

**ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI PERTUMBUHAN
RUMPUT DAN KESUBURAN TANAH PADA PADANG
RUMPUT SEBAGAI TEMPAT PENGEMBALAN**

SKRIPSI

Oleh:
JUSUF ANWAR S. M.
0610940026-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI PERTUMBUHAN
RUMPUT DAN KESUBURAN TANAH PADA PADANG
RUMPUT SEBAGAI TEMPAT PENGEMBALAAN**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

JUSUF ANWAR S. M.

0610940026-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI PERTUMBUHAN RUMPUT DAN KESUBURAN TANAH PADA PADANG RUMPUT SEBAGAI TEMPAT PENGEMBALAN

Oleh:
JUSUF ANWAR S. M.
0610940026-94

**Setelah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 4 Februari 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika**

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
NIP. 196908071994121001

Drs. Imam Nurhadi P., MT.
NIP. 196203141989031001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Jusuf Anwar S. M.
NIM : 0610940026-94
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Interaksi
Pertumbuhan Rumput dan
Kesuburan Tanah pada Padang
Rumput sebagai Tempat
Penggembalaan

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini,
2. apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 4 Februari 2011
Yang menyatakan,

(Jusuf Anwar S. M.)
NIM. 0610940026-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI PERTUMBUHAN RUMPUT DAN KESUBURAN TANAH PADA PADANG RUMPUT SEBAGAI TEMPAT PENGEMBALAN

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis model interaksi pertumbuhan rumput dan kesuburan tanah pada padang rumput sebagai tempat penggembalaan. Konstruksi model yang dilakukan menghasilkan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan dua variabel yaitu biomassa rumput dan banyaknya unsur hara dalam tanah, dengan asumsi bahwa pemupukan dilakukan dalam jumlah yang konstan. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik tetap yang kestabilannya ditentukan dengan cara linearisasi. Sistem memiliki *threshold* yang membatasi jumlah kepadatan hewan ($n \leq n^*$) agar biomassa rumput tidak bernilai negatif ($Y \geq 0$). Simulasi numerik terhadap model menggunakan metode Runge Kutta orde empat dan diperoleh hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

Kata kunci : model interaksi pertumbuhan rumput dan kesuburan tanah, titik tetap, kestabilan, *threshold*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DYNAMICAL ANALYSIS OF THE INTERACTION MODEL OF PASTURE GROWTH AND SOIL FERTILITY IN GRAZED PASTURE

ABSTRACT

This final project discusses construction and analysis of interaction model between pasture growth and soil fertility in grazed pasture. The model construction results a nonlinear differential equation system with two variables that are pasture biomass and the quantity of nutrient in the soil. In this case, the fertilization is assumed to be constant. Based on the analysis, the model has two steady states that their stability are determined by linearization technique. System has a threshold which bounds animal stocking density ($n \leq n^*$) in order to results nonnegative pasture biomass ($Y \geq 0$). Numerical simulation for the model uses the fourth order Runge-Kutta method that demonstrates the same result as analytical one.

Keywords : interaction model between pasture growth and soil fertility, steady state, stability, threshold

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Tuhan yang telah membuka jalan dan membimbing proses pengerjaan skripsi dengan judul “Analisis Dinamik Model Interaksi Pertumbuhan Rumput dan Kesuburan Tanah pada Padang Rumput sebagai Tempat Penggembalaan” ini hingga akhirnya dapat terselesaikan dengan baik.

Pembuatan skripsi ini tidak terlepas dari kendala. Namun kendala tersebut dapat teratasi oleh bantuan berbagai pihak yang terlibat secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, masukan, dan motivasi yang berarti bagi pembuatan skripsi ini.
2. Drs. Imam Nurhadi P., M.T selaku pembimbing II sekaligus dosen penasihat akademik yang telah memberikan bimbingan, masukan, dan motivasi yang berarti bagi pembuatan skripsi ini.
3. Kwardiniya A., S.Si., M.Si., Drs. Bambang Sugandi, MSi, dan Drs. Marsudi, MS. selaku dosen penguji atas saran yang berarti bagi perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah berbagi banyak ilmu, dan segenap staf serta karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ayah, ibu, kakak, abang, Shinta, dan seluruh keluarga besar yang telah mendukung dalam doa, memberikan motivasi, dan nasihat yang berarti bagi pengerjaan skripsi ini.
6. Teman-teman Matematika 2006 yang telah memberikan masukan dan motivasi yang berarti bagi pengerjaan skripsi ini.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis jusuf_anwar@yahoo.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 4 Februari 2011

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	iii
LEMBAR PERNYATAAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	2
1.3. Batasan Masalah	2
1.4. Tujuan Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1. Sistem Dinamik	5
2.1.1. Sistem Persamaan Diferensial	5
2.1.2. Sistem Otonomus Nonlinear	5
2.1.3. Titik Tetap.....	6
2.1.4. Linearisasi.....	6
2.1.5. Nilai Eigen	8
2.1.6. Kestabilan Titik Tetap.....	9
2.2. Persamaan Diferensial Logistik.....	14
2.3. Persamaan Michaelis-Menten.....	15
BAB III PEMBAHASAN	17
3.1. Konstruksi Model	17
3.1.1. Dinamika Pertumbuhan Rumput	17
3.1.1.1. Pertumbuhan Rumput Tanpa Faktor Penggangu.....	17
3.1.1.2. Rumput yang Terambil Akibat Penggembalaan	19

3.1.2. Dinamika Jumlah Unsur Hara dalam Tanah ...	19
3.1.2.1. Pemupukan	19
3.1.2.2. Hilangnya Unsur Hara dalam Tanah Akibat Faktor di Luar Penggembalaan.....	20
3.1.2.3. Hilangnya Unsur Hara dalam Tanah Akibat Penggembalaan.....	20
3.2. Analisis Dinamik	23
3.2.1. Titik Tetap	23
3.2.2. Kestabilan Titik Tetap	33
3.2.2.1. Kestabilan Titik Tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$	35
3.2.2.2. Kestabilan Titik Tetap (Y^*, F^*)	38
3.2.3. <i>Threshold</i>	43
3.3. Simulasi Numerik	44
3.3.1. Kestabilan Titik Tetap secara Numerik ketika $n = n^*$	45
3.3.2. Kestabilan Titik Tetap secara Numerik ketika $n < n^*$	48
3.3.3. Simulasi Numerik terhadap Model	50
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	53
4.1. Kesimpulan	53
4.2. Saran	53
DAFTAR PUSTAKA	55
LAMPIRAN	57

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Kestabilan titik tetap berdasarkan nilai eigennya.....	10
Tabel 3.1 Variabel tetap dan parameter serta nilai estimasi dan satuannya	45

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$...	11
Gambar 2.2 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$, di mana $r < 0$	12
Gambar 2.3 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_1 = i\mu$, $\lambda_2 = -i\mu$	13
Gambar 2.4 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$...	14
Gambar 3.1 Perubahan nilai α terhadap F	18
Gambar 3.2 Perubahan nilai γ terhadap F	22
Gambar 3.3 Garis bilangan dari n yang menghasilkan Y^*	31
Gambar 3.4 Perubahan titik tetap (Y^*, F^*) terhadap n yang berbeda	31
Gambar 3.5 Perubahan titik tetap untuk Y	43
Gambar 3.6 Wilayah <i>threshold</i>	44
Gambar 3.7 Kestabilan titik tetap Y saat $n = n^*$ dengan beberapa syarat awal	46
Gambar 3.8 Kestabilan titik tetap F saat $n = n^*$ dengan beberapa syarat awal	47
Gambar 3.9 Trayektori dari sistem saat $n = n^*$ dengan beberapa syarat awal	47
Gambar 3.10 Kestabilan titik tetap Y saat $n < n^*$ dengan beberapa syarat awal	48
Gambar 3.11 Kestabilan titik tetap F saat $n < n^*$ dengan beberapa syarat awal	49
Gambar 3.12 Trayektori dari sistem saat $n < n^*$ dengan beberapa syarat awal	49
Gambar 3.13 Solusi numerik terhadap Y dengan beberapa syarat awal	50
Gambar 3.14 Solusi numerik terhadap F dengan beberapa syarat awal	51
Gambar 3.15 Trayektori dari sistem dengan beberapa syarat awal	51

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Penjabaran Persamaan (3.16) Menjadi Persamaan (3.18) dan Pembentukan Persamaan (3.19).....	57
Lampiran 2. Penjabaran Persamaan (3.17) Menjadi Persamaan (3.20).....	59
Lampiran 3. Penjabaran Persamaan (3.26) dan Pencarian Penyelesaian untuk n	63
Lampiran 4. Penjabaran Persamaan (3.40) Menjadi Persamaan (3.42)	67
Lampiran 5. Penjabaran Persamaan (3.41) Menjadi Persamaan (3.43)	71
Lampiran 6. <i>Listing Program</i> untuk Gambar 3.4 Menggunakan <i>Software</i> Matlab 7.0	74
Lampiran 7. <i>Listing Program</i> untuk Gambar 3.5 Menggunakan <i>Software</i> Matlab 7.0	75
Lampiran 8. <i>Listing Program</i> untuk Gambar 3.6 Menggunakan <i>Software</i> Matlab 7.0	79
Lampiran 9. <i>Listing Program</i> untuk Gambar 3.7, 3.8, dan 3.9 Menggunakan <i>Software</i> Matlab 7.0	80
Lampiran 10. <i>Listing Program</i> untuk Gambar 3.10, 3.11, dan 3.12 Menggunakan <i>Software</i> Matlab 7.0.....	83
Lampiran 11. <i>Listing Program</i> untuk Gambar 3.13, 3.14, dan 3.15 Menggunakan <i>Software</i> Matlab 7.0.....	86

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Padang rumput merupakan suatu lahan yang ditutupi oleh rumput dan sering digunakan untuk penggembalaan hewan. Ekosistem padang rumput ini terdiri atas rumput, iklim, tanah, dan interaksi hewan dalam berbagai proses (Morley, 1981).

Pertumbuhan rumput sangat bergantung pada bahan nutrisi berupa unsur hara yang terkandung dalam tanah. Unsur hara tersebut terbagi atas dua jenis yaitu (rioardi.wordpress.com):

1. Unsur hara makro yaitu unsur hara yang diperlukan rumput dalam jumlah besar, yang meliputi N (natrium), P (fosfor), K (kalium), Ca (kalsium), Mg (Magnesium), dan S (sulfur).
2. Unsur hara mikro yaitu unsur hara yang diperlukan rumput dalam jumlah kecil, yang meliputi Fe (besi), Mn (mangan), B (boron), Mo (molibdenum), Cu (tembaga), Zn (seng), dan Cl (klor).

Masing-masing unsur hara tersebut memiliki peranan tersendiri dalam membantu pertumbuhan rumput. Suatu lahan memiliki tingkat kesuburan yang tinggi jika di dalamnya terkandung unsur hara dalam jumlah yang banyak.

Tingkat kesuburan tanah dan pertumbuhan rumput pada padang rumput dapat pula dipengaruhi oleh beberapa faktor, diantaranya:

1. Faktor yang dapat dikontrol petani, contohnya pemupukan, jumlah hewan yang digembalakan.
2. Faktor yang tidak dapat dikontrol, contohnya curah hujan.
3. Faktor yang sifatnya musiman, contohnya temperatur.

(Wickham, dkk, 1997)

Adapun peranan rumput bagi kebutuhan tubuh hewan antara lain:

1. Sumber energi.
2. Sumber protein.
3. Sumber mineral: mineral yang umumnya diperoleh dari rumput dan merupakan kebutuhan bagi hewan yaitu P (fosfor), Na (Natrium), Ca (kalsium), dan mineral-mineral lainnya.

4. Sumber vitamin yaitu vitamin A, D, dan K.
5. Sumber air.

(Pond, dkk, 2005)

Penggunaan padang rumput sebagai tempat penggembalaan akan lebih baik jika disertai dengan pemupukan agar jumlah unsur hara dalam tanah dapat mendukung pertumbuhan rumput. Dengan demikian ketersediaan rumput untuk penggembalaan tidak habis hanya dalam jangka waktu yang singkat. Untuk itu diperlukan adanya pengaturan terhadap jumlah pupuk yang diberikan dan jumlah hewan yang digembalakan. Dengan melihat permasalahan tersebut, skripsi ini dibuat untuk membentuk sebuah model sistem dinamik yang dapat memprediksi pertumbuhan rumput dan kesuburan tanah dalam jangka waktu yang panjang.

1.2. Rumusan Masalah

Dengan melihat latar belakang di atas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini meliputi:

1. Bagaimana model sistem dinamik yang dapat menggambarkan interaksi antara pertumbuhan rumput dan kesuburan tanah pada padang rumput?
2. Bagaimana titik tetap dari model tersebut beserta kestabilannya?
3. Bagaimana pengaruh kepadatan hewan pada model tersebut?
4. Bagaimana simulasi grafis yang mewakili solusi dari model untuk jangka waktu yang panjang beserta interpretasinya?

1.3. Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini dibatasi pada hal-hal sebagai berikut:

1. Faktor yang tidak dapat dikontrol petani dan yang bersifat musiman diabaikan.
2. Jumlah pupuk (unsur hara) yang diberikan adalah konstan dan diasumsikan bahwa pemberian pupuk mengakibatkan pertumbuhan rumput meningkat.
3. Pemupukan dipandang sebagai proses penambahan nutrisi dalam tanah (unsur hara) dan tidak dibahas mengenai reaksi kimia yang terjadi dalam proses pemupukan tersebut beserta pengaruh yang ditimbulkannya.

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini yaitu:

1. Mengkonstruksi model sistem dinamik yang dapat menggambarkan interaksi antara pertumbuhan rumput dan kesuburan tanah pada padang rumput.
2. Menentukan titik tetap dari model tersebut beserta kestabilannya.
3. Menentukan pengaruh kepadatan hewan pada model tersebut.
4. Membuat simulasi grafis yang mewakili solusi dari model untuk jangka waktu yang panjang beserta interpretasinya.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

6.1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan pembelajaran perilaku jangka panjang dari sistem (Brin dan Stuck, 2002). Dalam menentukan perilaku sistem tersebut untuk waktu yang akan datang, dibutuhkan suatu kondisi awal pada masa sekarang atau masa lalu.

6.1.1. Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi disebut persamaan diferensial. Pengelompokan persamaan diferensial bergantung pada jumlah fungsi yang terlibat. Apabila hanya terdapat satu fungsi maka satu persamaan cukup memenuhi. Akan tetapi jika terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui maka dibutuhkan suatu sistem persamaan diferensial (Boyce dan DiPrima, 1992). Contoh:

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5 = 0$ merupakan persamaan diferensial yang memuat turunan dari fungsi y .

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 5y \end{cases}$ merupakan sistem persamaan diferensial yang melibatkan dua fungsi yaitu x dan y .

6.1.2. Sistem Otonomus Nonlinear

Suatu sistem persamaan diferensial berbentuk:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

dikatakan sebagai sistem otonomus jika fungsi f dan g bernilai riil dan tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu (Nagle dan Saff, 1993). Apabila terdapat perkalian di antara variabel tak bebas dalam $f(x, y)$ maupun $g(x, y)$, maka sistem ini dikatakan sebagai sistem otonomus nonlinear. Berdasarkan sistem (2.1), variabel tak bebasnya yaitu x dan y .

6.1.3. Titik Tetap

Misalkan $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ merupakan solusi dari sistem (2.1) yang bersifat konstan untuk semua t . Solusi ini disebut titik tetap dikarenakan titik tersebut tidak berubah untuk setiap waktu. Karena bersifat konstan maka pencarian titik tetap dilakukan dengan memperhatikan bahwa $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ harus memenuhi:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Dengan kata lain titik tetap dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan $f(x, y) = 0$ dan $g(x, y) = 0$ (Williamson, 2001).

6.1.4. Linearisasi

Asumsikan fungsi f dan g pada sistem (2.1) mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik tetap (x_0, y_0) . Deret Taylor fungsi f dan g di sekitar (x_0, y_0) adalah:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)) \\ & + \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ & \left. + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x, y) = & g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
& + \frac{1}{2!} \left(g_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2g_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\
& \left. + g_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Apabila dari deret Taylor tersebut hanya diambil hingga turunan pertama dari fungsi f dan g maka diperoleh

$$\begin{aligned}
f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
& + \eta_1(x, y) \\
g(x, y) = & g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
& + \eta_2(x, y),
\end{aligned}$$

dengan $\eta_1(x, y)$ dan $\eta_2(x, y)$ adalah suku sisa.

Karena $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x - x_0)$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y - y_0)$ maka sistem (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} + J(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

di mana

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

merupakan matriks Jacobi atau *partial derivative matrix (derivative matrix)*.

Dengan memisalkan $u = x - x_0$ dan $v = y - y_0$, serta mengingat bahwa:

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0,$$

maka persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = J(x_0, y_0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}$$

dengan $\vec{w} = (u, v)$ dan $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$. Apabila (x, y) cukup dekat dengan (x_0, y_0) maka (u, v) bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| < \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.1) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}.$$

(Robinson, 2004)

2.1.5. Nilai Eigen

λ merupakan nilai eigen dari matriks $A_{n \times n}$ jika terdapat vektor $v \neq 0$ yang memenuhi

$$Av = \lambda v,$$

di mana v merupakan vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen λ . Berdasarkan definisi tersebut maka ketika $v \neq 0$,

$$Av = \lambda v$$

$$Av = \lambda Iv, \quad I = \text{matriks identitas}$$

$$\begin{aligned} Av - \lambda Iv &= 0 \\ (A - \lambda I)v &= 0. \end{aligned}$$

Jika $(A - \lambda I)^{-1}$ ada maka

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)v &= (A - \lambda I)^{-1}0 \\ Iv &= 0 \\ v &= 0. \end{aligned}$$

Kondisi ini bertentangan dengan syarat pada definisi nilai eigen yaitu $v \neq 0$. Dengan demikian dianggap bahwa $(A - \lambda I)^{-1}$ tidak ada agar diperoleh solusi nontrivial dari v ($v \neq 0$), sehingga dalam perhitungan $(A - \lambda I)^{-1}$ yaitu:

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \lambda I)} \cdot \text{adj}(A - \lambda I)$$

akan dianggap bahwa

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.4)$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (2.4) tersebut (mathworld.wolfram.com).

2.1.6. Kestabilan Titik Tetap

Titik tetap (x_0, y_0) dikatakan:

1. Stabil jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dari sistem memenuhi

$$\|(x(0), y(0)) - (x_0, y_0)\| < \delta,$$

maka

$$\|(x(t), y(t)) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

2. Stabil *asymptotic* jika titik tetap tersebut stabil dan terdapat δ_0 , dengan $0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga jika solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ memenuhi

$$\|(x(t), y(t)) - (x_0, y_0)\| < \delta_0,$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0).$$

3. Tidak stabil jika tidak memenuhi kriteria 1.
(Boyce dan DiPrima, 1992)

Jenis kestabilan titik tetap dapat juga digolongkan berdasarkan nilai eigennya, di mana nilai eigen mempengaruhi garis medan arah solusi dari sistem secara grafik. Penggolongan tersebut ditunjukkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Kestabilan titik tetap berdasarkan nilai eigennya

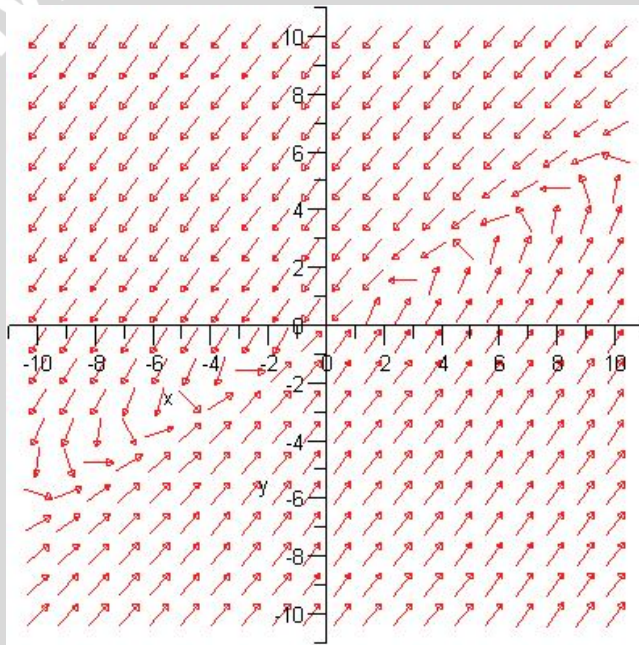
Nilai Eigen	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Stabil <i>asymptotic</i>
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil <i>asymptotic</i>
$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$	
$r > 0$	Tidak stabil
$r < 0$	Stabil <i>asymptotic</i>
$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	Stabil

(Boyce dan DiPrima, 1992)

Contoh:

1.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 5y \end{cases}$$
 merupakan sistem persamaan dengan titik

tetap $(0,0)$ serta nilai eigen $\lambda_1 = -2 < 0$ dan $\lambda_2 = -1 < 0$. Pada Gambar 2.1 terlihat bahwa garis medan arah menuju pada titik tetap $(0,0)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik tetap tersebut stabil *asymptotic*.

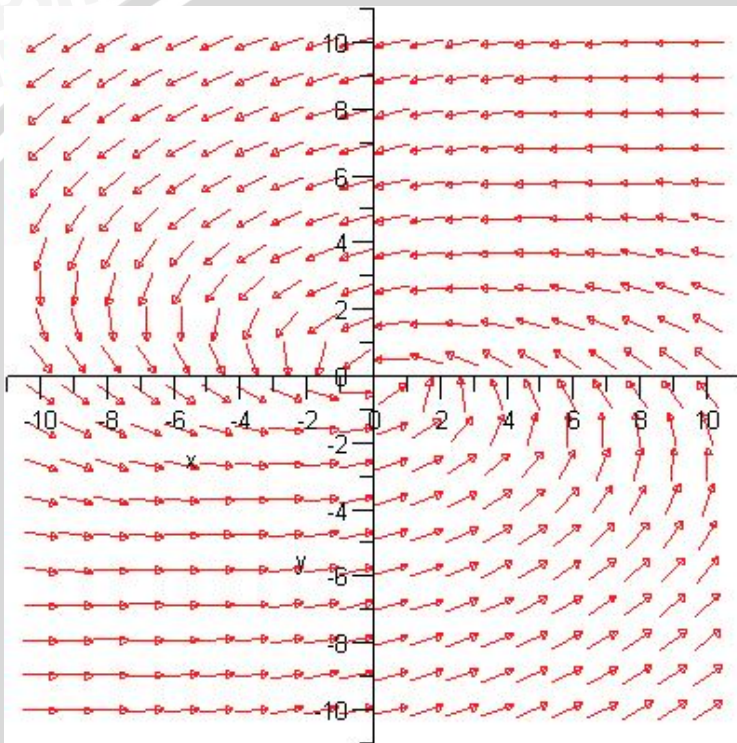


Gambar 2.1 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

2.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$
 merupakan sistem persamaan dengan titik

tetap $(0,0)$ serta nilai eigen $\lambda_1 = -1 + 2i$ dan $\lambda_2 = -1 - 2i$, di

mana bagian riil dari kedua nilai eigen tersebut bernilai negatif. Gambar 2.2 menunjukkan bahwa garis medan arah berputar berlawanan arah jarum jam dan menuju pada titik tetap $(0,0)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik tetap tersebut stabil *asymptotic*.

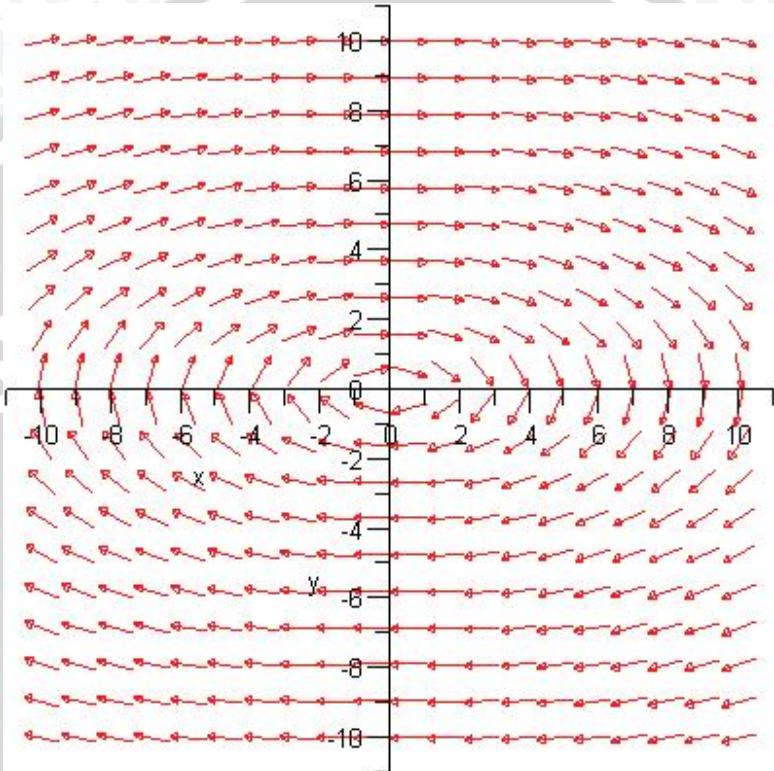


Gambar 2.2 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$, di mana $r < 0$

3.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$
 merupakan sistem persamaan dengan titik tetap

$(0,0)$ serta nilai eigen $\lambda_1 = 2i$ dan $\lambda_2 = -2i$. Pada Gambar 2.3 terlihat bahwa garis medan arah berputar searah jarum jam dan

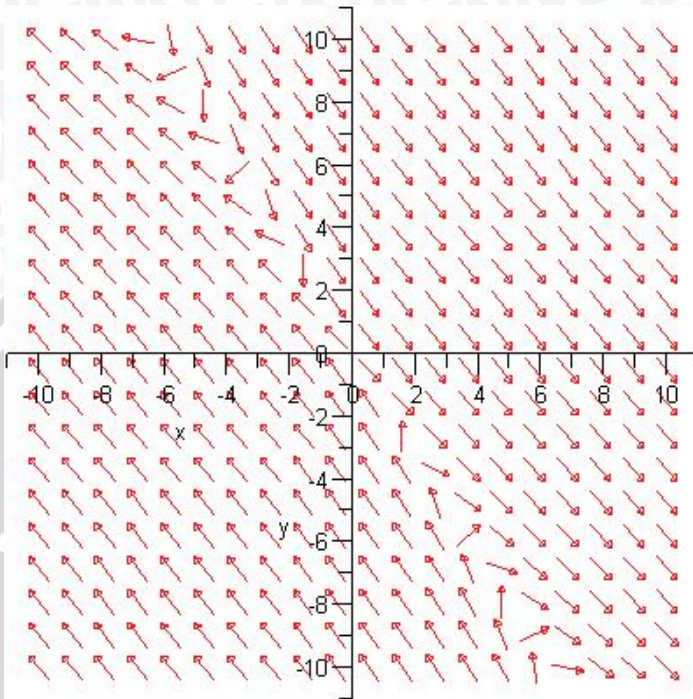
membentuk suatu elips dengan titik tetap $(0,0)$ sebagai pusatnya. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa titik tetap tersebut stabil.



Gambar 2.3 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_1 = i\mu$, $\lambda_2 = -i\mu$

4.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 4y \end{cases}$$
 merupakan sistem persamaan dengan titik

tetap $(0,0)$ serta nilai eigen $\lambda_1 = 2 > 0$ dan $\lambda_2 = -1 < 0$. Gambar 2.4 menunjukkan bahwa pergerakan garis medan arah menjauhi titik tetap $(0,0)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik tetap ini tidak stabil.



Gambar 2.4 Pergerakan garis medan arah ketika $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

2.2. Persamaan Diferensial Logistik

Model persamaan eksponensial yaitu:

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

$r > 0$ merupakan laju pertumbuhan per kapita. Populasi akan bertumbuh secara eksponensial:

$$P(t) = P_0 e^{rt},$$

di mana P_0 merupakan banyaknya populasi pada waktu $t = 0$. Untuk waktu yang relatif singkat, hasil ini pantas untuk populasi tertentu, misalnya pada bakteri. Tetapi untuk waktu yang sangat

lama, jumlah populasi akan terus bertambah menuju ke nilai yang tidak terbatas. Hal ini bertentangan dengan kondisi nyata di mana suatu populasi yang menempati suatu tempat memiliki batas jumlah maksimum, bergantung pada ukuran tempat tersebut. Dengan demikian tanpa beberapa pembatasan untuk t , model ini tidak benar (Williamson, 2001).

Salah satu model yang lebih realistis daripada pertumbuhan eksponensial adalah persamaan diferensial logistik:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right). \quad (2.5)$$

Konstanta $K > 0$ pada persamaan (2.5) merupakan batas banyaknya populasi. Pada model ini, laju pertumbuhan per kapita yaitu $r(1 - P/K)$ dan bergantung pada jumlah populasi. Pada saat jumlah populasi adalah K , model memprediksi laju pertumbuhan adalah nol (Williamson, 2001).

2.3. Persamaan Michaelis-Menten

Persamaan Michaelis-Menten pada awalnya digunakan untuk mempresentasikan efek konsentrasi substrat pada laju reaksi enzim, dengan bentuk persamaan (biosreenivas.blogspot.com):

$$v_0 = \frac{v_{\max} [S]}{K_m + [S]}, \quad (2.6)$$

di mana: v_0 = laju reaksi

$v_{\max}$ = laju maksimal reaksi

S = konsentrasi substrat

K_m = konstanta Michaelis-Menten yang menunjukkan konsentrasi substrat ketika laju reaksi merupakan setengah dari laju maksimal reaksi.

Dalam perkembangannya persamaan ini telah sering digunakan untuk menghitung pertumbuhan jumlah populasi bakteri.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

3.1. Konstruksi Model

3.1.1. Dinamika Pertumbuhan Rumput

Dinamika pertumbuhan rumput dipengaruhi oleh pertumbuhan rumput tanpa faktor pengganggu dan pengembalaan. Dengan dilakukannya pengembalaan maka rumput dikonsumsi oleh hewan sehingga mengakibatkan pertumbuhan rumput tersebut terganggu.

3.1.1.1. Pertumbuhan Rumput Tanpa Faktor Pengganggu

Pertumbuhan rumput tanpa faktor pengganggu dimodelkan berdasarkan model logistik sesuai persamaan (2.5) yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha Y \left(1 - \frac{Y}{K} \right) \\ &= \alpha \left(Y - \frac{Y^2}{K} \right),\end{aligned}$$

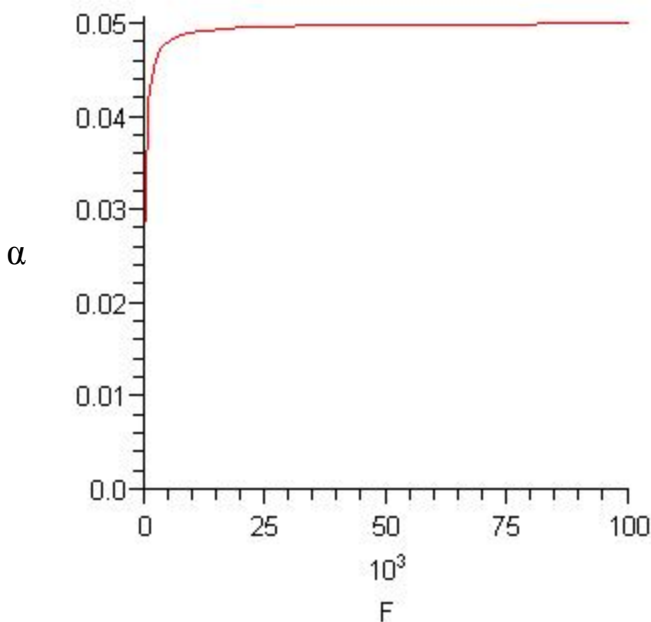
di mana Y menyatakan biomassa rumput, K menyatakan biomassa rumput maksimum, dan t menyatakan waktu. Sementara itu, α merupakan fungsi yang menyatakan laju pertumbuhan maksimal (a) terhadap banyaknya unsur hara dalam tanah (F) dan diasumsikan mengikuti hukum Michaelis-Menten sesuai persamaan (2.6), yaitu $\alpha = \frac{aF}{d + F}$. Dengan demikian diperoleh model pertumbuhan rumput tanpa faktor pengganggu sebagai berikut:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{aF}{d + F} \left(Y - \frac{Y^2}{K} \right), \quad (3.1)$$

dengan d menyatakan banyaknya unsur hara dalam tanah ketika setengah dari pertumbuhan maksimum rumput terpenuhi. Berdasarkan kondisi nyata, banyaknya unsur hara dalam tanah minimal bernilai 0 ($F \geq 0$) dan $a, d > 0$ sehingga:

$$\lim_{F \rightarrow \infty} \frac{aF}{d + F} = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \frac{F}{F}}{\frac{d}{F} + \frac{F}{F}} = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{a}{\frac{d}{F} + 1} = a.$$

Fungsi α ditunjukkan pada Gambar 3.1 berikut.



Gambar 3.1 Perubahan nilai α terhadap F

Pada Gambar 3.1, nilai a dan d yang digunakan berturut-turut 0.05 dan 200, sedangkan rentang nilai F yang dipakai yaitu $[0, 100000]$. Dari gambar terlihat bahwa α konvergen ke

$a = 0.05$, sehingga dapat disimpulkan bahwa ketika $F \rightarrow \infty$ maka $\alpha \rightarrow a$ atau dengan kata lain seiring dengan meningkatnya jumlah unsur hara dalam tanah, maka nilai α akan semakin meningkat dan menuju $\alpha = 0.05$, yaitu laju pertumbuhan maksimal itu sendiri.

3.1.1.2. Rumput yang Terambil Akibat Penggembalaan

Rumput secara terus menerus mengalami pertumbuhan. Namun dengan adanya penggembalaan, pertumbuhan rumput mengalami pengurangan dengan laju yang sebanding dengan banyaknya hewan yang digembalakan (n), biomassa rumput (Y), dan koefisien konsumsi individu hewan (r) yaitu:

$$\frac{dY}{dt} = -nrY. \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) maka diperoleh model dinamika pertumbuhan rumput sebagai berikut:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{aF}{d + F} \left(Y - \frac{Y^2}{K} \right) - nrY. \quad (3.3)$$

3.1.2. Dinamika Jumlah Unsur Hara dalam Tanah

Dinamika jumlah unsur hara dalam tanah dipengaruhi oleh pemupukan, erosi, transformasi, dan penggembalaan. Pemupukan berperan penting dalam meningkatkan kandungan unsur hara dalam tanah. Namun seiring dengan terjadinya erosi, transformasi, dan penggembalaan maka laju meningkatnya jumlah unsur hara tersebut mengalami pengurangan.

3.1.2.1. Pemupukan

Laju perubahan jumlah unsur hara dalam tanah akibat pemupukan berbanding lurus terhadap banyaknya pupuk yang diberikan, sehingga dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dF}{dt} = m, \quad (3.4)$$

di mana F menyatakan banyaknya unsur hara dalam tanah, t menyatakan waktu, dan m menyatakan jumlah pupuk yang diberikan.

3.1.2.2. Hilangnya Unsur Hara dalam Tanah Akibat Faktor di Luar Penggembalaan

Kehilangan unsur hara dalam tanah dapat disebabkan oleh erosi dan perubahan unsur hara menjadi bentuk lain (transformasi). Dalam hal ini diasumsikan jumlah hilangnya unsur hara akibat kedua faktor tersebut adalah konstan (Wickham, dkk, 1997). Laju berkurangnya jumlah unsur hara ini berbanding lurus terhadap koefisien hilangnya tanah (s) dan banyaknya unsur hara yang ada dalam tanah (F) yaitu:

$$\frac{dF}{dt} = -sF. \quad (3.5)$$

3.1.2.3. Hilangnya Unsur Hara dalam Tanah Akibat Penggembalaan

Rumput menyerap unsur hara dalam tanah sebagai pendukung pertumbuhannya. Dengan adanya penggembalaan, rumput tersebut dimakan oleh hewan sehingga mengakibatkan unsur hara yang telah terserap rumput ikut dikonsumsi oleh hewan, yang dalam kenyataannya unsur-unsur ini memiliki peran positif bagi perkembangan hewan. Sebagai contoh pada hewan domba, fosfor dapat terkonversi menjadi daging, wol, tulang, dan kotoran (tinja). Kotoran tersebut tidak kembali ke dalam rumput, tetapi tersalurkan ke wilayah yang tidak produktif. Dalam model ini diasumsikan bahwa hilangnya unsur hara dalam tanah akibat penggembalaan hewan adalah konstan (Wickham, dkk, 1997).

Laju berkurangnya jumlah unsur hara dalam tanah akibat penggembalaan dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{\beta \rho F n r Y}{c + F}, \quad (3.6)$$

di mana β menyatakan fraksi unsur hara yang hilang dari dalam tanah, ρ menyatakan konsentrasi maksimum unsur hara di dalam rumput, F menyatakan banyaknya unsur hara dalam tanah, n menyatakan banyaknya hewan yang digembalakan, r menyatakan koefisien konsumsi individu hewan, Y menyatakan biomassa rumput, dan c menyatakan banyaknya unsur hara dalam tanah yang mana setengah dari konsentrasi maksimum unsur hara pada rumput terpenuhi.

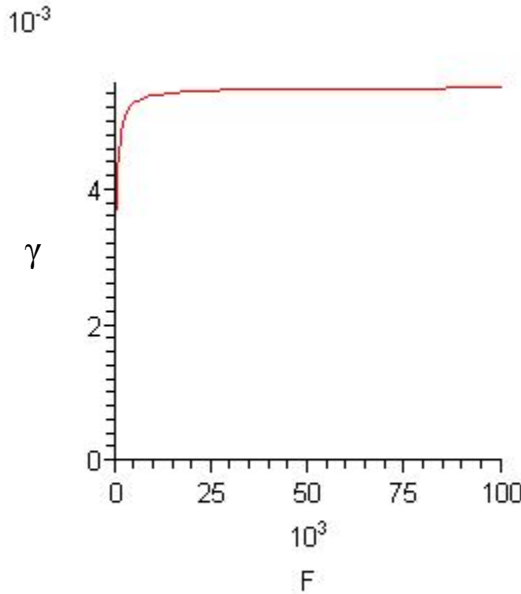
Persamaan (3.6) menggunakan bentuk persamaan Michaelis Menten yaitu $\gamma = \frac{\rho F}{c + F}$, sehingga persamaan tersebut dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dF}{dt} = -\beta \gamma n r Y.$$

Karena $F \geq 0$; $\rho, c > 0$, dan ρ, c bernilai konstan, maka:

$$\lim_{F \rightarrow \infty} \frac{\rho F}{c + F} = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{\rho \cdot \frac{F}{F}}{\frac{c}{F} + \frac{F}{F}} = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\frac{c}{F} + 1} = \rho.$$

Fungsi γ ditunjukkan pada Gambar 3.2 dengan menggunakan nilai $\rho = 0.0055$, $c = 200$, dan rentang nilai F yaitu $[0, 100000]$. Dari gambar tersebut terlihat bahwa γ konvergen ke $\rho = 0.0055$, sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin meningkatnya jumlah unsur hara di dalam tanah ($F \rightarrow \infty$) maka nilai γ akan semakin meningkat dan menuju $\gamma = 0.0055$, yaitu konsentrasi maksimum unsur hara di dalam rumput.



Gambar 3.2 Perubahan nilai γ terhadap F

Berdasarkan persamaan (3.4), (3.5), dan (3.6) maka dapat dibentuk model dinamika jumlah unsur hara dalam tanah sebagai berikut:

$$\frac{dF}{dt} = m - sF - \frac{\beta \rho F n r Y}{c + F} \quad (3.7)$$

Dengan demikian diperoleh sebuah model sistem dinamik dari persamaan (3.3) dan (3.7) yang menggambarkan interaksi antara pertumbuhan rumput dan kesuburan tanah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \frac{aF}{d + F} \left(Y - \frac{Y^2}{K} \right) - nrY \\ \frac{dF}{dt} = m - sF - \frac{\beta \rho F n r Y}{c + F} \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2. Analisis Dinamik

3.2.1. Titik Tetap

Berdasarkan sistem persamaan (2.2) maka titik tetap sistem (3.8) dapat diperoleh jika:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= 0 \\ \frac{aF}{d+F} \left(Y - \frac{Y^2}{K} \right) - nrY &= 0\end{aligned}\quad (3.9)$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= 0 \\ m - sF - \frac{\beta \rho F nr Y}{c+F} &= 0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.9) diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{aF}{d+F} Y - nrY - \frac{aF}{(d+F)K} Y^2 &= 0 \\ \left(\frac{aF}{d+F} - nr \right) Y - \frac{aF}{(d+F)K} Y^2 &= 0 \\ Y \left(\frac{aF}{d+F} - nr - \frac{aF}{(d+F)K} Y \right) &= 0.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Dengan demikian, penyelesaian Y untuk persamaan (3.11) yaitu:

$$Y = 0$$

atau

$$\frac{aF}{d+F} - nr - \frac{aF}{(d+F)K} Y = 0$$

$$Y = \left(\frac{aF}{d+F} - nr \right) \frac{(d+F)K}{aF}$$

$$Y = K - \frac{nr(d+F)K}{aF}$$

$$Y = K \left(1 - \frac{nr(d+F)}{aF} \right)$$

Substitusi $Y = 0$ ke persamaan (3.10) diperoleh:

$$m - sF = 0$$

$$F = \frac{m}{s}$$

Sedangkan substitusi $Y = K \left(1 - \frac{nr(d+F)}{aF} \right)$ ke persamaan (3.10) menghasilkan:

$$m - sF - \frac{\beta \rho F n r K}{c+F} \left(1 - \frac{nr(d+F)}{aF} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) dikalikan dengan $-a(c+F)$ menghasilkan:

$$-mac - maF + sacF + saF^2 + a\beta \rho F n r K \left(1 - \frac{nr(d+F)}{aF} \right) = 0$$

$$-mac - maF + sacF + saF^2 + \beta \rho n r K a F - \beta \rho n^2 r^2 d K$$

$$- \beta \rho n^2 r^2 K F = 0$$

$$asF^2 - (a(m - cs) + K\beta \rho n r(nr - a))F - (K\beta \rho n^2 r^2 d + acm) = 0.$$

Jika dimisalkan:

$$A = as \quad (3.13)$$

$$B = a(m - cs) + K\beta pnr(nr - a) \quad (3.14)$$

$$C = K\beta p n^2 r^2 d + acm \quad (3.15)$$

maka diperoleh penyelesaian dari F sebagai berikut:

$$F^* = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}.$$

Diketahui bahwa $B = \sqrt{B^2}$ dan banyaknya unsur hara dalam tanah paling sedikit bernilai 0 ($F \geq 0$). Dengan demikian jika $B = \sqrt{B^2}$ maka $B < \sqrt{B^2 + 4AC}$, sehingga penyelesaian untuk

$$F^* = \frac{B - \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

tidak berlaku karena nilai F^* yang dihasilkan akan berupa bilangan riil negatif ($F^* < 0$). Jadi penyelesaian untuk F^* yang memenuhi $F \geq 0$ yaitu:

$$F^* = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}. \quad (3.16)$$

Dengan melakukan substitusi F^* ke persamaan (3.10), diperoleh penyelesaian:

$$m - sF^* - \frac{\beta \rho F^* nr Y^*}{c + F^*} = 0$$

$$\frac{\beta \rho F^* nr Y^*}{c + F^*} = m - sF^*$$

$$\begin{aligned}\beta\rho F^*nrY^* &= (m - sF^*)(c + F^*) \\ Y^* &= \frac{(m - sF^*)(c + F^*)}{\beta\rho F^*nr}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Dengan demikian sistem persamaan (3.8) memiliki dua titik tetap yaitu $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ dan (Y^*, F^*) .

Penjabaran persamaan (3.16) menghasilkan bentuk F^* lainnya untuk mempermudah penjabaran persamaan (3.17) yaitu (lihat Lampiran 1):

$$F^* = \frac{1}{2as} (am - acs + K\beta\rho n^2 r^2 - K\beta\rho nra + H), \quad (3.18)$$

dengan bentuk H sebagai berikut (lihat Lampiran 1):

$$\begin{aligned}H &= (a^2m^2 + 2a^2scm + 2K\beta\rho n^2 r^2 am - 2K\beta\rho nra^2m \\ &\quad - 2K\beta\rho n^2 r^2 acs + a^2c^2s^2 + 2K\beta\rho nra^2cs + K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 \\ &\quad - 2K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a + K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 + 4asK\beta\rho n^2 r^2 d)^{1/2}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Sedangkan penjabaran persamaan (3.17) menghasilkan (lihat Lampiran 2):

$$\begin{aligned}Y^* &= \frac{K}{a} \left(\beta\rho nra^2K - 2\beta\rho n^2 r^2 aK - a^2m + a^2cs + K\beta\rho n^3 r^3 \right) \\ &\quad \frac{1}{K\beta\rho nra - K\beta\rho n^2 r^2 - am + acs - H}.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Biomassa rumput sesuai kondisi nyata minimal bernilai 0 ($Y \geq 0$) sehingga diharapkan bahwa $Y^* \geq 0$ yaitu:

$$\frac{(m - sF^*)(c + F^*)}{\beta \rho F^* nr} \geq 0, \quad (3.21)$$

di mana $n, m \geq 0$; $a, d, K, r, s, \beta, \rho, c > 0$, dan $F^* \geq 0$. Berikut akan dicari batas jumlah hewan agar $Y^* \geq 0$.

Jika $\beta \rho F^* nr = 0$ maka pertidaksamaan (3.21) tidak berlaku karena menghasilkan $Y^* = \infty$, sehingga perlu diasumsikan

$$F^*, n > 0 \quad (3.22)$$

agar $\beta \rho F^* nr > 0$. Dengan demikian perlu ditunjukkan bahwa $(m - sF^*)(c + F^*) \geq 0$, yaitu (lihat persamaan (3) pada Lampiran 2):

$$\begin{aligned} & cm - \frac{c}{2a} (am - acs + K\beta \rho n^2 r^2 - K\beta \rho nra + H) \\ & + \frac{m}{2as} (am - acs + K\beta \rho n^2 r^2 - K\beta \rho nra + H) \\ & - \frac{1}{4a^2 s} (am - acs + K\beta \rho n^2 r^2 - K\beta \rho nra + H)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pertidaksamaan (3.23) dikalikan dengan $4a^2 s > 0$ diperoleh:

$$\begin{aligned} & 4cma^2 s - 2cas (am - acs + K\beta \rho n^2 r^2 - K\beta \rho nra + H) \\ & + 2am (am - acs + K\beta \rho n^2 r^2 - K\beta \rho nra + H) \\ & - (am - acs + K\beta \rho n^2 r^2 - K\beta \rho nra + H)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4cma^2 s - 2cma^2 s + 2c^2 a^2 s^2 - 2K\beta \rho n^2 r^2 cas \\ & + 2K\beta \rho nra^2 cs - 2casH + 2a^2 m^2 - 2ma^2 cs \\ & + 2K\beta \rho n^2 r^2 am - 2K\beta \rho nra^2 m + 2maH - 2a^2 m^2 \\ & - 4K\beta \rho n^2 r^2 am + 4K\beta \rho nra^2 m - 2amH - 2a^2 c^2 s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4K\beta\rho n^2 r^2 a c s - 4K\beta\rho n r a^2 c s + 2a c s H \\
& - 2K^2 \beta^2 \rho^2 n^4 r^4 + 4K^2 \beta^2 \rho^2 n^3 r^3 a - 2K\beta\rho n^2 r^2 H \\
& - 2K^2 \beta^2 \rho^2 n^2 r^2 a^2 + 2K\beta\rho n r a H - 4a s K\beta\rho n^2 r^2 d \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2K\beta\rho n^2 r^2 a c s - 2K\beta\rho n r a^2 c s - 2K\beta\rho n^2 r^2 a m \\
& + 2K\beta\rho n r a^2 m - 2K^2 \beta^2 \rho^2 n^4 r^4 + 4K^2 \beta^2 \rho^2 n^3 r^3 a \\
& - 2K\beta\rho n^2 r^2 H - 2K^2 \beta^2 \rho^2 n^2 r^2 a^2 + 2K\beta\rho n r a H \\
& - 4a s K\beta\rho n^2 r^2 d \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Pertidaksamaan (3.24) dikalikan dengan $\frac{1}{2K\beta\rho r} > 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
& n^2 r a c s - n a^2 c s - n^2 r a m + n a^2 m - K\beta\rho n^4 r^3 \\
& + 2K\beta\rho n^3 r^2 a - n^2 r H - K\beta\rho n^2 r a^2 + n a H - 2a s n^2 r d \geq 0 \\
& n^2 r a c s - n a^2 c s - n^2 r a m + n a^2 m \\
& - K\beta\rho n^4 r^3 + 2K\beta\rho n^3 r^2 a - K\beta\rho n^2 r a^2 \\
& - 2a s n^2 r d \geq n^2 r H - n a H.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Pertidaksamaan (3.25) memuat H , di mana H berbentuk akar (lihat persamaan (3.19)), sehingga untuk menjabarkan pertidaksamaan tersebut, ruas kiri dan kanan perlu dikuadratkan. Namun dalam hal ini baik ruas kiri maupun ruas kanan tidak dapat dianalisis apakah kedua ruas tersebut bernilai riil positif atau negatif. Jika kedua ruas bernilai riil positif, pengkuadratan dapat dilakukan dan jika sebaliknya, maka pengkuadratan tidak dapat dilakukan. Oleh karena itu, pertidaksamaan (3.25) diasumsikan sebagai sebuah persamaan terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & (n^2 r a c s - n a^2 c s - n^2 r a m + n a^2 m \\
 & - K \beta \rho n^4 r^3 + 2 K \beta \rho n^3 r^2 a - K \beta \rho n^2 r a^2 \\
 & - 2 a s n^2 r d)^2 = (n^2 r H - n a H)^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

Dengan menjabarkan persamaan (3.26) kemudian dicari penyelesaian untuk n (lihat Lampiran 3), maka diperoleh:

$$n_{1,2}^* = \left(\frac{-2acm - acsd + amd}{r} \pm \frac{(adcs + amd)}{r} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-c+d) \cdot (m+sd)}.$$

Dengan demikian terdapat dua penyelesaian untuk n yaitu:

$$\begin{aligned}
 n_1^* &= \left(\frac{-2acm - acsd + amd + adcs + amd}{r} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-c+d)(m+sd)} \\
 &= \frac{2am(-c+d)}{r} \cdot \frac{1}{2(-c+d)(m+sd)} \\
 &= \frac{am}{r(m+sd)}
 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
 n_2^* &= \left(\frac{-2acm - acsd + amd - adcs - amd}{r} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-c+d)(m+sd)} \\
 &= \frac{-2ac(m+sd)}{r} \cdot \frac{1}{-2(c-d)(m+sd)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{ac}{r(c-d)}.$$

Dari pembahasan sebelumnya $a, r, s, d, c > 0$ dan $m \geq 0$, sehingga terdapat beberapa kemungkinan kasus diantaranya:

1. Jika $m > 0$ maka $n^*_1 > 0$.
2. Jika $m = 0$ maka $n^*_1 = 0$.
3. Jika $c > d$ maka $n^*_2 > 0$.
4. Jika $c < d$ maka $n^*_2 < 0$.
5. Jika $c = d$ maka $n^*_2 = \infty$.

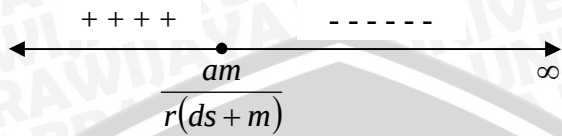
Berdasarkan nilai parameter dari Tabel 3.1 di belakang, diperoleh nilai c dan d adalah sama sehingga $n^*_2 = \infty$. Hal ini bertentangan dengan kondisi nyata di mana banyaknya hewan memiliki batas tertentu untuk menempati suatu lahan. Oleh karena itu penyelesaian n yang berlaku yaitu:

$$n^* = \frac{am}{r(m+sd)}.$$

Asumsi (3.22) membatasi bahwa $n = 0$ dapat menyebabkan $Y^* = \infty$ berdasarkan persamaan (3.17). Akan tetapi Y^* memiliki bentuk persamaan lain yaitu persamaan (3.20). Dengan mensubstitusikan nilai $n = 0$ ke persamaan (3.20) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} Y^* &= \frac{K}{a} \left(-a^2m + a^2cs - aH \right) \cdot \frac{1}{-am + acs - H} \\ &= \frac{K}{\left(-a^2m + a^2cs - aH \right)} \cdot \left(-a^2m + a^2cs - aH \right) \\ &= K \end{aligned}$$

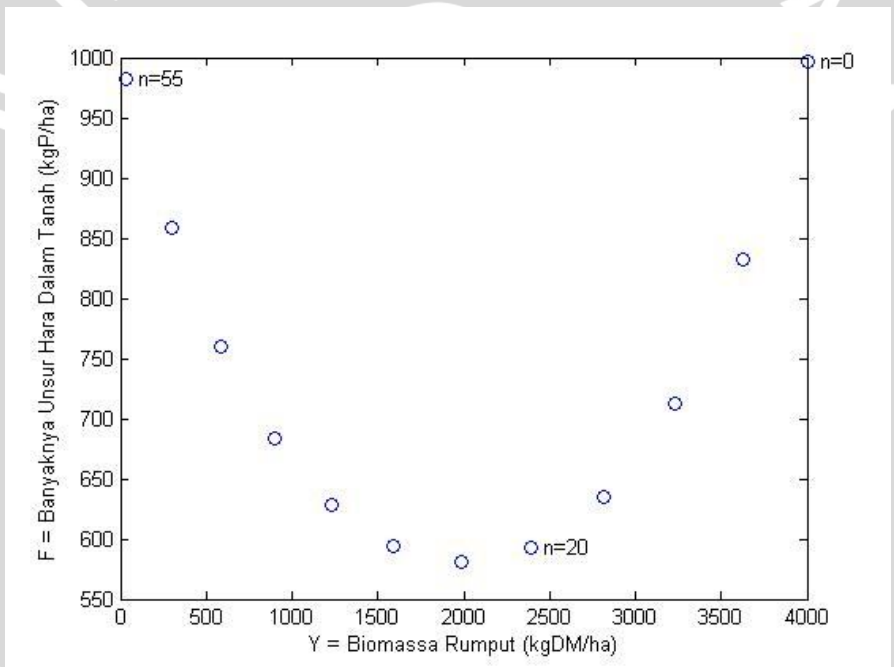
di mana $K > 0$. Dengan demikian dapat digambarkan sebuah garis bilangan yang menyatakan nilai Y^* yang dihasilkan oleh n sebagai berikut.



Gambar 3.3 Garis bilangan dari n yang menghasilkan Y^*

Dengan demikian batas di mana $Y^* \geq 0$ yaitu:

$$n \leq \frac{am}{r(m + sd)} = n^* .$$



Gambar 3.4 Perubahan titik tetap (Y^*, F^*) terhadap n yang berbeda

Dengan menggunakan data pada Tabel 3.1 dan $m = 40$ $\text{kgP} \cdot \text{ha}^{-1} \cdot \text{tahun}^{-1}$ maka diperoleh Gambar 3.4. Pada gambar terlihat bahwa saat $n = 0$ biomassa rumput dan banyaknya unsur hara dalam

tanah berada pada titik tertinggi yaitu $Y = K$ dan $F = \frac{m}{s}$. Hal ini

dikarenakan tidak ada hewan penggembalaan yang mengkonsumsi rumput pada lahan tersebut sehingga hilangnya unsur hara akibat penggembalaan pun tidak terjadi. Seiring dengan bertambahnya hewan yang digembalakan (n) maka biomassa rumput semakin berkurang akibat dikonsumsi oleh hewan. Sama halnya dengan yang terjadi pada unsur hara dalam tanah, di mana F bahkan menuju ke titik minimum. Semakin n meningkat jauh, biomassa rumput semakin berkurang bahkan mencapai tingkat di mana biomassa rumput tersebut habis. Dengan menurunnya biomassa rumput berarti unsur hara yang diserap oleh rumput semakin berkurang. Dengan demikian banyaknya unsur hara (F) mengalami peningkatan kembali.

Telah dibahas sebelumnya bahwa titik tetap dari sistem persamaan (3.8) adalah $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ dan (Y^*, F^*) . Dengan melihat pengaruh dari n terhadap titik tetap, maka terdapat tiga kondisi yang perlu diperhatikan yaitu:

1. Kondisi $n < \frac{am}{r(m+sd)}$.

Pada kondisi ini dihasilkan $Y^* > 0$ sehingga kedua titik tetap tersebut ada dan berlaku.

2. Kondisi $n = \frac{am}{r(m+sd)}$.

Pada kondisi ini kedua titik tetap menjadi serupa (sama).

Diketahui sebelumnya bahwa $n = \frac{am}{r(m+sd)}$ diperoleh dari

serangkaian penjabaran bentuk persamaan $(m - sF^*)(c + F^*) = 0$. Dengan demikian ketika

$$n = \frac{am}{r(m+sd)} \text{ maka } Y^* = \frac{(m - sF^*)(c + F^*)}{\beta \rho F^* n r} = 0. \text{ Substitusi}$$

nilai $Y^* = 0$ ke persamaan (3.10) menghasilkan $F^* = \frac{m}{s}$.

3. Kondisi $n > \frac{am}{r(m+sd)}$.

Pada kondisi ini dihasilkan $Y^* < 0$ sehingga tidak sesuai dengan kondisi nyata di mana seharusnya biomassa rumput minimal bernilai 0 ($Y^* \geq 0$). Dengan demikian titik tetap (Y^*, F^*) ada namun tidak berlaku dan sebaliknya titik tetap $(0, \frac{m}{s})$ berlaku.

3.2.2. Kestabilan Titik Tetap

Sistem persamaan (3.8) merupakan suatu sistem otonomus nonlinear. Dengan memisalkan sistem (3.8) sebagai:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = Q(Y, F) \\ \frac{dF}{dt} = R(Y, F) \end{cases}$$

maka dalam mencari kestabilan dari titik tetapnya dibutuhkan proses linearisasi sesuai persamaan (2.3). Oleh karena itu, akan dicari terlebih dahulu bentuk matriks Jacobi:

$$J(Y, F) = \begin{pmatrix} Q_Y(Y, F) & Q_F(Y, F) \\ R_Y(Y, F) & R_F(Y, F) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

di mana:

$$\begin{aligned} Q_Y(Y, F) &= \frac{aF}{d+F} - \frac{2aF}{(d+F)K} Y - nr \\ &= \frac{aF}{d+F} \left(1 - \frac{2Y}{K} \right) - nr \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
 Q_F(Y, F) &= \frac{aY}{d+F} + \left(-\frac{aFY}{(d+F)^2} \right) + \left(-\frac{aY^2}{(d+F)K} + \frac{aFY^2}{(d+F)^2 K} \right) \\
 &= \frac{KaYd + KaYF - aFYK - adY^2 - aY^2F + aFY^2}{(d+F)^2 K} \\
 &= \frac{ad}{(d+F)^2} \left(Y - \frac{Y^2}{K} \right) \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$R_Y(Y, F) = -\frac{\beta \rho Fnr}{c+F} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
 R_F(Y, F) &= -s + \left(-\frac{\beta \rho nrY}{c+F} + \frac{\beta \rho FnrY}{(c+F)^2} \right) \\
 &= -s + \frac{-\beta \rho nrYc - \beta \rho nrYF + \beta \rho FnrY}{(c+F)^2} \\
 &= -s - \frac{\beta \rho cnrY}{(c+F)^2}. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.28), (3.29), (3.30), dan (3.31) ke dalam matriks (3.27), maka diperoleh matriks Jacobi:

$$J(Y, F) = \begin{pmatrix} \frac{aF}{d+F} \left(1 - \frac{2Y}{K} \right) - nr & \frac{ad}{(d+F)^2} \left(Y - \frac{Y^2}{K} \right) \\ -\frac{\beta \rho Fnr}{c+F} & -s - \frac{\beta \rho cnrY}{(c+F)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Matriks (3.32) akan digunakan untuk menghitung nilai eigen, di mana nilai eigen ini merupakan acuan dalam menentukan jenis kestabilan seperti pada Tabel 2.1. Berdasarkan persamaan (2.4) maka nilai eigen tersebut diperoleh melalui:

$$\det(J(Y_0, F_0) - \lambda I) = 0 \quad (3.33)$$

di mana (Y_0, F_0) merupakan titik tetap, $J(Y_0, F_0)$ merupakan matriks Jacobi (3.32) di mana (Y_0, F_0) telah disubstitusikan kedalamnya, dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan matriks identitas.

3.2.2.1. Kestabilan Titik Tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$

Substitusi titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ ke dalam matriks (3.32) menghasilkan:

$$J\left(0, \frac{m}{s}\right) = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{m}{s} \cdot 1 - nr & 0 \\ d + \frac{m}{s} & -s \\ \beta \rho \frac{m}{s} nr & -s \\ -\frac{m}{c + \frac{m}{s}} & -s \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (3.33) maka diperoleh:

$$J\left(0, \frac{m}{s}\right) - \lambda I = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{m}{s} \cdot 1 - nr & 0 \\ d + \frac{m}{s} & -s \\ \beta \rho \frac{m}{s} nr & -s \\ -\frac{m}{c + \frac{m}{s}} & -s \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot \frac{m}{s} - nr - \lambda & 0 \\ d + \frac{m}{s} & -s - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Karena matriks (3.34) merupakan matriks segitiga bawah, maka determinannya diperoleh dari perkalian elemen-elemen diagonalnya, sehingga:

$$\begin{pmatrix} a \cdot \frac{m}{s} - nr - \lambda \\ d + \frac{m}{s} \end{pmatrix} (-s - \lambda) = 0.$$

Dengan demikian nilai eigen yang didapat yaitu:

$$\lambda_1 = \frac{am}{s} \cdot \frac{s}{ds + m} - nr = \frac{am}{ds + m} - nr \quad (3.35)$$

$$\lambda_2 = -s.$$

Karena $s > 0$, jelaslah bahwa $\lambda_2 < 0$ sedangkan nilai λ_1 belum dapat diketahui secara pasti dikarenakan nilai n yang tidak konstan. Namun berdasarkan wilayah dari n sesuai Gambar 3.3, maka terdapat beberapa kemungkinan diantaranya:

$$1. \text{ Kondisi } n = \frac{am}{r(ds + m)}.$$

Pada kondisi ini, persamaan (3.35) dapat ditulis menjadi:

$$\lambda_1 = \frac{am}{ds+m} - \frac{am}{r(ds+m)} \cdot r = 0.$$

Nilai λ_1 dan λ_2 ini tidak dapat digunakan sebagai penentu kestabilan secara analitik. Untuk itu, pada Gambar 3.7, 3.8, dan 3.9 ditunjukkan solusi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk beberapa syarat awal. Gambar tersebut mengindikasikan bahwa pada kondisi ini titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ stabil.

2. Kondisi $n < \frac{am}{r(ds+m)}$.

Dalam hal ini, nilai a, r, d , dan s adalah konstan, sedangkan nilai m dapat berubah-ubah sehingga menghasilkan n yang berbeda pula. Dengan mengambil $n = \frac{am_1}{r(ds+m_1)} < \frac{am}{r(ds+m)}$ maka persamaan (3.35) menjadi:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{am}{ds+m} - \frac{am_1}{r(ds+m_1)} r \\ &= \frac{am}{ds+m} - \frac{am_1}{(ds+m_1)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Karena $n < \frac{am}{r(ds+m)}$, maka:

$$\begin{aligned} \frac{am_1}{r(ds+m_1)} &< \frac{am}{r(ds+m)}, \quad r > 0 \\ \frac{am_1}{ds+m_1} &< \frac{am}{ds+m}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.37) dan persamaan (3.36), diperoleh $\lambda_1 > 0$. Dengan demikian pada kondisi

$n < \frac{am}{r(ds+m)}$ dihasilkan nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Jadi

dapat disimpulkan bahwa titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ tidak stabil. Jenis kestabilan titik tetap pada kondisi ini dapat pula dibandingkan dengan perhitungan secara numerik pada Gambar 3.10, 3.11, dan 3.12.

3. Kondisi $n > \frac{am}{r(ds+m)}$.

Dengan mengambil $n = \frac{am_1}{r(ds+m_1)} > \frac{am}{r(ds+m)}$ maka persamaan (3.35) menghasilkan bentuk yang sama dengan persamaan (3.36). Karena $n > \frac{am}{r(ds+m)}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{am_1}{r(ds+m_1)} &> \frac{am}{r(ds+m)}, \quad r > 0 \\ \frac{am_1}{ds+m_1} &> \frac{am}{ds+m}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.38) dan persamaan (3.36), dihasilkan nilai $\lambda_1 < 0$. Dengan demikian titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ stabil *asymptotic*.

3.2.2.2. Kestabilan Titik Tetap (Y^*, F^*)

Titik tetap (Y^*, F^*) disubstitusikan ke dalam matriks $J(Y, F)$ untuk menghasilkan:

$$J(Y^*, F^*) = \begin{pmatrix} \frac{aF^*}{d + F^*} \left(1 - \frac{2Y^*}{K} \right) - nr & \frac{ad}{(d + F^*)^2} \left(Y^* - \frac{(Y^*)^2}{K} \right) \\ -\frac{\beta \rho F^* nr}{c + F^*} & -s - \frac{\beta \rho c nr Y^*}{(c + F^*)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

atau

$$J(Y^*, F^*) = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix},$$

di mana:

$$\begin{aligned} w &= \frac{aF^*}{d + F^*} \left(\frac{K - 2Y^*}{K} \right) - \frac{nrK(d + F^*)}{K(d + F^*)} \\ &= \frac{aF^*K - 2aF^*Y^* - nrKd - nrKF^*}{K(d + F^*)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{ad}{(d + F^*)^2} \left(Y^* - \frac{(Y^*)^2}{K} \right) \\ &= \frac{Y^*da \left(1 - \frac{Y^*}{K} \right)}{(d + F^*)^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$y = -\frac{\beta \rho F^* nr}{c + F^*} < 0$$

$$z = -s - \frac{\beta \rho c nr Y^*}{(c + F^*)^2} < 0.$$

Dengan melakukan beberapa operasi aljabar terhadap persamaan (3.40) dan (3.41), diperoleh (lihat Lampiran 4 dan Lampiran 5):

$$w = -\frac{aF^*Y^*}{K(d+F^*)} < 0 \quad (3.42)$$

$$x = \frac{Y^*dnr}{F^*(d+F^*)} > 0, \quad (3.43)$$

sehingga matriks (3.39) menjadi:

$$J(Y^*, F^*) = \begin{pmatrix} -\frac{aF^*Y^*}{K(d+F^*)} & \frac{Y^*dnr}{F^*(d+F^*)} \\ -\frac{\beta\rho F^*nr}{c+F^*} & -s - \frac{\beta\rho cnrY^*}{(c+F^*)^2} \end{pmatrix}.$$

Penentuan nilai eigen diperoleh melalui:

$$\begin{aligned} J(Y^*, F^*) - \lambda I &= \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w - \lambda & x \\ y & z - \lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

di mana determinan matriks tersebut harus bernilai 0, sehingga:

$$\det(J(Y^*, F^*) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} w - \lambda & x \\ y & z - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(w - \lambda)(z - \lambda) - xy = 0$$

$$\lambda^2 + (-w - z)\lambda + (wz - xy) = 0.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-w-z) \pm \sqrt{(-w-z)^2 - 4(wz-xy)}}{2}. \quad (3.44)$$

Karena $w, y, z < 0$ dan $x > 0$, maka $-w-z > 0$ dan $wz-xy > 0$, sehingga penyelesaian $\lambda_{1,2}$ memiliki dua kemungkinan yaitu:

1. Jika $(-w-z)^2 - 4(wz-xy) < 0$ maka nilai $\lambda_{1,2}$ berupa bilangan kompleks yang bagian riil-nya bernilai negatif karena $\frac{-(-w-z)}{2} < 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa jenis kestabilan pada kondisi ini adalah stabil *asymptotic*.
2. Jika $(-w-z)^2 - 4(wz-xy) > 0$ maka nilai $\lambda_{1,2}$ berupa bilangan riil. Karena $-w-z = \sqrt{(-w-z)^2}$ maka $-w-z > \sqrt{(-w-z)^2 - 4(wz-xy)}$, sehingga diperoleh $\lambda_{1,2} < 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa jenis kestabilan pada kondisi ini adalah stabil *asymptotic*.

$\lambda_{1,2}$ memuat n sehingga jenis kestabilan dapat pula dipengaruhi oleh nilai n tersebut, yaitu:

$$1. \text{ Kondisi } n = \frac{am}{r(ds+m)}.$$

Karena $n = \frac{am}{r(ds+m)}$ diperoleh dari serangkaian penjabaran $(m-sF^*)(c+F^*) = 0$, maka berdasarkan persamaan (3.17), $Y^* = \frac{(m-sF^*)(c+F^*)}{\beta \rho F^* nr} = 0$. Oleh karena itu:

$$w = -\frac{aF^*Y^*}{K(d+F^*)} = 0$$

$$x = \frac{Y^* dnr}{F^*(d + F^*)} = 0$$

$$y = -\frac{\beta \rho F^* nr}{c + F^*} < 0$$

$$z = -s - \frac{\beta \rho c nr Y^*}{(c + F^*)^2} = -s < 0.$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini ke dalam persamaan (3.44), diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = -s$. Kedua nilai eigen ini tidak dapat dijadikan penentu jenis kestabilan secara analitik. Untuk itu digunakan cara numerik seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.7, 3.8, dan 3.9. Dari gambar tersebut dapat diindikasikan bahwa pada kondisi ini, titik tetap (Y^*, F^*) stabil.

2. Kondisi $n > \frac{am}{r(ds + m)}$.

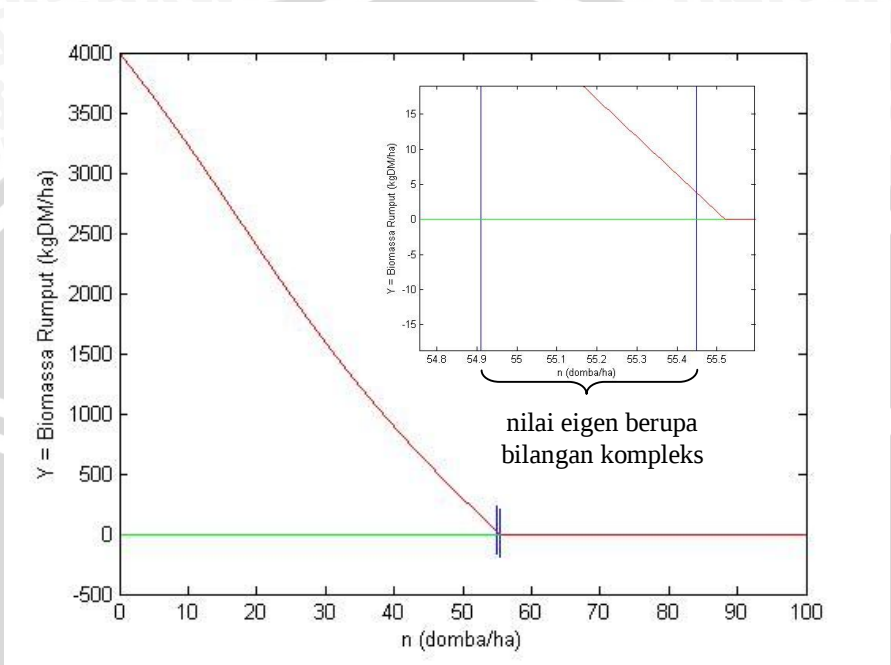
Pada kondisi ini dihasilkan $Y^* < 0$ sehingga tidak akan dibahas lebih lanjut karena bertentangan dengan kondisi nyata bahwa biomassa rumput minimal bernilai 0.

3. Kondisi $n < \frac{am}{r(ds + m)}$.

Dalam kondisi ini, kemungkinan nilai eigen yang dihasilkan merupakan bilangan kompleks atau bilangan riil. Secara numerik, wilayah n yang menghasilkan nilai eigen berupa bilangan kompleks dapat dilihat pada Gambar 3.5. Gambar tersebut menggunakan nilai $m = 40 \text{ kgP.ha}^{-1}.\text{tahun}^{-1}$ dan nilai parameter lainnya berdasarkan Tabel 3.1. Garis *horizontal* menggambarkan titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$. Namun karena gambar

tersebut hanya menjelaskan perubahan titik tetap untuk Y , maka garis *horizontal* merupakan $Y = 0$, sedangkan kurva menyatakan perubahan titik tetap Y^* terhadap n . Wilayah yang diapit oleh dua garis biru merupakan wilayah di mana nilai eigen dari titik tetap Y^* berupa bilangan kompleks, warna merah

menyatakan bahwa titik tetap yang dimaksud stabil, dan warna hijau menyatakan ketidakstabilan titik tetap.



Gambar 3.5 Perubahan titik tetap untuk Y

Jenis kestabilan titik tetap pada kondisi ini dapat pula dibandingkan dengan perhitungan secara numerik pada Gambar 3.10, 3.11, dan 3.12.

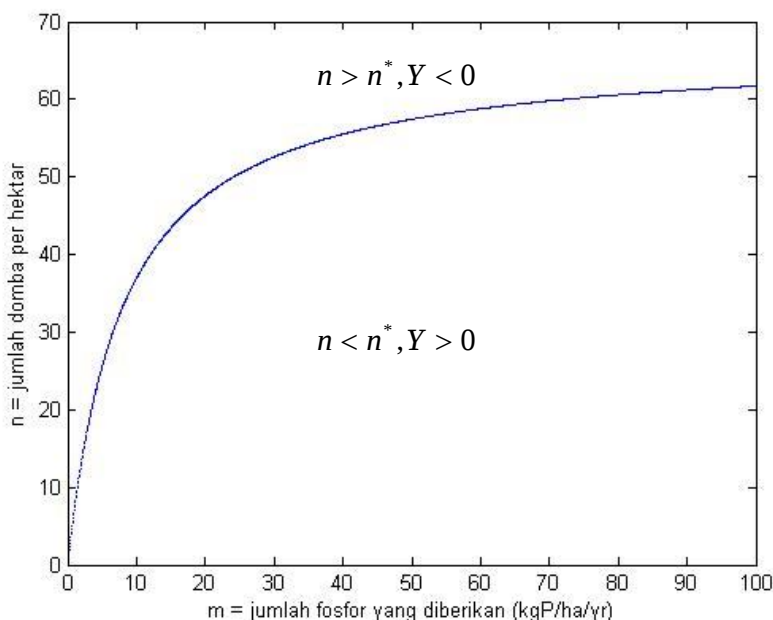
3.2.3. *Threshold*

Kestabilan titik tetap dan perilaku sistem dipengaruhi oleh nilai parameter n . Dengan demikian ambang batas (*threshold*) dalam sistem ini dinyatakan sebagai:

$$n \leq n^*$$

di mana $n^* = \frac{am}{r(ds + m)}$.

Wilayah *threshold* dijelaskan pada Gambar 3.6. Nilai-nilai parameter yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 3.1. Kurva pada gambar tersebut merupakan nilai dari n^* yang dihasilkan oleh m yang berbeda-beda. Nilai n yang berada di atas kurva menghasilkan Y berupa bilangan riil negatif, sehingga pada posisi ini dapat dikatakan bahwa jumlah hewan melebihi batas (terlalu banyak) yang mengakibatkan rumput menjadi punah, sedangkan nilai n di bawah kurva merupakan jumlah hewan yang wajar bagi keberadaan rumput.



Gambar 3.6 Wilayah *threshold*

3.3. Simulasi Numerik

Simulasi numerik terhadap dinamika kesuburan tanah akibat penggembalaan memerlukan nilai-nilai parameter sesuai dengan sistem persamaan (3.8) yang disajikan dalam Tabel 3.1, di mana data-data tersebut dikhususkan pada hewan penggembalaan berupa domba dan unsur hara yang diteliti yaitu fosfor (P).

Tabel 3.1 Variabel tetap dan parameter serta nilai estimasi dan satuannya

	Estimasi	Satuan	Deskripsi
Y		kgDM.ha ⁻¹	biomassa rumput
F		kgP.ha ⁻¹	banyaknya fosfor dalam tanah
a	0.05	hari ⁻¹	laju pertumbuhan maksimal
d	200	kgP.ha ⁻¹	banyaknya fosfor dalam tanah ketika setengah dari pertumbuhan maksimum rumput terpenuhi
K	4000	kgDM.ha ⁻¹	biomassa rumput maksimum
n	0 – 40	domba.ha ⁻¹	banyaknya hewan gembalaan
r	0.00075	ha.domba ⁻¹ . hari ⁻¹	koefisien konsumsi individu domba
m	0 – 0.27	kgP.ha ⁻¹ . hari ⁻¹	jumlah pupuk (fosfor) yang diberikan
s	0.00011	hari ⁻¹	koefisien hilangnya tanah
β	0.3		fraksi unsur hara yang hilang dari dalam tanah
ρ	0.0055	kgP. kgDM ⁻¹	konsentrasi maksimum fosfor dalam rumput
c	200	kgP.ha ⁻¹	banyaknya pupuk dalam tanah ketika setengah dari konsentrasi maksimum fosfor pada rumput terpenuhi.

(Wickham, dkk, 1997)

Keterangan :

kgP = kilogram *Phosphorus* (kilogram fosfor).

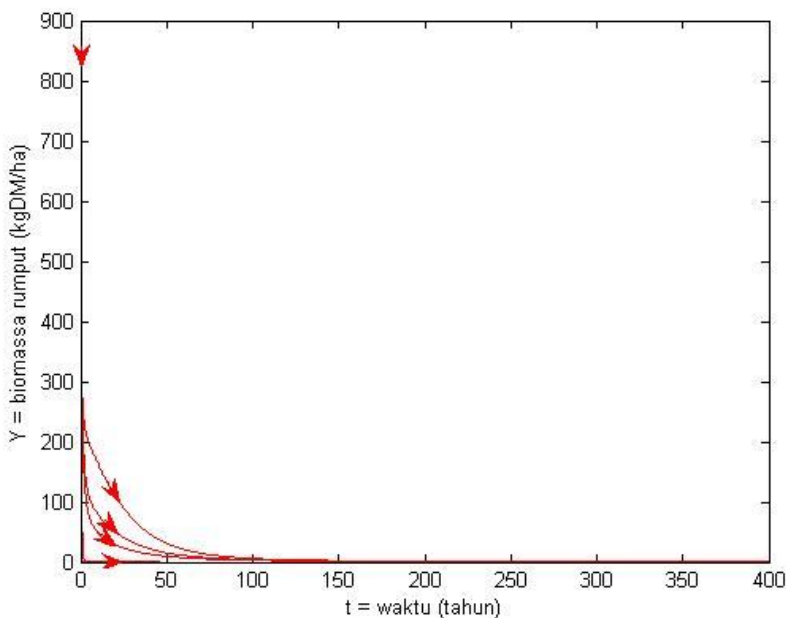
kgDM = kilogram *Dry Matter* (kilogram kering).

3.3.1. Kestabilan Titik Tetap secara Numerik ketika $n = n^*$

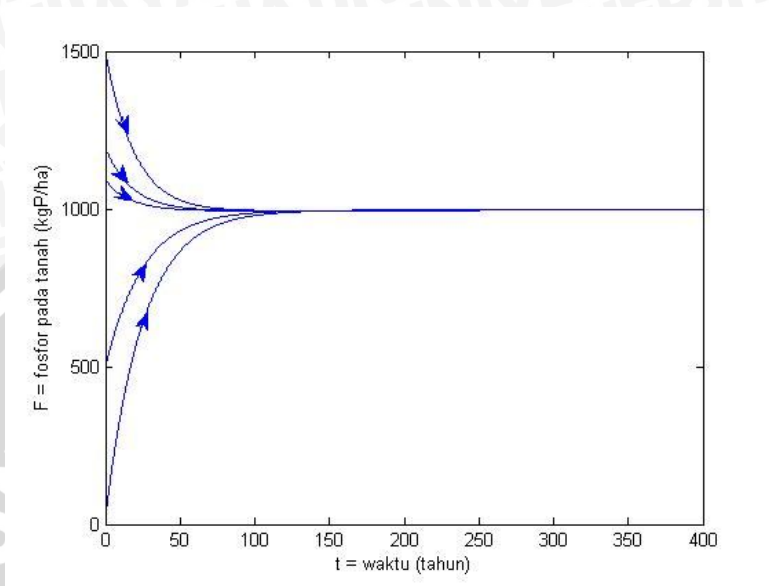
Gambar 3.7, 3.8, dan 3.9 menggunakan syarat awal (Y, F) yaitu (400,1500), (900,1200), (800,1100), (700,500), (200,20), dan nilai $m = 40$ kgP.ha⁻¹.tahun⁻¹ serta nilai parameter lainnya pada Tabel 3.1. Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut maka dengan melakukan perhitungan secara manual diperoleh $n^* = 55.5209$

sehingga dalam perhitungan numerik digunakan $n = 55.5209 = n^*$.

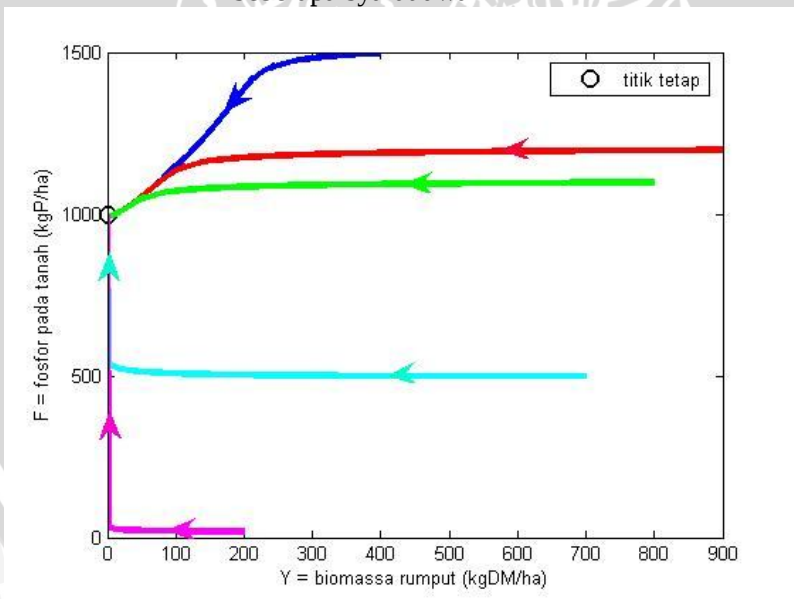
Selain itu diperoleh juga titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right) = (0, 996.2640)$ dan dengan menggunakan persamaan (3.18) dan (3.20) diperoleh $(Y^*, F^*) = (0, 996.2640)$. Gambar 3.7 menunjukkan bahwa semua Y konvergen ke $Y = 0$ dan Gambar 3.8 menunjukkan F konvergen ke $F = \frac{m}{s}$, sedangkan pada Gambar 3.9 terlihat bahwa semua titik (Y, F) konvergen ke $\left(0, \frac{m}{s}\right)$. Dengan demikian dapat diindikasikan bahwa pada kondisi $n = n^*$, titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ dan (Y^*, F^*) stabil.



Gambar 3.7 Kestabilan titik tetap Y saat $n = n^*$ dengan beberapa syarat awal



Gambar 3.8 Kestabilan titik tetap F saat $n = n^*$ dengan beberapa syarat awal



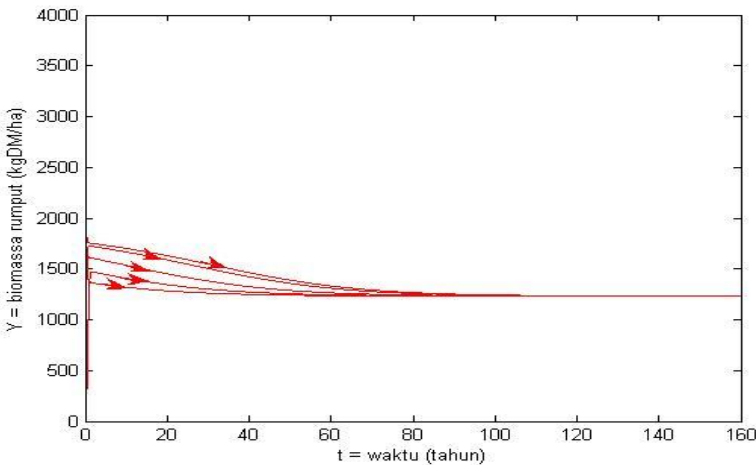
Gambar 3.9 Trayektori dari sistem saat $n = n^*$ dengan beberapa syarat awal

3.3.2. Kestabilan Titik Tetap secara Numerik ketika $n < n^*$

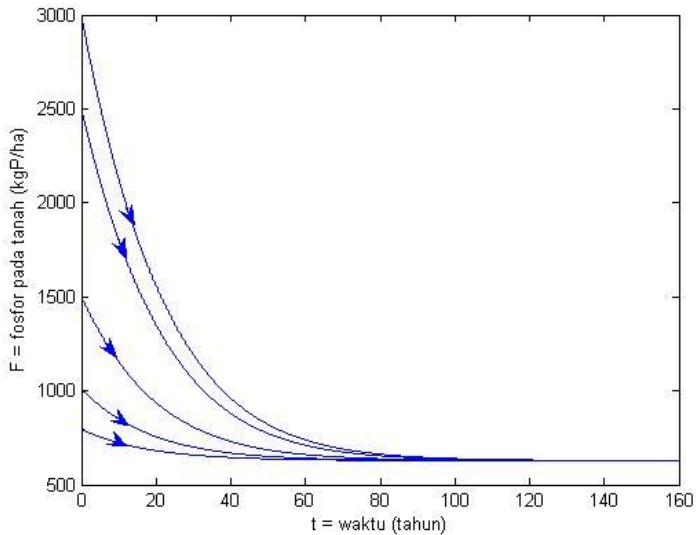
Dalam Gambar 3.10, 3.11, dan 3.12 digunakan syarat awal (Y, F) yaitu $(50, 1000)$, $(500, 2500)$, $(2000, 1500)$, $(3500, 3000)$, dan $(4000, 800)$, $m = 40 \text{ kgP.ha}^{-1}.\text{tahun}^{-1}$, serta nilai parameter lainnya pada Tabel 3.1. Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut diperoleh $n^* = 55.5209$ sehingga pada perhitungan numerik digunakan $n = 35 < n^*$. Selain itu diperoleh juga

$$\left(0, \frac{m}{s}\right) = (0, 996.2640) \text{ dan } (Y^*, F^*) = (1231.6287, 628.3932).$$

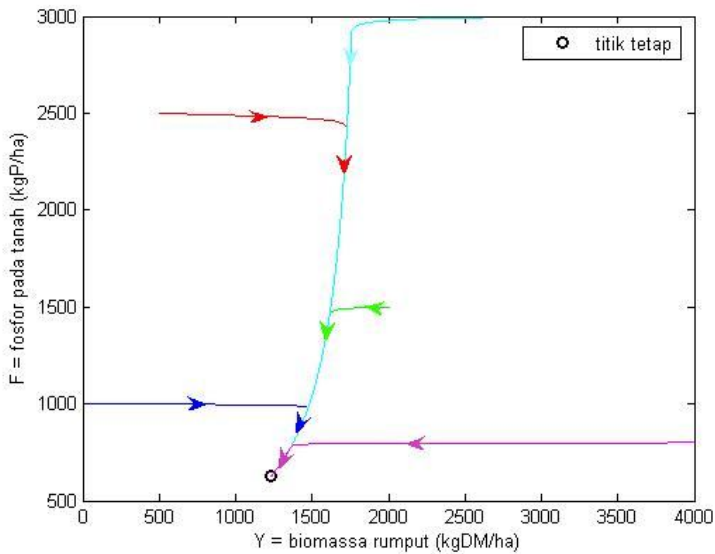
Gambar 3.10 menunjukkan bahwa semua Y konvergen ke $Y = Y^*$, Gambar 3.11 menunjukkan bahwa semua F konvergen ke $F = F^*$, sedangkan pada Gambar 3.12 terlihat bahwa semua titik (Y, F) konvergen ke titik tetap (Y^*, F^*) . Dengan demikian dapat diindikasikan bahwa titik tetap (Y^*, F^*) stabil sedangkan titik tetap $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ tidak stabil karena semua titik tidak konvergen ke titik tetap ini.



Gambar 3.10 Kestabilan titik tetap Y saat $n < n^*$ dengan beberapa syarat awal



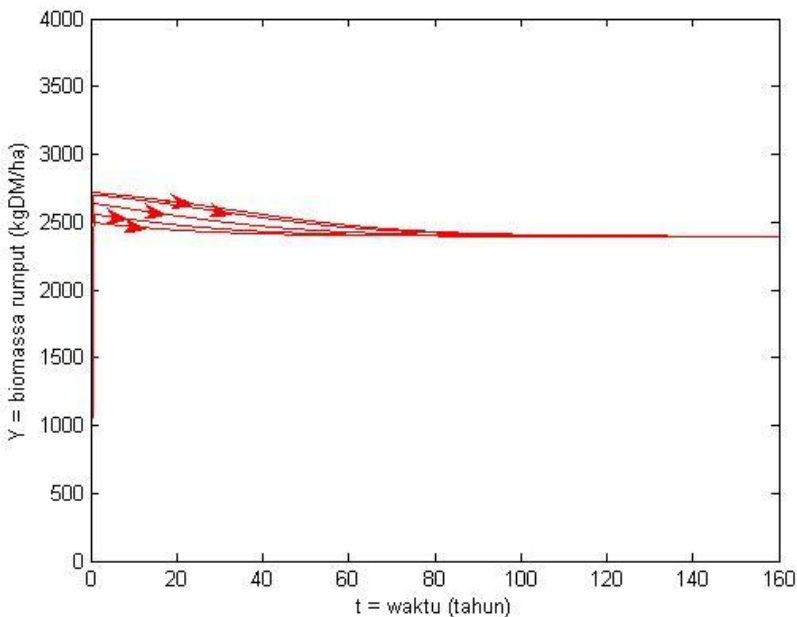
Gambar 3.11 Kestabilan titik tetap F saat $n < n^*$ dengan beberapa syarat awal



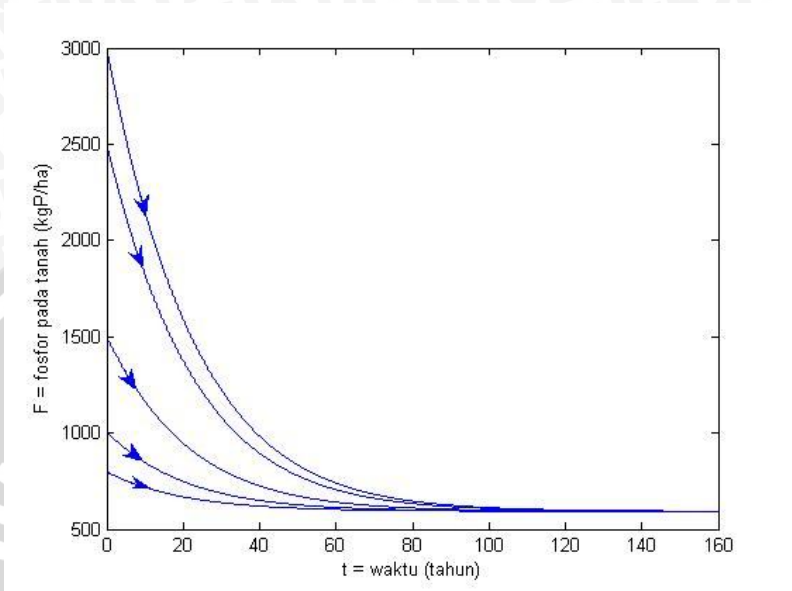
Gambar 3.12 Trayektori dari sistem saat $n < n^*$ dengan beberapa syarat awal

3.3.3. Simulasi Numerik terhadap Model

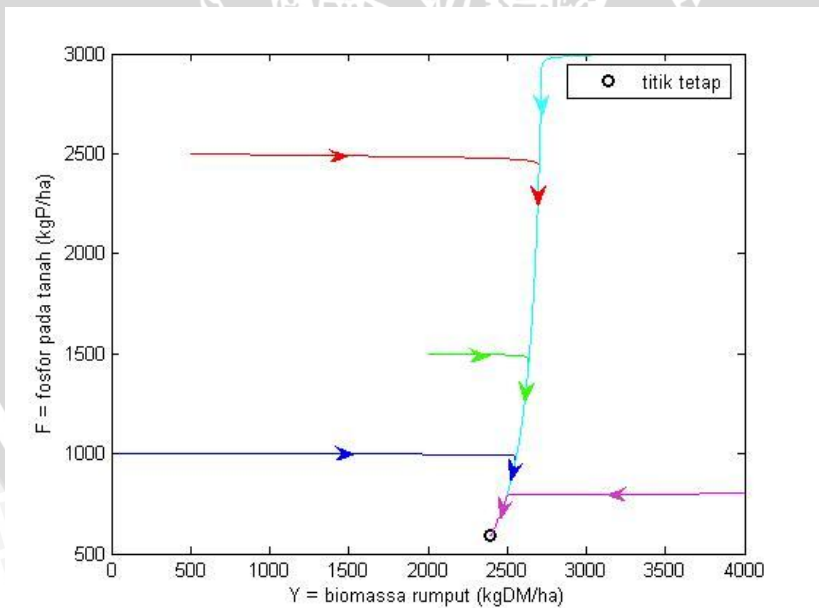
Gambar 3.13, 3.14, dan 3.15 menggunakan syarat awal (Y, F) yaitu $(50, 1000)$, $(500, 2500)$, $(2000, 1500)$, $(3500, 3000)$, dan $(4000, 800)$, $m = 40 \text{ kgP.ha}^{-1}.\text{tahun}^{-1}$, $n = 20 \text{ domba/ha}$, serta nilai parameter lainnya sesuai Tabel 3.1. Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut maka dengan menggunakan persamaan (3.18) dan (3.20) diperoleh $(Y^*, F^*) = (2395.41094, 593.19448)$. Gambar 3.13 menunjukkan bahwa untuk jangka waktu yang panjang, semua Y konvergen ke $Y = Y^*$, Gambar 3.14 menunjukkan semua F konvergen ke $F = F^*$, sedangkan pada Gambar 3.15 terlihat bahwa dari beberapa syarat awal yang digunakan, semua titik (Y, F) konvergen ke titik (Y^*, F^*) .



Gambar 3.13 Solusi numerik terhadap Y dengan beberapa syarat awal



Gambar 3.14 Solusi numerik terhadap F dengan beberapa syarat awal



Gambar 3.15 Trayektori dari sistem dengan beberapa syarat awal

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Melalui pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan beberapa hal yaitu:

1. Model sistem dinamik yang menggambarkan interaksi pertumbuhan rumput dan tingkat kesuburan tanah pada padang rumput merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan dua variabel yaitu Y (biomassa rumput) dan F (banyaknya unsur hara dalam tanah). Dalam hal ini, diasumsikan bahwa pemupukan dilakukan dalam jumlah yang konstan.
2. Terdapat dua titik tetap dari sistem tersebut yaitu $\left(0, \frac{m}{s}\right)$ dan (Y^*, F^*) , di mana masing-masing jenis kestabilannya bergantung pada banyaknya hewan yang digembalakan (n).
3. Terdapat sebuah ambang batas (*threshold*) yaitu $n \leq n^*$ di mana n menyatakan kepadatan hewan. Kepadatan hewan yang memenuhi *threshold* tersebut menghasilkan $Y \geq 0$.
4. Simulasi grafis yang dihasilkan menjelaskan bahwa Y dan F menuju pada titik tetap untuk jangka waktu yang panjang dan sesuai dengan hasil dari analisis dinamikanya.

4.2. Saran

Dari skripsi ini masih ada beberapa hal yang dapat dikembangkan diantaranya:

1. Mempertimbangkan adanya faktor-faktor yang tidak dapat dikontrol petani dan yang sifatnya musiman, yang dapat mempengaruhi pertumbuhan rumput.
2. Mempertimbangkan adanya reaksi-reaksi kimia terhadap pemupukan yang dilakukan dengan unsur-unsur hara dalam tanah.
3. Mempertimbangkan dilakukannya optimasi ekonomi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Ardi, R. "Unsur Hara dalam Tanah (Makro dan Mikro)." rioardi.wordpress.com.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Singapore: John Wiley & Sons.
- Brin, M. dan G. Stuck. 2002. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- "Eigenvalue." mathworld.wolfram.com.
- Morley, F. H. W. 1981. *Grazing Animals*. Minnesota: Elsevier Scientific.
- Nagle, R. K. dan E. B. Saff. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company.
- Pond, W. G., D. C. Church, K. R. Pond, dan P. A. Schoknecht. 2005. *Basic Animal Nutrition and Feeding*. United States of America: John Wiley & Sons.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems : Continuous and Discrete*. USA : Prentice Hall Education.
- Sreenivas. "Michaelis Menten Equation." biosreenivas.blogspot.com.
- Wickham, D., G. C. Wake, S. J. R. Woodward, dan B. S. Thorrold. 1997. Dynamical Systems Modelling of the Interactions of Animal Stocking Density and Soil Fertility in Grazed Pasture. *Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences*. Hlm. 27-43.
- Williamson, R. E. 2001. *Introduction to Differential Equations and Dynamical Systems*. Singapore: McGraw-Hill.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Penjabaran Persamaan (3.16) Menjadi Persamaan (3.18) dan Pembentukan Persamaan (3.19)

Misalkan:

$$H = \sqrt{B^2 + 4AC} \quad (1)$$

dan dilakukan substitusi persamaan (3.13), (3.14), dan (1) ke persamaan (3.16) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{a(m - cs) + K\beta pnr(nr - a) + H}{2as} \\ &= \frac{1}{2as} (am - acs + K\beta pnr^2 - K\beta pnra + H). \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3.13), (3.14), dan (3.15) ke persamaan (1) menghasilkan:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{(a(m - cs) + K\beta pnr(nr - a))^2 + 4as(K\beta pnr^2d + acm)} \\ &= \left((am - acs + K\beta pnr^2 - K\beta pnra)^2 + 4asK\beta pnr^2d \right. \\ &\quad \left. + 4a^2scm \right)^{1/2} \\ &= \left(a^2m^2 - a^2csm + K\beta pnr^2am - K\beta pnra^2m - a^2mcs \right. \\ &\quad \left. + a^2c^2s^2 - K\beta pnr^2acs + K\beta pnra^2cs + K\beta pnr^2am \right. \\ &\quad \left. - K\beta pnr^2acs + K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 - K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \right. \\ &\quad \left. - a^2mK\beta pnr + a^2csK\beta pnr - K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \right. \\ &\quad \left. + K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 + 4asK\beta pnr^2d + 4a^2scm \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \left(a^2 m^2 + 2a^2 scm + 2K\beta p n^2 r^2 am - 2K\beta p n r a^2 m \right. \\
- 2K\beta p n^2 r^2 a c s + a^2 c^2 s^2 + 2K\beta p n r a^2 c s + K^2 \beta^2 \rho^2 n^4 r^4 \\
\left. - 2K^2 \beta^2 \rho^2 n^3 r^3 a + K^2 \beta^2 \rho^2 n^2 r^2 a^2 + 4asK\beta p n^2 r^2 d \right)^{1/2}.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 2. Penjabaran Persamaan (3.17) Menjadi Persamaan (3.20)

Substitusi persamaan (3.18) ke persamaan (3.17) menghasilkan:

$$\begin{aligned}\beta\rho F^*nr &= \frac{\beta\rho nr}{2as}(am - acs + K\beta\rho n^2r^2 - K\beta\rho nra + H) \\ &= -\frac{\beta\rho nr}{2as}(K\beta\rho nra - K\beta\rho n^2r^2 - am + acs - H) \\ &= -\frac{\beta\rho nr}{2a^2s}a(K\beta\rho nra - K\beta\rho n^2r^2 - am + acs - H) \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c + F^*)(m - sF^*) &= cm - \frac{c}{2a} \left(\begin{array}{l} am - acs + K\beta\rho n^2r^2 \\ - K\beta\rho nra + H \end{array} \right) \\ &\quad + \frac{m}{2as} \left(\begin{array}{l} am - acs + K\beta\rho n^2r^2 - K\beta\rho nra \\ + H \end{array} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4a^2s} \left(\begin{array}{l} am - acs + K\beta\rho n^2r^2 \\ - K\beta\rho nra + H \end{array} \right)^2 \\ &= cm - \frac{c}{2a} \left(\begin{array}{l} am - acs + K\beta\rho n^2r^2 \\ - K\beta\rho nra + H \end{array} \right) \\ &\quad + \frac{m}{2as} (am - acs + K\beta\rho n^2r^2 - K\beta\rho nra + H)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(2a^2m^2 + 4K\beta\rho n^2r^2am \right. \\
 & \quad - 4K\beta\rho nra^2m + 2amH + 2a^2c^2s^2 \\
 & \quad - 4K\beta\rho n^2r^2acs + 4K\beta\rho nra^2cs \\
 & \quad - \frac{1}{4a^2s} \left(2acsH + 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 \right. \\
 & \quad - 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a + 2K\beta\rho n^2r^2H \\
 & \quad + 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 - 2K\beta\rho nraH \\
 & \quad \left. \left. + 4asK\beta\rho n^2r^2d \right) \right) \\
 & \hspace{15em} (3)
 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (2) dan (3) ke persamaan (3.17) maka menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 Y^* = & \left(cm - \frac{c}{2a} (am - acs + K\beta\rho n^2r^2 - K\beta\rho nra + H) \right. \\
 & + \frac{m}{2as} (am - acs + K\beta\rho n^2r^2 - K\beta\rho nra + H) \\
 & \left. - \frac{1}{4a^2s} \left(2a^2m^2 + 4K\beta\rho n^2r^2am - 4K\beta\rho nra^2m \right. \right. \\
 & \quad + 2amH + 2a^2c^2s^2 - 4K\beta\rho n^2r^2acs \\
 & \quad + 4K\beta\rho nra^2cs - 2acsH + 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 \\
 & \quad - 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a + 2K\beta\rho n^2r^2H \\
 & \quad + 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 - 2K\beta\rho nraH \\
 & \quad \left. \left. + 4asK\beta\rho n^2r^2d \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(-\frac{2a^2s}{\beta\phi nra} \right) \frac{1}{K\beta\phi nra - K\beta\phi n^2r^2 - am + acs - H} \right) \\
& - 2a^2scm + acs \left(\frac{am - acs + K\beta\phi n^2r^2}{-K\beta\phi nra + H} \right) \\
& = -am \left(am - acs + K\beta\phi n^2r^2 - K\beta\phi nra + H \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & 2a^2m^2 + 4K\beta\phi n^2r^2am - 4K\beta\phi nra^2m \\ & + 2amH + 2a^2c^2s^2 - 4K\beta\phi n^2r^2acs \\ & + 4K\beta\phi nra^2cs - 2acsH + 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 \\ & - 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a + 2K\beta\phi n^2r^2H \\ & + 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 - 2K\beta\phi nraH \\ & + 4asK\beta\phi n^2r^2d \end{aligned} \right) \\
& \left(\frac{1}{\beta\phi nra(K\beta\phi nra - K\beta\phi n^2r^2 - am + acs - H)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned} & -2a^2scm + a^2csm - a^2c^2s^2 + K\beta\phi n^2r^2acs \\ & -K\beta\phi nra^2cs + acsH - a^2m^2 + a^2mcs - K\beta\phi n^2r^2am \\ & + K\beta\phi nra^2m - amH + a^2m^2 + 2K\beta\phi n^2r^2am \\ & - 2K\beta\phi nra^2m + amH + a^2c^2s^2 - 2K\beta\phi n^2r^2acs \\ & + 2K\beta\phi nra^2cs - acsH + K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 \\ & - 2K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a + K\beta\phi n^2r^2H + K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 \\ & - K\beta\phi nraH + 2asK\beta\phi n^2r^2d \end{aligned} \right) \\
& \left(\frac{1}{\beta\phi nra(K\beta\phi nra - K\beta\phi n^2r^2 - am + acs - H)} \right) \\
& = \left(\begin{aligned} & -K\beta\phi n^2r^2acs + K\beta\phi nra^2cs + K\beta\phi n^2r^2am \\ & - K\beta\phi nra^2m + K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 - 2K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \\ & + K\beta\phi n^2r^2H + K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 - K\beta\phi nraH \\ & + 2asK\beta\phi n^2r^2d \end{aligned} \right) \\
& \left(\frac{1}{\beta\phi nra(K\beta\phi nra - K\beta\phi n^2r^2 - am + acs - H)} \right) \\
& = \beta\phi nra \left(\begin{aligned} & -Knraacs + Ka^2cs + Knram - Ka^2m + K^2\beta\phi n^3r^3 \\ & - 2K^2\beta\phi n^2r^2a + KnrH + K^2\beta\phi nra^2 - KaH \\ & + 2asKnrd \end{aligned} \right) \\
& \frac{1}{\beta\phi nra(K\beta\phi nra - K\beta\phi n^2r^2 - am + acs - H)} \\
& = \frac{K}{a} \left(\begin{aligned} & \beta\phi nra^2K - 2\beta\phi n^2r^2aK - a^2m + a^2cs + K\beta\phi n^3r^3 \\ & + nram - nraacs + 2asnrda - aH + nrH \end{aligned} \right) \\
& \frac{1}{K\beta\phi nra - K\beta\phi n^2r^2 - am + acs - H}
\end{aligned}$$

Lampiran 3. Penjabaran Persamaan (3.26) dan Pencarian Penyelesaian untuk n

Penjabaran persamaan (3.26) menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 & n^4 r^2 a^2 c^2 s^2 - n^3 r a^3 c^2 s^2 - n^4 r^2 a^2 c s m + n^3 r a^3 c s m \\
 & - n^6 r^4 a c s K \beta \rho + 2 n^5 r^3 a^2 c s K \beta \rho - n^4 r^2 a^3 c s K \beta \rho \\
 & - 2 n^4 r^2 a^2 c s^2 d + n^2 a^4 c^2 s^2 - n^3 a^3 c^2 s^2 r + n^3 a^3 c s r m \\
 & - n^2 a^4 c s m + n^5 a^2 c s K \beta \rho r^3 - 2 n^4 a^3 c s K \beta \rho r^2 \\
 & + n^3 a^4 c s K \beta \rho r + 2 n^3 a^3 c s^2 r d + n^4 r^2 a^2 m^2 \\
 & - n^4 r^2 a^2 m c s + n^3 r a^3 m c s - n^3 r a^3 m^2 + n^6 r^4 a m K \beta \rho \\
 & - 2 n^5 r^3 a^2 m K \beta \rho + n^4 r^2 a^3 m K \beta \rho + 2 n^4 r^2 a^2 m s d \\
 & + n^2 a^4 m^2 + n^3 a^3 m r c s - n^2 a^4 m c s - n^3 a^3 m^2 r \\
 & - n^5 a^2 m K \beta \rho r^3 + 2 n^4 a^3 m K \beta \rho r^2 - n^3 a^4 m K \beta \rho r \\
 & - 2 n^3 a^3 m s r d + K^2 \beta^2 \rho^2 n^8 r^6 - K \beta \rho n^6 r^4 a c s \\
 & + K \beta \rho n^5 r^3 a^2 c s + K \beta \rho n^6 r^4 a m - K \beta \rho n^5 r^3 a^2 m \\
 & - 2 K^2 \beta^2 \rho^2 n^7 r^5 a + K^2 \beta^2 \rho^2 n^6 r^4 a^2 + 2 K \beta \rho n^6 r^4 a s d \\
 & + 4 K^2 \beta^2 \rho^2 n^6 r^4 a^2 + 2 K \beta \rho n^5 r^3 a^2 c s - 2 K \beta \rho n^4 r^2 a^3 c s \\
 & - 2 K \beta \rho n^5 r^3 a^2 m + 2 K \beta \rho n^4 r^2 a^3 m - 2 K^2 \beta^2 \rho^2 n^7 r^5 a \\
 & - 2 K^2 \beta^2 \rho^2 n^5 r^3 a^3 - 4 K \beta \rho n^5 r^3 a^2 s d \\
 & + K^2 \beta^2 \rho^2 n^4 r^2 a^4 - K \beta \rho n^4 r^2 a^3 c s + K \beta \rho n^3 r a^4 c s \\
 & + K \beta \rho n^4 r^2 a^3 m - K \beta \rho n^3 r a^4 m + K^2 \beta^2 \rho^2 n^6 r^4 a^2 \\
 & - 2 K^2 \beta^2 \rho^2 n^5 r^3 a^3 + 2 K \beta \rho n^4 r^2 a^3 s d + 4 a^2 s^2 n^4 r^2 d^2 \\
 & - 2 a^2 s^2 n^4 r^2 d c + 2 a^3 s^2 n^3 r d c + 2 a^2 s n^4 r^2 d m \\
 & - 2 a^3 s n^3 r d m + 2 a s n^6 r^4 d K \beta \rho - 4 a^2 s n^5 r^3 d K \beta \rho \\
 & + 2 a^3 s n^4 r^2 d K \beta \rho - n^4 r^2 a^2 m^2 - 2 n^4 r^2 a^2 s c m \\
 & - 2 n^6 r^4 K \beta \rho a m + 2 n^5 r^3 K \beta \rho a^2 m + 2 n^6 r^4 K \beta \rho a c s \\
 & - n^4 r^2 a^2 c^2 s^2 - 2 n^5 r^3 K \beta \rho a^2 c s - n^8 r^6 K^2 \beta^2 \rho^2 \\
 & + 2 n^7 r^5 K^2 \beta^2 \rho^2 a - n^6 r^4 K^2 \beta^2 \rho^2 a^2 - 4 n^6 r^4 a s K \beta \rho d
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2n^3ra^3m^2 + 4n^3ra^3scm + 4n^5r^3a^2K\beta pm \\
& - 4n^4r^2a^3K\beta pm - 4n^5r^3a^2K\beta pcs + 2n^3ra^3c^2s^2 \\
& + 4n^4r^2a^3K\beta pcs + 2n^7r^5aK^2\beta^2\rho^2 \\
& - 4n^6r^4a^2K^2\beta^2\rho^2 + 2n^5r^3a^3K^2\beta^2\rho^2 \\
& + 8n^5r^3a^2sK\beta pd - n^2a^4m^2 - 2n^2a^4scm \\
& - 2n^4a^3K\beta pr^2m + 2n^3a^4K\beta pr m + 2n^4a^3K\beta pr^2cs \\
& - n^2a^4c^2s^2 - 2n^3a^4K\beta prcs - n^6a^2K^2\beta^2\rho^2r^4 \\
& + 2n^5a^3K^2\beta^2\rho^2r^3 - n^4a^4K^2\beta^2\rho^2r^2 - 4n^4a^3sK\beta pr^2d = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4n^4r^2a^2scm + 8n^3ra^3scm - 2n^4r^2a^3csK\beta p \\
& - 2n^4r^2a^2cs^2d - 4n^2a^4csm + 4n^3a^3cs^2rd \\
& + 2n^4r^2a^3mK\beta p + 4n^4r^2a^2msd - 4n^3a^3msrd \\
& + 4a^2s^2n^4r^2d^2 - 2a^2s^2n^4r^2dc - 2n^4a^3K\beta pr^2m \\
& + 2n^4a^3K\beta pr^2cs = 0
\end{aligned}$$

$$2n^2a^2s \begin{pmatrix} -2n^2r^2cm + 4nracm - n^2r^2csd - 2a^2cm \\ + 2nacsrd + 2n^2r^2md - 2namrd + 2sn^2r^2d^2 \\ - sn^2r^2dc \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Persamaan (4) dikalikan dengan $\frac{1}{2a^2s}$ di mana $a, s > 0$ maka

$\frac{1}{2a^2s} > 0$, sehingga dihasilkan:

$$n^2 \begin{pmatrix} r^2(-2cm - csd + 2md + 2sd^2 - sdc)n^2 \\ + r(4acm + 2acsd - 2amd)n - 2a^2cm \end{pmatrix} = 0$$

$$n^2 \left(r^2 (-2cm - 2csd + 2md + 2sd^2)n^2 + r(4acm + 2acsd - 2amd)n - 2a^2cm \right) = 0. \quad (5)$$

Karena $n > 0$ (asumsi (3.22)), maka persamaan (5) dikalikan dengan $\frac{1}{n^2} > 0$, diperoleh:

$$2r^2(-cm - csd + md + sd^2)n^2 + 2r \begin{pmatrix} 2acm + acsd \\ -amd \end{pmatrix} n - 2a^2cm = 0. \quad (6)$$

Persamaan (6) dikalikan dengan $\frac{1}{2r^2} > 0$, dihasilkan:

$$\begin{pmatrix} -cm - csd + md + sd^2 \end{pmatrix} n^2 + \left(\frac{2acm + acsd - amd}{r} \right) n - \frac{a^2cm}{r^2} = 0. \quad (7)$$

Dengan demikian penyelesaian n dari persamaan (7) yaitu:

$$n_{1,2}^* = \left(\frac{-2acm - acsd + amd}{r} \pm \sqrt{\left(\frac{2acm + acsd - amd}{r} \right)^2 - 4 \left(\frac{-cm - csd + md + sd^2}{1} \right) \left(-\frac{a^2cm}{r^2} \right)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-2acm - acsd + amd}{r} \right) \\
& = \left(\pm \frac{1}{r^2} \left(\begin{aligned} & \left(4a^2c^2m^2 + 4a^2c^2msd - 4a^2cm^2d \right) \\ & + a^2c^2s^2d^2 - 2a^2csmd^2 + a^2m^2d^2 \\ & - 4a^2c^2m^2 - 4a^2c^2msd + 4a^2cm^2d \\ & + 4a^2cmsd^2 \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} \\
& \quad \frac{1}{-cm - csd + md + sd^2} \\
& = \left(\frac{-2acm - acsd + amd}{r} \pm \left(\frac{1}{r^2} \left(\begin{aligned} & a^2c^2s^2d^2 \\ & + 2a^2cmsd^2 \\ & + a^2m^2d^2 \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
& \quad \frac{1}{2(-cm - csd + md + sd^2)} \\
& = \left(\frac{-2acm - acsd + amd}{r} \pm \left(\frac{1}{r^2} (adcs + amd)^2 \right)^{1/2} \right) \\
& \quad \frac{1}{2(-cm - csd + md + sd^2)} \\
& = \left(\frac{-2acm - acsd + amd}{r} \pm \frac{(adcs + amd)}{r} \right) \\
& \quad \frac{1}{2(-c+d)(m+sd)}
\end{aligned}$$

Lampiran 4. Penjabaran Persamaan (3.40) Menjadi Persamaan (3.42)

Penjabaran persamaan (3.40) dilakukan dengan mensubstitusikan bentuk Y^* dan F^* sesuai persamaan (3.17), (3.18), dan (3.20) ke dalamnya. Agar mempermudah, penjabaran akan dilakukan secara terpisah-pisah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} aF^* K &= aK \left(\frac{1}{2as} (am - acs + K\beta pn^2 r^2 - K\beta pnra + H) \right) \\ &= \frac{K}{2s} (am - acs + K\beta pn^2 r^2 - K\beta pnra + H) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -KF^* nr &= -Knr \left(\frac{1}{2as} (am - acs + K\beta pn^2 r^2 - K\beta pnra + H) \right) \\ &= \frac{Knr}{2as} (-am + acs - K\beta pn^2 r^2 + K\beta pnra - H). \end{aligned} \quad (9)$$

Dengan menggunakan persamaan (3) maka:

$$\begin{aligned} -2aF^* Y^* &= -2aF^* \cdot \frac{(c + F^*)(m - sF^*)}{\beta \rho F^* nr} \\ &= \frac{-2a}{\beta \rho nr} \left[\begin{aligned} &cm - \frac{c}{2a} \left(\begin{aligned} &am - acs + K\beta pn^2 r^2 \\ &- K\beta pnra + H \end{aligned} \right) \\ &+ \frac{m}{2as} \left(\begin{aligned} &am - acs + K\beta pn^2 r^2 - K\beta pnra \\ &+ H \end{aligned} \right) \\ &- \frac{1}{4a^2 s} \left(\begin{aligned} &am - acs + K\beta pn^2 r^2 - K\beta pnra \\ &+ H \end{aligned} \right)^2 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{-2a}{\beta p n r 4 a^2 s} + 2ma \left(\begin{array}{l} am - acs + K\beta p n^2 r^2 \\ - K\beta p n r a + H \end{array} \right) - (am - acs + K\beta p n^2 r^2 - K\beta p n r a + H)^2$$

$$= -\frac{1}{2\beta p n r a s} \left(\begin{array}{l} 4cma^2s - 2ca^2sm + 2c^2a^2s^2 \\ - 2casK\beta p n^2 r^2 + 2ca^2sK\beta p n r \\ - 2casH + 2a^2m^2 - 2ma^2cs \\ + 2maK\beta p n^2 r^2 - 2ma^2K\beta p n r \\ + 2maH - 2a^2m^2 - 4K\beta p n^2 r^2 am \\ + 4K\beta p n r a^2 m - 2amH - 2a^2c^2s^2 \\ + 4K\beta p n^2 r^2 acs - 4K\beta p n r a^2 cs \\ + 2acsH - 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 \\ + 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a - 2K\beta p n^2 r^2 H \\ - 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 + 2K\beta p n r a H \\ - 4asK\beta p n^2 r^2 d \end{array} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\beta p n r a s} \left(\begin{array}{l} 2casK\beta p n^2 r^2 - 2ca^2sK\beta p n r \\ - 2maK\beta p n^2 r^2 + 2ma^2K\beta p n r \\ - 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 + 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \\ - 2K\beta p n^2 r^2 H - 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 \\ + 2K\beta p n r a H - 4asK\beta p n^2 r^2 d \end{array} \right) \cdot$$

(10)

Misal $P = aF^*K - 2aF^*Y^* - nrKd - nrKF^*$ maka dengan mensubstitusikan persamaan (8), (9), dan (10) ke dalam P , diperoleh:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{K\beta\phi nra}{2\beta\phi nras} \left(am - acs + K\beta\phi n^2r^2 - K\beta\phi nra + H \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\beta\phi nras} \left(\begin{aligned} &2casK\beta\phi n^2r^2 - 2ca^2sK\beta\phi nra \\ &- 2maK\beta\phi n^2r^2 + 2ma^2K\beta\phi nra \\ &- 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 + 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \\ &- 2K\beta\phi n^2r^2H - 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 \\ &+ 2K\beta\phi nraH - 4asK\beta\phi n^2r^2d \end{aligned} \right) \\
 &\quad - \frac{2\beta\phi n^2r^2asKd}{2\beta\phi nras} + \frac{K\beta\phi n^2r^2}{2\beta\phi nras} \left(\begin{aligned} &- am + acs - K\beta\phi n^2r^2 \\ &+ K\beta\phi nra - H \end{aligned} \right) \\
 &= \frac{1}{2\beta\phi nras} \left(\begin{aligned} &K\beta\phi nra^2m - K\beta\phi nra^2cs + K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \\ &- K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 + K\beta\phi nraH - 2casK\beta\phi n^2r^2 \\ &+ 2ca^2sK\beta\phi nra + 2maK\beta\phi n^2r^2 - 2ma^2K\beta\phi nra \\ &+ 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 - 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \\ &+ 2K\beta\phi n^2r^2H + 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 \\ &- 2K\beta\phi nraH + 4asK\beta\phi n^2r^2d \\ &- 2\beta\phi n^2r^2asKd - K\beta\phi n^2r^2am + K\beta\phi n^2r^2acs \\ &- K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 + K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a - K\beta\phi n^2r^2H \end{aligned} \right) \\
 &= \frac{1}{2\beta\phi nras} \left(\begin{aligned} &- K\beta\phi nra^2m + K\beta\phi nra^2cs - 2K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \\ &+ K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 - K\beta\phi nraH - casK\beta\phi n^2r^2 \\ &+ K\beta\phi n^2r^2ma + K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 + K\beta\phi n^2r^2H \\ &+ 2K\beta\phi n^2r^2asd \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2\beta p n r a s} \begin{pmatrix} 2casK\beta p n^2 r^2 & - & 2ca^2sK\beta p n r \\ - & 2maK\beta p n^2 r^2 & + & 2ma^2K\beta p n r \\ - & 2K^2\beta^2\rho^2n^4r^4 & + & 4K^2\beta^2\rho^2n^3r^3a \\ - & 2K\beta p n^2r^2H & - & 2K^2\beta^2\rho^2n^2r^2a^2 \\ + & 2K\beta p n r a H & - & 4asK\beta p n^2r^2d \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (-2aF^*Y^*)$$

$$P = -aF^*Y^*$$

$$aF^*K - 2aF^*Y^* - nrKd - nrKF^* = -aF^*Y^*. \quad (11)$$

Substitusi persamaan (11) ke persamaan (3.40) menghasilkan:

$$J_{11} = -\frac{aF^*Y^*}{K(d + F^*)}.$$

Lampiran 5. Penjabaran Persamaan (3.41) Menjadi Persamaan (3.43)

Penjabaran persamaan (3.41) dilakukan secara terpisah-pisah terlebih dahulu. Dengan mensubstitusikan bentuk Y^* sesuai persamaan (3.20) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 -\frac{Y^*}{K} &= \frac{-K}{Ka \left(K\beta\phi nra - K\beta\phi n^2 r^2 - am + a^2cs - H \right)} \cdot \\
 &\quad \left(\beta\phi nra^2 K - 2\beta\phi n^2 r^2 aK - a^2m + a^2cs + K\beta\phi n^3 r^3 \right) \\
 &\quad \left(+ nram - nracs + 2asnrd - aH + nrH \right) \\
 &= \frac{1}{K\beta\phi nra^2 - K\beta\phi n^2 r^2 a - a^2m + a^2cs - aH} \cdot \\
 &\quad \left(-\beta\phi nra^2 K + 2\beta\phi n^2 r^2 aK + a^2m - a^2cs - K\beta\phi n^3 r^3 \right) \\
 &\quad \left(-nram + nracs - 2asnrd + aH - nrH \right) \quad (12)
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan bentuk persamaan (12), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{Y^*}{K} &= \frac{1}{K\beta\phi nra^2 - K\beta\phi n^2 r^2 a - a^2m + a^2cs - aH} \cdot \\
 &\quad \left(K\beta\phi nra^2 - K\beta\phi n^2 r^2 a - a^2m + a^2cs - aH \right) \\
 &\quad \left(-\beta\phi nra^2 K + 2\beta\phi n^2 r^2 aK + a^2m - a^2cs - K\beta\phi n^3 r^3 \right) \\
 &\quad \left(-nram + nracs - 2asnrd + aH - nrH \right) \\
 &= \frac{1}{K\beta\phi nra^2 - K\beta\phi n^2 r^2 a - a^2m + a^2cs - aH} \cdot \\
 &\quad \left(K\beta\phi n^2 r^2 a - K\beta\phi n^3 r^3 - nram + nracs \right) \\
 &\quad \left(-2asnrd - nrH \right) \quad (13)
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan bentuk persamaan (13) maka diperoleh:

$$a \left(1 - \frac{Y^*}{K} \right) = \frac{1}{K\beta p n r a - K\beta p n^2 r^2 - a m + a c s - H} \cdot \left(K\beta p n^2 r^2 a - K\beta p n^3 r^3 - n r a m + n r a c s \right) - 2 a s n r d - n r H \quad (14)$$

Agar diperoleh bentuk yang lebih sederhana dari persamaan (14), maka:

$$\begin{aligned} a \left(1 - \frac{Y^*}{K} \right) &= \frac{n r}{K\beta p n r a - K\beta p n^2 r^2 - a m + a c s - H} \cdot \left(K\beta p n r a - K\beta p n^2 r^2 - a m \right) - \frac{1}{2 a s} \cdot \frac{1}{2 a s} \\ &= \frac{n r}{\frac{1}{2 a s} (a m - a c s + K\beta p n^2 r^2 - K\beta p n r a + H) + \frac{1}{2 a s} (a m - a c s + K\beta p n^2 r^2 - K\beta p n r a + H) + \frac{1}{2 a s} \cdot 2 a s d} \cdot \left(\frac{1}{2 a s} (a m - a c s + K\beta p n^2 r^2 - K\beta p n r a + H) \right) \quad (15) \end{aligned}$$

Berdasarkan bentuk F^* sesuai persamaan (3.18) maka persamaan (15) menjadi:

$$a \left(1 - \frac{Y^*}{K} \right) = \frac{n r (F^* + d)}{F^*} \quad (16)$$

Persamaan (16) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.41), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 J_{12} &= \frac{Y^* d \cdot \frac{nr(F^* + d)}{F^*}}{(d + F^*)^2} \\
 &= \frac{Y^* dnr(d + F^*)}{F^*(d + F^*)^2} \\
 &= \frac{Y^* dnr}{F^*(d + F^*)}.
 \end{aligned}$$



Lampiran 6. *Listing Program* untuk Gambar 3.4 Menggunakan Software Matlab 7.0

```

a=0.05;
d=200;
K=4000;
r=0.00075;
m=40/365;
s=0.00011;
B=0.3;
p=0.0055;
c=200;

n=0:5:55;
H=(K.^2.*B.^2.*p.^2.*n.^2.*r.^2.*a.^2-
2.*K.^2.*B.^2.*p.^2.*n.^3.*r.^3.*a-
2.*K.*B.*p.*n.*r.*a.^2.*m+2.*K.*B.*p.*n.*r.*a.^2.*c.*
s+K.^2.*B.^2.*p.^2.*n.^4.*r.^4+2.*K.*B.*p.*n.^2.*r
.^2.*a.*m-
2.*K.*B.*p.*n.^2.*r.^2.*a.*c.*s+a.^2.*m.^2+2.*a.^2.
*m.*c.*s+a.^2.*c.^2.*s.^2+4.*a.*s.*K.*B.*p.*n.^2.*r
.^2.*d).^^(1./2);
Y=K.*(B.*p.*n.*r.*a.^2.*K-
2.*B.*p.*n.^2.*r.^2.*a.*K-
a.^2.*m+a.^2.*c.*s+K.*B.*p.*n.^3.*r.^3+n.*r.*a.*m-
n.*r.*a.*c.*s+2.*a.*s.*n.*r.*d-
a.*H+n.*r.*H)./(a.*(K.*B.*p.*n.*r.*a-
K.*B.*p.*n.^2.*r.^2-a.*m+a.*c.*s-H));
F=-1/2.*(K.*B.*p.*n.*r.*a-K.*B.*p.*n.^2.*r.^2-
a.*m+a.*c.*s-H)./(a.*s);

plot(Y,F,'o');
xlabel('Y = Biomassa Rumput (kgDM/ha)');
ylabel('F = Banyaknya Unsur Hara Dalam Tanah
(kgP/ha)');
text(4000,996.2640099626 , ' n=0');
text(2395.4109376002,593.1944837471, ' n=20');
text(27.8621810238,981.9414729635, ' n=55');

```

Lampiran 7. *Listing Program* untuk Gambar 3.5 Menggunakan Software Matlab 7.0

```
function hasil_YF=YF(m,a,r,d,s,K,B,p,c,n)
Y=K*(B*p*n*r*a^2*K-2*B*p*n^2*r^2*a*K-
a^2*m+a^2*c*s+K*B*p*n^3*r^3+n*r*a*m-
n*r*a*c*s+2*a*s*n*r*d-
a*sqrt(K^2*B^2*p^2*n^2*r^2*a^2-
2*K^2*B^2*p^2*n^3*r^3*a-
2*K*B*p*n*r*a^2*m+2*K*B*p*n*r*a^2*c*s+K^2*B^2*p^2*n
^4*r^4+2*K*B*p*n^2*r^2*a*m-
2*K*B*p*n^2*r^2*a*c*s+a^2*m^2+2*a^2*m*c*s+a^2*c^2*s
^2+4*a*s*K*B*p*n^2*r^2*d))+n*r*sqrt(K^2*B^2*p^2*n^2*
r^2*a^2-2*K^2*B^2*p^2*n^3*r^3*a-
2*K*B*p*n*r*a^2*m+2*K*B*p*n*r*a^2*c*s+K^2*B^2*p^2*n
^4*r^4+2*K*B*p*n^2*r^2*a*m-
2*K*B*p*n^2*r^2*a*c*s+a^2*m^2+2*a^2*m*c*s+a^2*c^2*s
^2+4*a*s*K*B*p*n^2*r^2*d)))/(a*(K*B*p*n*r*a-
K*B*p*n^2*r^2-a*m+a*c*s-
sqrt(K^2*B^2*p^2*n^2*r^2*a^2-
2*K^2*B^2*p^2*n^3*r^3*a-
2*K*B*p*n*r*a^2*m+2*K*B*p*n*r*a^2*c*s+K^2*B^2*p^2*n
^4*r^4+2*K*B*p*n^2*r^2*a*m-
2*K*B*p*n^2*r^2*a*c*s+a^2*m^2+2*a^2*m*c*s+a^2*c^2*s
^2+4*a*s*K*B*p*n^2*r^2*d)));
F=-1/2*(K*B*p*n*r*a-K*B*p*n^2*r^2-a*m+a*c*s-
sqrt(K^2*B^2*p^2*n^2*r^2*a^2-
2*K^2*B^2*p^2*n^3*r^3*a-
2*K*B*p*n*r*a^2*m+2*K*B*p*n*r*a^2*c*s+K^2*B^2*p^2*n
^4*r^4+2*K*B*p*n^2*r^2*a*m-
2*K*B*p*n^2*r^2*a*c*s+a^2*m^2+2*a^2*m*c*s+a^2*c^2*s
^2+4*a*s*K*B*p*n^2*r^2*d)))/(a*s);
hasil_YF=[Y F];

function hasil_lambda=lambda(Y,F,a,K,d,n,r,B,p,c,s)
w=-Y*a*F/(K*(d+F));
x=Y*d*n*r/(F*(d+F));
y=-B*p*F*n*r/(c+F);
z=-s-(B*p*c*n*r*Y/(c+F)^2);
lambda1=(-(-w-z)+((-w-z)^(2)-4*(w*z-x*y))^(1/2))/2;
lambda2=(-(-w-z)-((-w-z)^(2)-4*(w*z-x*y))^(1/2))/2;
hasil_lambda=[lambda1 lambda2];
```

function utama

```

m=40/365;
a=0.05;
r=0.00075;
d=200;
s=0.00011;
K=4000;
B=0.3;
p=0.0055;
c=200;
n_bantu=0:0.01:100;
is=0;
is1=0;
for in=1:length(n_bantu)
    is = is +1;
    n=n_bantu(in);
    hasil_YF=YF(m,a,r,d,s,K,B,p,c,n);
    Y=hasil_YF(1);
    F=hasil_YF(2);

    Y1=0;
    lambda1_utm_Y1=a*m/(d*s+m)-n*r;
    lambda2_utm_Y1=-s;
    if (lambda1_utm_Y1<=0)&((lambda2_utm_Y1<0))
        u(is) = Y1;
        ns(is) = n;
    else
        v(is) = Y1;
        nts(is) = n;
    end;

    if (Y>=0)
        is1=is1+1;
        hasil_lambda=lambda(Y,F,a,K,d,n,r,B,p,c,s);
        lambda1=hasil_lambda(1);
        lambda2=hasil_lambda(2);
        if (imag(lambda1)~=0)&(imag(lambda2)~=0)
            if
                (real(lambda1)~=0)&(real(lambda2)~=0)
                    if (real(lambda1)<0) &
                        (real(lambda2)<0)
                        u1(is1)=Y;
                        ns1(is1)=n;
                    else
                        v1(is1)=Y;

```

```

        nts1(is1)=n;
    end;
else
    u1(is1)=Y;
    ns1(is1)=n;
end;
n1=n-0.01;
hasil_YF=YF(m,a,r,d,s,K,B,p,c,n1);
banding_Y=hasil_YF(1);
banding_F=hasil_YF(2);
hasil_lambda=lambda(banding_Y,banding_F
,a,K,d,n1,r,B,p,c,s);
banding_lambda1=hasil_lambda(1);
banding_lambda2=hasil_lambda(2);
if
(imag(banding_lambda1)==0)&(imag(bandin
g_lambda2)==0)
    for bantu=Y-200:0.1:Y+200
        figure(1)
        fig1=plot(n,bantu,'b');
        hold on;
    end;
end;
n1=n+0.01;
hasil_YF=YF(m,a,r,d,s,K,B,p,c,n1);
banding_Y=hasil_YF(1);
banding_F=hasil_YF(2);

hasil_lambda=lambda(banding_Y,banding_F
,a,K,d,n1,r,B,p,c,s);
banding_lambda1=hasil_lambda(1);
banding_lambda2=hasil_lambda(2);
if
(imag(banding_lambda1)==0)&(imag(bandin
g_lambda2)==0)
    for bantu=Y-200:0.1:Y+200
        figure(1)
        fig1=plot(n,bantu,'b');
        hold on;
    end;
end;
end;
else
    if (lambda1<0 & lambda2<=0)

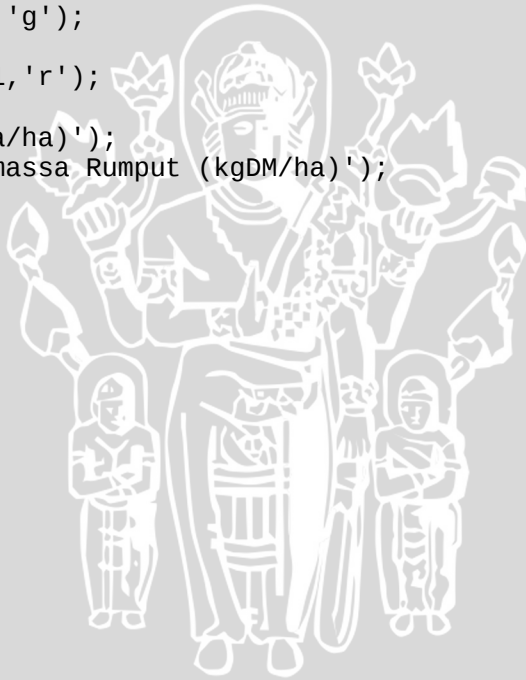
```

```

        u1(is1)=Y;
        ns1(is1)=n;
    else
        figure(1)
        fig1=plot(n,Y,'g');
        hold on;
    end;
end;
end;
end;

figure(1)
fig1=plot(ns,u,'r');
hold on;
fig1=plot(nts,v,'g');
hold on;
fig1=plot(ns1,u1,'r');
hold on;
xlabel('n (domba/ha)');
ylabel('Y = Biomassa Rumput (kgDM/ha)');

```



Lampiran 8. *Listing Program* untuk Gambar 3.6 Menggunakan Software Matlab 7.0

```
clc;  
a=0.05*365;  
r=0.00075*365;  
d=200;  
s=0.00011*365;  
for m=0:0.05:100  
    n=a*m/(r*(d*s+m));  
    fprintf('n(%4.1f) = %4.5f \n',m,n);  
    figure(1)  
    plot(m,n);  
    hold on;  
end;  
  
xlabel('m = jumlah fosfor yang diberikan  
(kgP/ha/yr)');  
ylabel('n = jumlah domba per hektar');
```



Lampiran 9. *Listing Program* untuk Gambar 3.7, 3.8, dan 3.9
Menggunakan *Software* Matlab 7.0

```
function hasil_dF=dF(Y,F)
m=40;
s=0.00011*365;
B=0.3;
p=0.0055;
r=0.00075*365;
c=200;
a=0.05*365;
d=200;
n=a*m/(r*(d*s+m));
hasil_dF=m-s*F-B*p*F*n*r*Y/(c+F);
```

```
function hasil_dY=dY(Y,F)
a=0.05*365;
m=40;
s=0.00011*365;
K=4000;
d=200;
r=0.00075*365;
n=a*m/(r*(d*s+m));
hasil_dY=a*F*(Y-Y^2/K)/((d+F)-n*r*Y);
```

```
function hasil_RK=RK(h,Y,F)
v1=dY(Y,F);
w1=dF(Y,F);
v2=dY(Y+h/2*v1,F+h/2*w1);
w2=dF(Y+h/2*v1,F+h/2*w1);
v3=dY(Y+h/2*v2,F+h/2*w2);
w3=dF(Y+h/2*v2,F+h/2*w2);
v4=dY(Y+h*v3,F+h*w3);
w4=dF(Y+h*v3,F+h*w3);
Y=Y+h/6*(v1+2*v2+2*v3+v4);
F=F+h/6*(w1+2*w2+2*w3+w4);
hasil_RK=[Y F];
```

```
function utama
Y(1)=400;
F(1)=1500;
Y1(1)=900;
F1(1)=1200;
Y2(1)=800;
```

```

F2(1)=1100;
Y3(1)=700;
F3(1)=500;
Y4(1)=200;
F4(1)=20;

```

```

tmax=400;
h=0.01;
n=tmax/h;
t=0:h:tmax;
for (i=1:n)
    bantu=RK(h,Y(i),F(i));
    Y(i+1)=bantu(1);
    F(i+1)=bantu(2);
    bantu=RK(h,Y1(i),F1(i));
    Y1(i+1)=bantu(1);
    F1(i+1)=bantu(2);
    bantu=RK(h,Y2(i),F2(i));
    Y2(i+1)=bantu(1);
    F2(i+1)=bantu(2);
    bantu=RK(h,Y3(i),F3(i));
    Y3(i+1)=bantu(1);
    F3(i+1)=bantu(2);
    bantu=RK(h,Y4(i),F4(i));
    Y4(i+1)=bantu(1);
    F4(i+1)=bantu(2);
    if (i==n)
        figure(2)

```

```

    fig2=plot(Y(i+1),F(i+1),'o','linewidth',2,'MarkerEdgeColor','k','markersize',10);
    legend('titik tetap');
    hold on;
end;
end;

```

```

figure(1)
fig1=plot(t,Y,'r');
hold on;
fig1=plot(t,Y1,'r');
hold on;
fig1=plot(t,Y2,'r');
hold on;
fig1=plot(t,Y3,'r');

```

```

hold on;
fig1=plot(t,Y4,'r');
hold on;
xlabel('t = waktu (tahun)');
ylabel('Y = biomassa rumput (kgDM/ha)');

```

```

figure(2)
fig2=plot(Y,F,'b','linewidth',3);
hold on;
fig2=plot(Y1,F1,'r','linewidth',3);
hold on;
fig2=plot(Y2,F2,'g','linewidth',3);
hold on;
fig2=plot(Y3,F3,'c','linewidth',3);
hold on;
fig2=plot(Y4,F4,'m','linewidth',3);
hold on;
xlabel('Y = biomassa rumput (kgDM/ha)');
ylabel('F = fosfor pada tanah (kgP/ha)');

```

```

figure(3)
fig1=plot(t,F,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F1,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F2,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F3,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F4,'b');
hold on;
xlabel('t = waktu (tahun)');
ylabel('F = fosfor pada tanah (kgP/ha)');

```

Lampiran 10. *Listing Program* untuk Gambar 3.10, 3.11, dan 3.12
Menggunakan *Software* Matlab 7.0

```
function hasil_dF=dF(Y,F)
m=40;
s=0.00011*365;
B=0.3;
p=0.0055;
n=35;
r=0.00075*365;
c=200;
hasil_dF=m-s*F-B*p*F*n*r*Y/(c+F);

function hasil_dY=dY(Y,F)
a=0.05*365;
K=4000;
d=200;
n=35;
r=0.00075*365;
hasil_dY=a*F*(Y-Y^2/K)/(d+F)-n*r*Y;

function hasil_RK=RK(h,Y,F)
v1=dY(Y,F);
w1=dF(Y,F);
v2=dY(Y+h/2*v1,F+h/2*w1);
w2=dF(Y+h/2*v1,F+h/2*w1);
v3=dY(Y+h/2*v2,F+h/2*w2);
w3=dF(Y+h/2*v2,F+h/2*w2);
v4=dY(Y+h*v3,F+h*w3);
w4=dF(Y+h*v3,F+h*w3);
Y=Y+h/6*(v1+2*v2+2*v3+v4);
F=F+h/6*(w1+2*w2+2*w3+w4);
hasil_RK=[Y F];

function utama
Y(1)=50;
F(1)=1000;
Y1(1)=500;
F1(1)=2500;
Y2(1)=2000;
F2(1)=1500;
Y3(1)=3500;
F3(1)=3000;
Y4(1)=4000;
```

```
F4(1)=800;
```

```
tmax=160;
```

```
h=0.01;
```

```
n=tmax/h;
```

```
t=0:h:tmax;
```

```
for (i=1:n)
```

```
    bantu=RK(h,Y(i),F(i));
```

```
    Y(i+1)=bantu(1);
```

```
    F(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y1(i),F1(i));
```

```
    Y1(i+1)=bantu(1);
```

```
    F1(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y2(i),F2(i));
```

```
    Y2(i+1)=bantu(1);
```

```
    F2(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y3(i),F3(i));
```

```
    Y3(i+1)=bantu(1);
```

```
    F3(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y4(i),F4(i));
```

```
    Y4(i+1)=bantu(1);
```

```
    F4(i+1)=bantu(2);
```

```
    if (i==n)
```

```
        figure(2)
```

```
fig2=plot(Y(i+1),F(i+1),'o','linewidth',2,'MarkerEd  
geColor','k');
```

```
    legend('titik tetap');
```

```
    hold on;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
figure(1)
```

```
fig1=plot(t,Y,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y1,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y2,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y3,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y4,'r');
```

```
hold on;
```

```

xlabel('t = waktu (tahun)');
ylabel('Y = biomassa rumput (kgDM/ha)');

figure(2)
fig2=plot(Y,F,'b');
hold on;
fig2=plot(Y1,F1,'r');
hold on;
fig2=plot(Y2,F2,'g');
hold on;
fig2=plot(Y3,F3,'c');
hold on;
fig2=plot(Y4,F4,'m');
hold on;
xlabel('Y = biomassa rumput (kgDM/ha)');
ylabel('F = fosfor pada tanah (kgP/ha)');

figure(3)
fig1=plot(t,F,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F1,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F2,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F3,'b');
hold on;
fig1=plot(t,F4,'b');
hold on;
xlabel('t = waktu (tahun)');
ylabel('F = fosfor pada tanah (kgP/ha)');

```

Lampiran 11. *Listing Program* untuk Gambar 3.13, 3.14, dan 3.15
Menggunakan *Software* Matlab 7.0

```
function hasil_dF=dF(Y,F)
m=40;
s=0.00011*365;
B=0.3;
p=0.0055;
n=20;
r=0.00075*365;
c=200;
hasil_dF=m-s*F-B*p*F*n*r*Y/(c+F);
```

```
function hasil_dY=dY(Y,F)
a=0.05*365;
K=4000;
d=200;
n=20;
r=0.00075*365;
hasil_dY=a*F*(Y-Y^2/K)/((d+F)-n*r*Y;
```

```
function hasil_RK=RK(h,Y,F)
v1=dY(Y,F);
w1=dF(Y,F);
v2=dY(Y+h/2*v1,F+h/2*w1);
w2=dF(Y+h/2*v1,F+h/2*w1);
v3=dY(Y+h/2*v2,F+h/2*w2);
w3=dF(Y+h/2*v2,F+h/2*w2);
v4=dY(Y+h*v3,F+h*w3);
w4=dF(Y+h*v3,F+h*w3);
Y=Y+h/6*(v1+2*v2+2*v3+v4);
F=F+h/6*(w1+2*w2+2*w3+w4);
hasil_RK=[Y F];
```

```
function utama
Y(1)=50;
F(1)=1000;
Y1(1)=500;
F1(1)=2500;
Y2(1)=2000;
F2(1)=1500;
Y3(1)=3500;
F3(1)=3000;
Y4(1)=4000;
```

```
F4(1)=800;
```

```
tmax=160;
```

```
h=0.01;
```

```
n=tmax/h;
```

```
t=0:h:tmax;
```

```
for (i=1:n)
```

```
    bantu=RK(h,Y(i),F(i));
```

```
    Y(i+1)=bantu(1);
```

```
    F(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y1(i),F1(i));
```

```
    Y1(i+1)=bantu(1);
```

```
    F1(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y2(i),F2(i));
```

```
    Y2(i+1)=bantu(1);
```

```
    F2(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y3(i),F3(i));
```

```
    Y3(i+1)=bantu(1);
```

```
    F3(i+1)=bantu(2);
```

```
    bantu=RK(h,Y4(i),F4(i));
```

```
    Y4(i+1)=bantu(1);
```

```
    F4(i+1)=bantu(2);
```

```
    if (i==n)
```

```
        figure(2)
```

```
fig2=plot(Y(i+1),F(i+1),'o','linewidth',2,'MarkerEdgeColor','k');
```

```
    legend('titik tetap');
```

```
    hold on;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
figure(1)
```

```
fig1=plot(t,Y,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y1,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y2,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y3,'r');
```

```
hold on;
```

```
fig1=plot(t,Y4,'r');
```

```
hold on;
```

```
xlabel('t = waktu (tahun)');  
ylabel('Y = biomassa rumput (kgDM/ha)');
```

```
figure(2)  
fig2=plot(Y,F,'b');  
hold on;  
fig2=plot(Y1,F1,'r');  
hold on;  
fig2=plot(Y2,F2,'g');  
hold on;  
fig2=plot(Y3,F3,'c');  
hold on;  
fig2=plot(Y4,F4,'m');  
hold on;  
xlabel('Y = biomassa rumput (kgDM/ha)');  
ylabel('F = fosfor pada tanah (kgP/ha)');
```

```
figure(3)  
fig3=plot(t,F,'b');  
hold on;  
fig3=plot(t,F1,'b');  
hold on;  
fig3=plot(t,F2,'b');  
hold on;  
fig3=plot(t,F3,'b');  
hold on;  
fig3=plot(t,F4,'b');  
hold on;  
xlabel('t = waktu (tahun)');  
ylabel('F = fosfor pada tanah (kgP/ha)');
```