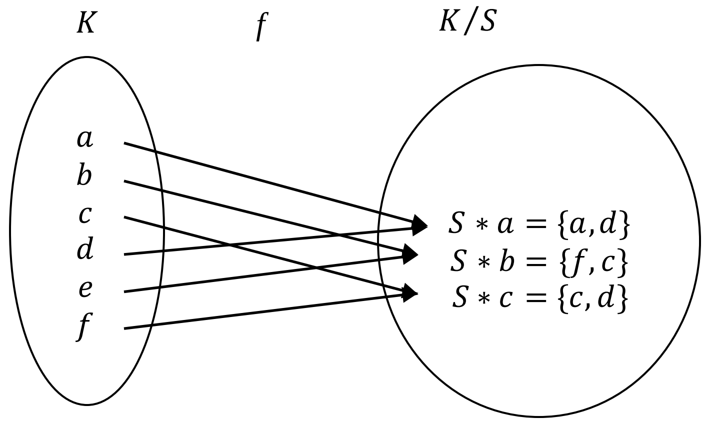
Diberikan K dan K/S masing-masing adalah LA-modul dengan $S = \{a, d\}$. Pemetaan $f: K \to K/S$

$$x \mapsto f(x) = S * x.$$

Akan dicari $Ker(f)$.

Bukti:

Elemen e pada K/S adalah $S * a$, maka pemetaan $f: K \to K/S$ sebagai berikut.



Gambar 3.1 Kernel f pada pemetaan $f: K \to K/S$

Pada Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa terdapat beberapa elemen K yang dipetakan ke elemen $e = S * a$ di K/S. Maka $Ker(f) = \{a, d\}$.

Teorema 3.3.5

Misalkan M dan M' masing-masing adalah LA-modul. $\varphi: M \to M'$ adalah homomorfisma dari M ke M', maka

1. Jika 0_M merupakan elemen identitas di M, maka $\varphi(0_M) = 0_{M'}$.
2. Jika $a \in M$, maka $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.
3. Jika A merupakan LA-submodul dari M, maka $\varphi(A)$ merupakan LA-submodul dari M'.
4. Jika B merupakan LA-submodul dari M', maka $\varphi^{-1}(B)$ merupakan LA-submodul dari M.

Bukti:

1. Karena 0_M merupakan elemen identitas di M,
$$a + 0_M = 0_M + a = a, \forall a \in M,$$
sehingga berlaku $\varphi(a + 0_M) = \varphi(0_M + a) = \varphi(a)$. Karena φ homomorfisma, maka diperoleh:
i. $\varphi(a + 0_M) = \varphi(a) + \varphi(0_M) = \varphi(a)$ dan
ii. $\varphi(0_M + a) = \varphi(0_M) + \varphi(a) = \varphi(a)$.
Jadi, diperoleh $\varphi(a) + \varphi(0_M) = \varphi(0_M) + \varphi(a) = \varphi(a), \forall a \in M$ dan dengan demikian $\varphi(0_M) = 0_{M'}$, yaitu elemen identitas di M'.
2. Ambil sebarang $a \in M$ sedemikian sehingga berlaku
$$a + (-a) = (-a) + a = 0_M.$$
Karena $a + (-a) = (-a) + a = 0_M$, maka berlaku
$$\varphi\big(a + (-a)\big) = \varphi\big((-a) + a\big) = \varphi(0_M).$$
Karena φ homomorfisma dan menurut 1 berlaku $\varphi(0_M) = 0_{M'}$, maka diperoleh:
i. $\varphi(a + (-a)) = \varphi(a) + \varphi(-a) = 0_{M'}$ dan
ii. $\varphi((-a) + a) = \varphi(-a) + \varphi(a) = 0_{M'}$.
Jadi, diperoleh $\varphi(a) + \varphi(-a) = \varphi(-a) + \varphi(a) = 0_{M'}, \forall a \in M$ dan dengan demikian berlaku $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.
3. Ambil sebarang $a, b \in \varphi(A)$, maka $a = \varphi(x)$ dan $b = \varphi(y)$ untuk suatu $x, y \in A$. Diperhatikan, $a - b = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)$. Karena A LA-submodul dan $x, y \in A$, maka menurut Lemma 2.5.16 berlaku $x - y \in A$ dan $a - b = \varphi(x - y) \in \varphi(A)$. Ambil sebarang $r \in R$ dan diperhatikan bahwa $ra = r\varphi(x) = \varphi(rx)$. Karena A LA-submodul, maka menurut Lemma 2.5.16 berlaku $rx \in A$ dan $ra = \varphi(rx) \in \varphi(A)$. Jadi, menurut Lemma 2.5.16 terbukti bahwa $\varphi(A)$ merupakan LA-submodul.
4. Ambil sebarang $a, b \in \varphi^{-1}(B)$, maka $\varphi(a) = k_1$ dan $\varphi(b) = k_2$, untuk suatu $k_1, k_2 \in B$. Karena B LA-submodul, maka menurut Lemma 2.5.16, berlaku $k_1 - k_2 \in B$ dan dengan demikian $k_1 - k_2 = \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) \in B$, sehingga berlaku $a - b \in \varphi^{-1}(B)$. Ambil sebarang $r \in R$ dan diperhatikan bahwa $rk_1 = r\varphi(a) = \varphi(ra)$. Karena B submodul, maka menurut Lemma 2.5.16, berlaku $rk_1 = \varphi(ra) \in B$ dan dengan demikian $ra \in \varphi^{-1}(B)$. Jadi, menurut Lemma 2.5.16 terbukti bahwa $\varphi^{-1}(B)$ merupakan LA-submodul

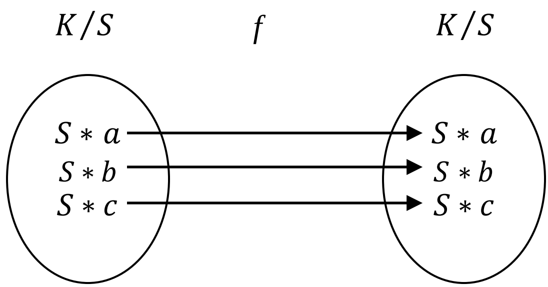
Proposisi 3.3.6
Misalkan R adalah suatu LA-ring. M dan N masing-masing adalah suatu LA-modul R dan pemetaan $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma LA-modul. φ merupakan monomorfisma LA-modul jika dan hanya jika $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

Bukti:
$(\Rightarrow)$
Misalkan φ monomorfisma LA-modul. Ambil $a \in \operatorname{Ker} \varphi$. Maka $\varphi(a) = 0'$, karena φ homomorfisma LA-modul maka berlaku $\varphi(0) = 0'$. Karena φ adalah satu-satu, maka diperoleh $a = 0$. Akibatnya $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.
$(\Leftarrow)$
Misalkan $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ dan misalkan $\varphi(a) = \varphi(b)$. Diperoleh $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, sehingga $\varphi(a - b) = 0$. Karena $\varphi(a - b) = 0$, maka $a - b \in \operatorname{Ker} \varphi$. Karena $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, maka $a - b = 0$, yaitu $a = b$. Terbukti $\varphi(a) = \varphi(b)$ maka $a = b$. Jadi φ satu-satu.

Contoh 3.3.8
Diberikan K adalah LA-modul dengan $S = \{a, d\}$ adalah LA-submodul di K.
Pemetaan $f: K/S \to K/S$

$$S * x \mapsto f(S * x) = S * x$$

Tunjukkan bahwa f monomorfisma jika dan hanya jika $\operatorname{Ker} f = S * a$



Gambar 3.2 Pemetaan $f: K/S \to K/S$

Bukti:
$(\Rightarrow)$

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa pemetaan $f: K/S \rightarrow K/S$ merupakan monomorfisma. Maka Ker $f = S * a$.

(⇐)
Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa Ker $f = \{S * a\}$.
Karena $S * a$ merupakan elemen identitas pada K/S, maka
Ker $f = \{0\}$. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan monomorfisma.

1. f merupakan homomorfisma LA-modul
   i. $f(a * b) = S * (a * b)$
   $\quad = (S * a) * (S * b)$
   $\quad = f(a) * f(b)$
   ii. $f(r \odot a) = S * (r \odot a)$
   $\quad = (S * r) \odot (S * a)$
   $\quad = r \odot f(a)$

   Berdasarkan i) dan ii) terbukti bahwa f merupakan homomorfisma LA-modul.
2. f merupakan injektif.
   f merupakan injektif karena
   $$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$
   $$f(S * a) = f(S * a) \rightarrow S * a = S * a$$
   $$f(S * b) = f(S * b) \rightarrow S * b = S * b$$
   $$f(S * c) = f(S * c) \rightarrow S * c = S * c$$
   Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa f merupakan monomorfisma.

Pembuktian kanan dan kiri terpenuhi maka terbukti bahwa f monomorfisma jika dan hanya jika ker $f = \{0\}$.

Teorema 3.3.7 (Teorema Isomorfisma I)
Misalkan R adalah suatu LA-ring. M dan N masing-masing adalah LA-modul atas R. $\theta: M \rightarrow N$ adalah suatu homomorfisma dari M ke N. Jika θ adalah epimorfisma, maka $M/Ker\theta \cong N$.

Bukti:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & N \\ M/Ker\theta \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Gambar 3.3 Diagram Teorema Isomorfisma I

Didefinisikan $\varphi : M \to N$

$$a \to \varphi(a) = a'$$
$$b \to \varphi(b) = b'$$
$$\sigma : M \to M/\text{Ker}\,\varphi$$
$$a \to \sigma(a) = N + a$$
$$b \to \sigma(b) = N + b$$
$$\theta : M/\text{Ker}\,\varphi \to N$$
$$N + a \to \theta(N + a) = \varphi(a) = a'$$
$$N + b \to \theta(N + b) = \varphi(b) = b'$$

Akan dibuktikan $\varphi: M \to N$ merupakan isomorfisma. Misalkan Ker $\varphi = K$.

i. Pemetaan

Ambil $K + a, K + b \in M/K$, dimana $a, b \in M$. Maka

$$K + a = K + b$$
$$K + a - b = K$$
$$a - b \in K$$
$$a - b \in Ker\ \varphi$$
$$\varphi(a - b) = 0$$
$$\varphi(a) - \varphi(b) = 0$$
$$\varphi(a) = \varphi(b)$$
$$\theta(K + a) = \theta(K + b)$$

ii. Injektif

Ambil $a + K, b + K \in M/K$, dimana $a, b \in M$. Maka

$$\theta(K + a) = \theta(K + b)$$
$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = 0$$
$$\varphi(a - b) = 0$$
$$a - b \in Ker\ \varphi$$
$$a - b \in K$$
$$K + a - b = K$$
$$K + a = K + b$$

iii. Surjektif

Karena $N = \varphi(N)$ maka untuk setiap $\varphi(a)$ di N terdapatlah $K + a$ di M/K sedemikian sehingga $\theta(K + a) = \varphi(a)$.

iv. Homomorfisma

1. $$\begin{aligned} \theta\big((K + a) + (K + b)\big) &= \theta(K + (a + b)) \\ &= \varphi(a + b) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ &= \theta(K + a) + (K + b) \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \theta\big(r(K + a)\big) &= \theta(K + ra) \\ &= \varphi(ra) \\ &= r\varphi(a) \\ &= r\theta(K + a) \end{aligned}$$

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv dapat disimpulkan bahwa θ merupakan isomorfisma.

Teorema 3.3.8 (Teorema Isomorfisma II)

Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M adalah suatu LA-modul atas R. Jika A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari M, maka

$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B).$$

Bukti:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & \dfrac{A + B}{A} \\ \dfrac{B}{A \cap B} \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Gambar 3.4 Diagram Teorema Isomorfisma II

Jika $A+B$ adalah LA-submodul, maka $A+B$ merupakan LA-modul. A adalah LA-submodul dari $A+B$, sehingga $\frac{A+B}{A}$ merupakan LA-modul faktor.

1. Jika $A \cap B$ adalah LA-submodul dari B, maka $\frac{B}{A \cap B}$ merupakan suatu LA-modul.
   Akan ditunjukkan $A \cap B$ adalah LA-submodul dari B.
   a. Misalkan A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari B. Ambil $a \in A \cap B$ dan $c \in B$, berlaku $ca \in A$ dan $ca \in B$, sehingga $ca \in A \cap B$. Karena $ca \in A \cap B$, sehingga $B(A \cap B) \subseteq A \cap B$.
   b. Misalkan A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari B. Ambil $a, b \in A \cap B$, maka $a, b \in A$ dan $a, b \in B$. Karena A dan B LA-submodul, berlaku $a - b \in A$ dan $a - b \in B$, sehingga $a - b \in A \cap B$.

   Berdasarkan a dan b dapat disimpulkan bahwa $A \cap B$ adalah LA-submodul dari B, sehingga $\frac{B}{A \cap B}$ merupakan LA-modul.
2. φ : homomorfisma LA-modul yang surjektif.
   Didefinisikan $\varphi : B \to \frac{A+B}{A}$
   $$x \to \varphi(x) = A + a + x = A + a$$
   Ambil $x, y \in B$ maka
   $$\varphi(x+y) = A + (x+y) = (A+x) + (A+y)$$
   $$= \varphi(A+x) + \varphi(A+y)$$
   $$\varphi(xy) = A + (xy) = (A+x)(A+y)$$
   $$= \varphi(A+x)\varphi(A+y)$$
   Jadi terbukti φ adalah homomorfisma LA-modul. Selanjutnya akan dibuktikan φ surjektif.
   $\forall a + A \in \frac{A+B}{A}$, $\exists a \in B, \ni \varphi(a) = A + a$. Jadi φ surjektif.
   Karena φ merupakan homomorfisma LA-modul yang surjektif, maka $Im\, \varphi = \frac{A+B}{A}$.

3. Ker $\varphi = A \cap B$

$$\begin{aligned} Ker\ \varphi &= \{x \in B : \varphi(x) = 0\} \\ &= \{x \in B : \varphi(x) = A\} \\ &= \{x \in B : A + x = A\} \\ &= \{x \in B : x \in A\} \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

Jadi, $Ker\ \varphi = A \cap B$.

Berdasarkan Teorema 3.3.7 diperoleh $\frac{B}{Ker\varphi} \cong \frac{A+B}{A}$. Jadi, φ merupakan isomorfisma atau $\frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}$.

Contoh 3.3.11

Diberikan $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ merupakan LA-modul. Kemudian diberikan $S = \{a, d\}$ dan $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ masing-masing adalah LA-submodul di *K*. Akan dibuktikan bahwa $\frac{S * P}{S} \cong \frac{P}{S \cap P}$.

Bukti:

Didefinisikan $\varphi : P \to \frac{S * P}{S}$

$$x \mapsto \varphi(x) = S * s * x = S * x$$

$S * P = \{a, b, c, d, e, f\}$, sehingga $\frac{S * P}{S} = \{S * a, S * b, S * c\}$.

Kemudian $S \cap P = \{a, d\}$, sehingga $\frac{P}{S \cap P} = \{S * a, S * b, S * c\}$.

Akan dibuktikan bahwa

1. φ merupakan homomorfisma LA-modul yang surjektif

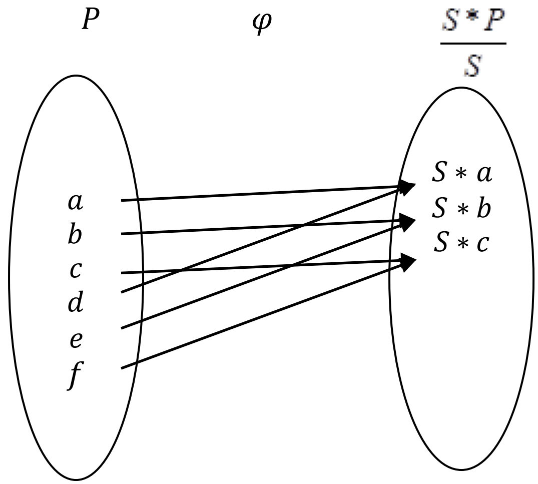
   Ambil sebarang $x = a, y = c \in P$ sehingga berlaku

   i. $\begin{aligned}[t] \varphi(x * y) &= \varphi(a * c) \\ &= \varphi(c) \\ &= S * c \\ &= (S * a) * (S * c) \\ &= \varphi(a) * \varphi(c) \end{aligned}$

   ii. $\varphi(r \odot x) = \varphi(r \odot a)$

$$= r \odot \varphi(a)$$
$$= r \odot (S * a)$$
$$= r \odot \varphi(a)$$

Jadi terbukti φ adalah homomorfisma LA-modul. Selanjutnya akan dibuktikan φ surjektif.



Gambar 3.5 Pemetaan $\varphi : P \rightarrow \frac{S*P}{S}$

Pada Gambar 3.5 dapat dilihat bahwa untuk setiap $S * x \in \frac{S*P}{S}$ terdapatlah $x \in P$ sedemikian sehingga $\varphi(x) = S * x$. Jadi φ surjektif.

Karena φ merupakan homomorfisma yang surjektif,

maka $Im\ \varphi = \frac{S*P}{S}$.

2. Ker $\varphi = S \cap P$.

   Pada Gambar 3.5 dapat dilihat bahwa Ker $\varphi = \{a, d\}$, maka terbukti bahwa ker $\varphi = S \cap P$.

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa φ merupakan isomorfisma atau

$$\frac{S*P}{S} \cong \frac{P}{S \cap P}.$$

Teorema 3.3.9 (Teorema Isomorfisma III)
Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M adalah suatu LA-modul atas R. A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari M. Jika $I \subseteq J$, maka

$$M/B \cong (M/A)/(B/A).$$

Bukti:

$$\begin{tikzcd} M/A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & M/B \\ \dfrac{M/A}{B/A} \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Gambar 3.6 Diagram Teorema Isomorfisma III

Akan dibuktikan bahwa

i. M/A merupakan LA-modul.
   Karena M merupakan LA-modul dan A merupakan LA-submodul dari M, maka M/A merupakan LA-modul.
ii. M/B merupakan suatu LA-modul.
   Karena M merupakan LA-modul dan B merupakan LA-submodul dari M, maka M/B merupakan LA-modul.
iii. Jika B/A adalah LA-submodul di M/A maka $\dfrac{M/A}{B/A}$ merupakan suatu LA-modul.
   Akan ditunjukkan B/A ideal dari M/A.
   a. Ambil sebarang $A + x \in B/A, x \in B$. Karena $A \subseteq B \subseteq M$, maka $x \in M$ sehingga $A + x \in M/A$. Jadi $B/A \subseteq M/A$.
   b. Ambil $x \in B/A$, maka $x = A + a$ dan $y \in M/A$, maka $y = A + a$ dengan $a \in B$ dan $b \in M$. Sehingga diperoleh
   $$xy = (A + a)(A + b) = A + (ab), ab \in B.$$
   Karena $B \subseteq M$, maka $ab \in M$, sehingga $A + (ab) \subseteq M$.

c. Ambil $x \in B/A$ dan $y, z \in M/A$ maka $x = A + a, y = A + b$, dan $z = A + c$ dengan $x \in B$ dan $a, b, c \in M$, sehingga diperoleh

$$(x + y)z - yz = \big((A + a) + (A + b)\big)(A + c) - \big((A + b)(A + c)\big)$$
$$= ((a + b) + A)(A + c) - A + (bc)$$
$$= A + (ac + bc) - A(bc)$$
$$= A + (ac + bc - bc)$$
$$= A + ac, ac \in B$$

Jadi, $(x + y)z - yz \in B/A$.

Berdasarkan a, b, dan c dapat disimpulkan bahwa B/A adalah LA-submodul dari M/A. Selanjutnya karena M/A LA-modul dan B/A adalah LA-submodul dari M/A, sehingga $\dfrac{M/A}{B/A}$ merupakan LA-modul.

iv. φ merupakan homomorfisma yang surjektif.

Didefinisikan $\varphi : M/A \to B/A$

$$A + x \to \varphi(A + x) = B + x$$

Ambil $A + x, A + y \in M/A$, maka berlaku

1. $\varphi\big((A + x) + (A + y)\big) = \varphi(A + (x + y))$
$$= A + (x + y)$$
$$= (B + x) + (B + y)$$
$$= \varphi(B + x) + \varphi(B + y)$$
2. $\varphi\big(r(A + x)\big) = \varphi(A + (rx))$
$$= B + (rx)$$
$$= r(B + x)$$
$$= r\varphi(B + x)$$

Terbukti homomorfisma LA-modul.

Selanjutnya akan ditunjukkan φ surjektif.

Karena $\forall B + x \in M/B, \exists A + x \in M/A, \ni \varphi(a + A) = a + B$.

Jadi, $\operatorname{Im}\varphi = M/B$.

v. $\operatorname{Ker}\varphi = \dfrac{B}{A}$

$$Ker\ \varphi = \{A + x \in M/A : \varphi(A + x) = B\}$$
$$= \{A + x \in M/A : B + x = B\}$$
$$= \{A + x \in M/A : x \in B\}$$

$= \{A + x \in B/A\}$
$= B/A$

Berdasarkan Teorema 3.3.7 diperoleh $\frac{B/A}{Ker\varphi} \cong M/B$. Jadi, φ isomorfisma atau $\frac{M/A}{B/A} \cong M/B$.

3.4 *Direct Sum* (Hasil Jumlah Langsung)

Seperti halnya pada modul, pada LA-modul juga terdapat konsep *direct sum* (hasil jumlah langsung). Berikut ini diberikan definisi dan teorema yang berkaitan dengan *direct sum* LA-modul.

Definisi 3.4.1

Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. $N_1, N_2, \dots, N_k$ masing-masing adalah LA-submodul dari LA-modul M. M disebut hasil jumlah langsung (*internal direct sum*) dari $N_1, N_2, \dots, N_k$, jika memenuhi

$i.\ M = \sum_{i=1}^{k} N_i$

$ii.\ N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\}$

untuk $1 \leq i \leq k$.

M disebut hasil jumlah langsung dari LA-submodul $N_1, N_2, \dots, N_k$, biasa diberi notasi $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$.

Contoh 3.4.2

$Z_{12}: Z -$ LA-modul, $N_1 = \{\bar{0}\}, N_2 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}, N_3 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ adalah LA-submodul dari Z_{12}. Akan ditunjukkan apakah

$$Z_{12} = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3.$$

Bukti:

i. $N_1 + N_2 + N_3 = \{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = Z_{12}$

ii. $N_1 \cap (N_2 + N_3) = \{\bar{0}\} \cap [\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}] = \{\bar{0}\}$
$N_2 \cap (N_1 + N_3) = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} \cap [\{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}] = \{\bar{0}\}$
$N_3 \cap (N_1 + N_2) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} \cap [\{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}] = \{\bar{0}\}$

Syarat (i). dan (ii). dipenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa $Z_{12} = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$.

Teorema 3.4.5
Misalkan R adalah suatu LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. Jika $M_1, M_2, \dots, M_k$ adalah LA-submodul dari M, maka pernyataan berikut ekuivalen:

(1.) M adalah *direct sum* (hasil jumlah langsung).

(2.) $\forall m \in M$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai bentuk $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ dengan $m_i \in M_i$.

Bukti:
(1) ⇒ (2)
Diketahui M adalah hasil jumlah langsung dari M_i. Ini berarti $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$, sehingga memenuhi

$$i.\, M = \sum_{i=1}^{k} M_i$$

$$ii.\, N_i \cap \sum_{i \neq j} M_j = \{0\}$$

untuk $1 \leq i \leq k$.

Dari (i), jika $m \in M$ dan $m_i \in M_i$, maka jelas berlaku

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_i = \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Ini berarti ketentuan (2) dipenuhi. Tinggal membuktikan ketunggalannya. Misalkan ada pernyataan lain, yaitu

$$m = m_1' + m_2' + \cdots + m_i' = \sum_{i=1}^{k} m_i{}',$$

maka

$$m_i - m_1' = \sum_{i=1}^{k} m_j - m_j' \in M_i \cap \sum_{i=1}^{k} M_j = \{0\}.$$

Ini berarti $m_i - m_1'$, yaitu pernyataan (2) tunggal.
(1) ⇒ (2)
Diketahui $\forall m \in M$ dinyatakan secara tunggal sebagai bentuk $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ dengan $m_i \in M_i$.

Yang harus dibuktikan, yaitu

$$i.\ M = \sum_{i=1}^{k} M_i$$

$$ii.\ N_i \cap \sum_{i \neq j} M_j = \{0\}$$

untuk $1 \leq i \leq k$.

Dari yang diketahui jelas berlaku (i). Kemudian karena ketunggalan pernyataan tersebut,

Jika $m \in M_1$, maka $m = m + 0 + \cdots + 0 + 0 + \cdots + 0$.
Jika $m \in M_2$, maka $m = 0 + m + \cdots + 0 + 0 + \cdots + 0$.

$$\vdots$$

Jika $m \in M_i$, maka $m = 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 + \cdots + m$. Akibatnya,

$$M_i \cap \sum_{i \neq j} M_j = \{0\},$$

untuk $1 \leq i \leq k$, yaitu (ii) dipenuhi. Karena (i) dan (ii), maka dapat di simpulkan bahwa M merupakan hasil tambah langsung dari M_i.