LA-MODUL

Afifah Ramadhani

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Brawijaya
Email: afifahramadhani@yahoo.com.id

Abstrak *Left almost modules* (LA-modul) merupakan pengembangan konsep dari modul yang berupa penggabungan konsep LA-grup dan LA-ring. LA-modul memenuhi aksioma LA-grup untuk operasi penjumlahan, LA-semigrup untuk operasi pergandaan serta distributif. Irisan dua LA-submodul dari suatu LA-modul merupakan LA-submodul. Teorema isomorfisma LA-modul merupakan kasus khusus dari teorema modul dengan pembuktian yang serupa.

Kata kunci: LA-semigrup, LA-grup, LA-ring, LA-modul, isomorfisma.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Beberapa contoh struktur aljabar adalah grup, ring, dan modul. Grup merupakan struktur aljabar dengan satu operasi biner sedangkan ring adalah struktur aljabar dengan dua operasi biner dan modul merupakan gabungan struktur grup dan ring.

Dalam teori grup dan ring terdapat beberapa konsep yang dikembangkan, antara lain *Left Almost Semigroups* (LA-semigrup), *Left Almost Groups* (LA-grup), dan *Left Almost Ring* (LA-ring). Kazim dan Naseeruddin (1977) memperkenalkan LA-semigrup atau bisa juga disebut *Abel-Grassmann's Grupoid* (AG-grupoid) yang harus memenuhi hukum invertif kiri. Kemudian, Mushtaq dan Kamran (1996) memperkenalkan LA-grup sebagai bentuk khusus dari LA-semigrup yang sifat-sifatnya mendekati grup komutatif. Berdasarkan Yusuf (2006) yang mengembangkan konsep LA-grup dan LA-semigrup menjadi suatu konsep baru yang dikenal sebagai *Left Almost Ring* (LA-ring).

Selanjutnya berdasarkan Tariq Shah, dkk. (2011) yang menulis sebuah artikel yang berjudul *On Left Almost Modules* (LA-modul). Artikel tersebut membahas definisi, sifat-sifat dasar LA-modul, LA-submodul, LA-modul faktor, homomorfisma LA-modul), dan *direct sum* (hasil jumlah langsung). Pada artikel tersebut terdapat hal yang menarik untuk dibahas yaitu struktur LA-modul yang berbeda dengan modul. Oleh karena itu, pada Skripsi ini akan mengulas kembali mengenai LA-modul.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Left Almost Modules (LA-modul)

Diberikan definisi, sifat, proposisi, teorema, lemma serta contoh yang berkaitan dengan LA-modul atas LA-ring, LA-submodul, LA-modul faktor, dan homomorfisma LA-modul berdasarkan Tariq Shah dkk. (2011).

Definisi 1. Misalkan $(M,+)$ adalah suatu LA-grup dan $(R,+,\cdot)$ adalah suatu LA-ring dengan elemen identitas kiri 1. Serta diberikan pula operasi biner,

$$*: R \times M \to M$$
$$(r,m) \mapsto *\,(r,m) = r * m.$$

Himpunan M disebut LA-modul kiri atas R, jika memenuhi keempat aksioma berikut.

1. $r * (m_1 + m_2) = r * m_1 + r * m_2$,
2. $(r_1 + r_2) * m = r_1 * m + r_2 * m$,
3. $(r_1 * r_2) * m = r_2 * (r_1 * m)$,
4. $1.m = m$,

Contoh 2. Diberikan $N = \{a, b, c, d\}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$ dan $(\odot)$ yang didefinisikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2. Akan dibuktikan bahwa N merupakan LA-modul atas LA-ring N.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	b
d	b	c	d	a

$\odot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	d	b	e
d	a	c	e	b

2.2 LA-Submodul dan LA-Modul Faktor

Definisi 3. Misalkan $M: R -$ LA-modul dan $N \subseteq M, N \neq \emptyset$. Himpunan N disebut LA-submodul dari M, jika terhadap hukum komposisi yang sama dengan M, N merupakan LA-modul.

Contoh 4. Diberikan $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan operasi dengan operasi $*$ dan $\odot$ merupakan LA-modul. $S = \{a, d\}$ merupakan himpunan bagian dari K. S dengan operasi yang sama dengan K, didefiniskan pada Tabel 3.5 dan tabel 3.6. Akan ditunjukkan bahwa S merupakan LA-submodul dari K.

$*$	a	d
a	a	d
d	d	a

$\odot$	a	d
a	a	a
d	a	d

Definisi 5. Misalkan M adalah LA-modul dan I adalah LA-submodul dari M.
1. I disebut ideal kiri dari M jika $\mathrm{MI} \subseteq \mathrm{I}$.
2. I disebut ideal kanan dari N jika $\forall \mathrm{n}, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$ dan $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ maka berlaku $(\mathrm{i}+\mathrm{n})\mathrm{m} - \mathrm{nm} \in \mathrm{I}$.

Jika memenuhi keduanya maka I disebut ideal dua sisi.

Contoh 5. Berdasarkan Contoh 3.1.3, $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ merupakan LA-modul. Kemudian diberikan $S = \{a, d\}$. Akan dibuktikan bahwa S merupakan LA-submodul pada LA-modul K.

Teorema 6. Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R. Jika A dan B masing-masing adalah LA-submodul dari M atas R, maka $A \cap B$ juga merupakan LA-submodul M.

Bukti: i. Ambil $a, b \in A \cap B$, maka $a, b \in A$ dan $a, b \in B$. $a, b \in A$, karena A LA-submodul maka A merupakan LA-subgrup, sehingga berlaku $a - b \in A$. Demikian juga dengan $a, b \in B$. Karena B LA-submodul maka $a - b \in B$. Karena $a - b \in A$ dan $a - b \in B$, maka $a - b \in A \cap B$.

ii. Ambil $r \in R$ dan $a \in A \cap B$, maka $a \in A$ dan $a \in B$. Karena A dan B adalah LA-submodul, maka berlaku $ra \in A$ dan $ra \in B$, sehingga dapat disimpulkan $ra \in A \cap B$.

Jadi, dari i. dan ii. maka terbukti $A \cap B$ merupakan LA-submodul dari M.

Teorema 7. Misalkan R adalah LA-ring dan M adalah LA-modul atas R dengan identitas kiri 1. Jika A dan B adalah dua LA-submodul dari M, maka $A + B$ merupakan LA-submodul dari M.

Bukti: i. Ambil $a, b \in A + B$, maka $a = a_1 + b_1$ dan $b = a_2 + b_2$, dengan $a_1, a_2 \in A$ dan $b_1, b_2 \in B$ sehingga

$$\begin{aligned} a - b &= (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \end{aligned}$$

Karena $a_1, a_2 \in A$ dan A LA-submodul, maka $a_1 - a_2 \in A$.
Karena $b_1, b_2 \in B$ dan B LA-submodul, maka $b_1 - b_2 \in B$, sehingga

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in A + B.$$

Jadi, jika $a, b \in A + B$, maka $a - b \in A + B$.

ii. Ambil $r \in R$ dan $a \in A + B$, maka $a = a_1 + b_1$. Karena A dan B masing-masing adalah LA-submodul, maka berlaku

$$ra = ra_1 + rb_1 \in A + B.$$

Jadi, dapat disimpulkan dari uraian di atas, terbukti $A + B$ merupakan LA-submodul M.

2.3 Homomorfisma LA-Modul

Definisi 8. Misalkan M, N masing-masing adalah LA-modul atas LA-ring R. Pemetaan $\varphi: M \to N$ disebut homomorfisma LA-modul jika memenuhi

1. $\varphi(m + n) = \varphi(n) + \varphi(m)$
2. $\varphi(mn) = \varphi(n)\varphi(m)$, untuk setiap $n, m \in N$.

Jika $N = M$, maka φ disebut endomorfisma.
Jika φ injektif satu-satu, maka φ disebut monomorfisma.
M disebut isomorfik pada N, ditandai dengan $M \cong N$, jika terdapat suatu isomorfisma dari M ke N.

Contoh 9. Diberikan himpunan $K = \{a, b, c, d, e, f\}$ merupakan LA-modul. Kemudian diberikan $S = \{a, d\}$ adalah ideal di K.

Akan dibuktikan bahwa $f: K \to K/S$

$$x \mapsto f(x) = S * x$$

merupakan homomorfisma LA-modul.
Bukti: Ambil sebarang $x, y \in K$ untuk $x = a, y = c$, sehingga berlaku

1. Terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(a * c) \\ &= S * a * c \\ &= (S * a) * (S * c) \\ &= f(a) * f(c) \end{aligned}$$

2. Terhadap pergandaan.

$$\begin{aligned} f(x \odot y) &= f(a \odot c) \\ &= S * a \odot c \\ &= (S * a) \odot (S * c) \\ &= f(a) \odot f(c) \end{aligned}$$

Berdasarkan 1 dan 2 terbukti bahwa $f: K \to K/S$ merupakan homomorfisma LA-modul.

Teorema 10. Misalkan $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma LA-modul dari suatu LA-modul M ke suatu LA-modul N, maka

1. Jika A merupakan LA-submodul dari M, maka $\varphi(A)$ merupakan LA-submodul dari N.
2. Jika B merupakan LA-submodul dari N, maka $\varphi^{-1}(B)$ merupakan LA-submodul dari M.

Proposisi 11. Misalkan M dan N masing-masing adalah suatu LA-modul atas LA-ring R dan pemetaan $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma LA-modul. φ merupakan monomorfisma LA-modul jika dan hanya jika Ker $\varphi = \{0\}$.

2.4 Hasil Jumlah Langsung

Definisi 12. Misalkan M adalah LA-modul atas LA-ring R, $N_1, N_2, \ldots, N_k$ adalah LA-submodul dari LA-modul M. M disebut hasil jumlah langsung (*internal direct sum*) dari LA-submodul $N_1, N_2, \ldots, N_k$, jika memenuhi

$$i.\, M = \sum_{i=1}^{k} N_i$$

$$ii.\, N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\}$$

untuk $1 \leq i \leq k$.
M disebut hasil jumlah langsung dari LA-submodul $N_1, N_2, \ldots, N_k$, biasa diberi notasi $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$.

Teorema 13. Misalkan M adalah LA-modul atas LA-ring R. Jika $M_1, M_2, \ldots, M_k$ adalah LA-submodul-LA-submodul dari M, maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. M adalah *direct sum* (hasil jumlah langsung).
2. $\forall m \in M$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai bentuk $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ dengan $m_i \in M_i$.

3. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan jika *Left almost modules* (LA-modu) merupakan pengembangan konsep modul. Setiap modul merupakan LA-modul, namun setiap LA-modul belum tentu modul. Irisan tak kosong dari dua LA-submodul merupakan suatu LA-submodul. Epimorfisma dari LA-modul atas kernelnya membentuk suatu isomorfisma.Teorema Isomorfisma LA-modul merupakan kasus khusus dari Teorema Isomorfisma modul dengan pembuktian yang serupa.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dra. Ari Andari, M.Si selaku dosen pembimbing, Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.,Ph.D dan Vira Hari Krisnawati S.Si.,M.Sc selaku dosen penguji yang telah memberikan nasihat, saran, kritik yang sangat bermanfaat untuk penulis dan selalu sabar dalam memberikan arahan kepada penulis selama proses penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2014. *Ring, Field dan Daerah Integral*. Malang: UB Press.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Malang: UB Press.

Andari, A. 2015. *Pengantar Teori Modul.* Malang: UB Press.

Bhattacharya, P.B, S.K. Jain dan S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra.* New York: Cambridge University Press.

Fraleigh, J.B. 1944. *A First Course In Abstract Algebra.* John Willey and Sons, Inc. New York.

Gaketem, T. 2013. Quasi-Ideals of A P-Regular Near Left Almost Rings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics.* Vol. 87, no. 2, 219-227.

Kandasamy,W.B. 2002. *Groupoid ad Smarandache Groupoids.* Department of Mathematics, Indian Institute of Technology. Chennay, India.

Kazim, M. A. dan Naseeruddin, M. 1977. On Almost Semigroups. *Aligarh. Bull. Math.* No 2, 1-7.

Mushtaq, Q dan Kamran, M.S. 1996. On Left Almost Groups. *Proc. Pak. Acad. of Science.* No. 33, 1-2.

Shah, M. dan Ali, A. 2011. Some Structural Properties of AG-Group. *International Mathematical Forum.* Vol. 6, no. 34, 1661-1667.

Yusuf, S.M. 2006. On Left Almost Ring. *Proc. of* 7^{th} *International Pure Math Conference.*

Tariq Shah, R. ur Fazal dan R. Muhammad. 2011. On Near Left Almost Rings. *International Mathematical Forum.* Vol. 6, 2011, no. 23, 1103-1111.

Tariq Shah, R. Muhammad dan A. Gauhar. 2011. On Left Almost Modules. *International J. Contemp. Math. Sciences.* Vol. 6, 2011, no. 21, 999-1006.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. London: Blackie Academic & Professional.