

**PENYELESAIAN PERSAMAAN HIPERBOLIK LINEAR MENGGUNAKAN
METODE ELEMEN HINGGA *LEAST-SQUARES* DAN SUPG**

TESIS



Oleh

**ADIN LAZUARDY FIRDIANSYAH
NIM. 166090400111008**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT SAINS KOMPUTASI**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
M A L A N G
2019**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN HIPERBOLIK LINEAR MENGGUNAKAN
METODE ELEMEN HINGGA *LEAST-SQUARES* DAN SUPG**

TESIS

**Untuk Memenuhi Persyaratan
Memperoleh Gelar Magister dalam Bidang Matematika**



Oleh

**ADIN LAZUARDY FIRDIANSYAH
NIM. 166090400111008**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT SAINS KOMPUTASI**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
M A L A N G
2019**

TESIS

**PENYELESAIAN PERSAMAAN HIPERBOLIK LINEAR MENGGUNAKAN
METODE ELEMEN HINGGA *LEAST-SQUARES* DAN SUPG**

Oleh:

**ADIN LAZUARDY FIRDIANSYAH
NIM. 166090400111008**

Telah dipertahankan di depan Komisi Penguji
pada tanggal 2 Januari 2019
dan dinyatakan **LULUS**

Menyetujui,
Komisi Pembimbing

Ketua

Anggota

Prof. Dr. Marjono, M.Phil
NIP. 196211161988031004

Nur Shofianah, S.Si,M.Si,Ph.D
NIP. 198411242009122006

Mengetahui:
Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Noor Hidayat, M.Si.
NIP. 196112041988021001



IDENTITAS TIM PENGUJI

Judul Tesis : Penyelesaian Persamaan Hiperbolik Linear Menggunakan Metode Elemen Hingga *Least-Squares* dan SUPG

Nama : Adin Lazuardy Firdiansyah

NIM : 166090400111008

Program Studi : Magister Matematika

Bidang Minat : SAINS KOMPUTASI

KOMISI PEMBIMBING

Ketua : Prof. Dr. Marjono, M.Phil

Anggota : Nur Shofianah, S.Si,M.Si,Ph.D

TIM DOSEN PENGUJI

Dosen Penguji 1 : Syaiful Anam, S.Si,M.T,Ph.D

Dosen Penguji 2 : Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc

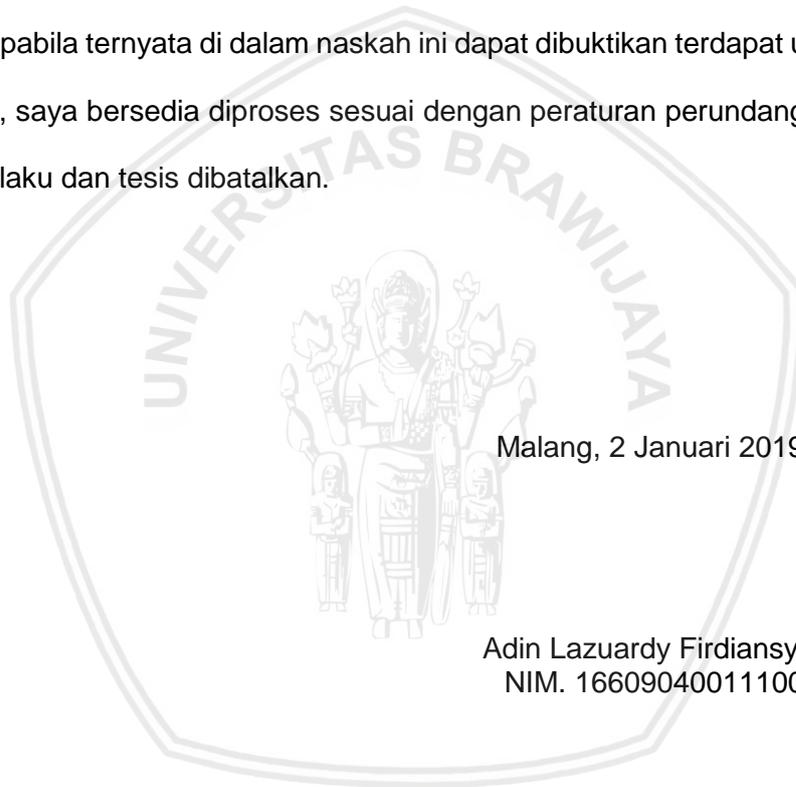
Tanggal Ujian : 2 Januari 2019

SK. Penguji :

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, di dalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur jiplakkan, saya bersedia diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan tesis dibatalkan.



Malang, 2 Januari 2019

Adin Lazuardy Firdiansyah
NIM. 166090400111008

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama lengkap Adin Lazuardy Firdiansyah lahir di Kota Probolinggo, tanggal 23 Mei 1991. Penulis merupakan anak ke-3 dari Bapak Abu Aman (Alm) dan Ibu Nur Hasanah. Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di Sekolah Dasar Negeri Kebonsari Kulon 2 pada tahun 2004. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Pertama Negeri 5 Kota Probolinggo dan lulus pada tahun 2007. Pada tahun 2007, penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Kota Probolinggo dan lulus pada tahun 2010. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan S-1 di Universitas Brawijaya (UB) pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, dan lulus pada tahun 2015. Pada tahun 2016, penulis melanjutkan pendidikan tingkat magister (S2) pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Malang, 2 Januari 2019

Adin Lazuardy Firdiansyah
NIM. 166090400111008

RINGKASAN

ADIN LAZUARDY FIRDIANSYAH, Program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Brawijaya, Penyelesaian Persamaan Hiperbolik Linear Menggunakan Metode Elemen Hingga *Least-Squares* dan SUPG, Ketua Komisi Pembimbing: Marjono, Anggota Komisi Pembimbing: Nur Shofianah.

Persamaan hiperbolik sering digunakan dalam ilmu pengetahuan dan keteknikan. Persamaan hiperbolik dapat menggambarkan gelombang propagasi dan transportasi molekul. Persamaan hiperbolik memiliki solusi diskontinu ketika data kondisi batas adalah diskontinu. Hal tersebut membuat tidak mudah membangun metode numerik untuk mendapatkan solusi tanpa osilasi. Tesis ini membahas tentang penyelesaian persamaan hiperbolik linear menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dengan minimum residual (MINRES) dan *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) dengan parameter kestabilan δ , yakni $\delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty}$ dan $\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}$. Sistem persamaan linear yang dihasilkan dari metode elemen hingga *least-squares* memiliki matriks yang simetrik dan definit positif sehingga dapat diselesaikan dengan metode MINRES. Sedangkan, sistem persamaan linear yang muncul dari metode elemen hingga SUPG memiliki matriks yang tidak simetrik dan definit negatif sehingga diselesaikan dengan metode langsung. Beberapa simulasi numerik diuji untuk mendemonstrasikan kedua metode. Simulasi numerik dibagi menjadi dua, yakni simulasi numerik untuk kasus dengan solusi kontinu dan diskontinu. Hasil numerik menggunakan metode elemen hingga SUPG dengan $\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}$ memberikan hasil *error* yang relatif lebih kecil untuk kasus dengan solusi kontinu. Sedangkan, hasil numerik menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dengan MINRES memberikan kestabilan yang lebih baik untuk kasus dengan solusi diskontinu.

SUMMARY

ADIN LAZUARDY FIRDIANSYAH, Master Mathematics Study Program
Mathematics Department Faculty of Natural Sciences University of Brawijaya.
Least-Squares and SUPG Finite Element Method for Linear Hyperbolic Problems.
Supervisor: Marjono, *Co-Supervisor:* Nur Shofianah.

The hyperbolic equation has many applications in sciences and engineering. The hyperbolic equation can describe propagation wave and transport molecules. The hyperbolic equation has discontinuous solution when boundary data is discontinuous. This condition makes it difficult in finding a numerical method for its solution. This thesis discussed about *least-squares* finite element method with MINRES and *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) finite element method with stability parameters $\delta, \delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty}$ and $\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}$, for linear hyperbolic problems. The linear system arising from *least-squares* finite element method is symmetric and positive definite system. It is solved with MINRES method. The linear system arising from SUPG finite element is nonsymmetric and negative definite system. It is solved with direct method. Some numerical examples are tested that demonstrate the robustness of the method. The numerical simulation is divided into two cases, numerical simulation for cases with continuous and discontinuous solutions. The numerical results using SUPG finite element method with $\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}$ offer relatively smaller error for cases with continuous solutions. In the numerical simulation for cases with discontinuous solutions, the numerical results using *least-squares* finite element method with MINRES offer better stability.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan tesis yang berjudul **“Penyelesaian Persamaan Hiperbolik Linear Menggunakan Metode Elemen Hingga *Least-Squares* dan SUPG”**. Shalawat dan salam selalu dijunjungkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri teladan bagi seluruh manusia.

Tesis ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Prof. Dr. Marjono, M.Phil selaku dosen pembimbing 1 dan Nur Shofianah, S.Si, M.Si, Ph.D selaku dosen pembimbing 2 yang telah memberikan nasihat, ilmu, saran, kritik yang bermanfaat untuk penulis dan bersabar dalam menjelaskan materi kepada penulis selama proses penyusunan hingga tesis ini selesai,
2. Dr. Noor Hidayat, M.Si selaku Ketua Program Studi S2 Matematika dan para dosen jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf FMIPA atas segala bantuan yang diberikan,
3. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika MIPA Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta seluruh staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
4. Mama, istri, kakak Ilzam, kakak Adif, dan kakak ipar Risma, serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan dukungan dan senantiasa memanjatkan doa dan motivasi selama ini kepada penulis,
5. teman-teman program pascasarjana matematika atas semangat dan bantuan yang telah diberikan serta kebersamaan selama ini,
6. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu oleh penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun oleh pembaca untuk perbaikan penulisan selanjutnya dan dapat disampaikan melalui email penulis adin.lazuardy@gmail.com. Semoga tesis ini bermanfaat bagi semua pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan tesis selanjutnya.

Malang, 2 Januari 2019

Penulis

Adin Lazuardy Firdiansyah

NIM. 166090400111008



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	Hal.	i
HALAMAN PENGESAHAN		ii
HALAMAN IDENTITAS TIM PENGUJI		iii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS		iv
HALAMAN RIWAYAT HIDUP		v
RINGKASAN		vi
SUMMARY		vii
KATA PENGANTAR		viii
DAFTAR ISI		x
DAFTAR TABEL		xii
DAFTAR GAMBAR		xiii
BAB I PENDAHULUAN		1
1.1. Latar Belakang		1
1.2. Rumusan Masalah		4
1.3. Tujuan Penelitian		5
BAB II DASAR TEORI		6
2.1. Persamaan Hiperbolik Linear		6
2.2. Definisi Ruang Norm		6
2.3. Metode Elemen Hingga		7
2.3.1. Metode Elemen Hingga <i>Least-Squares</i>		9
2.3.2. Metode Elemen Hingga SUPG		9
2.3.3. Elemen Segitiga Linear		10
2.4. Integral Numerik		12
2.5. Subruang Krylov		12
2.5.1. Metode MINRES (Minimum Residual)		13
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN		16
3.1. Definisi Ruang Elemen Hingga		16
3.2. Diskritisasi Menggunakan Metode Elemen Hingga <i>Least-Squares</i>		16
3.3. Implementasi Program untuk Metode Elemen Hingga <i>Least-Squares</i>		18
3.3.1. Penghimpunan Matriks Kekakuan		19
3.3.2. Penghimpunan Vektor Gaya		21
3.4. Diskritisasi Menggunakan Metode Elemen Hingga SUPG		22
3.5. Implementasi Program untuk Metode Elemen Hingga SUPG		23
3.5.1. Penghimpunan Matriks Kekakuan		24
3.5.2. Penghimpunan Vektor Gaya		26
3.6. Simulasi Numerik		27
3.6.1. Simulasi Numerik untuk Solusi Kontinu		28
3.6.1.1. Uji Numerik 1		28
3.6.1.2. Uji Numerik 2		29
3.6.1.3. Uji Numerik 3		31
3.6.1.4. Uji Numerik 4		32
3.6.2. Simulasi Numerik untuk Solusi Diskontinu		33
3.6.2.1. Uji Numerik 5		33
3.6.2.2. Uji Numerik 6		39
3.6.2.3. Uji Numerik 7		43

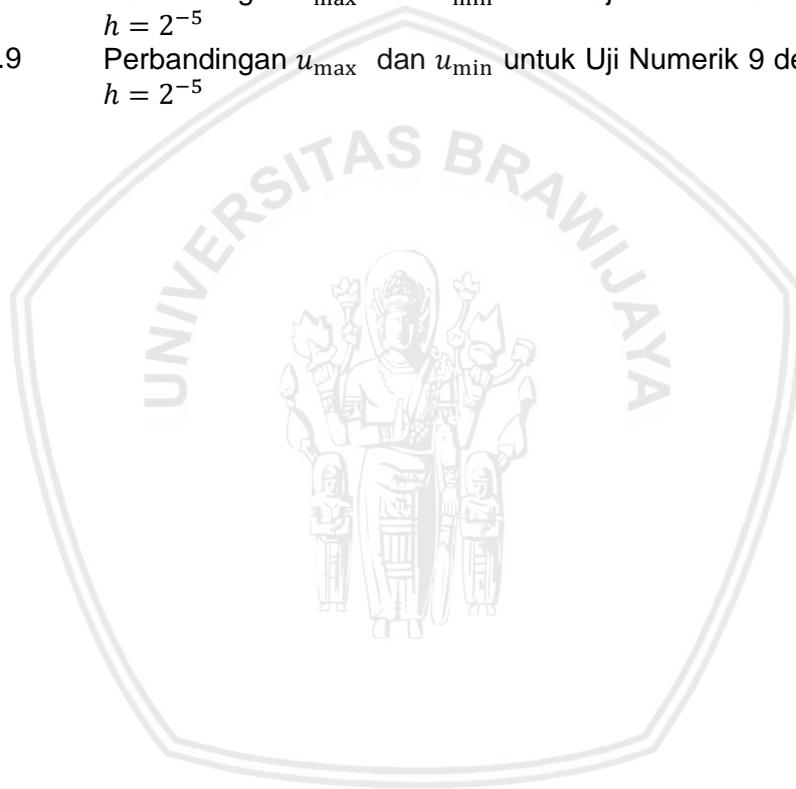


3.6.2.4. Uji Numerik 8	47
3.6.2.5. Uji Numerik 9	51
BAB IV KESIMPULAN	56
DAFTAR PUSTAKA	58



DAFTAR TABEL

		Hal
Tabel 3.1	Perbandingan <i>error</i> untuk Uji Numerik 1	28
Tabel 3.2	Perbandingan <i>error</i> untuk Uji Numerik 2	30
Tabel 3.3	Perbandingan <i>error</i> untuk Uji Numerik 3	31
Tabel 3.4	Perbandingan <i>error</i> untuk Uji Numerik 4	32
Tabel 3.5	Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 5 dengan $h = 2^{-5}$	34
Tabel 3.6	Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 6 dengan $h = 2^{-5}$	39
Tabel 3.7	Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 7 dengan $h = 2^{-5}$	44
Tabel 3.8	Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 8 dengan $h = 2^{-5}$	48
Tabel 3.9	Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 9 dengan $h = 2^{-5}$	52



DAFTAR GAMBAR

		Hal
Gambar 2.1	Contoh diskritisasi <i>domain</i> dengan elemen segitiga	11
Gambar 3.1	Mesh segitiga linear dengan $h = \frac{1}{2}$	19
Gambar 3.2	Mesh dengan elemen segitiga linear dengan $h = 2^{-5}$	27
Gambar 3.3	Solusi Uji Numerik 1 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2	29
Gambar 3.4	Solusi Uji Numerik 2 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2	30
Gambar 3.5	Solusi Uji Numerik 3 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2	31
Gambar 3.6	Solusi Uji Numerik 4 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2	33
Gambar 3.7	Solusi Uji Numerik 5 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	34
Gambar 3.8	Plot kontur Uji Numerik 5 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	35
Gambar 3.9	Plot kontur Uji Numerik 5 untuk LSM dengan lebar grid (a) $h = 2^{-4}$, (b) $h = 2^{-5}$, dan (c) $h = 2^{-6}$	36
Gambar 3.10	Profil vertikal Uji Numerik 5 pada $x = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	37
Gambar 3.11	Solusi Uji Numerik 6 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	40
Gambar 3.12	Plot kontur Uji Numerik 6 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	41
Gambar 3.13	Profil vertikal Uji Numerik 6 pada $x = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	42
Gambar 3.14	Solusi Uji Numerik 7 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	44
Gambar 3.15	Plot kontur Uji Numerik 7 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	45
Gambar 3.16	Profil vertikal Uji Numerik 7 pada $y = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	46
Gambar 3.17	Solusi Uji Numerik 8 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	48
Gambar 3.18	Plot kontur Uji Numerik 8 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	49
Gambar 3.19	Profil vertikal Uji Numerik 8 pada $y = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	50
Gambar 3.20	Solusi Uji Numerik 9 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	52
Gambar 3.21	Plot kontur Uji Numerik 9 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	53
Gambar 3.22	Profil vertikal Uji Numerik 9 pada $x = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2	54

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial adalah salah satu cabang ilmu matematika yang dapat menggambarkan dinamika alam melalui model persamaan yang logis dan sistematis. Persamaan diferensial parsial sangat berperan dalam menggambarkan masalah fisik, seperti dinamika fluida, penghantar panas, dan gelombang. Persamaan diferensial parsial yang paling sering digunakan adalah persamaan diferensial parsial orde dua. Menurut Trangenstein (2007), persamaan diferensial parsial orde dua dibagi menjadi tiga jenis, yakni persamaan hiperbolik, parabolik, dan eliptik. Persamaan hiperbolik umumnya berkaitan dengan masalah adveksi dan persamaan parabolik umumnya berkaitan dengan masalah difusi. Sedangkan, persamaan eliptik berkaitan dengan *steady states* dari persamaan hiperbolik dan parabolik. Tidak semua masalah termasuk pada salah satu tipe persamaan tersebut, seperti persamaan adveksi dan difusi yang merupakan bagian dari kedua persamaan hiperbolik dan parabolik.

Persamaan hiperbolik diperkenalkan pertama kali oleh Reed dan Hill pada tahun 1973. Persamaan hiperbolik dapat menggambarkan gelombang propagasi dan transportasi molekul. Beberapa aplikasi dari gelombang propagasi adalah gelombang elektron pada teknologi, *echolocation*, dan bencana alam (Kornelus, 2017). Metode elemen hingga merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik.

Menurut Sterck, dkk. (2004), persamaan hiperbolik linear banyak diaplikasikan dalam ilmu pengetahuan dan teknik, seperti dalam dinamika fluida dan transportasi neutron. Selama beberapa dekade, penelitian dikembangkan untuk menentukan metode solusi numerik yang akurat dan efisien pada persamaan hiperbolik linear. Persamaan ini tidak hanya memiliki aplikasi yang luas, tetapi juga merupakan persamaan prototipe untuk persamaan yang lebih umum dari jenis hiperbolik, misalnya sistem dari hukum konservasi nonlinear atau persamaan transport dalam ruang fase. Metode numerik yang berhasil diterapkan pada persamaan hiperbolik linear sering digunakan sebagai bagian dari solusi numerik persamaan diferensial parsial hiperbolik yang lebih rumit.

Penelitian tentang persamaan hiperbolik linear ini telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Menurut Lin Mu dan Xiu Ye (2017) dan Sterck, dkk. (2004), persamaan hiperbolik linear mungkin mempunyai solusi yang diskontinu ketika data kondisi batas diskontinu. Hal tersebut membuat tidak mudah membangun metode numerik untuk mendapatkan solusi tanpa terjadi osilasi. Bochev dan Choi (2001) membandingkan 3 (tiga) metode elemen hingga, yakni metode elemen hingga *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG), Galerkin, dan *least-squares* untuk menyelesaikan persamaan konveksi. Berdasarkan solusi numerik yang dihasilkan pada kasus dengan solusi diskontinu, metode elemen hingga *least-squares* memberikan kestabilan yang lebih baik. Sistem persamaan linear yang dihasilkan dari ketiga metode elemen hingga tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode langsung. Menurut Larson dan Bengzon pada tahun 2010, metode langsung tidak cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang besar dan *sparse*. Pada tahun 2004, Sterck, dkk. menyelesaikan persamaan hiperbolik linear dengan menggunakan metode elemen hingga *least-squares*. Sistem persamaan linear yang dihasilkan dari diskritisasi metode elemen hingga *least-squares* diselesaikan dengan menggunakan metode multigrid aljabar.

Simulasi numerik menunjukkan bahwa kompleksitas tumbuh relatif perlahan seiring bertambahnya ukuran dari sistem linear. Pada tesis ini digunakan metode MINRES (minimum residual) untuk menyelesaikan sistem linear dari metode elemen hingga *least-squares*. Motivasi menggunakan metode MINRES adalah metode elemen hingga *least-squares* dan MINRES memiliki prinsip yang sama, yakni meminimumkan residual atau error. Diharapkan, metode elemen hingga *least-squares* dengan MINRES memberikan solusi persamaan hiperbolik linear yang lebih baik untuk kasus dengan solusi diskontinu. Metode MINRES diterapkan oleh Yu-Ling Lai, dkk. (1997) untuk menyelesaikan sistem linear yang besar dan *sparse* dengan koefisien matriks yang simetrik dan indefinit. Elman, dkk. (2005) menyatakan bahwa metode ini juga dapat diterapkan pada koefisien matriks yang simetrik dan definit positif.

Metode elemen hingga SUPG dapat diturunkan dengan menambah parameter kestabilan dari persamaan hiperbolik linear. Bochev dan Choi (2001) menyatakan bahwa pada kasus solusi diskontinu, metode elemen hingga SUPG dengan parameter kestabilan $\delta = \frac{h}{2\|b\|_2}$ memberikan penyelesaian yang lebih baik daripada metode elemen hingga Galerkin meskipun masih menunjukkan osilasi. Pada penelitian Burman (2010), metode elemen hingga SUPG dengan parameter kestabilan $\delta = \frac{h}{2\|b\|_2}$ dikombinasikan dengan diskritisasi beda hingga terhadap waktu untuk menyelesaikan persamaan transport. Pada tesis ini digunakan metode elemen hingga SUPG dengan parameter kestabilan $\delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty}$ seperti yang digunakan Larson dan Bengzon (2010). Pada tahun 2017, metode elemen hingga *least-squares* diterapkan oleh Lin Mu dan Xiu Ye untuk menyelesaikan persamaan hiperbolik linear dan dilakukan simulasi numerik untuk menguji metode tersebut.

Menurut Larson dan Bengzon (2010), metode elemen hingga *least-squares* menghasilkan bentuk bilinear yang selalu simetrik.

Pada tesis ini dibahas penyelesaian persamaan hiperbolik linear menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dan SUPG. Berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya, sistem linear yang diperoleh dari diskritisasi elemen hingga *least-squares* diselesaikan dengan menggunakan metode MINRES, sedangkan untuk metode elemen hingga SUPG diberikan parameter kestabilan $\delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty}$. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dengan beberapa uji numerik seperti pada penelitian Lin Mu dan Xiu Ye (2017). Hasil simulasi numerik tersebut dibandingkan dengan hasil dari metode elemen hingga SUPG dengan parameter kestabilan $\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}$ seperti pada Bochev dan Choi (2001).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah dalam tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menyelesaikan persamaan hiperbolik linear menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dan MINRES?
2. Bagaimana menyelesaikan persamaan hiperbolik linear menggunakan metode elemen hingga SUPG dengan parameter kestabilan $\delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty}$ dan $\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}$?
3. Bagaimana perbandingan hasil numerik dari metode elemen hingga *least-squares* dan MINRES serta SUPG dengan parameter kestabilan $\delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty}$ dan

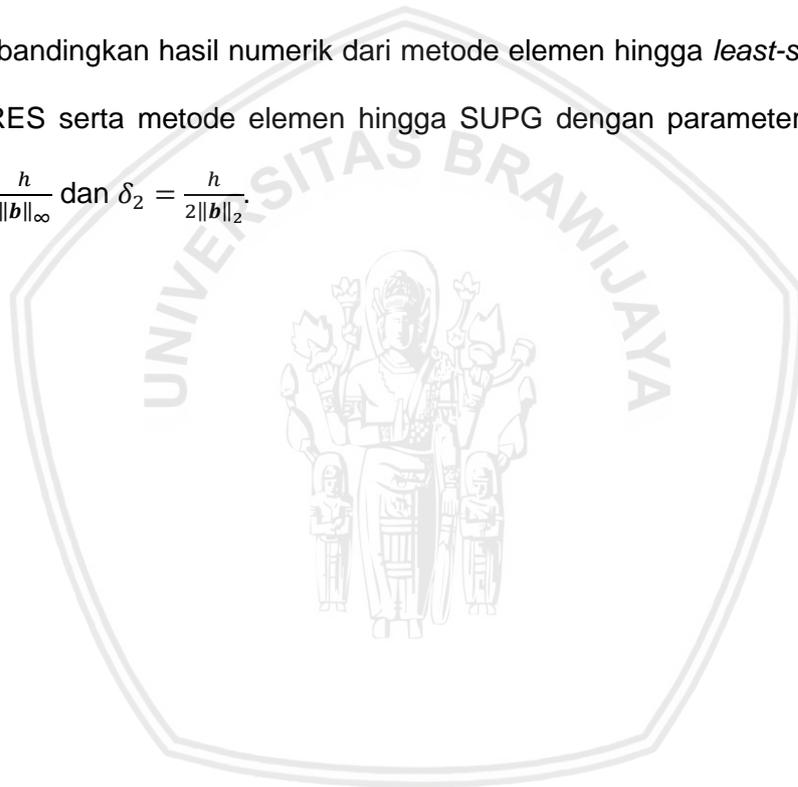
$$\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}?$$

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penulisan tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Menyelesaikan persamaan hiperbolik linear menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dan MINRES.
2. Menyelesaikan persamaan hiperbolik linear menggunakan metode elemen hingga SUPG.
3. Membandingkan hasil numerik dari metode elemen hingga *least-squares* dan MINRES serta metode elemen hingga SUPG dengan parameter kestabilan

$$\delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty} \text{ dan } \delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}.$$



BAB II

DASAR TEORI

Penyelesaian persamaan hiperbolik linear dengan menggunakan metode elemen hingga disajikan dalam tesis ini. Teori-teori yang mendasari persamaan hiperbolik linear dan metode elemen hingga perlu diketahui sebelum masuk ke dalam pembahasan. Berikut ini adalah teori-teori yang mendasari penyelesaian persamaan hiperbolik linear.

2.1 Persamaan Hiperbolik Linear

Perhatikan persamaan hiperbolik linear pada persamaan (2.1) dengan u adalah fungsi yang belum diketahui di bawah ini.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{b}u &= f, \quad \text{dalam } \Omega, \\ u &= g, \quad \text{pada } \Gamma_-, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dimana g , \mathbf{b} dan f masing-masing merupakan data kondisi batas, vektor konveksi dan *source term*. Kondisi batas *inflow* didefinisikan dengan

$$\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega, \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\},$$

dan $\Gamma_+ = \partial\Omega \setminus \Gamma_-$, dimana \mathbf{n} adalah vektor normal (Lin Mu dan Xiu Ye, 2017). Persamaan hiperbolik linear sering disebut sebagai persamaan transport atau persamaan adveksi linear (Sterck, dkk., 2004).

2.2 Definisi Ruang Norm

Norm adalah suatu fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat

- $\|x\| \geq 0$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

- c. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Selanjutnya, definisi ruang norm dapat dituliskan sebagai $(X, \|\cdot\|)$.

Contoh:

1. Untuk setiap $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Fungsi $\|\cdot\|_2$ ini mendefinisikan suatu norm di \mathbb{R}^n .

2. Misal $1 \leq p < \infty$. Untuk setiap $x = \{x_1, x_2, \dots\} \in l^p$, didefinisikan

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

3. Untuk setiap $x = \{x_1, x_2, \dots\} \in l^\infty$, didefinisikan

$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1,2,\dots} |x_j|.$$

(Kreyszig, 1978)

2.3 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik dengan membagi *domain* menjadi elemen berhingga. Metode elemen hingga juga dapat digunakan pada persamaan diferensial parsial dengan *domain* yang tidak beraturan (Jichun dan Yi-Tung, 2008).

Metode elemen hingga secara umum telah dijelaskan oleh Gockenbach (2011). Diberikan persamaan diferensial parsial seperti pada persamaan (2.2) di bawah ini.

$$Lu = f, \tag{2.2}$$

dimana L disebut operator diferensial. Sedangkan, ruang V untuk fungsi uji v didefinisikan sebagai berikut.

$$V = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v(x) = 0 \text{ untuk semua } x \in \partial\Omega\}.$$

Bentuk lemah dari persamaan (2.2) untuk $\forall u \in V$ adalah

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.3)$$

dimana bentuk bilinear $a(.,.)$ dan linear $l(.)$ adalah sebagai berikut.

$$a(u, v) = (Lu, v),$$

$$l(v) = (f, v).$$

Misal $V_h \subset V$ dan fungsi basis $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{np}\}$ sehingga solusi aproksimasi untuk $\forall u_h \in V_h$ adalah

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h, \quad (2.4)$$

dimana

$$u_h = \sum_{j=1}^{np} u_j \phi_j. \quad (2.5)$$

Dengan menggunakan metode Galerkin, fungsi uji sama dengan fungsi basis sedemikian sehingga

$$v_i(x) = \phi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, np,$$

dimana np merupakan banyaknya titik pada mesh yang digunakan. Selanjutnya, persamaan (2.4) dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, np. \quad (2.6)$$

Substitusikan (2.5) ke dalam (2.6) sehingga diperoleh

$$a\left(\sum_{j=1}^{np} u_j \phi_j, \phi_i\right) = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, np,$$

atau

$$\sum_{j=1}^{np} a(\phi_j, \phi_i) u_j = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, np. \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) dapat dituliskan sebagai sistem persamaan linear $A\mathbf{u} = \mathbf{F}$, dimana matriks kekakuan A dan vektor gaya \mathbf{F} didefinisikan dengan

$$A_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i), \quad F_i = l(\phi_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, np.$$

2.3.1 Metode Elemen Hingga *Least-Squares*

Perhatikan persamaan (2.8) di bawah ini. Solusi aproksimasi untuk $\forall u_h \in V_h$ adalah

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h, \quad (2.8)$$

dimana bentuk bilinear $a(\cdot, \cdot)$ dan linear $l(\cdot)$ adalah sebagai berikut.

$$a(u_h, v) = (Lu_h, Lv),$$

$$l(v) = (f, Lv).$$

Persamaan (2.8) merupakan persamaan untuk metode elemen hingga *least-squares* (Larson dan Bengzon, 2010). Motivasi menggunakan diskritisasi *least-squares* adalah matriks yang terbentuk dari sistem linear hasil diskritisasi elemen hingga *least-squares* merupakan matriks yang simetrik dan definit positif sehingga lebih mudah mendesain penyelesaian yang optimal (Sterck, dkk., 2004).

2.3.2 Metode Elemen Hingga *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG)

Diberikan solusi aproksimasi untuk $\forall u_h \in V_h$ seperti persamaan di bawah ini.

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h, \quad (2.9)$$

dengan bentuk bilinear $a(\cdot, \cdot)$ dan linear $l(\cdot)$ adalah sebagai berikut.

$$a(u_h, v) = (Lu_h, v) + \delta(Lu_h, Lv),$$

$$l(v) = (f, v) + \delta(f, Lv),$$

dimana δ adalah parameter kestabilan (Larson dan Bengzon, 2010).

Bochev dan Choi (2001) menyelesaikan persamaan konveksi dengan menggunakan metode elemen hingga SUPG dengan $\delta = \frac{h}{2\|b\|_2}$ dan kemudian dibandingkan dengan hasil dari metode elemen hingga *least-squares* dan Galerkin. Pada tahun 2010, Burman menggunakan metode elemen hingga SUPG dengan $\delta = \frac{h}{2\|b\|_2}$ yang dikombinasikan dengan diskritisasi beda hingga terhadap waktu untuk menyelesaikan persamaan transport. Pada tesis ini, parameter kestabilan yang digunakan adalah $\delta = \frac{h}{\|b\|_\infty}$ seperti yang digunakan Larson dan Bengzon (2010).

2.3.3 Elemen Segitiga Linear

Pada tesis ini akan digunakan elemen segitiga linear untuk mendapatkan solusi aproksimasi 2D. Keuntungan dari elemen segitiga linear adalah dapat digunakan pada masalah dengan *domain* yang tidak beraturan.

Diberikan elemen segitiga K dengan tiga titik $a_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Misal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$) merupakan *domain* poligon untuk segitiga 2D dan K_h adalah *domain* Ω yang telah dipartisi menjadi daerah poligon 2D. Himpunan dari beberapa elemen segitiga K dapat disimbolkan dengan $\bar{\Omega} = \cup_{K \in K_h} K$. Kekonsisten dalam pelabelan titik juga perlu dipertimbangkan, seperti penomoran titik berlawanan arah jarum jam. Misal N_i merupakan fungsi bentuk pada titik a_i yang didefinisikan sebagai berikut.

$$N_i(a_j) = \lambda_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

dengan

$$N_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

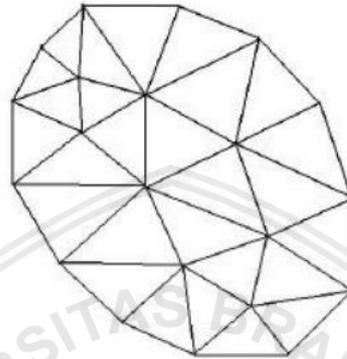
Konstanta $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\alpha_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Lambda}, \quad \beta_i = \frac{y_j - y_k}{2\Lambda}, \quad \gamma_i = \frac{x_k - x_j}{2\Lambda},$$

dengan Δ adalah luas area segitiga, yakni

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

dimana $i \neq j \neq k$ dan $i, j, k = 1, 2, 3$.



Gambar 2.1. Contoh diskritisasi *domain* dengan elemen segitiga

Fungsi bentuk N_i sering disebut sebagai koordinat *barycentric* dari segitiga. Solusi aproksimasi linear untuk $v \in P_1(K)$ dapat didefinisikan seperti pada persamaan di bawah ini.

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^3 v(a_i) N_i, \quad \forall (x, y) \in K.$$

Semua v berada pada ruang elemen hingga *piecewise* kontinu linear. Ruang *piecewise* kontinu linear didefinisikan sebagai berikut.

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_1(K), \forall K \in K_h\},$$

(Jichun dan Yi-Tung, 2008)

dimana $P_1(K)$ merupakan ruang fungsi linear pada K yang didefinisikan dengan

$$P_1(K) = \{v : v = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2, (x_1, x_2) \in K, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(Larson dan Bengzon, 2010)

2.4 Integral Numerik

Integral dapat dihitung secara numerik dengan menggunakan aturan Simpson atau titik tengah. Namun, jika integran merupakan perkalian dari fungsi bentuk, maka ada formula yang lebih mudah untuk menyelesaikan integral tersebut, seperti menggunakan formula integrasi berikut.

$$\int_T N_1^m N_2^n N_3^p d\Omega = \frac{2m! n! p!}{(m+n+p+2)!} \Lambda, \quad (2.11)$$

dimana N_1, N_2, N_3 adalah fungsi bentuk, Λ adalah luas area segitiga linear, dan m, n, p merupakan integer positif (Larson dan Bengzon, 2010).

Contoh:

Diketahui fungsi bentuk dari elemen segitiga berupa N_1 dan N_2 , maka penyelesaian dari fungsi bentuk ini dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (2.11) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int_K N_1 N_2 d\Omega &= \frac{2! 1! 1!}{(2+1+1)!} \Lambda, \\ &= \frac{2}{4!} \Lambda, \\ &= \frac{1}{12} \Lambda, \end{aligned}$$

dimana Λ adalah luas area segitiga linear dan $m, n = 1$.

2.5 Subruang Krylov

Didefinisikan subruang Krylov ke- k $\mathcal{K}_k(A, \mathbf{z}) \subset \mathbb{R}^n$ adalah sebagai berikut.

$$\mathcal{K}_k(A, \mathbf{z}) = \text{span}\{\mathbf{z}, A\mathbf{z}, A^2\mathbf{z}, \dots, A^{k-1}\mathbf{z}\},$$

dimana A merupakan matriks berukuran $n \times n$ dan \mathbf{z} merupakan vektor berukuran $n \times 1$ (Larson dan Bengzon, 2010).

2.5.1 Metode MINRES (Minimum Residual)

Menurut Elman, dkk. (2005), metode MINRES merupakan salah satu dari metode subruang Krylov. Metode ini dapat diterapkan pada matriks yang simetrik dan indefinit serta matriks yang simetrik dan definit positif. Metode MINRES digunakan untuk mencari solusi aproksimasi dari sistem persamaan linear. Keuntungan dari metode MINRES adalah iterasi dihentikan dengan menguji residu dan dapat menyelesaikan matriks yang besar dan *sparse* (Paige dan Saunders, 1975).

Metode MINRES telah dijelaskan oleh Elman, dkk. (2005). Metode MINRES merupakan salah satu metode subruang Krylov yang diturunkan dari metode Lanczos. Metode Lanczos dapat menyelesaikan sistem linear yang simetrik. Berikut ini adalah definisi dari metode Lanczos. Diberikan sistem linear $A\mathbf{u} = \mathbf{F}$, dimana \mathbf{u} , A dan \mathbf{F} masing-masing merupakan nilai nodal yang belum diketahui, matriks kekakuan, dan vektor gaya. Misal \mathbf{z} merupakan sebuah vektor dengan $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{F} - A\mathbf{u}^{(0)}$ dan $\mathbf{z}^{(0)} = 0$, dimana $\mathbf{u}^{(0)}$ merupakan nilai awal. Basis orthogonal $\mathcal{K}_k(A, \mathbf{z}^{(1)})$ dapat dikonstruksi dengan

$$\mathbf{z}^{(j+1)} = A\mathbf{z}^{(j)} - d_j\mathbf{z}^{(j)} - g_j\mathbf{z}^{(j-1)}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

dimana $d_j = \langle A\mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)} \rangle$. Kunci penting di sini adalah metode Lanczos menghitung himpunan orthonormal $\{\mathbf{z}^{(j)}, j = 1, \dots, k\}$, yang merupakan sebuah basis untuk $\mathcal{K}_k(A, \mathbf{z}^{(1)})$.

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa metode MINRES dapat diterapkan pada sistem linear yang simetrik dan indefinit. Untuk menyelesaikan matriks yang indefinit, metode MINRES meminimumkan norm dari residu dengan menggunakan solusi aproksimasi. Solusi aproksimasi diperoleh dengan melakukan faktorisasi QR. Faktorisasi QR digunakan pada metode MINRES untuk menyelesaikan matriks tridiagonal yang dihasilkan oleh metode Lanczos tersebut. Kemudian,

rotasi baru pada setiap iterasi berfungsi untuk memperbarui faktorisasi QR dari iterasi sebelumnya. Rotasi dapat dihitung dengan

$$\rho_{j+1} = q_0/q_1 \text{ dan } s_{j+1} = g_{j+1}/q_1,$$

dimana ρ_j dan $s_j, j = 1, 2, 3 \dots$ adalah langkah untuk menghitung rotasi baru. Berikut ini adalah algoritma dari metode MINRES yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $A\mathbf{u} = \mathbf{F}$.

Algoritma 2.1. Metode MINRES

$$\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{0}$$

Pilih $\mathbf{u}^{(0)}$ dan tol

Hitung $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{F} - A\mathbf{u}^{(0)}$, set $g_1 = \|\mathbf{z}^{(1)}\|$ dan $\mathbf{r} = \mathbf{z}^{(1)}$

Set $\eta = g_1, s_0 = s_1 = 0, \rho_0 = \rho_1 = 1$

for $j = 1$ lakukan sampai konvergen

$$\mathbf{z}^{(j)} = \mathbf{z}^{(j)} / g_j$$

$$d_j = \langle A\mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)} \rangle$$

$$\mathbf{z}^{(j+1)} = A\mathbf{z}^{(j)} - d_j\mathbf{z}^{(j)} - g_j\mathbf{z}^{(j-1)} \quad (\text{Proses Lanczos})$$

$$g_{j+1} = \|\mathbf{z}^{(j+1)}\|$$

$$q_0 = \rho_j d_j - \rho_{j-1} s_j g_j \quad (\text{Perbarui faktorisasi QR})$$

$$q_1 = \sqrt{q_0^2 + g_{j+1}^2}$$

$$q_2 = s_j d_j + \rho_{j-1} \rho_j g_j$$

$$q_3 = s_{j-1} g_j$$

$$\rho_{j+1} = q_0/q_1, s_{j+1} = g_{j+1}/q_1 \quad (\text{Hitung rotasi baru})$$

$$\mathbf{w}^{(j+1)} = (\mathbf{z}^{(j)} - q_3\mathbf{w}^{(j-1)} - q_2\mathbf{w}^{(j)}) / q_1$$

$$\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{u}^{(j-1)} + \rho_{j+1} \eta \mathbf{w}^{(j+1)}$$

```

 $\eta = -s_{j+1}\eta$ 

 $\mathbf{r} = \mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(j)}$  (Hitung residu)

if  $\|\mathbf{r}\| \leq tol$  (Uji residu)

    iterasi dihentikan

end

end

```

dimana,

- $\mathbf{z}^{(j)}, j = 1, 2, 3 \dots$ adalah vektor Lanczos.
- ρ_j dan $s_j, j = 1, 2, 3 \dots$ digunakan untuk menghitung rotasi baru.
- \mathbf{r} adalah residu.
- $d_j = \langle \mathbf{A}\mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)} \rangle = \mathbf{z}^{(j)T} \mathbf{A}\mathbf{z}^{(j)}$.
- $\mathbf{u}^{(j)}, j = 1, 2, 3, \dots$ adalah nilai nodal yang belum diketahui.
- q_0, q_1, q_2, q_3 adalah nilai skalar pada faktorisasi QR.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab sebelumnya telah disampaikan dasar teori untuk menyelesaikan persamaan hiperbolik linear (2.1). Pada bab ini dijelaskan penyelesaian untuk persamaan hiperbolik linear (2.1) dengan menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dan SUPG. Sebelumnya, akan didefinisikan ruang elemen hingga yang digunakan pada metode elemen hingga *least-squares* dan SUPG.

3.1 Definisi Ruang Elemen Hingga

Pada subbab ini dimulai dengan mendefinisikan ruang elemen hingga $H^s(\Omega)$ pada $s \geq 0$ dengan hasil kali dalam $(\cdot, \cdot)_s$ dan norm $\|\cdot\|_s$. Jika $s = 0$, maka $H^0(\Omega)$ dapat digantikan dengan ruang fungsi *square integrable* $L^2(\Omega)$. Misal K_h merupakan partisi dari *domain* Ω yang terdiri dari daerah poligon 2D. Ruang elemen hingga untuk $k \geq 1$ didefinisikan sebagai berikut.

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_k(K), \forall K \in K_h\},$$

dimana $P_k(K)$ merupakan himpunan polinomial pada segitiga K dengan derajat tidak lebih dari k . Pada tesis ini, digunakan derajat $k = 1$. Dengan demikian, $P_1(K)$ merupakan himpunan dari segitiga linear.

3.2 Diskritisasi Menggunakan Metode Elemen Hingga *Least-Squares*

Pada subbab ini akan dibahas tentang penyelesaian persamaan hiperbolik linear (2.1) dengan menggunakan metode elemen hingga *least-squares*. Solusi aproksimasi dari persamaan hiperbolik linear (2.1) untuk $\forall u_h \in V_h$ adalah

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h, \quad (3.1)$$

dengan bentuk bilinear $a(\cdot, \cdot)$ dan linear $l(\cdot)$ adalah sebagai berikut.

$$a(u_h, v) = (\nabla \cdot \mathbf{b}u_h, \nabla \cdot \mathbf{b}v),$$

$$l(v) = (f, \nabla \cdot \mathbf{b}v).$$

dimana

$$u_h = \sum_{j=1}^{np} u_j \phi_j, \quad (3.2)$$

dan ϕ_j merupakan fungsi basis untuk V_h . Dengan menggunakan metode Galerkin, persamaan (3.1) dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, np. \quad (3.3)$$

Substitusikan persamaan (3.2) ke persamaan (3.3) sehingga diperoleh

$$\sum_{j=1}^{np} u_j a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, np. \quad (3.4)$$

Persamaan (3.4) dapat dituliskan kembali sebagai sistem persamaan linear berikut.

$$\sum_{j=1}^{np} u_j A_{i,j} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, np, \quad (3.5)$$

dengan

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, np,$$

$$F_i = \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, np.$$

Persamaan (3.5) merupakan sistem persamaan linear untuk nilai nodal yang tidak diketahui u_j atau dapat dituliskan dalam bentuk matriks $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ dengan

$$\mathbf{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{np}, \quad \mathbf{u} = \{u_j\}_{j=1}^{np}, \quad \text{dan} \quad \mathbf{F} = \{F_i\}_{i=1}^{np}.$$

3.3 Implementasi Program untuk Metode Elemen Hingga *Least-Squares*

Pada metode elemen hingga *least-square*, diperoleh $A_{i,j}$ dan F_i pada sistem persamaan linear $A\mathbf{u} = \mathbf{F}$ sebagai berikut.

$$A_{i,j} = (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j, \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i),$$

$$F_i = (f, \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i),$$

dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, np$. Sistem persamaan linear yang muncul dari metode elemen hingga *least-squares* memiliki matriks yang simetrik dan definit positif. Oleh karena itu, sistem persamaan linear ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode MINRES seperti pada algoritma 2.1. Metode elemen hingga *least-squares* dapat dirangkum dengan algoritma berikut.

Algoritma 3.1. Metode Elemen Hingga *Least-Squares*

1. Buat mesh segitiga linear pada domain Ω dan definisikan ruang fungsi *piecewise* kontinu linear V_h dengan fungsi basis $\{\phi_i\}_{i=1}^{np}$, $np > 0$.
2. Hitung matriks kekakuan A berukuran $np \times np$ dan vektor gaya \mathbf{F} berukuran $np \times 1$ dengan entri sebagai berikut.

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, np,$$

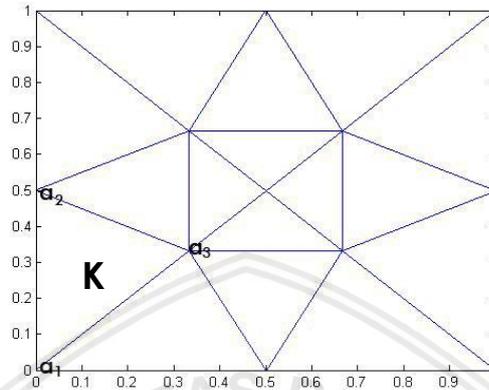
$$F_i = \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, np.$$

3. Set kondisi batas.
4. Selesaikan sistem persamaan linear $A\mathbf{u} = \mathbf{F}$.
5. Set

$$u_h = \sum_{j=1}^{np} u_j \phi_j.$$

3.3.1. Penghimpunan Matriks Kekakuan

Pada subbab ini ditunjukkan bagaimana menghitung matriks kekakuan pada 2D. Mesh segitiga linear pada *domain* $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ diberikan sebagai berikut.



Gambar 3.1. Mesh segitiga linear dengan $h = \frac{1}{2}$

Perhatikan segitiga K dengan titik $a_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Setiap titik a_i terhubung pada fungsi bentuk N_i . Berdasarkan subbab 2.3.3, fungsi basis pada segitiga K didefinisikan seperti pada persamaan (2.10) dengan konstanta $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ adalah sebagai berikut.

$$\alpha_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Lambda}, \quad \beta_i = \frac{y_j - y_k}{2\Lambda}, \quad \gamma_i = \frac{x_k - x_j}{2\Lambda},$$

dimana $i \neq j \neq k$ dan $i, j, k = 1, 2, 3$.

Misal A merupakan matriks kekakuan global pada *domain* Ω . Penghimpunan matriks kekakuan membutuhkan matriks kekakuan lokal $A_{i,j}^K$ untuk setiap segitiga K , dimana matriks kekakuan lokal $A_{i,j}^K$ berukuran 3×3 dengan entri sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A_{i,j}^K &= \int_K (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ &= \int_K (\nabla \cdot \mathbf{b}N_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}N_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\approx (b_1\beta_j + b_2\gamma_j)(b_1\beta_i + b_2\gamma_i) \int_K d\Omega,$$

$$\approx (b_1\beta_j + b_2\gamma_j)(b_1\beta_i + b_2\gamma_i) \Lambda, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

dimana $b_1 = b_1(\bar{x})$ dan $b_2 = b_2(\bar{x})$ dengan $\bar{x} = (a_1 + a_2 + a_3)/3$. Penghimpunan matriks kekakuan dapat dirangkum pada algoritma sebagai berikut.

Algoritma 3.2. Penghimpunan Matriks Kekakuan untuk Metode Elemen Hingga *Least-Squares*

1. Masukkan jumlah titik (np) dan jumlah elemen segitiga (nt) pada *domain* Ω .
2. Masukkan entri matriks (t) berukuran $3 \times nt$ yang berisi nomor indeks setiap titik dari setiap elemen segitiga pada *domain* Ω .
3. Set matriks kekakuan global A berukuran $np \times np$ dengan entri nol.
4. *for* $K = 1, 2, \dots, nt$
5. Hitung matriks kekakuan lokal $A_{i,j}^K$ dengan entri.

$$A_{i,j}^K = (b_1\beta_j + b_2\gamma_j)(b_1\beta_i + b_2\gamma_i) \Lambda, \quad i, j = 1, 2, 3.$$
6. Set lokal ke global pada setiap segitiga.

$$lok2glo_{(i)} = t(i, K) \text{ dan } lok2glo_{(j)} = t(j, K), \quad i, j = 1, 2, 3.$$
7. *for* $i = 1, 2, 3$
8. *for* $j = 1, 2, 3$
9.
$$A_{lok2glo_{(i)}, lok2glo_{(j)}} = A_{lok2glo_{(i)}, lok2glo_{(j)}} + A_{i,j}^K.$$
10. *end*
11. *end*
12. *end*

3.3.2. Penghimpunan Vektor Gaya

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang penghimpunan vektor gaya untuk metode elemen hingga *least-squares*. Vektor gaya \mathbf{F} diperoleh dengan menggunakan cara yang sama seperti pada penghimpunan matriks kekakuan. Misal \mathbf{F} merupakan vektor gaya global pada *domain* Ω . Penghimpunan vektor gaya membutuhkan vektor gaya lokal F_i^K untuk setiap segitiga K , dimana vektor gaya lokal berukuran 3×1 dengan entri sebagai berikut.

$$\begin{aligned} F_i^K &= \int_K f \nabla \cdot \mathbf{b} \phi_i d\Omega, \quad i = 1,2,3, \\ &= \int_K f \nabla \cdot \mathbf{b} N_i d\Omega, \quad i = 1,2,3, \\ &\approx (b_1 \beta_i + b_2 \gamma_i) f(a_i) \int_K d\Omega, \\ &\approx f(a_i) (b_1 \beta_i + b_2 \gamma_i) \Lambda, \quad i = 1,2,3. \end{aligned}$$

Fungsi f menghasilkan nilai konstanta untuk setiap titik a_i . Penghimpunan vektor gaya dapat dirangkum pada algoritma sebagai berikut.

Algoritma 3.3. Penghimpunan Vektor Gaya untuk Metode Elemen Hingga *Least-Squares*

1. Masukkan jumlah titik (np) dan jumlah elemen segitiga (nt) pada *domain* Ω .
2. Masukkan entri matriks (t) berukuran $3 \times nt$ yang berisi nomor indeks setiap titik dari setiap elemen segitiga pada *domain* Ω .
3. Set vektor gaya global \mathbf{F} berukuran $np \times 1$ dengan entri nol.
4. *for* $K = 1, 2, \dots, nt$
5. Hitung vektor gaya lokal F_i^K dengan entri.

$$F_i^K = f(a_i) (b_1 \beta_i + b_2 \gamma_i) \Lambda, \quad i = 1,2,3.$$

6. Set lokal ke global pada setiap segitiga.

$$\text{lok2glo}_{(i)} = t(i, K), \quad i = 1, 2, 3.$$

7. for $i = 1, 2, 3$

8. $F_{\text{lok2glo}_{(i)}} = F_{\text{lok2glo}_{(i)}} + F_i^K.$

9. end

10. end

3.4 Diskritisasi Menggunakan Metode Elemen Hingga SUPG

Pada subbab ini dijelaskan tentang penyelesaian persamaan hiperbolik linear (2.1) dengan menggunakan metode elemen hingga SUPG. Solusi aproksimasi dari persamaan hiperbolik linear (2.1) untuk $\forall u_h \in V_h$ adalah sebagai berikut.

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h, \quad (3.6)$$

dimana bentuk bilinear $a(., .)$ dan linear $l(.)$ adalah

$$a(u_h, v) = (\nabla \cdot \mathbf{b}u_h, v) + \delta(\nabla \cdot \mathbf{b}u_h, \nabla \cdot \mathbf{b}v),$$

$$l(v) = (f, v) + \delta(f, \nabla \cdot \mathbf{b}v),$$

dengan

$$u_h = \sum_{j=1}^{np} u_j \phi_j, \quad (3.7)$$

dan ϕ_j merupakan fungsi basis untuk V_h . Pada tesis ini, digunakan dua jenis

parameter kestabilan δ , yaitu $\delta_1 = \frac{h}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = \frac{h}{\max(b_1, b_2)}$ seperti yang ada pada Larson

dan Bengzon (2010) dan $\delta_2 = \frac{h}{2\|\mathbf{b}\|_2} = \frac{h}{2\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ seperti yang ada pada Bochev dan

Choi (2001).

Dengan menggunakan metode Galerkin, persamaan (3.6) dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, np. \quad (3.8)$$

Substitusikan persamaan (3.7) ke dalam persamaan (3.8) sehingga diperoleh

$$\sum_{j=1}^{np} u_j a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, np,$$

atau dapat dituliskan sebagai sistem persamaan linear berikut.

$$\sum_{j=1}^{np} u_j A_{i,j} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, np, \quad (3.9)$$

dengan

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j) \phi_i d\Omega + \delta \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, np,$$

$$F_i = \int_{\Omega} f \phi_i d\Omega + \delta \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, np.$$

Persamaan (3.9) merupakan sistem persamaan linear untuk nilai nodal yang tidak diketahui u_j atau dapat dituliskan dalam bentuk matriks $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ dengan $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{np}$, $\mathbf{u} = \{u_j\}_{j=1}^{np}$, dan $\mathbf{F} = \{F_i\}_{i=1}^{np}$.

3.5 Implementasi Program untuk Metode Elemen Hingga SUPG

Pada metode elemen hingga SUPG, diperoleh $A_{i,j}$ dan F_i pada sistem persamaan linear $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ sebagai berikut.

$$A_{i,j} = (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j, \phi_i) + \delta(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j, \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i),$$

$$F_i = (f, \phi_i) + \delta(f, \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i),$$

dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, np$. Sistem linear yang muncul pada metode elemen hingga SUPG memiliki matriks yang tidak simetrik dan definit negatif. Oleh karena itu, matriks ini diselesaikan dengan menggunakan metode langsung. Berikut ini adalah algoritma untuk metode elemen hingga SUPG.

Algoritma 3.4. Metode Elemen Hingga SUPG

1. Buat mesh elemen segitiga dan definisikan ruang *piecewise* kontinu linear V_h dengan fungsi basis $\{\phi_i\}_{i=1}^{np}$, $np > 0$.
2. Hitung matriks kekakuan A ukuran $np \times np$ dan vektor gaya F ukuran $np \times 1$ dengan entri sebagai berikut.

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)\phi_i d\Omega + \delta \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, np,$$

$$F_i = \int_{\Omega} f\phi_i d\Omega + \delta \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, np,$$

dengan $\delta_1 = \frac{h}{\|\mathbf{b}\|_{\infty}}$ dan $\delta_2 = \frac{h}{2\|\mathbf{b}\|_2}$.

3. Set kondisi batas.
4. Selesaikan sistem persamaan linear $A\mathbf{u} = \mathbf{F}$.
5. Set

$$u_h = \sum_{j=1}^{np} u_j \phi_j.$$

3.5.1. Penghimpunan Matriks Kekakuan

Pada bagian ini dijelaskan penghimpunan matriks kekakuan untuk metode elemen hingga SUPG. Matriks kekakuan global A diperoleh dari penghimpunan matriks kekakuan lokal $A_{i,j}^K$, dimana matriks kekakuan lokal $A_{i,j}^K$ berukuran 3×3 . Kemudian, fungsi bentuk N_i pada matriks kekakuan lokal $A_{i,j}^K$ dapat diselesaikan dengan menggunakan integral numerik seperti pada persamaan (2.11) sehingga diperoleh entri

$$A_{i,j}^K = \int_K (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)\phi_i d\Omega + \delta \int_K (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
&= \int_K (\nabla \cdot \mathbf{b}N_j)N_i d\Omega + \delta \int_K (\nabla \cdot \mathbf{b}N_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}N_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \\
&\approx (b_1\beta_j + b_2\gamma_j) \int_K N_i d\Omega + \delta (b_1\beta_j + b_2\gamma_j)(b_1\beta_i + b_2\gamma_i) \int_K d\Omega, \\
&\approx (b_1\beta_j + b_2\gamma_j) \frac{\Lambda}{3} + \delta (b_1\beta_j + b_2\gamma_j)(b_1\beta_i + b_2\gamma_i) \Lambda, \quad i, j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

dimana $b_1 = b_1(\bar{x})$ dan $b_2 = b_2(\bar{x})$ dengan $\bar{x} = (a_1 + a_2 + a_3)/3$. Penghimpunan matriks kekakuan dapat dirangkum pada algoritma sebagai berikut.

Algoritma 3.5. Penghimpunan Matriks Kekakuan untuk Metode Elemen Hingga SUPG

1. Masukkan jumlah titik (np) dan jumlah elemen segitiga (nt) pada *domain* Ω .
2. Masukkan entri matriks (t) berukuran $3 \times nt$ yang berisi nomor indeks setiap titik dari setiap elemen segitiga pada *domain* Ω .
3. Set matriks kekakuan global A berukuran $np \times np$ dengan entri nol.
4. *for* $K = 1, 2, \dots, nt$
5. Hitung matriks kekakuan lokal $A_{i,j}^K$ dengan entri.
$$A_{i,j}^K = (b_1\beta_j + b_2\gamma_j) \frac{\Lambda}{3} + \delta (b_1\beta_j + b_2\gamma_j)(b_1\beta_i + b_2\gamma_i) \Lambda, \quad i, j = 1, 2, 3.$$
6. Set lokal ke global pada setiap segitiga.
$$lok2glo_{(i)} = t(i, K) \text{ dan } lok2glo_{(j)} = t(j, K), \quad i, j = 1, 2, 3.$$
7. *for* $i = 1, 2, 3$
8. *for* $j = 1, 2, 3$
9. $A_{lok2glo_{(i)}, lok2glo_{(j)}} = A_{lok2glo_{(i)}, lok2glo_{(j)}} + A_{i,j}^K.$
10. *end*
11. *end*
12. *end*

3.5.2. Penghimpunan Vektor Gaya

Pada bagian ini akan dibahas tentang penghimpunan vektor gaya untuk metode elemen hingga SUPG. Misal \mathbf{F} merupakan vektor gaya pada *domain* Ω . Vektor gaya untuk metode elemen hingga SUPG diperoleh dari penghimpunan vektor gaya lokal F_i^K dengan ukuran 3×1 . Fungsi bentuk N_i pada vektor gaya lokal F_i^K diselesaikan dengan menggunakan persamaan (2.11) sehingga diperoleh entri sebagai berikut.

$$\begin{aligned} F_i^K &= \int_K f \phi_i d\Omega + \delta \int_K f \nabla \cdot \mathbf{b} \phi_i d\Omega, \quad i = 1,2,3, \\ &= \int_K f N_i d\Omega + \delta \int_K f \nabla \cdot \mathbf{b} N_i d\Omega, \quad i = 1,2,3, \\ &\approx f(a_i) \int_K N_i d\Omega + \delta (b_1 \beta_i + b_2 \gamma_i) f(a_i) \int_K d\Omega, \\ &\approx \frac{1}{3} f(a_i) \Lambda + \delta f(a_i) (b_1 \beta_i + b_2 \gamma_i) \Lambda, \quad i = 1,2,3, \end{aligned}$$

Fungsi $f(a_i)$ merupakan nilai konstanta untuk setiap titik a_i . Berikut ini adalah algoritma penghimpunan vektor gaya untuk metode elemen hingga SUPG.

Algoritma 3.6. Penghimpunan Vektor Gaya untuk Metode Elemen Hingga SUPG

1. Masukkan jumlah titik (np) dan jumlah elemen segitiga (nt) pada *domain* Ω .
2. Masukkan entri matriks (t) berukuran $3 \times nt$ yang berisi nomor indeks setiap titik dari setiap elemen segitiga pada *domain* Ω .
3. Set vektor gaya global \mathbf{F} berukuran $np \times 1$ dengan entri nol.
4. for $K = 1, 2, \dots, nt$
5. Hitung vektor gaya lokal F_i^K dengan entri.

$$F_i^K = \frac{1}{3} f(a_i) \Lambda + \delta f(a_i) (b_1 \beta_i + b_2 \gamma_i) \Lambda, \quad i = 1,2,3.$$

6. Set lokal ke global pada setiap segitiga.

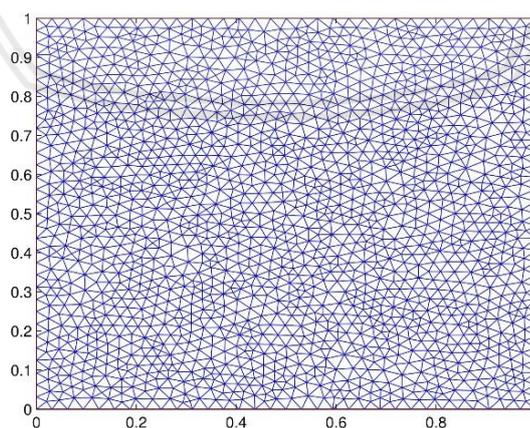
$$lok2glo_{(i)} = t(i, K), \quad i = 1, 2, 3.$$

7. *for* $i = 1, 2, 3$
8. $F_{lok2glo_{(i)}} = F_{lok2glo_{(i)}} + F_i^K.$
9. *end*
10. *end*

3.6 Simulasi Numerik

Pada bagian ini ditunjukkan simulasi numerik untuk persamaan hiperbolik linear (2.1). Persamaan hiperbolik linear (2.1) memiliki solusi diskontinu ketika kondisi batas adalah diskontinu. Oleh karena itu, simulasi numerik dibagi menjadi dua, yakni simulasi numerik untuk kasus dengan solusi kontinu dan diskontinu. Simulasi numerik diselesaikan pada $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ dengan menggunakan elemen 2D berupa elemen segitiga linear seperti pada Gambar 3.2.

Ukuran mesh untuk *domain* Ω diestimasi dengan menggunakan lebar grid $h = 2^{-k}, k = 3, 4, 5, 6, 7$. Mesh yang digunakan untuk semua simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Mesh elemen segitiga linear dengan lebar grid $h = 2^{-5}$

Berikut ini adalah pembahasan hasil numerik untuk kasus dengan solusi kontinu dan diskontinu menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dengan MINRES (LSM), SUPG dengan $\delta_1 = \frac{h}{\|b\|_\infty}$ (SUPG1) seperti yang digunakan Larson dan Bengzon (2010), dan SUPG dengan $\delta_2 = \frac{h}{2\|b\|_2}$ (SUPG2) seperti yang digunakan Bochev dan Choi (2001).

3.6.1 Simulasi Numerik untuk Kasus dengan Solusi Kontinu

3.6.1.1. Uji Numerik 1

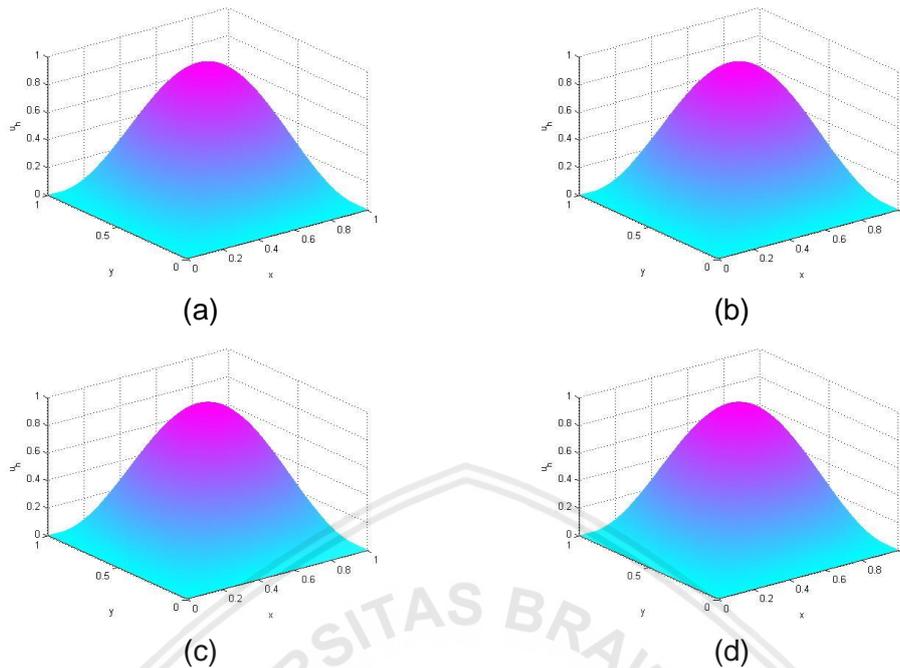
Misal *domain* $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ dan vektor konveksi adalah $b(1,1)$. Solusi eksak untuk uji numerik 1 diberikan sebagai berikut.

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (3.10)$$

Pada kasus ini, kondisi batas yang diberikan merupakan kondisi batas homogen *dirichlet*, kondisi batas *inflow* adalah $\Gamma_- = \{x = 0, y \in (0,1)\} \cup \{y = 0, x \in (0,1)\}$, dan dipilih fungsi f sedemikian hingga $u(x, y)$ pada persamaan (3.10) merupakan solusi eksak. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan *error* dan plot solusi masing-masing ditunjukkan pada Tabel 3.1 dan Gambar 3.3.

Tabel 3.1. Perbandingan *error* untuk Uji Numerik 1

No.	h	<i>Error</i> untuk LSM	<i>Error</i> untuk SUPG1	<i>Error</i> untuk SUPG2
1.	2^{-3}	1.6000e – 02	9.4539e – 03	6.6010e – 03
2.	2^{-4}	3.8336e – 03	2.0974e – 03	2.1215e – 03
3.	2^{-5}	1.0392e – 03	4.6781e – 04	4.4508e – 04
4.	2^{-6}	2.6089e – 04	1.2998e – 04	1.2585e – 04
5.	2^{-7}	6.9362e – 05	3.6631e – 05	3.4291e – 05



Gambar 3.3. Solusi Uji Numerik 1 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2

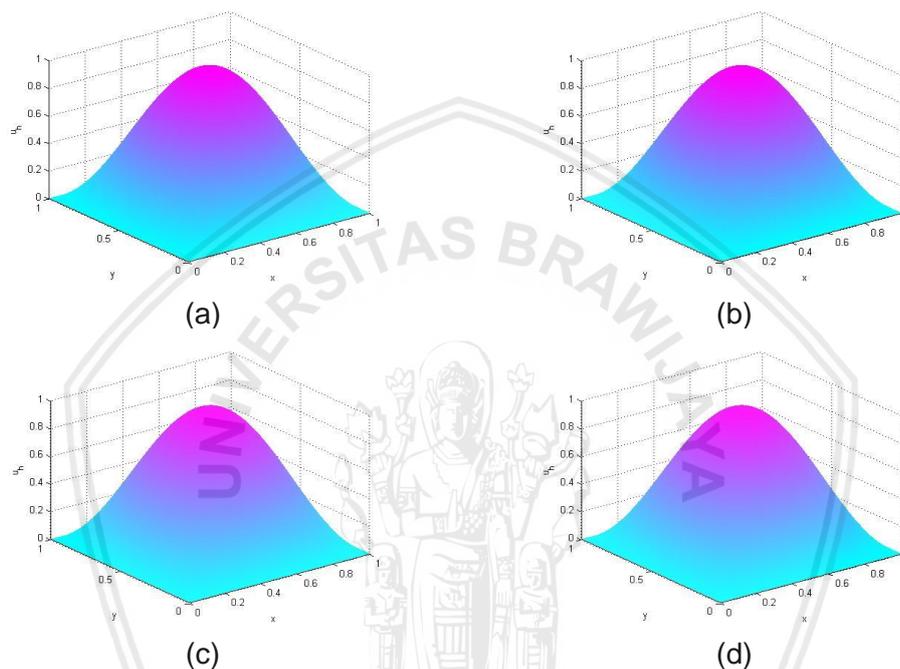
Gambar 3.3 menunjukkan plot solusi eksak dan hasil simulasi numerik untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$. Berdasarkan Gambar 3.3(b), 3.3(c), dan 3.3(d), dapat dilihat bahwa plot solusi numerik untuk masing-masing metode bebas dari osilasi dan sama dengan plot solusi eksak pada Gambar 3.3(a). Selanjutnya, jika dilihat dari Tabel 3.1, hasil *error* SUPG2 lebih kecil dari hasil *error* SUPG1 dan LSM.

3.6.1.2. Uji Numerik 2

Pada bagian ini dibahas kasus yang sama seperti pada uji numerik 1 tetapi dengan vektor konveksi $\mathbf{b}(1, -1)$. Sedangkan, kondisi batas *inflow* untuk uji numerik 2 adalah $\Gamma_- = \{x = 0, y \in (0, 1)\} \cup \{y = 1, x \in (0, 1)\}$. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan *error* dan plot solusi masing-masing ditunjukkan pada Tabel 3.2 dan Gambar 3.4.

Tabel 3.2. Perbandingan *error* untuk Uji Numerik 2

No.	h	<i>Error</i> untuk LSM	<i>Error</i> untuk SUPG1	<i>Error</i> untuk SUPG2
1.	2^{-3}	$1.5397e - 02$	$1.0531e - 02$	$8.0622e - 03$
2.	2^{-4}	$3.6770e - 03$	$1.8991e - 03$	$1.9861e - 03$
3.	2^{-5}	$1.0301e - 03$	$4.6944e - 04$	$4.5646e - 04$
4.	2^{-6}	$2.6139e - 04$	$1.2616e - 04$	$1.2563e - 04$
5.	2^{-7}	$7.0335e - 05$	$3.7498e - 05$	$3.4453e - 05$

**Gambar 3.4.** Solusi Uji Numerik 2 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2

Plot solusi eksak dan hasil simulasi numerik untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$ ditunjukkan pada Gambar 3.4. Simulasi numerik untuk masing-masing metode yang terlihat pada Gambar 3.4(b), 3.4(c), dan 3.4(d) menghasilkan plot solusi yang bebas dari osilasi. Apabila dibandingkan dengan Gambar 3.4(a), simulasi numerik untuk ketiga metode menghasilkan plot solusi numerik yang sama dengan solusi eksaknya. Kemudian, jika dilihat dari Tabel 3.2, hasil *error* SUPG2 lebih kecil dibandingkan dengan hasil *error* SUPG1 dan LSM.

3.6.1.3. Uji Numerik 3

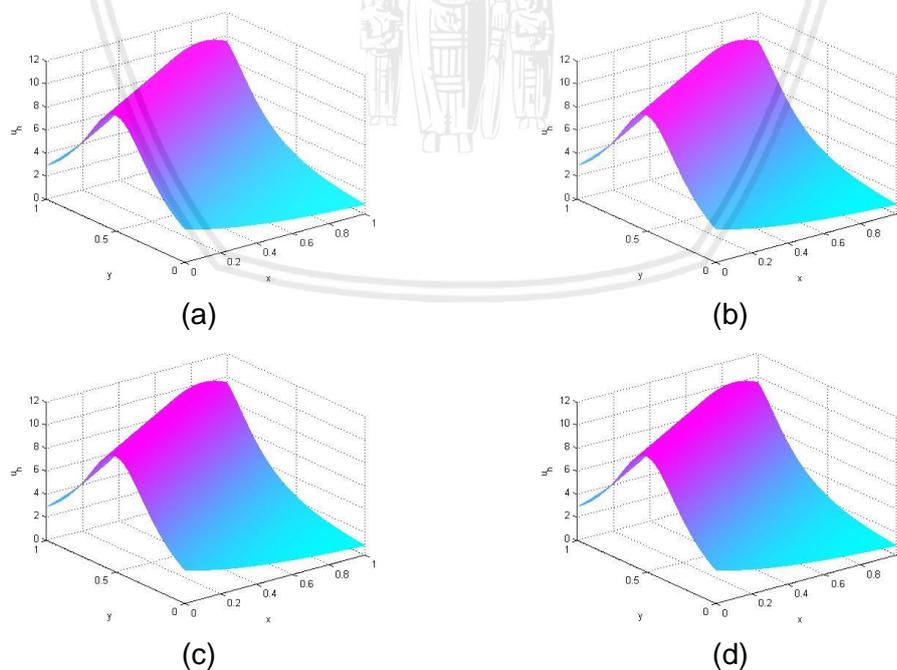
Misal $\Omega = (0,1)^2$ dan vektor konveksi adalah $\mathbf{b}(b_1, b_2) = \mathbf{b}(\cos \theta, \sin \theta)$ dengan $\theta = \pi/6$. Solusi eksak diberikan sebagai berikut.

$$u(x, y) = \frac{1}{(y - mx - 0.5)^2 + 0.1}, \quad (3.11)$$

dimana $m = b_2/b_1$. Pada kasus ini, $f = 0$ memenuhi persamaan (3.11). Hasil simulasi numerik berupa perbandingan *error* dan plot solusi masing-masing ditunjukkan pada Tabel 3.3 dan Gambar 3.5.

Tabel 3.3. Perbandingan *error* untuk Uji Numerik 3

No.	h	<i>Error</i> untuk LSM	<i>Error</i> untuk SUPG1	<i>Error</i> untuk SUPG2
1.	2^{-3}	1.6789e - 01	1.5087e - 01	1.3784e - 01
2.	2^{-4}	4.4709e - 02	3.6116e - 02	3.2125e - 02
3.	2^{-5}	1.5174e - 02	9.3889e - 03	8.5089e - 03
4.	2^{-6}	3.8399e - 03	2.2204e - 03	2.1128e - 03
5.	2^{-7}	1.0483e - 03	5.3860e - 04	5.1329e - 04



Gambar 3.5. Solusi Uji Numerik 3 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2

Gambar 3.5 menunjukkan plot solusi eksak dan hasil simulasi numerik untuk semua metode dengan lebar grid $h = 2^{-5}$. Simulasi numerik untuk masing-masing metode yang terlihat pada Gambar 3.5(b), 3.5(c), dan 3.5(d) menghasilkan plot solusi yang bebas dari osilasi dan sama dengan solusi eksaknya pada Gambar 3.5(a). Berdasarkan perbandingan *error* untuk uji numerik 3 pada Tabel 3.3, dapat dilihat bahwa SUPG2 menghasilkan *error* yang lebih kecil daripada *error* yang dihasilkan SUPG1 dan LSM.

3.6.1.4. Uji Numerik 4

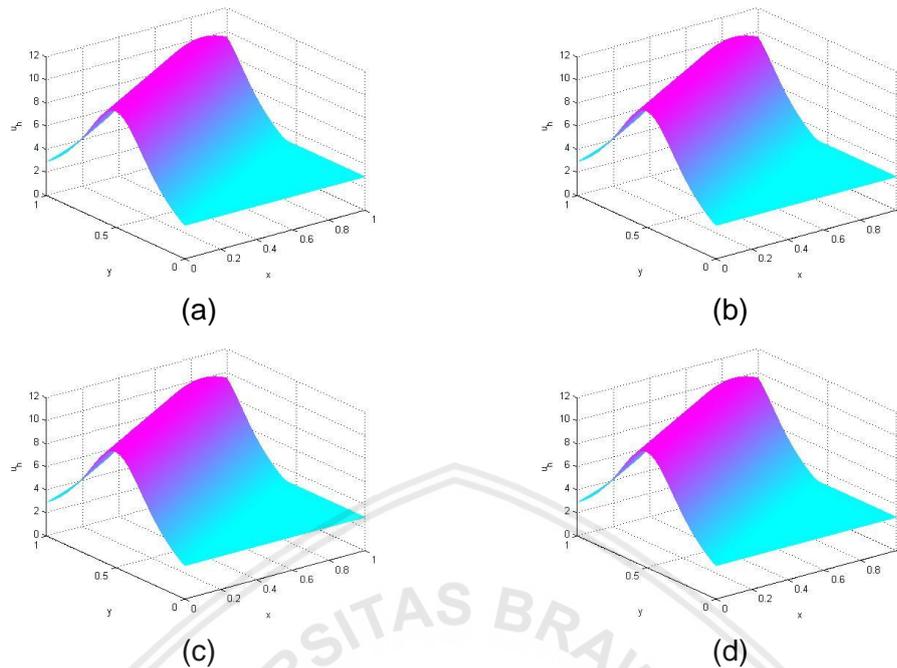
Pada uji numerik 4 akan dibahas kasus yang sama seperti pada uji numerik 3 tetapi solusi eksak yang diberikan adalah sebagai berikut.

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(y - mx - 0.5)^2 + 0.1}, & \text{jika } y \geq mx, \\ \frac{20}{7}, & \text{jika } y < mx, \end{cases} \quad (3.12)$$

dengan $m = b_2/b_1$. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan *error* dan plot solusi masing-masing ditunjukkan pada Tabel 3.4 dan Gambar 3.6 berikut.

Tabel 3.4. Perbandingan *error* untuk Uji Numerik 4

No.	h	<i>Error</i> untuk LSM	<i>Error</i> untuk SUPG1	<i>Error</i> untuk SUPG2
1.	2^{-3}	1.8099e – 01	1.6010e – 01	1.4478e – 01
2.	2^{-4}	5.1353e – 02	4.1216e – 02	3.6035e – 02
3.	2^{-5}	2.2329e – 02	1.4067e – 02	1.1885e – 02
4.	2^{-6}	1.0020e – 02	5.0500e – 03	4.0633e – 03
5.	2^{-7}	5.4454e – 03	2.1910e – 03	1.6844e – 03



Gambar 3.6. Solusi Uji Numerik 4 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ untuk (a) Eksak, (b) LSM, (c) SUPG1, dan (d) SUPG2

Plot solusi eksak dan hasil simulasi numerik untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$ ditunjukkan pada Gambar 3.6. Gambar 3.6(b), 3.6(c), dan 3.6(d) menunjukkan bahwa plot solusi numerik untuk semua metode bebas dari osilasi dan sama dengan solusi eksak pada Gambar 3.6(a). Berdasarkan Tabel 3.4, dapat dilihat bahwa hasil *error* dari SUPG2 lebih kecil daripada hasil *error* dari SUPG1 dan LSM. Hal ini masih sama dengan kesimpulan dari uji numerik sebelumnya. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa SUPG2 dapat memberikan hasil *error* yang relatif lebih kecil untuk kasus dengan solusi kontinu.

3.6.2 Simulasi Numerik untuk Kasus dengan Solusi Diskontinu

3.6.2.1. Uji Numerik 5

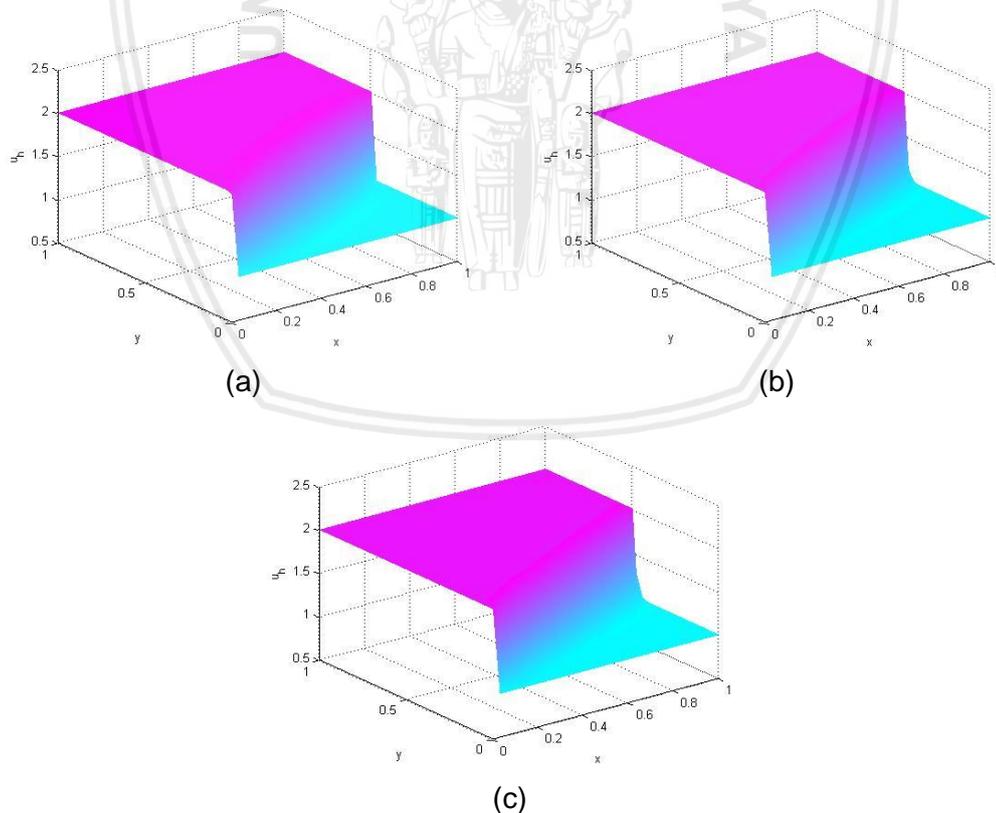
Misal $\Omega = (0,1)^2$ dan vektor konveksi adalah $\mathbf{b}(b_1, b_2) = \mathbf{b}(1, \tan 35^\circ)$. Kondisi batas *inflow* adalah $\Gamma_- = \{0\} \times \{(0,1)\} \cup \{(0,1)\} \times \{0\}$. Sedangkan, data kondisi batas diberikan sebagai berikut.

$$g(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{jika } x = 0, y \in (0,1), \\ 1, & \text{jika } y = 0, x \in (0,1). \end{cases} \quad (3.13)$$

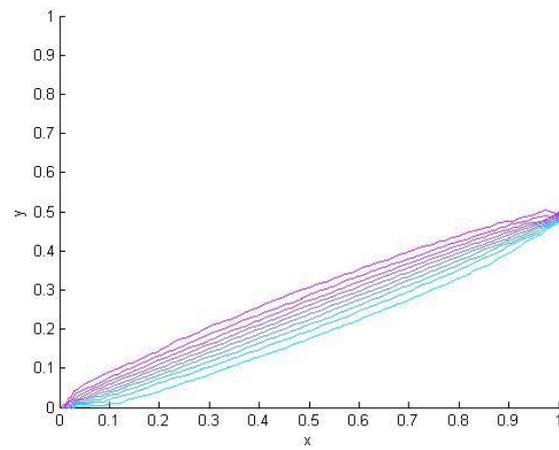
Fungsi *streamline* dihitung dari persamaan garis lurus yang melalui titik (0,0), sehingga diperoleh $y = mx$, dimana $m = b_2/b_1$. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan u_{\max} dan u_{\min} , plot solusi, kontur, dan profil vertikal pada $x = 0.5$ masing-masing ditunjukkan pada Tabel 3.5, Gambar 3.7, Gambar 3.8, Gambar 3.9, dan Gambar 3.10 berikut.

Tabel 3.5. Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 5 dengan $h = 2^{-5}$

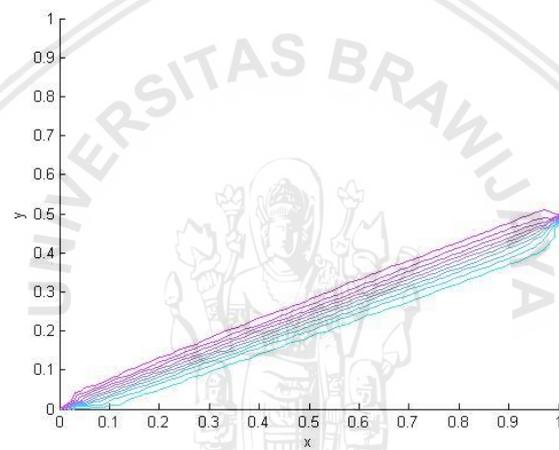
	u_{\max}	u_{\min}
Eksak	2.00	1.00
LSM	2.0424	0.9717
SUPG1	2.0859	0.9668
SUPG2	2.1040	0.9681



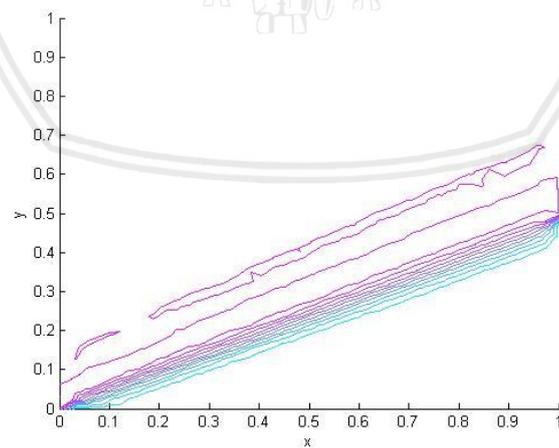
Gambar 3.7. Solusi Uji Numerik 5 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)

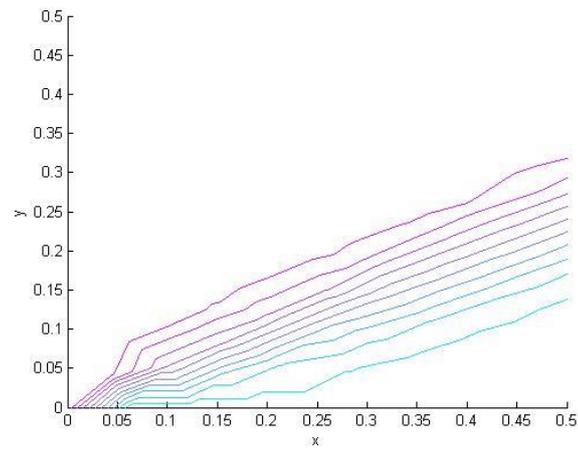


(b)

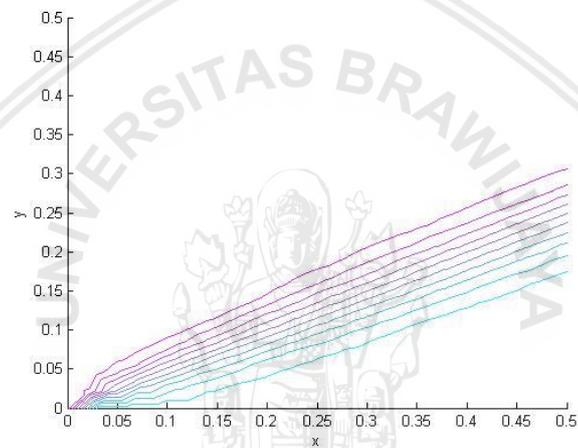


(c)

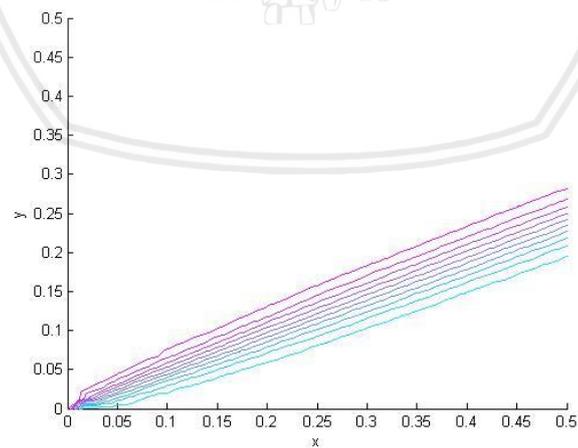
Gambar 3.8. Plot kontur Uji Numerik 5 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)

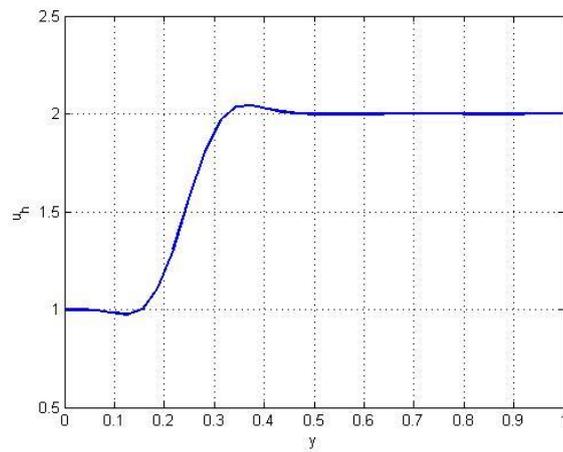


(b)

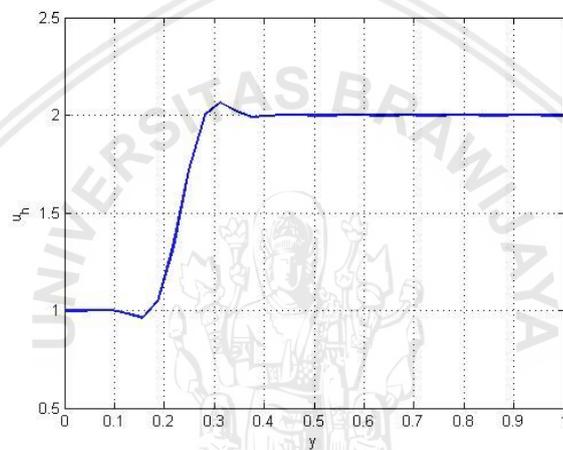


(c)

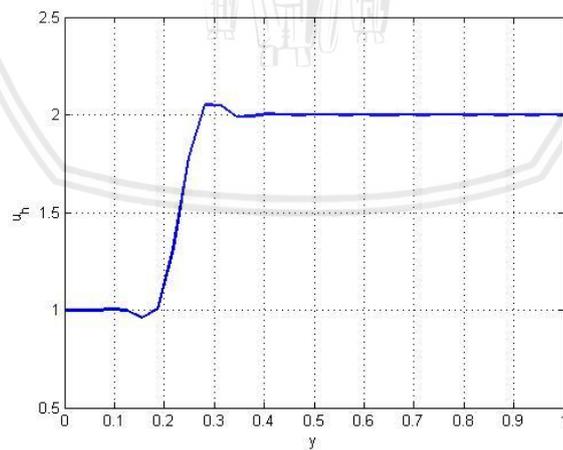
Gambar 3.9. Plot kontur Uji Numerik 5 untuk LSM dengan lebar grid
(a) $h = 2^{-4}$, (b) $h = 2^{-5}$, dan (c) $h = 2^{-6}$



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.10. Profil vertikal Uji Numerik 5 pada $x = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2

Gambar 3.7 menunjukkan plot solusi numerik untuk semua metode dengan lebar grid $h = 2^{-5}$. Berdasarkan Gambar 3.7(a), dapat dilihat bahwa LSM menghasilkan plot solusi yang bebas dari osilasi. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang terlihat pada Gambar 3.7(b) dan 3.7(c) menghasilkan plot solusi yang berosilasi. Selanjutnya, jika dilihat dari plot kontur untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$, maka diperoleh plot kontur yang halus untuk LSM pada Gambar 3.8(a). Berbeda dengan Gambar 3.8(a), pada Gambar 3.8(b) dan 3.8(c), dapat ditunjukkan bahwa SUPG1 dan SUPG2 menghasilkan plot kontur yang berosilasi.

Gambar 3.9 menunjukkan plot kontur untuk LSM dengan h berbeda. Berdasarkan Gambar 3.9(a), dapat dilihat bahwa LSM dengan $h = 2^{-4}$ menghasilkan plot kontur yang kasar. Apabila dibandingkan dengan Gambar 3.9(b), LSM dengan $h = 2^{-5}$ menghasilkan plot kontur yang masih relatif kasar. Sedangkan, Gambar 3.9(c) menunjukkan bahwa LSM dengan $h = 2^{-6}$ menghasilkan plot kontur yang halus. Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa jika h semakin kecil, maka plot konturnya semakin halus.

Tabel 3.5 menunjukkan bahwa LSM menghasilkan nilai u_{\max} dan u_{\min} yang lebih mendekati nilai eksak daripada SUPG1 dan SUPG2. Nilai u_{\max} dan u_{\min} yang dihasilkan oleh LSM ditunjukkan dengan nilai minimum yang dicetak tebal. Berdasarkan profil vertikal untuk semua metode pada $x = 0.5$ dengan $h = 2^{-5}$ menunjukkan bahwa solusi untuk semua metode dihasilkan dari proses *smoothing*. Pada Gambar 3.10(a), dapat terlihat bahwa LSM menghasilkan solusi yang halus. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang terlihat pada Gambar 3.10(b) dan 3.10(c) menghasilkan solusi yang berosilasi.

3.6.2.2. Uji Numerik 6

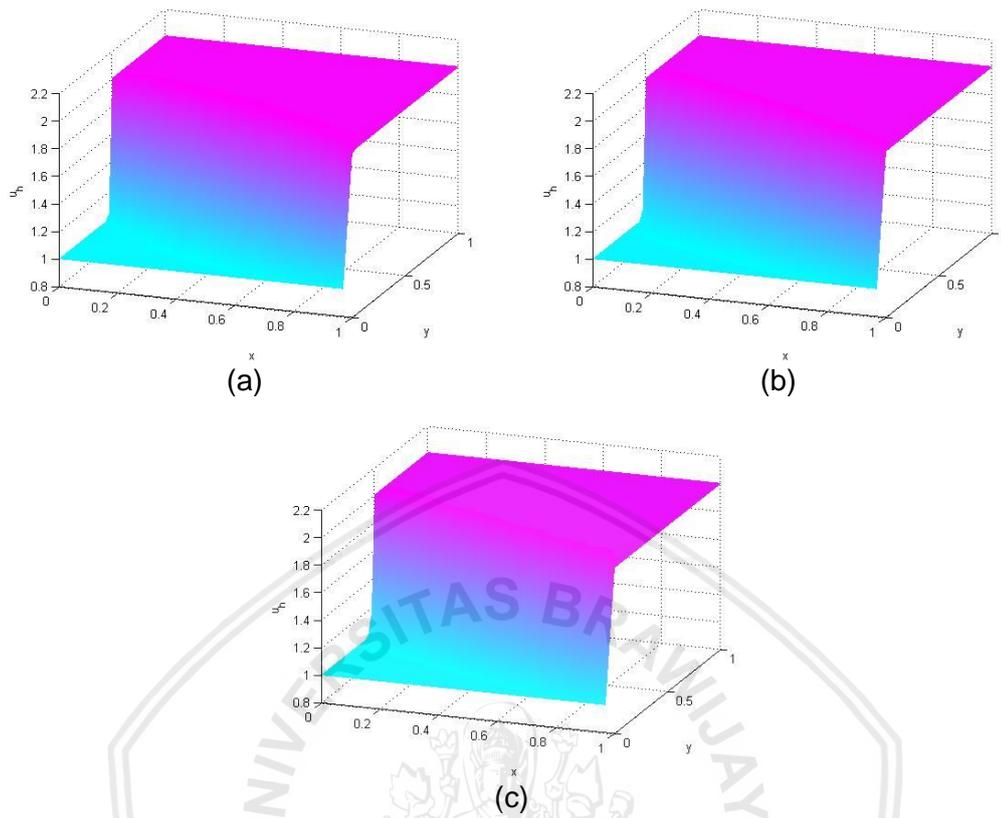
Misal $\Omega = (0,1)^2$ dan vektor konveksi adalah $\mathbf{b}(b_1, b_2) = \mathbf{b}(-1, \tan 35^\circ)$. Kondisi batas *inflow* adalah $\Gamma_- = \{1\} \times \{(0,1)\} \cup \{(0,1)\} \times \{0\}$. Sedangkan, data kondisi batas diberikan sebagai berikut.

$$g(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{jika } x = 1, y \in (0,1), \\ 1, & \text{jika } y = 0, x \in (0,1). \end{cases} \quad (3.14)$$

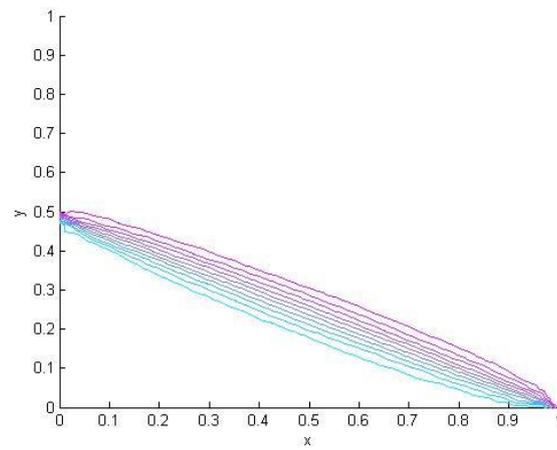
Pada uji numerik 6, fungsi *streamline* dihitung dari persamaan garis lurus yang melalui titik $(1,0)$, sehingga diperoleh $y = m(x - 1)$, dimana $m = b_2/b_1$. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan u_{\max} dan u_{\min} , plot solusi, kontur, profil vertikal pada $x = 0.5$ masing-masing ditunjukkan pada Tabel 3.6, Gambar 3.11, Gambar 3.12, dan Gambar 3.13 sebagai berikut.

Tabel 3.6. Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 6 dengan $h = 2^{-5}$

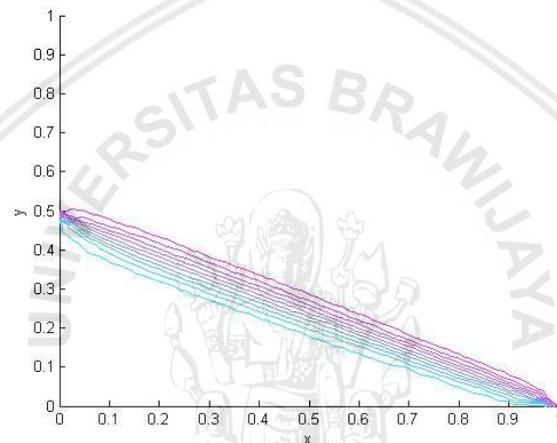
	u_{\max}	u_{\min}
Eksak	2.00	1.00
LSM	2.0413	0.9697
SUPG1	2.0547	0.9639
SUPG2	2.0942	0.9655



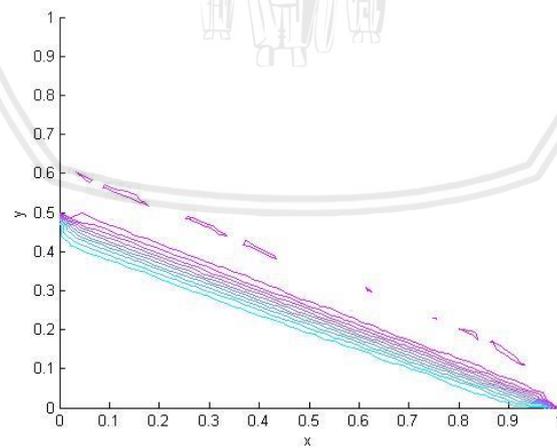
Gambar 3.11 Solusi Uji Numerik 6 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)

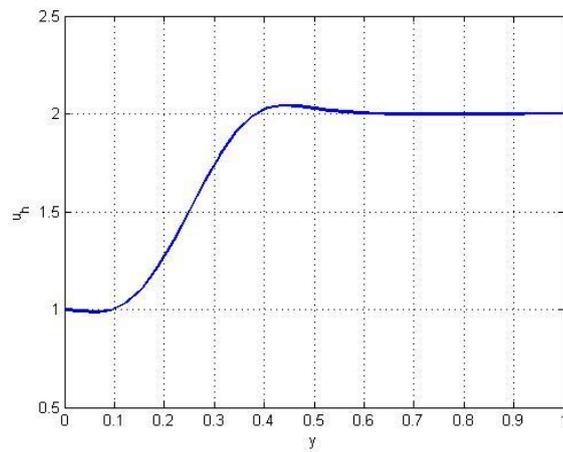


(b)

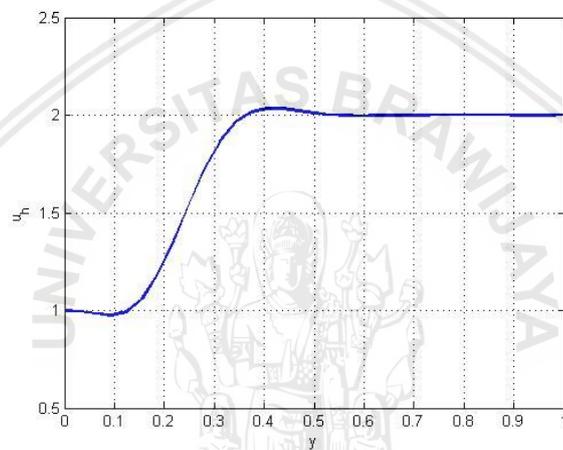


(c)

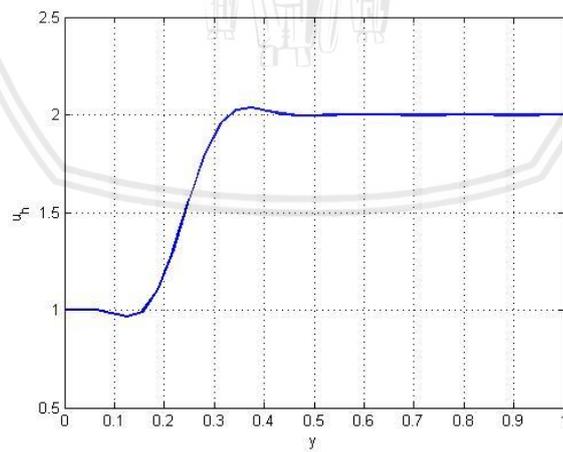
Gambar 3.12. Plot kontur Uji Numerik 6 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.13. Profil vertikal Uji Numerik 6 pada $x = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2

Plot solusi numerik untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$ ditunjukkan pada Gambar 3.11. Plot solusi numerik untuk LSM yang terlihat pada Gambar 3.11(a) menghasilkan solusi yang bebas dari osilasi. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang terlihat pada Gambar 3.11(b) dan 3.11(c) menghasilkan plot solusi yang berosilasi. Apabila dilihat pada Gambar 3.12, ditunjukkan plot kontur untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$. Berdasarkan Gambar 3.12(a), terlihat bahwa LSM menghasilkan plot kontur yang bebas dari osilasi. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang terlihat pada Gambar 3.12(b) dan 3.12(c) menghasilkan plot kontur yang berosilasi.

Berdasarkan Tabel 3.6, dapat dilihat bahwa LSM menghasilkan nilai u_{\max} dan u_{\min} yang lebih mendekati nilai eksak daripada SUPG1 dan SUPG2. Nilai minimum yang dicetak tebal pada Tabel 3.6 menunjukkan nilai u_{\max} dan u_{\min} yang dihasilkan oleh LSM. Selanjutnya, jika dilihat dari profil vertikal untuk semua metode pada $x = 0.5$ dengan $h = 2^{-5}$, dapat dijelaskan bahwa solusi untuk ketiga metode dihasilkan dari proses *smoothing*. Berdasarkan Gambar 3.13(a) menunjukkan bahwa LSM menghasilkan solusi yang halus. Berbeda dengan Gambar 3.13(a), pada Gambar 3.13(b) dan 3.13(c), terlihat bahwa SUPG1 dan SUPG2 menghasilkan solusi yang berosilasi.

3.6.2.3. Uji Numerik 7

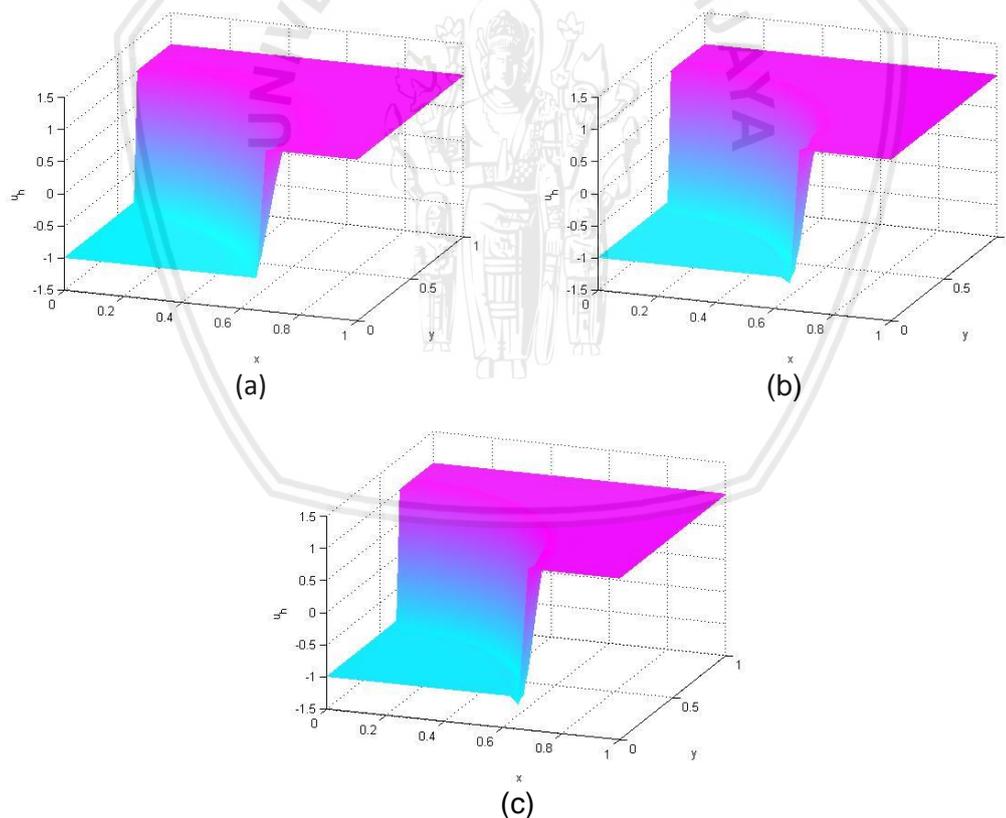
Misal diberikan vektor konveksi $\mathbf{b}(-y, x)$ dan kondisi batas *inflow* adalah $\Gamma_- = \{1\} \times \{(0,1)\} \cup \{(0,1)\} \times \{0\}$ serta data kondisi batas adalah

$$g(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{jika } y = 0, 0 < x < \frac{43}{64}, \\ 1, & \text{jika } y = 0, \frac{43}{64} \leq x < 1, \\ 1, & \text{jika } x = 1, y \in (0,1). \end{cases} \quad (3.15)$$

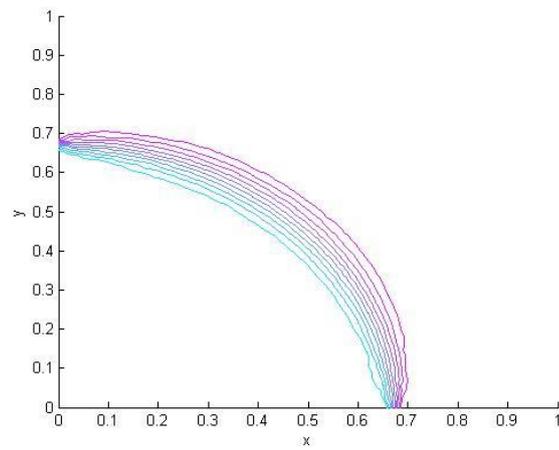
Fungsi *streamline* pada uji ini diperoleh dari persamaan lingkaran pada titik pusat (0,0) dengan jari-jari $4^3/64$. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan u_{\max} dan u_{\min} , plot solusi, kontur, dan profil vertikal pada $y = 0.5$ masing-masing dapat disajikan pada Tabel 3.7, Gambar 3.14, Gambar 3.15, dan Gambar 3.16 sebagai berikut.

Tabel 3.7. Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 7 dengan $h = 2^{-5}$

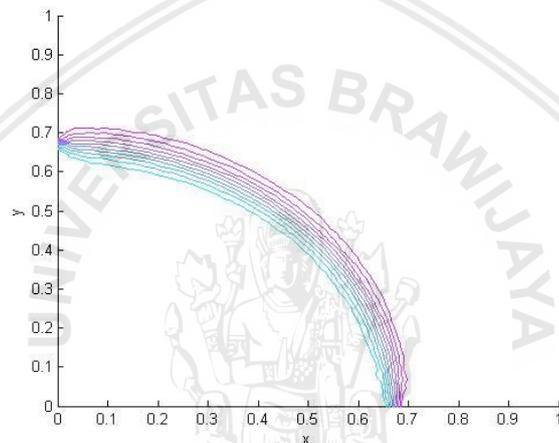
	u_{\max}	u_{\min}
Eksak	1.00	-1.00
LSM	1.0710	-1.1158
SUPG1	1.1332	-1.1575
SUPG2	1.1538	-1.2208



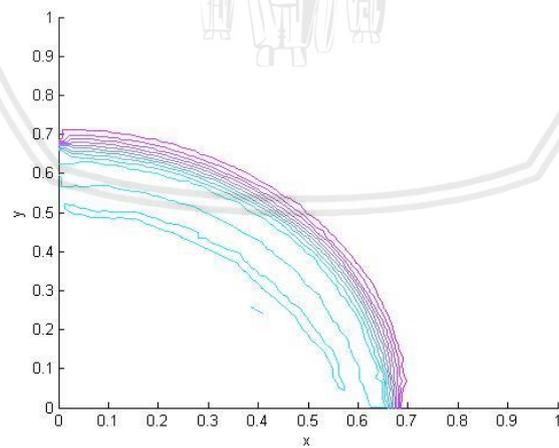
Gambar 3.14. Solusi Uji Numerik 7 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)

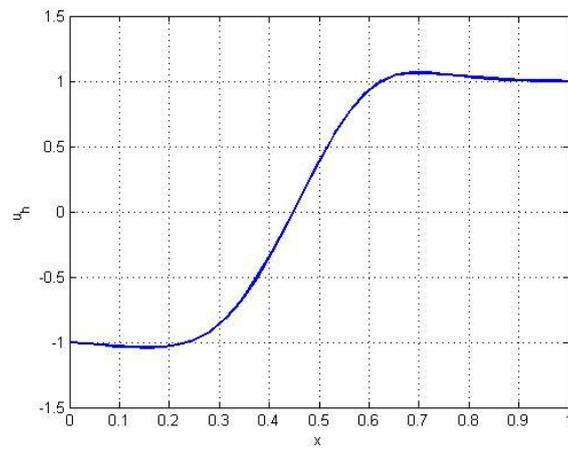


(b)

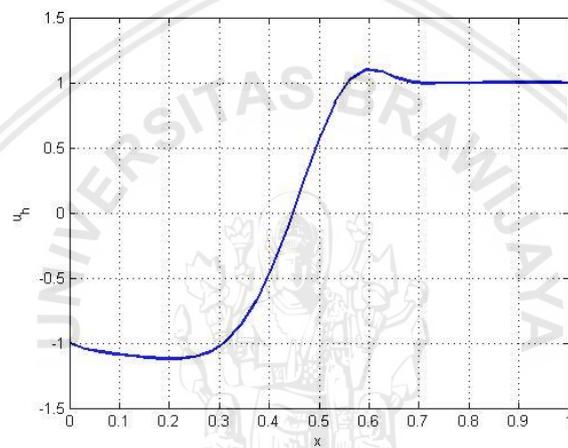


(c)

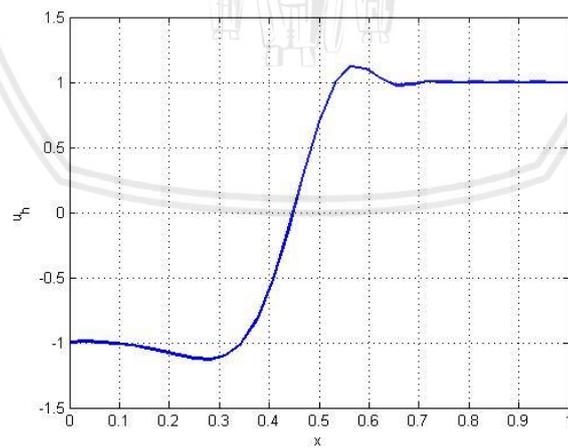
Gambar 3.15. Plot kontur Uji Numerik 7 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.16. Profil vertikal Uji Numerik 7 pada $y = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2

Gambar 3.14 menunjukkan plot solusi numerik untuk semua metode dengan lebar grid $h = 2^{-5}$. Berdasarkan Gambar 3.14(a), terlihat bahwa plot solusi untuk LSM menghasilkan solusi yang bebas dari osilasi. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang terlihat pada Gambar 3.14(b) dan 3.14(c) menghasilkan solusi yang berosilasi. Jika dilihat dari Gambar 3.15, maka diperoleh hasil plot kontur untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$. Berdasarkan Gambar 3.15(a), terlihat bahwa LSM menghasilkan plot kontur yang bebas dari osilasi. Apabila dibandingkan dengan 3.15(b) dan 3.15(c), SUPG1 dan SUPG2 menghasilkan plot kontur yang berosilasi.

Tabel 3.7 menunjukkan bahwa LSM menghasilkan nilai u_{\max} dan u_{\min} yang lebih mendekati nilai eksak daripada SUPG1 dan SUPG2. Nilai u_{\max} dan u_{\min} yang dihasilkan oleh LSM ditunjukkan dengan nilai minimum yang dicetak tebal. Berdasarkan profil vertikal untuk semua metode pada $y = 0.5$ dengan $h = 2^{-5}$ menunjukkan bahwa solusi untuk semua metode dihasilkan dari proses *smoothing*. Pada Gambar 3.16(a), dapat dilihat bahwa LSM menghasilkan solusi yang halus. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang terlihat pada Gambar 3.16(b) dan 3.16(c) menghasilkan solusi yang berosilasi.

3.6.2.4. Uji Numerik 8

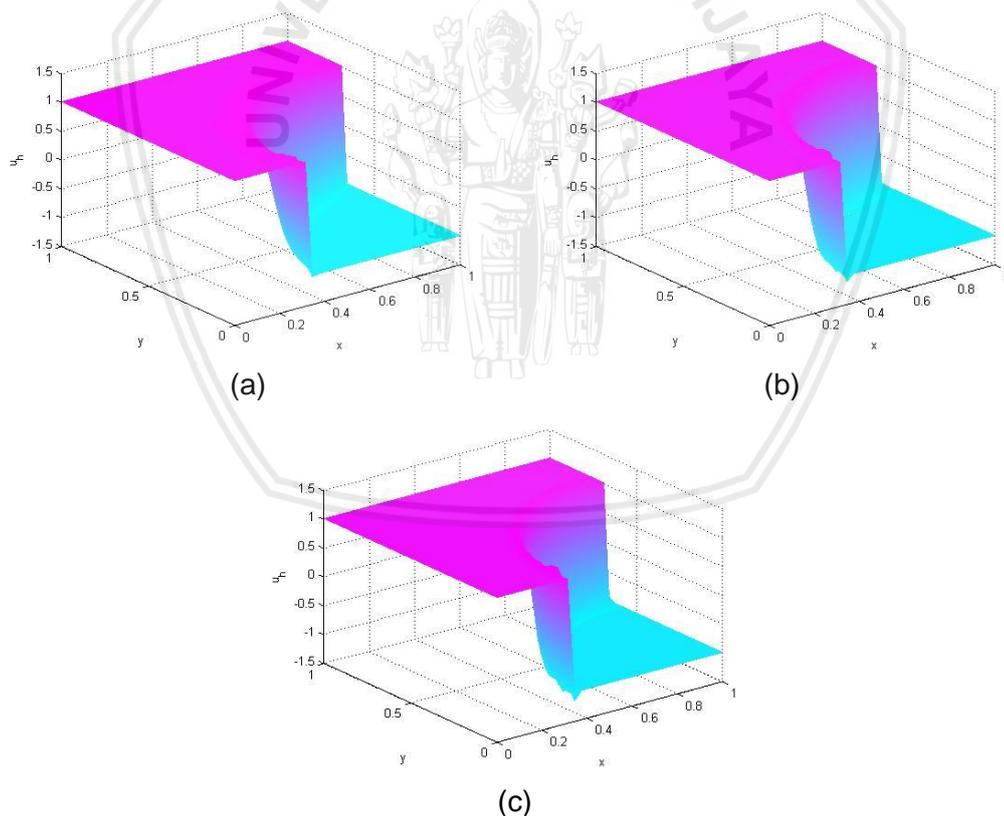
Misal diberikan vektor konveksi $\mathbf{b}(y, 1 - x)$ dan kondisi batas *inflow* adalah $\Gamma_- = \{1\} \times \{(0,1)\} \cup \{(0,1)\} \times \{0\}$. Data kondisi batas diberikan sebagai berikut.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } y = 0, 0 < x < \frac{21}{64}, \\ -1, & \text{jika } y = 0, \frac{21}{64} \leq x < 1, \\ 1, & \text{jika } x = 0, y \in (0,1). \end{cases} \quad (3.16)$$

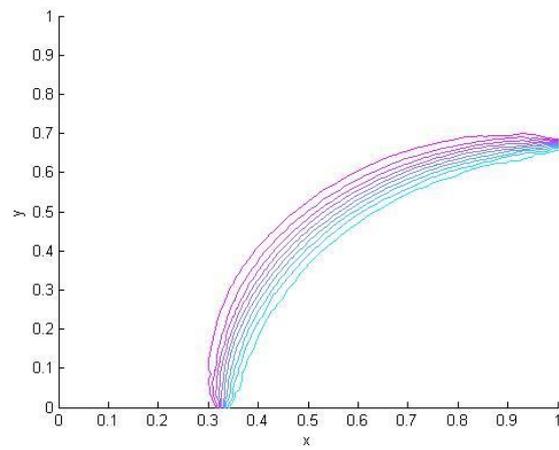
Pada uji numerik 8, fungsi *streamline* dihitung dari persamaan lingkaran pada titik pusat (1,0) dengan jari-jari $\frac{43}{64}$. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan u_{\max} dan u_{\min} , plot solusi, kontur, dan profil vertikal pada $y = 0.5$ masing-masing disajikan pada Tabel 3.8, Gambar 3.17, Gambar 3.18, dan Gambar 3.19 sebagai berikut.

Tabel 3.8. Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 8 dengan $h = 2^{-5}$

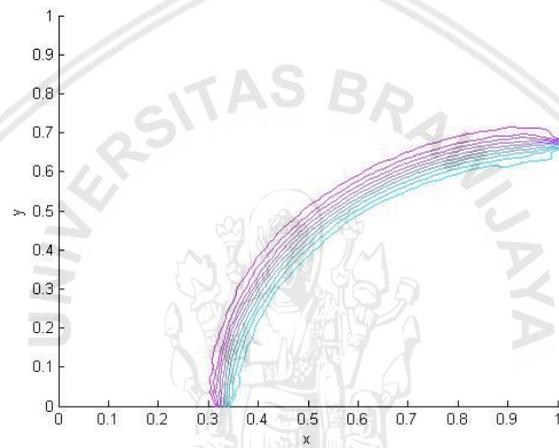
	u_{\max}	u_{\min}
Eksak	1.00	-1.00
LSM	1.0725	-1.0959
SUPG1	1.1381	-1.1619
SUPG2	1.1641	-1.2080



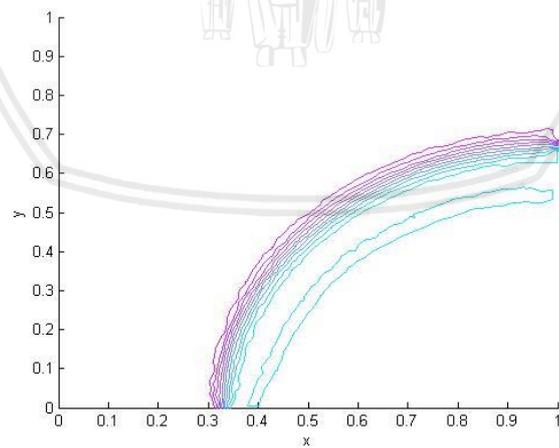
Gambar 3.17. Solusi Uji Numerik 8 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)

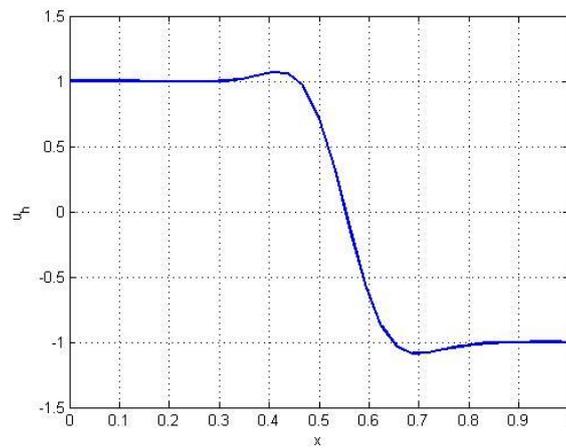


(b)

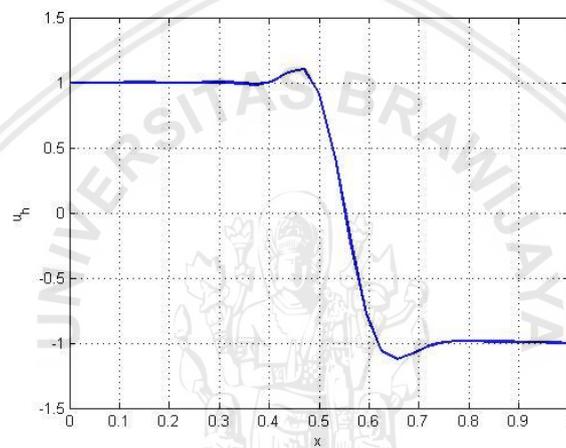


(c)

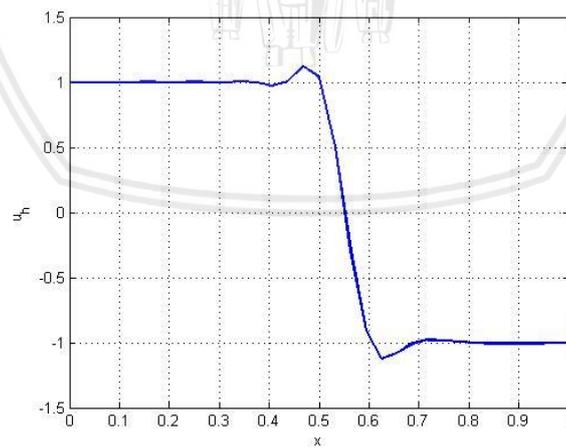
Gambar 3.18. Plot kontur Uji Numerik 8 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.19. Profil vertikal Uji Numerik 8 pada $y = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2

Gambar 3.17 menunjukkan plot solusi numerik untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$. Plot solusi untuk LSM yang terlihat pada Gambar 3.17(a) menghasilkan solusi yang bebas dari osilasi. Sedangkan, plot solusi untuk SUPG1 dan SUPG2 yang diterlihatkan pada Gambar 3.17(b) dan 3.17(c) menghasilkan solusi yang berosilasi. Apabila dilihat dari Gambar 3.18, ditunjukkan plot kontur untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$. Berdasarkan Gambar 3.18(a), terlihat bahwa LSM menghasilkan plot kontur yang bebas dari osilasi. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang ditunjukkan pada Gambar 3.18(b) dan 3.18(c) menghasilkan plot kontur yang berosilasi.

Berdasarkan Tabel 3.8, dapat dilihat bahwa LSM menghasilkan nilai u_{\max} dan u_{\min} yang lebih mendekati nilai eksak daripada SUPG1 dan SUPG2. Nilai minimum yang dicetak tebal pada Tabel 3.8 menunjukkan nilai u_{\max} dan u_{\min} yang dihasilkan oleh LSM. Jika dilihat dari profil vertikal untuk semua metode pada $y = 0.5$ dengan $h = 2^{-5}$, maka dapat dijelaskan bahwa solusi untuk ketiga metode dihasilkan dari proses *smoothing*. Pada Gambar 3.19(a), ditunjukkan LSM menghasilkan solusi yang halus. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang ditunjukkan pada Gambar 3.19(b) dan 3.19(c) menghasilkan solusi yang berosilasi.

3.6.2.5. Uji Numerik 9

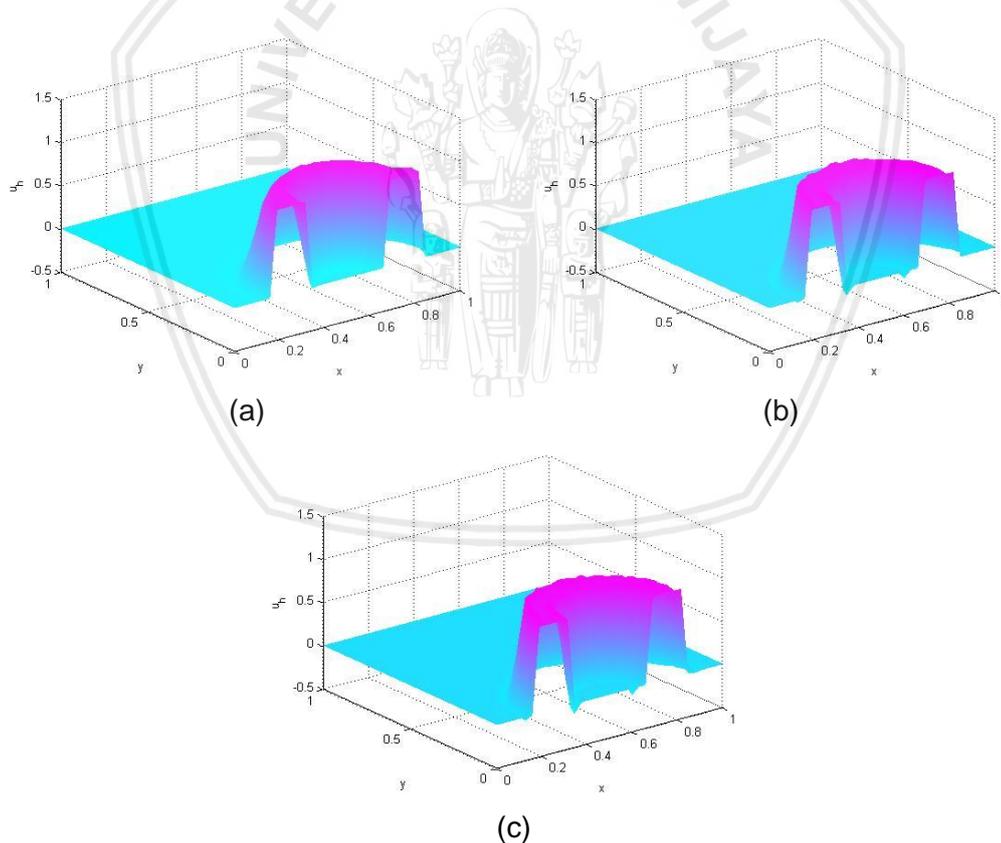
Misal diberikan vektor konveksi $\mathbf{b}(y, 0.5 - x)$ dan kondisi batas *inflow* adalah $\Gamma_- = \{1\} \times \{(0,1)\} \cup \{(0,1)\} \times \{0\}$. Data kondisi batas diberikan sebagai berikut.

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x = 0, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{jika } y = 1, 0.5 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{jika } y = 0, 0 \leq x \leq 0.17, \\ 1, & \text{jika } y = 0, 0.17 \leq x \leq 0.33, \\ 0, & \text{jika } y = 0, 0.33 \leq x < 0.5. \end{cases} \quad (3.17)$$

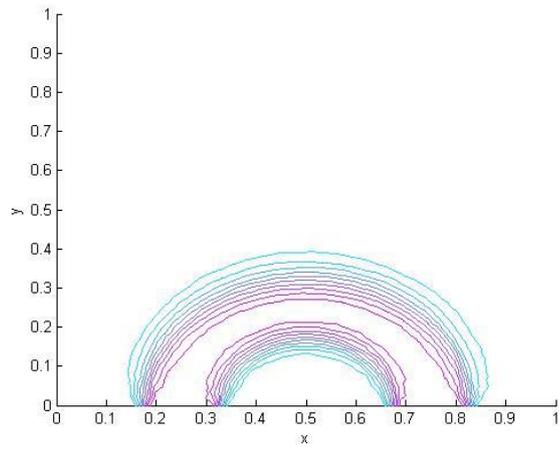
Fungsi *streamline* diperoleh dari dua persamaan lingkaran pada titik pusat (0.5,0) dengan masing-masing jari-jarinya adalah 0.33 dan 0.17. Hasil simulasi numerik berupa perbandingan u_{\max} dan u_{\min} , plot solusi, kontur, dan profil vertikal pada $x = 0.5$ masing-masing disajikan pada Tabel 3.9, Gambar 3.20, Gambar 3.21, dan Gambar 3.22 sebagai berikut.

Tabel 3.9. Perbandingan u_{\max} dan u_{\min} untuk Uji Numerik 9 dengan $h = 2^{-5}$

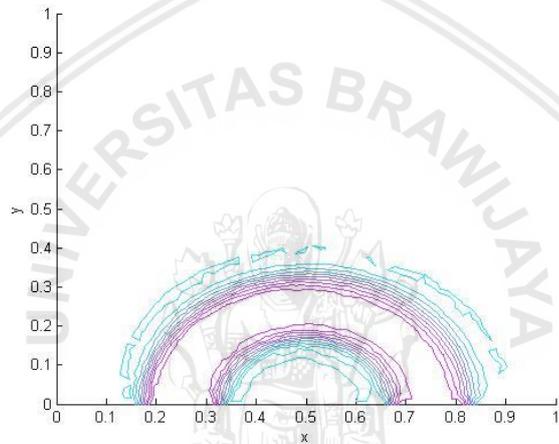
	u_{\max}	u_{\min}
Eksak	1.00	0.00
LSM	1.0893	-0.0677
SUPG1	1.0821	-0.1497
SUPG2	1.0895	-0.1645



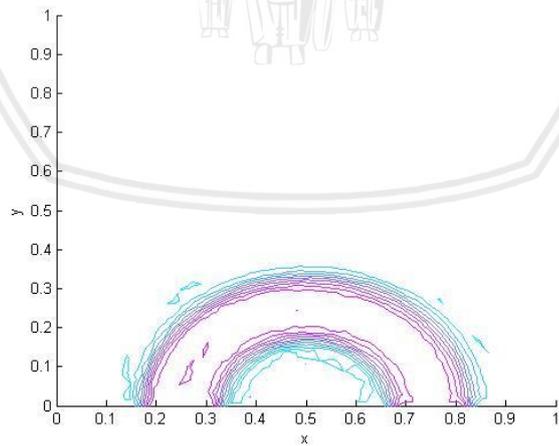
Gambar 3.20. Solusi Uji Numerik 9 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2



(a)



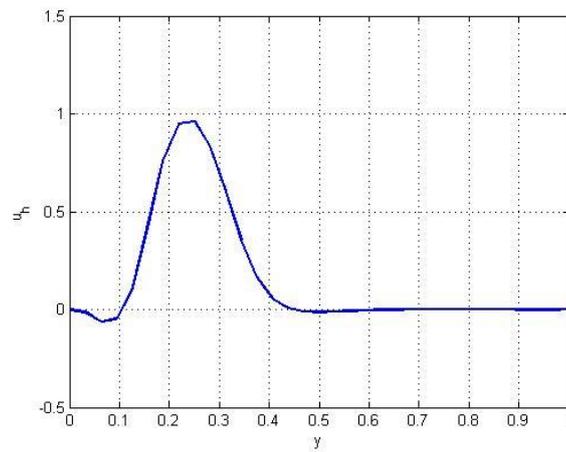
(b)



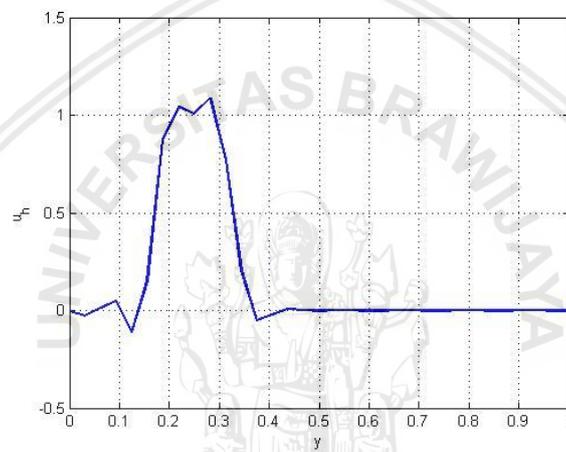
(c)

Gambar 3.21. Plot kontur Uji Numerik 9 dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2

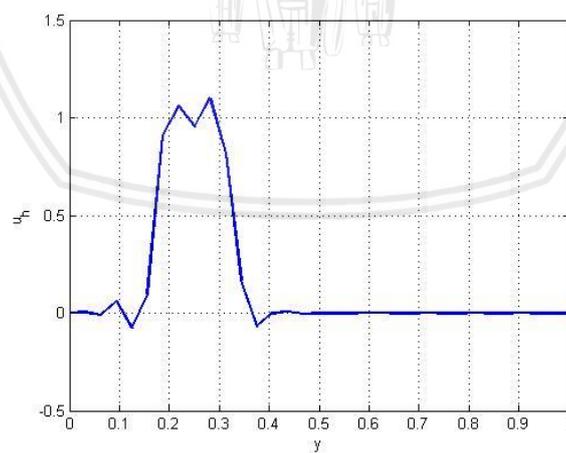




(a)



(b)



(c)

Gambar 3.22. Profil vertikal Uji Numerik 9 pada $x = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$ menggunakan (a) LSM, (b) SUPG1, dan (c) SUPG2

Plot solusi numerik untuk semua metode dengan $h = 2^{-5}$ ditunjukkan pada Gambar 3.20. Berdasarkan Gambar 3.20(a), dapat dilihat bahwa plot solusi untuk LSM menghasilkan solusi yang bebas dari osilasi. Sedangkan, plot solusi untuk SUPG1 dan SUPG2 yang ditunjukkan pada Gambar 3.20(b) dan 3.20(c) menghasilkan solusi yang berosilasi. Apabila dilihat dari plot kontur untuk semua metode dengan lebar grid $h = 2^{-5}$, terlihat bahwa LSM yang ditunjukkan pada Gambar 3.21(a) menghasilkan plot kontur yang bebas dari osilasi. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang ditunjukkan pada Gambar 3.21(b) dan 3.21(c) menghasilkan plot kontur yang berosilasi.

Tabel 3.9 menunjukkan bahwa LSM menghasilkan nilai u_{\max} dan u_{\min} yang lebih mendekati nilai eksak daripada SUPG1 dan SUPG2. Nilai u_{\max} dan u_{\min} yang dihasilkan oleh LSM ditunjukkan dengan nilai minimum yang dicetak tebal. Jika dilihat dari profil vertikal untuk semua metode pada $x = 0.5$ dengan lebar grid $h = 2^{-5}$, maka dapat dijelaskan bahwa solusi untuk ketiga metode dihasilkan dari proses *smoothing*. Berdasarkan Gambar 3.22(a) menunjukkan bahwa LSM menghasilkan solusi yang halus. Sedangkan, SUPG1 dan SUPG2 yang ditunjukkan pada Gambar 3.22(b) dan 3.22(c) menghasilkan solusi yang berosilasi. Hal ini masih sama dengan kesimpulan pada uji numerik sebelumnya. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa LSM dapat memberikan kestabilan yang lebih baik untuk kasus dengan solusi diskontinu.

BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, ada beberapa kesimpulan yang dapat diperoleh sebagai berikut.

1. Persamaan hiperbolik linear dapat diselesaikan dengan menggunakan metode elemen hingga *least-squares*. Sistem persamaan linear membentuk entri sebagai berikut.

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, np,$$

$$F_i = \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, np.$$

Sistem persamaan linear dari hasil diskritisasi dengan metode elemen hingga *least-squares* memiliki matriks yang simetrik dan definit positif sehingga dapat diselesaikan dengan metode minimum residual (MINRES). Berdasarkan pembahasan sebelumnya, terlihat bahwa pada kasus dengan solusi kontinu, kombinasi metode elemen hingga *least-squares* dengan MINRES memberikan hasil error yang relatif kecil. Selain itu, pada kasus dengan solusi diskontinu, metode elemen hingga *least-squares* dengan MINRES memberikan kestabilan yang relatif lebih baik.

2. Persamaan hiperbolik linear dapat diselesaikan dengan menggunakan metode elemen hingga SUPG. Sistem persamaan linear yang dihasilkan pada metode elemen hingga SUPG membentuk entri sebagai berikut.

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)\phi_i d\Omega + \delta \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_j)(\nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, np,$$

$$F_i = \int_{\Omega} f\phi_i d\Omega + \delta \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{b}\phi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, np.$$

Sistem persamaan linear tersebut memiliki matriks yang tidak simetrik dan definit negatif sehingga diselesaikan dengan menggunakan metode langsung.

Pada tesis ini digunakan dua parameter kestabilan δ , yakni $\delta_1 = \frac{h}{\|\mathbf{b}\|_{\infty}}$ dan

$\delta_2 = \frac{h}{2\|\mathbf{b}\|_2}$. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, terlihat bahwa pada kasus

dengan solusi diskontinu, simulasi numerik menggunakan metode elemen hingga SUPG dengan δ_1 memberikan kestabilan yang relatif lebih baik dibandingkan dengan simulasi numerik menggunakan metode elemen hingga SUPG dengan δ_2 . Pada kasus dengan solusi kontinu, metode elemen hingga SUPG dengan δ_1 dan δ_2 memberikan hasil error yang kecil. Apabila dibandingkan antara kedua metode, terlihat bahwa hasil error dari metode elemen hingga SUPG dengan δ_2 relatif lebih kecil daripada hasil error dari metode elemen hingga SUPG dengan δ_1 .

3. Di antara metode elemen hingga *least-squares* dengan MINRES, SUPG dengan $\delta_1 = \frac{h}{\|\mathbf{b}\|_{\infty}}$, dan SUPG dengan $\delta_2 = \frac{h}{2\|\mathbf{b}\|_2}$, terlihat bahwa hasil numerik dengan menggunakan metode elemen hingga SUPG dengan $\delta_2 = \frac{h}{2\|\mathbf{b}\|_2}$ dapat memberikan hasil error yang relatif lebih kecil untuk kasus dengan solusi kontinu. Sedangkan, hasil numerik dengan menggunakan metode elemen hingga *least-squares* dengan MINRES dapat memberikan kestabilan yang relatif lebih baik untuk kasus dengan solusi diskontinu.

DAFTAR PUSTAKA

- Bochev, P.B., dan Choi, J. 2001. A Comparative Study of Least-Squares, SUPG, and Galerkin Methods for Convection Problems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 15(2): 127-146.
- Burman, E. 2010. Consistent SUPG-Method for Transient Transport Problem: Stability and Convergence. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199: 1114-1123.
- Elman, H., Silvester, D., dan Wathen, A. 2005. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Application in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford University Press. New York.
- Gockenbach, M.S. 2011. *Partial Differential Equations Analytical and Numerical Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics. USA.
- Jichun Li, dan Yi-Tung Chen. 2008. *Computational Partial Differential Equations Using MATLAB*. CRC Press. New York.
- Kornelus, A. 2017. *High Order Hermite and Sobolev Discontinuous Galerkin Methods for Hyperbolic Partial Differential Equations*. UNM Digital Repository. New Mexico.
- Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons. New York.
- Larson, M.G., dan Bengzon, F. 2010. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Practice*. Springer.

- Lin Mu, dan Xiu Ye. 2017. A Simple Finite Element Method for Linear Hyperbolic Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 330: 330-339.
- Paige, C.C., dan Saunders, M.A., 1975. Solution of Sparse Indefinite Systems of Linear Equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 12(4): 617-629.
- Reed, W.H., dan Hill, T.R. 1973. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation. *Los Alamos Scientific Laboratory*. LA-UR-73-479.
- Sterck, H.D., Manteuffel, T.A., McCormick, S.F., dan Olson, L. 2004. Least-Squares Finite Element Methods and Algebraic Multigrid Solvers for Linear Hyperbolic PDEs. *SIAM J. Sci. Comput.* 26(1): 31-54.
- Trangenstein, J.A. 2007. *Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press. Durham.
- Yu-Ling Lai, Wen-Wei Lin, dan Dan'I Pierce. 1997. Conjugate Gradient and Minimal Residual Methods for Solving Symmetric Indefinite Systems. *Journal Computational and Applied Mathematics*. 84: 243-256.



KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
PASCASARJANA

19 0506 T



SERTIFIKAT BEBAS PLAGIASI

Nomor: 2904/UN10.F40/PN/2018

Sertifikat ini diberikan kepada:

Nama : Adin Lazuardy Firdiansyah
NIM : 166090400111008
Program Studi : Program Magister Matematika
Fakultas : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas : Universitas Brawijaya

Dengan Judul Tesis

Penyelesaian Persamaan Hiperbolik Linear Menggunakan Metode Elemen Hingga Least-Squares dan SUPG

Telah dideteksi tingkat plagiasinya secara online pada tanggal **11 Desember 2018** dan dinyatakan bebas plagiasi dengan kriteria toleransi $\leq 5\%$.



Dr. Abdul Hakim, M.Si

NIP. 19640202 198503 1 006

Malang, 12 Desember 2018
Ketua Badan Penerbitan Jurnal

Lukman Hakim, S.Si, M.Sc, Dr.Sc,
NIP. 19820412 200312 1 002