

**PENGENDALIAN PROSES STATISTIK MENGGUNAKAN
GRAFIK KENDALI MULTIVARIATE EXPONENTIALLY
WEIGHTED MOVING AVERAGE (MEWMA) DAN
UNEQUAL SAMPLE SIZE (USS) MEWMA**

SKRIPSI

oleh :

TAUFAN RIZKI KURNIAWAN

0310950050-95



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

**PENGENDALIAN PROSES STATISTIK MENGGUNAKAN
GRAFIK KENDALI *MULTIVARIATE EXPONENTIALLY
WEIGHTED MOVING AVERAGE (MEWMA)* DAN
UNEQUAL SAMPLE SIZE (USS) MEWMA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

oleh :

TAUFAN RIZKI KURNIAWAN

0310950050-95



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG**

2008

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**PENGENDALIAN PROSES STATISTIK MENGGUNAKAN
GRAFIK KENDALI *MULTIVARIATE EXPONENTIALLY
WEIGHTED MOVING AVERAGE (MEWMA)* DAN
UNEQUAL SAMPLE SIZE (USS) MEWMA**

oleh:

TAUFAN RIZKI KURNIAWAN

0310950050-95

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 12 Juni 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika**

Pembimbing I

Pembimbing II

Ir. Mudjiono, MM

NIP. 131 697 687

Dr. Ir. Henny Pramoedyo, MS

NIP. 130 935 808

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Brawijaya
Malang**

Dr. Agus Suryanto, M.Sc

NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : TAUFAN RIZKI KURNIAWAN
NIM : 0310950050-95
Jurusan : STATISTIKA
Penulis Skripsi berjudul :

**PENGENDALIAN PROSES STATISTIK MENGGUNAKAN
GRAFIK KENDALI *MULTIVARIATE EXPONENTIALLY
WEIGHTED MOVING AVERAGE (MEWMA)* DAN
UNEQUAL SAMPLE SIZE (USS) MEWMA**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan segala kesadaran

Malang, 12 Juni 2008
Yang menyatakan,

(TAUFAN RIZKI KURNIAWAN)
NIM. 0310950050-95

PENGENDALIAN PROSES STATISTIK MENGGUNAKAN GRAFIK KENDALI *MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE* (MEWMA) DAN *UNEQUAL SAMPLE SIZE* (USS) MEWMA

ABSTRAK

Salah satu teknik utama dari Pengendalian Proses Statistik adalah grafik kendali. Grafik kendali digunakan untuk mendeteksi perubahan yang dapat mempengaruhi kualitas produk di dalam suatu proses produksi. Kualitas secara umum ditentukan oleh beberapa peubah atau karakteristik kualitas yang mungkin berkorelasi. Grafik kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) dapat digunakan untuk mendeteksi pergeseran yang kecil di dalam suatu proses. Ketika grafik kendali MEWMA digunakan untuk mengendalikan suatu proses, biasanya diasumsikan bahwa ukuran subsampel untuk masing-masing peubah adalah sama. Akan tetapi, terdapat beberapa situasi atau kendala di dalam pengambilan sampel yang menyebabkan ukuran subsampel untuk masing-masing peubah menjadi tidak sama. Grafik kendali *Unequal Sample Size* (USS) MEWMA dapat digunakan untuk mengatasi ketidaksamaan ukuran subsampel tersebut. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui kepekaan dari grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder tentang kualitas produk gula SHS (*Super High Sugar*) yang diambil dari proses produksi Pabrik Gula Kebon Agung Malang dan data bangkitan yang terdiri dari 2 peubah, 3 peubah, dan 4 peubah yang masing-masing berdistribusi normal multivariat. Hasil analisis menunjukkan bahwa grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA mampu mendeteksi pergeseran rata-rata proses yang kecil pada data yang berdistribusi normal multivariat. Secara umum, besarnya pergeseran rata-rata proses dipengaruhi oleh besarnya nilai ragam pada tiap peubah.

Kata Kunci: Pengendalian Proses Statistik, Grafik Kendali, MEWMA, USS MEWMA

STATISTICAL PROCESS CONTROL USING MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE (MEWMA) AND UNEQUAL SAMPLE SIZE (USS) MEWMA CONTROL CHART

ABSTRACT

One of the primary techniques of Statistical Process Control is the control chart. Control charts are used to detect any change that may affect the quality of the output of the production process. Quality is generally determined by several variables or quality characteristics which may be correlated. The Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) control chart can be used to detect a small shift in a process. When the MEWMA control chart is used to monitor a process, it is usually assumed that the same subsample size is used for each variable. However, there are some situations or constraints in the sampling process causing the subsample size to be unequal. The Unequal Sample Size (USS) MEWMA can be used to overcome this unequal subsample size matter. The objective of this research is to investigate the sensitivity of the MEWMA and the USS MEWMA control chart in detecting a shift in the process mean. The data that is used in this research are secondary data about the quality of Super High Sugar product which is taken from production process in Pabrik Gula Kebon Agung Malang and generated data that consist of 2 variables, 3 variables, and 4 variables, each of which follows a multivariate normal distribution. The result shows that the MEWMA and the USS MEWMA control chart have the ability to detect a small shift in the process mean for multivariate normally distributed data. Generally, the rate of the process mean shift is influenced by the rate of the variance of each variable.

Key Words: Statistical Process Control, Control Chart, MEWMA, USS MEWMA

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Dalam penyusunan skripsi ini cukup banyak bantuan yang diberikan berbagai pihak, baik berupa bimbingan maupun saran. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Ir. Mudjiono, MM selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Dr. Ir. Henny Pramoedyo, MS selaku Dosen Pembimbing II atas bimbingan dan arahan yang telah diberikan
2. Ibu Ir. Heni Kusdarwati, MS, Ibu Ir. Atiek Iriany, MS, dan Ibu Eni Sumarminingsih, S.Si, MM selaku dosen penguji atas saran dan masukan yang diberikan
3. Bapak Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika
4. Seluruh staf dan karyawan Jurusan Matematika Universitas Brawijaya
5. Ibu, Bapak, dan Adikku tercinta di rumah yang senantiasa memberikan doa dan motivasi
6. Nur Lailatul Fitriyah yang senantiasa memberikan doa, motivasi, dan semangat
7. Teman-teman Statistika-UB angkatan 2003 atas kerja sama dan kebersamaannya selama ini
8. Teman-teman WaGil I/12, mas Adji, dan Deny atas persahabatan, semangat, bantuan dan dukungan yang diberikan
9. Semua pihak yang telah banyak membantu dan memberikan dorongan selama penulisan skripsi ini

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharap kritik dan saran dari pembaca. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Malang, Juni 2008

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
1.5 Manfaat	3
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Korelasi	5
2.2 Distribusi Normal	6
2.3 Distribusi Normal Multivariat	6
2.4 Kualitas dan Pengendalian Kualitas	9
2.5 Pengendalian Proses Statistik	10
2.6 Grafik Kendali	11
2.6.1 Grafik Kendali EWMA (<i>Exponentially Weighted Moving Average</i>)	13
2.6.2 Grafik Kendali MEWMA (<i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Average</i>)	16
2.6.3 Grafik Kendali MEWMA (<i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Average</i>) dengan Ukuran Subsampel yang Tidak Sama	24
2.7 Ukuran Sampel dan Subsampel	27

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Data	29
3.1.1 Data Sekunder	29
3.1.2 Data Bangkitan	30
3.2 Metode Penelitian	32
3.2.1 Uji Kenormalan	32
3.2.2 Grafik Kendali MEWMA	32
3.2.3 Grafik Kendali USS MEWMA	33

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Uji Kenormalan Data	37
4.2 Grafik Kendali MEWMA dan USS MEWMA	38
4.2.1 Data Sekunder	39
4.2.2 Data Bangkitan	41

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan	57
5.2 Saran	57

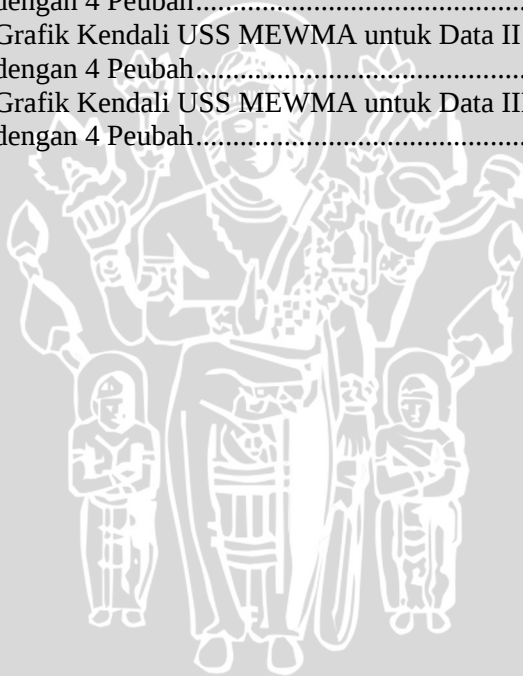
DAFTAR PUSTAKA	59
-----------------------------	----

LAMPIRAN	61
-----------------------	----

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Bentuk Umum Grafik Kendali	12
Gambar 2.2 Nilai Bobot Menurun Secara Eksponensial	15
Gambar 2.3 Grafik Kendali MEWMA	19
Gambar 3.1 Diagram Alir Langkah-Langkah Penelitian untuk Data Sekunder	35
Gambar 3.2 Diagram Alir Langkah-Langkah Penelitian untuk Data Bangkitan	36
Gambar 4.1 Plot Kuantil Khi Kuadrat Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Sama	37
Gambar 4.2 Plot Kuantil Khi Kuadrat Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Tidak Sama	38
Gambar 4.3 Grafik Kendali MEWMA untuk Data Kualitas Gula	39
Gambar 4.4 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data Kualitas Gula	40
Gambar 4.5 Grafik Kendali MEWMA untuk Data I dengan 2 Peubah	41
Gambar 4.6 Grafik Kendali MEWMA untuk Data II dengan 2 Peubah	42
Gambar 4.7 Grafik Kendali MEWMA untuk Data III dengan 2 Peubah	43
Gambar 4.8 Grafik Kendali MEWMA untuk Data I dengan 3 Peubah	43
Gambar 4.9 Grafik Kendali MEWMA untuk Data II dengan 3 Peubah	44
Gambar 4.10 Grafik Kendali MEWMA untuk Data III dengan 3 Peubah	45
Gambar 4.11 Grafik Kendali MEWMA untuk Data I dengan 4 Peubah	45
Gambar 4.12 Grafik Kendali MEWMA untuk Data II dengan 4 Peubah	46
Gambar 4.13 Grafik Kendali MEWMA untuk Data III dengan 4 Peubah	47
Gambar 4.14 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data I dengan 2 Peubah	48

Gambar 4.15	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data II dengan 2 Peubah	49
Gambar 4.16	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data III dengan 2 Peubah	49
Gambar 4.17	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data I dengan 3 Peubah	50
Gambar 4.18	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data II dengan 3 Peubah.....	51
Gambar 4.19	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data III dengan 3 Peubah.....	52
Gambar 4.20	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data I dengan 4 Peubah.....	52
Gambar 4.21	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data II dengan 4 Peubah.....	53
Gambar 4.22	Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data III dengan 4 Peubah.....	54



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Pemilihan r untuk MEWMA Optimal (ARL $\cong$ 200)	18
Tabel 4.1 Nilai Pergeseran Proses (δ) untuk Data Bangkitan dengan Ukuran Subsampel Sama	55
Tabel 4.1 Nilai Pergeseran Proses (δ) untuk Data Bangkitan dengan Ukuran Subsampel Tidak Sama	55



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Sama	61
Lampiran 2. Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Tidak Sama	62
Lampiran 3. <i>Macro</i> Minitab untuk Menguji Kenormalan Multivariat	63
Lampiran 4. Pembangkitan Data Normal Multivariat	64
Lampiran 5. <i>Source Code</i> R untuk Membentuk Grafik Kendali USS MEWMA	66
Lampiran 6. <i>Source Code</i> Fortran untuk Menghitung Batas Pengendali Atas Grafik Kendali MEWMA dan USS MEWMA	68
Lampiran 7. Faktor-Faktor untuk Pendugaan σ dari $\bar{s}$	77
Lampiran 8. Nilai Korelasi Antar Peubah	78
Lampiran 9. Data Bangkitan	84

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Saat ini industri manufaktur semakin banyak berkembang di Indonesia. Untuk dapat bertahan di dalam menghadapi persaingan industri yang semakin ketat, suatu perusahaan dituntut untuk mampu menghasilkan produk yang berkualitas. Perbaikan dan peningkatan kualitas harus dilakukan secara berkelanjutan dan terus menerus. Di dalam proses produksi yang menghasilkan suatu produk tertentu, seringkali dijumpai produk yang cacat atau tidak sesuai dengan spesifikasi yang telah ditetapkan. Variabilitas atau keragaman produk menjadi ciri khas dari proses produksi yang tidak dapat dihilangkan tetapi dapat dikendalikan. Pengendalian Proses Statistik (PPS) merupakan suatu pendekatan yang digunakan di dalam mengawasi proses produksi dengan tujuan untuk memperbaiki kualitas produk melalui pengurangan variabilitas.

Secara umum PPS dibagi menjadi dua kategori, yaitu Pengendalian Proses Statistik Univariat dan Pengendalian Proses Statistik Multivariat. Salah satu teknik utama dari PPS adalah grafik kendali. Grafik kendali digunakan untuk mendeteksi perubahan yang dapat mempengaruhi kualitas produk di dalam suatu proses produksi. Grafik kendali univariat digunakan untuk mengendalikan proses produksi dengan satu peubah atau satu karakteristik kualitas saja. Kualitas secara umum ditentukan oleh beberapa peubah atau karakteristik kualitas yang mungkin berkorelasi. Grafik kendali multivariat dapat digunakan untuk mengendalikan proses produksi dengan beberapa peubah secara bersama-sama di mana terdapat korelasi atau hubungan di antara peubah tersebut.

Tiga grafik kendali multivariat yang paling populer adalah Hotelling's T^2 , MCUSUM (*Multivariate Cumulative Sum*), dan MEWMA (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*). Grafik kendali MEWMA yang pertama kali diperkenalkan oleh Lowry, Woodall, Champ, dan Rigdon (1992), dapat digunakan untuk memperbaiki pendeteksian dari pergeseran atau perubahan yang kecil di dalam Pengendalian Proses Statistik Multivariat. Aparisi dan Garcia-Diaz (2004) menyebutkan bahwa keunggulan dari grafik kendali MEWMA adalah lebih efektif untuk mendeteksi pergeseran yang kecil dalam proses dibandingkan grafik kendali Hotelling's T^2 ,

karena grafik kendali MEWMA memasukkan informasi sekarang dan masa lalu dari proses ke dalam perhitungannya. Grafik kendali MEWMA dapat digunakan untuk data pengamatan individual maupun data pengamatan dengan subsampel. Ketika grafik kendali MEWMA digunakan untuk mengendalikan suatu proses, biasanya diasumsikan bahwa ukuran subsampel untuk masing-masing peubah adalah sama. Akan tetapi, terdapat beberapa situasi atau kendala di dalam pengambilan sampel yang menyebabkan ukuran subsampel untuk masing-masing peubah menjadi tidak sama. Untuk mengatasi masalah ketidaksamaan ukuran subsampel tersebut, maka dapat digunakan grafik kendali USS (*Unequal Sample Size*) MEWMA.

Penggunaan grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA terbatas hanya untuk data yang berdistribusi normal multivariat. Di dalam penelitian ini digunakan data sekunder dan data bangkitan yang masing-masing berdistribusi normal multivariat.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana kepekaan dari grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses untuk data yang berdistribusi normal multivariat?

1.3 Batasan Masalah

1. Data yang digunakan adalah data yang berdistribusi normal multivariat
2. Ketidaksamaan ukuran subsampel disebabkan oleh situasi di mana satu peubah dianggap lebih penting daripada peubah yang lain, sehingga ukuran subsampel untuk peubah tersebut bertambah sedangkan ukuran subsampel untuk peubah yang lain berkurang.
3. Nilai *Average Run Length* (ARL) yang digunakan untuk grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA adalah $ARL = 200$

1.4 Tujuan

Mengetahui kepekaan grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses untuk data yang berdistribusi normal multivariat.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah dapat mengetahui penerapan dan kepekaan dari grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses untuk data yang berdistribusi normal multivariat.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Korelasi

Korelasi menunjukkan tingkat/ukuran keeratan hubungan linier antara peubah X dan Y . Koefisien korelasi populasi yang dilambangkan dengan ρ didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \quad (2.1)$$

di mana:

$Cov(X, Y)$ = peragam peubah X dan Y

$Var(X)$ = ragam peubah X

$Var(Y)$ = ragam peubah Y

(Gujarati, 1991)

Skala untuk mengetahui keeratan hubungan di antara kedua peubah adalah $-1 \leq \rho \leq 1$. Jika $\rho = 0$ maka antar peubah tersebut tidak saling berkorelasi atau disebut saling bebas dan sebaliknya jika $\rho \neq 0$ maka terdapat korelasi antar peubah tersebut.

Ukuran hubungan linier antara peubah X dan Y diduga dengan koefisien korelasi sampel yang dilambangkan dengan r , yaitu:

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 \right]}} \quad (2.2)$$

(Mendenhall, Scheaffer, dan Wackerly, 1981)

Untuk mengetahui adanya korelasi antar dua peubah, hipotesis yang digunakan adalah:

$H_0 : \rho = 0$ (tidak terdapat korelasi) lawan

$H_1 : \rho \neq 0$ (terdapat korelasi)

Statistik uji yang digunakan untuk pengujian hipotesis tersebut adalah:

$$t_{hit} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (2.3)$$

di mana:

r = koefisien korelasi sampel

n = banyaknya titik sampel

dengan kriteria keputusan jika nilai $|t_{hit}| < t_{\alpha/2(n-2)}$ atau $p\text{-value} \geq \alpha$

maka terima H_0 pada taraf nyata α dan dapat disimpulkan bahwa kedua peubah saling bebas (tidak terdapat korelasi), sebaliknya jika $|t_{hit}| \geq t_{\alpha/2(n-2)}$ atau $p\text{-value} < \alpha$ maka tolak H_0 pada taraf nyata α dan dapat disimpulkan bahwa kedua peubah tidak saling bebas (terdapat korelasi).

2.2 Distribusi Normal

Peubah acak X yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan ragam σ^2 atau $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] ; -\infty < x < \infty \quad (2.4)$$

2.3 Distribusi Normal Multivariat

Distribusi normal multivariat terbentuk berdasarkan distribusi normal univariat dengan $p \geq 2$ dimensi. Jika terdapat vektor acak $\underline{X}$ yang beranggotakan sejumlah p peubah acak X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan ragam σ^2 atau $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka fungsi kepadatan peluang multivariat untuk vektor $\underline{X}$ adalah:

$$f(X_1, \dots, X_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{X} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})\right] \quad (2.5)$$

dengan $\underline{\mu}$ sebagai vektor rata-rata berukuran $p \times 1$ dan $\underline{\Sigma}$ adalah matriks peragam berukuran $p \times p$. Vektor acak $\underline{X}$ yang

berdistribusi normal p -variat dapat ditulis dengan $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ (Johnson dan Wichern, 2002).

Misal $\underline{X}_1 \dots \underline{X}_m$ adalah sampel acak berukuran m dan berdistribusi normal multivariat $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, maka penduga untuk vektor rata-rata sampel adalah:

$$\hat{\underline{\mu}} = \bar{\underline{X}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \underline{X}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_{k1} \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_{kp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Penduga untuk matriks ragam-peragam sampel adalah:

$$\hat{\underline{\Sigma}} = \underline{S} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m \left(\underline{X}_k - \bar{\underline{X}} \right) \left(\underline{X}_k - \bar{\underline{X}} \right)' \quad (2.7)$$

Untuk memeriksa apakah suatu himpunan data mempunyai distribusi normal multivariat adalah dengan menggunakan Plot Kuantil Khi-Kuadrat yang didasarkan pada jarak kuadrat atau jarak mahalanobis. Jarak kuadrat dari vektor rata-rata populasi berdistribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas p . Langkah-langkah untuk membuat Plot Kuantil Khi Kuadrat adalah sebagai berikut:

1. Hitung nilai d_i^2 sebagai berikut:

$$d_i^2 = \left(\underline{X}_i - \bar{\underline{X}} \right)' \underline{S}^{-1} \left(\underline{X}_i - \bar{\underline{X}} \right) \quad (2.8)$$

2. Urutkan dari terkecil sampai terbesar sebagai berikut:

$$d_{(1)}^2 \leq d_{(2)}^2 \leq \dots \leq d_{(n)}^2$$

3. Untuk tiap d_i^2 dihitung nilai $(i - 1/2)/n$, di mana i adalah peringkat.

4. Hitung nilai q_i yaitu nilai khi-kuadrat dari $(i - \frac{1}{2})/n$ dengan derajat bebas p (banyaknya peubah) sebagai berikut:

$$q_i = \chi_p^2 \left(\frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right) \quad (2.9)$$

bersesuaian dengan setiap $d_i^2, i = 1, 2, \dots, n$

5. Plot d_i^2 versus q_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan periksa kelinierannya dalam plot. Jika titik-titik tidak membentuk garis lurus, maka kuantil terobservasi tidak mengikuti distribusi Khi-Kuadrat, sehingga disimpulkan data tidak berdistribusi normal multivariat.

Untuk lebih meyakinkan bahwa plot yang terbentuk benar-benar menunjukkan hubungan yang linier, maka dapat diukur dengan menghitung nilai korelasi antara d_i^2 dan q_i (Mattjik, Sumertajaya, Wijayanto, Indahwati, Kurnia, dan Sartono, 2002). Nilai korelasi yang diperoleh dapat diuji berdasarkan uji hipotesis pada subbab 2.1. Apabila nilai korelasi yang diperoleh nyata, maka data dapat dikatakan mengikuti distribusi normal multivariat.

Ada kalanya data yang diperoleh tidak memenuhi asumsi menyebar normal multivariat. Untuk dapat mengatasi masalah tersebut, Box dan Cox (1964) dalam Johnson dan Wichern (2002) mengusulkan suatu bentuk transformasi sebagai berikut:

$$x^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} & , \lambda \neq 0 \\ \ln x & , \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

di mana λ kontinyu untuk $x > 0$.

Nilai λ yang optimal didapatkan sebagai solusi yang memaksimumkan persamaan sebagai berikut:

$$\ell(\lambda) = -\frac{n}{2} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j^{(\lambda)} - \bar{x}^{(\lambda)})^2 \right] + (\lambda - 1) \sum_{j=1}^n \ln x_j \quad (2.11)$$

$$\text{di mana } \bar{x}^{(\lambda)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^{(\lambda)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^\lambda - 1}{\lambda} \right) \quad (2.12)$$

Prosedur lain yang digunakan untuk memperoleh λ yang optimal adalah dengan membuat peubah baru sebagai berikut:

$$y_j^{(\lambda)} = \frac{x_j^\lambda - 1}{\lambda \left[\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \right]^{\lambda-1}}, j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

dan kemudian dihitung simpangan baku dari peubah $y_j^{(\lambda)}$. Simpangan baku dari peubah $y_j^{(\lambda)}$ yang minimum terjadi pada nilai λ yang memaksimumkan persamaan (2.11) atau dengan kata lain nilai λ optimal adalah nilai λ yang meminimumkan simpangan baku dari peubah $y_j^{(\lambda)}$.

Untuk data multivariat, transformasi dilakukan untuk tiap-tiap peubah secara tersendiri.

2.4 Kualitas dan Pengendalian Kualitas

Kualitas secara umum didefinisikan sebagai ketepatan di dalam penggunaan, sesuai dengan apa yang diharapkan dan dibutuhkan oleh konsumen. Kualitas, sebagaimana yang diterapkan pada produk yang dihasilkan oleh suatu industri, merupakan karakteristik atau kombinasi dari karakteristik yang membedakan suatu barang dari yang lainnya (Kolarik, 1999).

Pengendalian kualitas adalah aktifitas keteknikan dan manajemen, yang dengan aktifitas itu diukur karakteristik kualitas produk, membandingkannya dengan spesifikasi atau persyaratan dan mengambil tindakan penyehatan yang sesuai apabila ada perbedaan antara penampilan yang sebenarnya dengan yang standar (Montgomery, 1995). Tujuan utama pengendalian kualitas adalah pengurangan variabilitas dalam karakteristik utama suatu produk. Secara umum tipe pengawasan kualitas terbagi menjadi dua, yaitu:

1. Pengawasan terhadap peubah (*variable*)
2. Pengawasan terhadap sifat (*attribute*)

Peubah adalah suatu karakteristik kualitas sebuah produk/barang yang dapat diukur dalam skala yang kontinyu. Sedangkan sifat adalah karakteristik yang dimiliki atau tidak dimiliki produk/barang yang hanya dapat dihitung tetapi tidak dapat diukur.

Menurut Montgomery (1995), di dalam suatu proses produksi akan selalu terdapat variabilitas dasar yang juga dihasilkan oleh proses produksi. Variabilitas dasar atau “gangguan dasar” ini merupakan pengaruh kumulatif dari banyak sebab-sebab kecil yang pada dasarnya tidak terkendali. Apabila variabilitas dasar suatu proses relatif kecil, maka dapat dikatakan sebagai bagian yang dapat diterima dari suatu proses. Dalam kerangka pengendalian kualitas statistik, variabilitas dasar ini sering disebut sebagai “sebab-sebab tak terduga”. Suatu proses yang bekerja dikatakan terkendali jika variasi yang ada hanya berasal dari sebab-sebab tak terduga saja. Variabilitas dalam karakteristik kualitas yang utama biasanya timbul dari tiga sumber, yaitu: mesin, operator, dan bahan baku. Variabilitas yang ditimbulkan dari sumber tersebut umumnya lebih besar daripada variabilitas dasar yang dapat diterima. Sumber-sumber variabilitas yang bukan bagian dari pola sebab tak terduga dinamakan “sebab-sebab terduga”. Suatu proses dikatakan tidak terkendali jika terdapat variasi dari sebab-sebab terduga.

2.5 Pengendalian Proses Statistik

Menurut Kume (1989), Pengendalian Proses Statistik (PPS) adalah suatu kegiatan yang dilakukan untuk menjaga tingkat produksi pada suatu standar tertentu dengan menggunakan peralatan yang sesuai, pengawasan yang teratur dan kemudian melakukan tindakan korektif jika terjadi penyimpangan-penyimpangan. Kegiatan utama yang dilakukan adalah membandingkan kondisi proses yang terjadi dengan standar yang telah ditentukan, maka perlu disiapkan standar proses tersebut yang dapat digunakan pada pengawasan proses selanjutnya.

PPS merupakan suatu metode atau cara untuk mengendalikan proses produksi serta kualitas produk yang dihasilkan dengan mengurangi variabilitas yang terjadi untuk mencapai kestabilan proses dan kemampuan proses. PPS dapat digunakan untuk semua proses produksi, tidak tergantung pada jenis produk yang dihasilkan. Terdapat tujuh alat yang digunakan di dalam PPS, yaitu:

1. Lembar Pengecekan
2. Analisis Pareto
3. Diagram Konsentrasi Cacat
4. Diagram Sebab Akibat (*Cause-and-Effect Diagram*)

5. Histogram
6. Diagram Pencar
7. Grafik Kendali

2.6 Grafik Kendali

Salah satu teknik utama dari PPS adalah pembuatan grafik kendali. Grafik kendali merupakan suatu penyajian secara visual dalam bentuk grafik dari suatu karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung dari sampel menurut nomor sampel atau waktu. Grafik kendali digunakan untuk memonitor proses dan mendeteksi setiap perubahan yang mungkin berpengaruh terhadap hasil dari suatu proses. Grafik kendali biasanya didasarkan pada sampel sebanyak $n \geq 1$ pengamatan yang diperoleh selama selang waktu tertentu dari suatu proses. Secara umum grafik kendali dapat digunakan untuk:

1. Mendiagnosis dan mengoreksi adanya gangguan produksi
2. Mengidentifikasi pola-pola adanya variabilitas yang ditimbulkan oleh sebab-sebab terduga
3. Memberi informasi kapan suatu proses terkendali (*in-control process*) dan kapan suatu proses tak terkendali (*out-of-control process*)

Grafik kendali terdiri dari garis tengah yang merupakan nilai rata-rata dari karakteristik kualitas. Dua garis mendatar lainnya sebagai Batas Pengendali Atas (BPA) dan Batas Pengendali Bawah (BPB). Misal $\bar{b}$ adalah statistik sampel yang mengukur suatu karakteristik kualitas yang menjadi perhatian, rata-rata $\bar{b}$ adalah μ_b dan simpangan baku b adalah σ_b . Model umum grafik kendali adalah sebagai berikut:

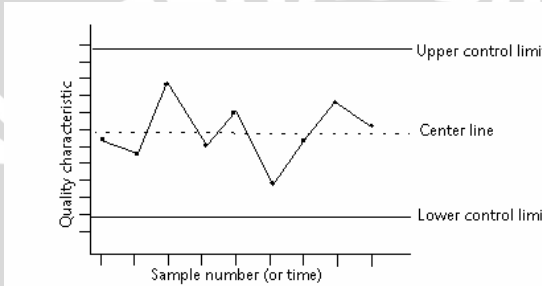
$$\text{BPA} = \mu_b + k\sigma_b$$

$$\text{Garis tengah} = \mu_b$$

$$\text{BPB} = \mu_b - k\sigma_b$$

dengan k adalah jarak batas-batas pengendali dari garis tengah, yang dinyatakan dalam unit simpangan baku. Teori umum grafik kendali ini pertama kali ditemukan oleh Dr. Walter A. Shewhart pada tahun 1924, sehingga grafik kendali yang dikembangkan menurut asas-asas ini kerap kali disebut Grafik Kendali Shewhart. Satu hal yang perlu ditekankan adalah tidak ada hubungan antara batas pengendali

dengan batas spesifikasi. Batas pengendali didorong oleh variabilitas alami proses itu (diukur dengan simpangan baku, σ), yaitu oleh Batas Toleransi Alami proses itu. Batas Toleransi Alami Atas (BTAA) dan Batas Toleransi Alami Bawah (BTAB) proses masing-masing jatuh pada $\mu + 3\sigma$ dan $\mu - 3\sigma$. Sedangkan untuk batas spesifikasi ditentukan dari luar. Batas spesifikasi tersebut mungkin ditentukan oleh manajemen, kepala bagian produksi, langganan, ataupun oleh perancang/pengembang pabrik.



Gambar 2.1 Bentuk Umum Grafik Kendali

Ada hubungan yang dekat antara grafik kendali dan uji hipotesis, di mana H_0 menyatakan bahwa proses terkendali secara statistik sedangkan H_1 menyatakan bahwa proses tidak terkendali secara statistik. Satu titik terletak di dalam batas pengendali adalah ekuivalen dengan menerima hipotesis bahwa proses terkendali secara statistik, satu titik yang terletak di luar batas pengendali adalah ekuivalen dengan menolak hipotesis bahwa proses terkendali secara statistik. Dalam grafik kendali juga diperhitungkan peluang kesalahan tipe I (menyimpulkan proses tak terkendali apabila sebenarnya terkendali) dan peluang kesalahan tipe II (menyimpulkan proses terkendali apabila sebenarnya tak terkendali) (Montgomery, 1995).

Menurut Gazperz (2003), berdasarkan jumlah peubah yang diamati grafik kendali diklasifikasikan ke dalam dua tipe, yaitu:

1. Grafik Kendali Univariat

Merupakan peragaan grafik yang hanya mewakili satu peubah saja, jika ada beberapa peubah yang diamati maka hubungan antar peubah harus saling bebas. Penggunaan grafik kendali ini hanya terbatas pada data univariat yang

berdistribusi normal. Beberapa contoh grafik kendali univariat antara lain: grafik kendali $\bar{X}$, CUSUM (*Cumulative Sum*), dan EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*).

2. Grafik Kendali Multivariat

Merupakan peragaan grafik yang mewakili lebih dari satu peubah yang saling berhubungan (berkorelasi). Grafik kendali multivariat mengontrol peubah-peubah secara simultan atau bersama-sama dengan mempertimbangkan adanya hubungan (korelasi) antar peubah. Penggunaan grafik kendali ini hanya terbatas pada data multivariat berdistribusi normal. Tiga grafik kendali multivariat yang paling populer adalah Hotelling's T^2 , MCUSUM (*Multivariate Cumulative Sum*), dan MEWMA (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*).

Ketika grafik kendali multivariat menunjukkan tanda tak terkendali, yaitu ketika terdapat titik yang jatuh di luar batas pengendali, akan sulit dideteksi peubah mana yang menyebabkan tanda tak terkendali tersebut. Untuk mengatasi hal ini dapat digunakan grafik kendali univariat untuk masing-masing peubah yang berhubungan terhadap proses tersebut. Akan tetapi terdapat beberapa kelemahan jika digunakan teknik ini. Pertama, apabila peubah yang diukur berjumlah banyak maka akan membutuhkan waktu yang lama di dalam mengartikan tanda-tanda tak terkendali tersebut. Kedua, di dalam pengendalian kualitas multivariat, suatu tanda tak terkendali biasanya tidak hanya disebabkan oleh satu peubah saja tetapi lebih merupakan suatu fungsi dari beberapa peubah yang saling berkorelasi sebagai akibat dari sifat saling ketergantungan di antara peubah tersebut. Beberapa metode dapat digunakan untuk mendeteksi peubah mana yang menyebabkan tanda tak terkendali di dalam grafik kendali multivariat, antara lain: batas-batas kendali *Bonferroni-type*, analisis komponen utama, dekomposisi T^2 , dan dekomposisi MEWMA (Anonymous, 2007).

2.6.1 Grafik Kendali EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*)

Pertama kali diperkenalkan oleh S. W. Roberts pada tahun 1959. Grafik kendali berdasarkan rata-rata bergerak geometrik pada periode ke- i yaitu:

$$Z_i = w\bar{x}_i + (1-w)Z_{i-1} \quad (2.14)$$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots$ dan $0 < w \leq 1$ suatu konstan. Nilai rata-rata target adalah μ_0 dan nilai inisialisasi $Z_0 = \mu_0$. Untuk menunjukkan bahwa Z_i adalah rata-rata terbobot dari semua rata-rata sampel sebelumnya, Z_{i-1} di ruas kanan pada persamaan (2.14) dapat diganti sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_i &= w\bar{x}_i + (1-w)[w\bar{x}_{i-1} + (1-w)Z_{i-2}] \\ &= w\bar{x}_i + w(1-w)\bar{x}_{i-1} + (1-w)^2 Z_{i-2} \end{aligned}$$

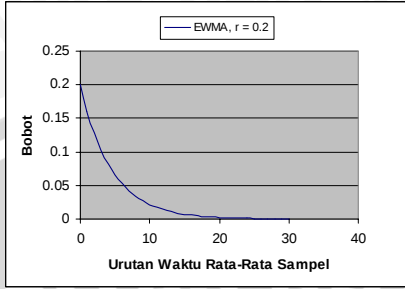
Dengan melakukan substitusi berulang untuk Z_{i-j} , $j = 2, 3, \dots, i$ diperoleh:

$$Z_i = w \sum_{j=0}^{i-1} (1-w)^j \bar{x}_{i-j} + (1-w)^i Z_0 \quad (2.15)$$

Nilai $w(1-w)^j$ menurun secara geometrik dengan tingkat waktu atau urutan waktu rata-rata sampel. Dengan deret geometri berhingga diperoleh:

$$\begin{aligned} w \sum_{j=0}^{i-1} (1-w)^j &= w \left[\frac{1 - (1-w)^i}{1 - (1-w)} \right] \\ &= 1 - (1-w)^i \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jika $w = 0.2$ maka nilai $w(1-w)^j$ rata-rata sampel sekarang ($j = 0$) adalah 0.2 dan nilai sebelumnya ($j = 1, 2, 3, \dots$) adalah 0.16, 0.128, 0.1024, dan seterusnya. Karena nilai bobot tampak menurun secara eksponensial apabila dihubungkan dengan suatu kurva halus seperti tampak pada Gambar 2.2, maka Rata-Rata Bergerak Geometri seringkali disebut *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) atau Rata-Rata Bergerak Terbobot Secara Eksponensial (Montgomery, 1995).



Gambar 2.2 Nilai Bobot Menurun Secara Eksponensial

Jika $\bar{x}_i$ peubah acak bebas berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan ragam σ^2/n maka ragam dari Z_i adalah:

$$\sigma_{Z_i}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{w}{2-w} \right) [1 - (1-w)^{2i}] \quad (2.17)$$

Jika i cukup besar maka ragam dari Z_i dapat disederhanakan menjadi:

$$\sigma_{Z_i}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{w}{2-w} \right) \quad (2.18)$$

Dengan demikian batas pengendali 3-sigma grafik kendali EWMA adalah:

$$\mu \pm 3\sigma \sqrt{\frac{w}{(2-w)n} [1 - (1-r)^{2i}]} \quad (2.19)$$

dan jika jumlah sampel i cukup besar, batas pengendali 3-sigma grafik kendali EWMA adalah:

$$\mu \pm 3\sigma \sqrt{\frac{w}{(2-w)n}} \quad (2.20)$$

Nilai μ dapat diduga dengan $\bar{\bar{x}}$, dan nilai σ dapat diduga dengan s . Misal terdapat sebanyak m titik pengambilan sampel dengan masing-masing mempunyai subsampel berukuran n . Untuk tiap titik pengambilan sampel dapat dihitung:

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.21)$$

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_j)^2}{n-1}} \quad (2.22)$$

Sehingga didapatkan:

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{x}_j}{m} \quad (2.23)$$

$$\bar{s} = \frac{\sum_{j=1}^m s_j}{m} \quad (2.24)$$

$$\hat{\sigma} = s = \frac{\bar{s}}{c_4} \quad (2.25)$$

Di mana c_4 merupakan faktor pembagi yang nilainya sudah ditabelkan seperti yang tersaji pada Lampiran 7.

2.6.2 Grafik Kendali MEWMA (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*)

Pada beberapa situasi, kualitas produk yang dihasilkan dari suatu proses dapat dijelaskan dengan sebuah peubah acak kontinyu yang biasanya diasumsikan berdistribusi normal. Akan tetapi, secara umum produk yang dihasilkan dari suatu proses ditentukan oleh beberapa peubah di mana antar peubah tersebut terdapat korelasi. Jika sebuah proses ditentukan oleh sejumlah p peubah acak kontinyu, maka biasanya diasumsikan bahwa vektor dari p peubah tersebut berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata μ dan matriks peragam Σ . Pengaruh dari sebab-sebab terduga adalah merubah parameter dari distribusi multivariat ini dan sebagian besar penggunaan grafik kendali multivariat adalah untuk mengawasi pergeseran pada μ (Kim dan Reynolds, 2005).

Grafik kendali MEWMA dikembangkan oleh Lowry, *et al.* (1992) berdasarkan EWMA univariat yang dikembangkan oleh S. W. Roberts pada tahun 1959. Bentuk umum dari vektor MEWMA adalah:

$$\tilde{Z}_i = \tilde{W} \tilde{x}_i + (\tilde{I} - \tilde{W}) \tilde{Z}_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.26)$$

di mana $\tilde{Z}_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{ip})'$ adalah vektor MEWMA ke- i

$\tilde{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})'$ adalah vektor acak normal multivariat

dengan vektor rata-rata μ dan matriks peragam Σ_x

$$\tilde{W} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_p); 0 < w_j \leq 1; j = 1, 2, \dots, p$$

Misal nilai vektor rata-rata target $\mu_0 = \underline{0}$ dan nilai

inisialisasi $\tilde{Z}_0 = \mu_0 = \underline{0}$, $\tilde{I}$ merupakan matriks identitas dan $\tilde{W}$ merupakan matriks diagonal dari pembobotan eksponensial. Jika $w_1 = w_2 = \dots = w_p = w$, maka vektor MEWMA dapat ditulis menjadi:

$$\tilde{Z}_i = w \tilde{x}_i + (1 - w) \tilde{Z}_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.27)$$

di mana $\tilde{Z}_0 = \mu_0 = \underline{0}$ dan $0 < w_j \leq 1$ (Lowry, *et al.*, 1992)

Vektor MEWMA pada (2.27) digunakan untuk data pengamatan individual. Untuk kasus data subsampel, data yang digunakan dalam perhitungan vektor MEWMA adalah rata-rata dari titik pengambilan sampel ke- i . Sehingga vektor MEWMA menjadi:

$$\tilde{Z}_i = w \bar{\tilde{x}}_i + (1 - w) \tilde{Z}_{i-1} \quad (2.28)$$

Hasil perhitungan vektor MEWMA (2.28) kemudian akan digunakan untuk menghitung statistik MEWMA sebagai berikut:

$$M_i = \tilde{Z}_i' \Sigma_{\tilde{Z}_i}^{-1} \tilde{Z}_i \quad (2.29)$$

di mana $\Sigma_{\tilde{Z}_i}$ adalah matriks peragam dari $\tilde{Z}_i$. Matriks peragam

$\Sigma_{\tilde{Z}_i}$ dihitung dengan:

$$\Sigma_{\tilde{Z}_i} = \left(\frac{w[1 - (1-w)^{2i}]}{2-w} \right) \Sigma_x \quad (2.30)$$

$i = 1, 2, \dots, m$ dan $0 < w_j \leq 1$

di mana Σ_x adalah matriks peragam dari vektor acak $\tilde{x}_j$. Jika i cukup besar sehingga $(1-w)^{2i}$ mendekati nol, maka matriks peragam MEWMA dapat disederhanakan menjadi:

$$\Sigma_{\tilde{Z}_i} = \left(\frac{w}{2-w} \right) \Sigma_x \quad (2.31)$$

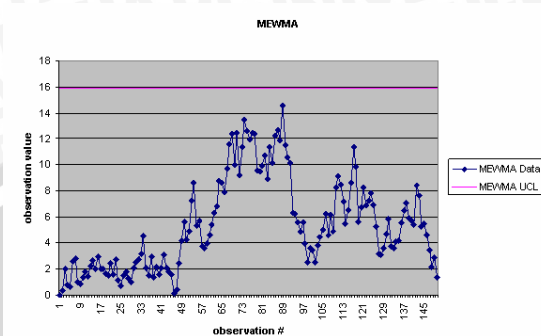
Menurut Lowry, *et al.*(1992), grafik kendali MEWMA akan memberi tanda bahwa suatu proses tak terkendali (*out-of-control*) apabila:

$$M_i = \tilde{Z}_i' \Sigma_{\tilde{Z}_i}^{-1} \tilde{Z}_i > h \quad (2.32)$$

di mana h adalah batas pengendali tertentu untuk mencapai ARL (*Average Run Length*) atau PGR (Panjang Giliran Rata-Rata) tertentu dan $\Sigma_{\tilde{Z}_i}$ adalah matriks peragam dari $\tilde{Z}_i$.

Average Run Length (ARL) atau Panjang Giliran Rata-Rata (PGR) adalah banyak titik sampel rata-rata yang harus digambarkan sebelum satu titik menunjukkan keadaan tak terkendali (Montgomery, 1995). ARL merupakan banyaknya sampel yang diperiksa sebelum tanda pergeseran muncul (Grant dan Leavenworth, 1989). Untuk menghitung ARL MEWMA, diperlukan simulasi dengan menggunakan program komputer yang melibatkan sampel dalam jumlah besar. Menurut Margavio dan Cornely (1995) dalam Lee dan Khoo (2005), perkiraan nilai ARL yang dapat diterima adalah antara 199.5 sampai dengan 200.5.

Di dalam grafik kendali MEWMA hanya terdapat Batas Pengendali Atas (BPA). BPA ini dibentuk berdasarkan jumlah peubah yang diamati, nilai pembobot w dan ARL yang diinginkan. BPA dapat ditentukan dengan menggunakan program Fortran yang dikembangkan oleh Bodden dan Rigdon (1999) yang tersaji pada Lampiran 6.



Gambar 2.3 Grafik Kendali MEWMA

Aparisi dan Garcia-Diaz (2004) menyatakan bahwa untuk dapat mengetahui pergeseran dari rata-rata proses (jarak antara vektor rata-rata semula dengan vektor rata-rata yang baru) yang terjadi dapat dicari dengan *Mahalanobis' Distance* sebagai berikut:

$$\delta = \left[\left(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_0 \right)' \Sigma_{0C}^{-1} \left(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_0 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

di mana : $\tilde{\mu}_0$ merupakan vektor rata-rata proses semula (vektor rata-rata yang terkendali)

$\tilde{\mu}_i$ merupakan vektor rata-rata proses yang baru

Σ_{0C} merupakan matriks peragam dalam bentuk korelasi yang terkendali

Pergeseran rata-rata proses dikatakan kecil jika nilai $\delta < 2$ (Lowry, et al., 1992).

Penentuan nilai pembobot w untuk membuat grafik kendali MEWMA yang optimal dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Pemilihan w untuk MEWMA Optimal ($ARL \cong 200$)

δ		p		
		2	3	4
0.0-0.5	w	0.06	0.06	0.06
	selang pemilihan w	0.04-0.06	0.04-0.06	0.04-0.08
0.51-1.0	w	0.16	0.16	0.14
	selang pemilihan w	0.10-0.20	0.10-0.20	0.10-0.16
1.01-1.5	w	0.24	0.22	0.20
	selang pemilihan w	0.18-0.30	0.20-0.30	0.18-0.30
1.51-2.0	w	0.34	0.30	0.28
	selang pemilihan w	0.24-0.34	0.24-0.34	0.22-0.34

(Lowry, *et al.*, 1992)

Keterangan: w = nilai pembobot
 δ = pergeseran rata-rata proses
 p = jumlah peubah

Untuk dapat membuat grafik kendali MEWMA, perlu diduga parameter μ dan Σ . Nilai μ dapat diduga dengan $\bar{\bar{x}}$, dan nilai Σ dapat diduga dengan $\bar{S}$. Misal untuk kasus data subsampel, terdapat sejumlah p peubah yang diawasi dan terdapat sejumlah m titik pengambilan sampel di mana masing-masing mempunyai subsampel berukuran n .

Untuk tiap titik pengambilan sampel dapat dihitung:

$$\bar{\bar{x}}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \bar{x}_{2i} \\ \vdots \\ \bar{x}_{pi} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

di mana:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{1i} &= \frac{\sum_{k=1}^n x_{1ki}}{n} \\ &\vdots \\ \bar{x}_{pi} &= \frac{\sum_{k=1}^n x_{pki}}{n} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dibentuk vektor $\bar{\bar{x}}$ sebagai berikut:

$$\bar{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ \bar{\bar{x}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\bar{x}}_p \end{bmatrix}$$

di mana:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{1i}}{m} \\ &\vdots \\ \bar{\bar{x}}_p &= \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{pi}}{m} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ragam sampel untuk tiap-tiap elemen dapat dihitung dengan:

$$s_{1i}^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{1ki} - \bar{x}_{1i})^2}{n-1}$$

$$\vdots$$

$$s_{pi}^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{pki} - \bar{x}_{pi})^2}{n-1} \quad (2.36)$$

Peragam untuk tiap pasangan (kombinasi) peubah dapat dihitung dengan:

$$s_{12i} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{1ki} - \bar{x}_{1i})(x_{2ki} - \bar{x}_{2i})}{n-1}$$

$$s_{13i} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{1ki} - \bar{x}_{1i})(x_{3ki} - \bar{x}_{3i})}{n-1}$$

$$\vdots$$

$$s_{(p-1)pi} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{(p-1)ki} - \bar{x}_{(p-1)i})(x_{pki} - \bar{x}_{pi})}{n-1} \quad (2.37)$$

Selanjutnya didapatkan matriks ragam-peragam $\mathcal{S}$ sebagai berikut:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \bar{s}_1^2 & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \dots & \bar{s}_{1p} \\ & \bar{s}_2^2 & \bar{s}_{23} & \dots & \bar{s}_{2p} \\ & & \bar{s}_3^2 & \dots & \bar{s}_{3p} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \bar{s}_p^2 \end{bmatrix}$$

di mana:

$$\begin{aligned} \bar{s}_1^2 &= \frac{\sum_{i=1}^m s_{1i}^2}{m} \\ &\vdots \\ &\bar{s}_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^m s_{pi}^2}{m} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{12} &= \frac{\sum_{i=1}^m S_{12i}}{m} \\
 \bar{S}_{13} &= \frac{\sum_{i=1}^m S_{13i}}{m} \\
 &\vdots \\
 \bar{S}_{(p-1)p} &= \frac{\sum_{i=1}^m S_{(p-1)pi}}{m}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

2.6.3 Grafik Kendali MEWMA (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*) dengan Ukuran Subsampel yang Tidak Sama

Pada sebagian besar penerapan dari grafik kendali multivariat, ukuran subsampel yang digunakan untuk masing-masing peubah adalah sama, akan tetapi terdapat situasi di mana akan lebih tepat apabila digunakan ukuran subsampel yang tidak sama untuk masing-masing peubah. Kim dan Reynolds (2005) menyebutkan bahwa setidaknya ada 4 situasi praktis di mana ukuran subsampel yang tidak sama digunakan untuk p peubah, yaitu:

1. Ketika beberapa peubah dipertimbangkan lebih penting dalam menentukan kualitas produk dibanding dengan peubah yang lain
2. Ketika beberapa peubah mempunyai kemungkinan yang lebih besar untuk berubah karena dipengaruhi oleh sebab-sebab terduga dibanding dengan peubah yang lain
3. Ketika terdapat kendala yang menghalangi pengambilan subsampel dengan ukuran yang sama untuk masing-masing peubah
4. Ketika beberapa peubah membutuhkan biaya yang lebih mahal di dalam pengukurannya dibanding dengan peubah yang lain

Grafik kendali MEWMA dengan ukuran subsampel tidak sama sering disebut grafik kendali *Unequal Sample Size* MEWMA (USS MEWMA). Menggunakan ukuran subsampel yang tidak sama akan meningkatkan kepekaan grafik kendali terhadap arah/tujuan tertentu di mana $\underline{\mu}$ dimungkinkan untuk bergeser.

Misal $\underline{x}$ merupakan vektor pengamatan berukuran $p \times 1$ yang akan diperoleh ketika semua p peubah diukur pada sebuah item. Asumsikan bahwa $\underline{x}$ berdistribusi normal multivariat dengan rata-rata $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ dan matriks peragam $\underline{\Sigma}$ berukuran $p \times p$. $\underline{\mu}_0$ dan $\underline{\Sigma}_0$ secara berturut-turut adalah nilai yang terkendali dari $\underline{\mu}$ dan $\underline{\Sigma}$. μ_{0i} merupakan komponen ke- i dari $\underline{\mu}_0$ dan $\sigma_{0ii'}$ merupakan elemen (i, i') dari $\underline{\Sigma}_0$, sehingga $\sigma_{0i} = \sqrt{\sigma_{0ii}}$ adalah simpangan baku yang terkendali dari peubah ke- i dan $\rho_{0ii'} = \frac{\sigma_{0ii'}}{\sigma_{0i}\sigma_{0i'}}$ adalah koefisien korelasi yang terkendali antara peubah i dan i' .

Anggap bahwa sampel diambil dari proses setiap d unit waktu. Pada tiap titik pengambilan sampel, $n_i \geq 1$ pengamatan didapatkan untuk peubah i , $i = 1, 2, \dots, p$, sehingga paling sedikit satu pengamatan didapatkan untuk tiap-tiap peubah pada tiap-tiap titik pengambilan sampel. Misal $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ adalah vektor dari ukuran subsampel dan x_{kij} merupakan pengamatan ke- j untuk peubah i pada titik pengambilan sampel k untuk $k = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, p$; dan $j = 1, 2, \dots, n_i$. Diasumsikan bahwa $x_{ki1}, x_{ki2}, \dots, x_{kin_i}$ saling bebas untuk tiap $i = 1, 2, \dots, p$. Beberapa peubah memiliki ukuran subsampel yang berbeda, sehingga peragam yang terkendali antara X_{kij} dan $X_{ki'j'}$ adalah $\sigma_{0ii'}$ ketika $j = j'$ dan $j, j' \leq \min(n_i, n_{i'})$.

Selanjutnya akan didefinisikan grafik kendali USS MEWMA dan memperlakukan grafik kendali MEWMA sebagai kasus khusus.

Misal $\bar{x}_{ki} = \sum_{j=1}^{n_i} x_{kij} / n_i$ merupakan rata-rata sampel dari n_i pengamatan untuk peubah i yang didapatkan pada titik pengambilan sampel k dan rata-rata sampel yang dibakukan adalah:

$$Z_{ki} = \frac{\sqrt{n_i}(\bar{x}_{ki} - \mu_{0i})}{\sigma_{0i}} \quad (2.40)$$

Pada titik pengambilan sampel k , vektor rata-rata sampel yang dibakukan adalah:

$$\underline{z}_k = (Z_{k1}, Z_{k2}, \dots, Z_{kp})' \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.41)$$

Statistik EWMA untuk peubah i adalah:

$$E_{ki} = (1 - w)E_{k-1,i} + wZ_{ki} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.42)$$

di mana $E_{0i} = 0$, dan vektor EWMA adalah:

$$\underline{e}_k = (E_{k1}, E_{k2}, \dots, E_{kp})' \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.43)$$

Nilai w yang diberikan adalah sama untuk tiap peubah.

Misal Σ_{0Z} merupakan matriks peragam yang terkendali dari

$\underline{z}_k$, maka matriks peragam yang terkendali dari $\underline{e}_k$ adalah:

$$\Sigma_{0E} = c_k \Sigma_{0Z} \quad (2.44)$$

di mana $c_k = \frac{w(1 - (1 - w)^{2k})}{2 - w} \quad k = 1, 2, \dots, m$

Sebab-sebab terduga dapat merubah satu atau lebih komponen dari $\underline{\mu}$, tetapi $\underline{\Sigma}$ tidak ikut berubah. Sehingga matriks peragam Σ_{0Z} dan Σ_{0E} secara berturut-turut juga tetap merupakan matriks peragam dari $\underline{z}_k$ dan $\underline{e}_k$ setelah pergeseran pada $\underline{\mu}$.

Statistik USS MEWMA dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$Y_k = e'_k \sum_{0E}^{-1} e_k \quad (2.45)$$

Proses tak terkendali jika $Y_k > h$, di mana h adalah batas pengendali tertentu untuk mencapai ARL tertentu. Kim dan Reynolds (2005) menyatakan bahwa BPA yang digunakan dalam grafik kendali MEWMA dapat digunakan juga untuk grafik kendali USS MEWMA.

Menambah ukuran subsampel untuk peubah yang lebih dipentingkan akan meningkatkan kemampuan untuk mendeteksi pergeseran pada peubah tersebut. Akan tetapi, kemampuan untuk mendeteksi pergeseran pada peubah yang lainnya akan berkurang (Kim dan Reynolds, 2005).

2.7 Ukuran Sampel dan Subsampel

Sampel dalam pengendalian kualitas diartikan sebagai kumpulan dari unit-unit produk yang digunakan dalam penyidikan yang diambil berdasarkan selang waktu tertentu. Unit-unit tersebut dinamakan subsampel, yang dihasilkan pada waktu yang sama atau sedekat mungkin bersama (Montgomery, 1995). Dalam merancang grafik kendali, ukuran sampel (m) yang digunakan dan frekuensi pengambilan sampel (n) harus ditentukan. Umumnya makin besar ukuran sampel, makin mudah mengetahui pergeseran kecil dalam proses. Apabila ingin mengetahui pergeseran proses yang relatif besar maka ukuran sampel boleh kecil, sebaliknya apabila ingin mengetahui pergeseran proses relatif kecil maka ukuran sampel harus besar.

Beberapa hal yang harus diperhatikan dalam penentuan ukuran sampel dan subsampel adalah sebagai berikut:

- a. Biaya pengambilan sampel.
- b. Kerugian yang berkaitan dengan membiarkan proses bekerja tak terkendali.
- c. Tingkat dan resiko produksi yang berhubungan dengan produksi yang dilakukan berskala besar (hasilnya) atau kecil, atau cukup aman atau tidak untuk melakukan pengambilan sampel berukuran besar.

Di dalam praktek, biasanya tidak diketahui nilai μ dan Σ .

Oleh karena itu, nilai-nilai tersebut harus ditaksir dari sampel-sampel pendahuluan yang diambil ketika proses itu diduga terkendali. Untuk

sampel pendahuluan, umumnya mengambil ukuran sampel (m) antara 20 sampai 25. Sedangkan untuk subsampel (n) biasanya digunakan 4, 5, atau 6. Menurut Grant dan Leavenworth (1989), ukuran sampel yang dibutuhkan yang dapat digunakan dalam pengawasan produksi paling tidak 25 sampel.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder dan data bangkitan. Data sekunder diambil dari proses produksi Pabrik Gula Kebon Agung, Malang. Pembangkitan data untuk memperoleh data bangkitan dilakukan dengan *software* R 2.5.1 menggunakan *mvtnorm package*.

3.1.1 Data Sekunder

Data sekunder yang digunakan di dalam skripsi ini adalah data sekunder tentang kualitas produk gula SHS (*Super High Sugar*) yang diambil dari proses produksi Pabrik Gula Kebon Agung, Malang. Kualitas produk gula SHS ditentukan oleh 4 peubah, yaitu:

X_1 = Kadar Air yaitu persentase air yang terkandung di dalam gula (%)

X_2 = Brix Gula yaitu persentase zat padat yang terkandung di dalam gula (%)

X_3 = SD (*Sugar Diameter*) yaitu diameter butir gula (mm)

X_4 = Pol Gula yaitu persentase sukrosa di dalam zat padat (%)

Untuk menduga nilai μ dan Σ , diambil sampel pendahuluan sebanyak 20 sampel untuk tiap peubah. Selanjutnya untuk membentuk grafik kendali, diambil sebanyak 30 sampel untuk tiap peubah dengan klasifikasi sebagai berikut:

1. Ukuran subsampel sama

Masing-masing peubah terdiri dari 3 subsampel untuk tiap-tiap titik pengambilan sampel. Total subsampel untuk tiap-tiap titik pengambilan sampel sebanyak 12 subsampel. Data dapat dilihat pada Lampiran 1.

2. Ukuran subsampel tidak sama

Masing-masing peubah memiliki jumlah subsampel yang berbeda. Peubah X_1 dianggap lebih penting dibandingkan peubah yang lainnya. Untuk tiap-tiap titik pengambilan sampel, X_1 terdiri dari 6 subsampel, X_2 terdiri dari 2 subsampel, X_3 terdiri dari 2 subsampel, dan X_4 terdiri dari 2 subsampel. Total subsampel untuk tiap-tiap titik

pengambilan sampel sebanyak 12 subsampel. Data dapat dilihat pada Lampiran 2.

3.1.2 Data Bangkitan

Dibangkitkan data yang berdistribusi normal multivariat dengan klasifikasi sebagai berikut:

1. Ukuran subsampel sama
Data bangkitan terdiri dari 2 peubah, 3 peubah, dan 4 peubah. Masing-masing peubah memiliki ukuran subsampel yang sama yaitu 4 subsampel.
2. Ukuran subsampel tidak sama
Data bangkitan terdiri dari 2 peubah, 3 peubah, dan 4 peubah. Untuk data dengan 2 peubah, peubah pertama memiliki subsampel sebanyak 6 subsampel dan peubah kedua memiliki subsampel sebanyak 2 subsampel. Untuk data dengan 3 peubah, peubah pertama memiliki subsampel sebanyak 8 subsampel dan peubah yang lain memiliki subsampel sebanyak 2 subsampel. Untuk data dengan 4 peubah, peubah pertama memiliki subsampel sebanyak 10 subsampel dan peubah yang lain memiliki subsampel sebanyak 2 subsampel.

Prosedur untuk membangkitkan data dijelaskan sebagai berikut:

Dibangkitkan data sebanyak 100 titik sampel yang terdiri dari 2 peubah, 3 peubah, dan 4 peubah yang berdistribusi $N_p\left(\mu, \Sigma\right)$. Masing-masing terdiri dari 3 jenis data dengan nilai parameter Σ yang berbeda yaitu nilai ragam pada diagonal utama semakin meningkat sebagai berikut:

1. Data dengan 2 Peubah

- a. Data I

$$N_2\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.025 & 0.0318 \\ 0.0318 & 0.05 \end{pmatrix}\right)$$

- b. Data II

$$N_2\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.65 & 0.607 \\ 0.607 & 0.7 \end{pmatrix}\right)$$

c. Data III

$$N_2 \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5.0 & 5.13 \\ 5.13 & 6.5 \end{pmatrix} \right)$$

2. Data dengan 3 Peubah

a. Data I

$$N_3 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.05 & 0.057 & 0.028 \\ 0.057 & 0.08 & 0.036 \\ 0.028 & 0.036 & 0.02 \end{pmatrix} \right)$$

b. Data II

$$N_3 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0.604 & 0.532 \\ 0.604 & 0.9 & 0.714 \\ 0.532 & 0.714 & 0.7 \end{pmatrix} \right)$$

c. Data III

$$N_3 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.5 & 4.91 & 3.76 \\ 4.91 & 8.5 & 5.87 \\ 3.76 & 5.87 & 5.0 \end{pmatrix} \right)$$

3. Data dengan 4 Peubah

a. Data I

$$N_4 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7.5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.025 & 0.032 & 0.017 & 0.04 \\ 0.032 & 0.05 & 0.025 & 0.057 \\ 0.017 & 0.025 & 0.015 & 0.031 \\ 0.04 & 0.057 & 0.031 & 0.08 \end{pmatrix} \right)$$

b. Data II

$$N_4 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7.5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0.53 & 0.32 & 0.49 \\ 0.53 & 0.7 & 0.38 & 0.58 \\ 0.32 & 0.38 & 0.25 & 0.35 \\ 0.49 & 0.58 & 0.35 & 0.6 \end{pmatrix} \right)$$

c. Data III

$$N_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 7.5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.5 & 3.76 & 4.91 & 4.12 \\ 3.76 & 5.0 & 5.87 & 4.93 \\ 4.91 & 5.87 & 8.5 & 6.43 \\ 4.12 & 4.93 & 6.43 & 6.0 \end{pmatrix}$$

Pembangkitan data diulang sebanyak n kali yang diasumsikan sebagai ukuran subsampel sehingga masing-masing peubah mempunyai n subsampel. Diasumsikan bahwa titik sampel yang terbentuk dari data bangkitan adalah terurut berdasarkan urutan waktu. Langkah-langkah pembangkitan data dapat dilihat pada Lampiran 4.

3.2 Metode Penelitian

Untuk data dengan ukuran subsampel yang sama dianalisis dengan menggunakan grafik kendali MEWMA, sedangkan untuk ukuran subsampel yang tidak sama dianalisis dengan menggunakan grafik kendali USS MEWMA.

3.2.1 Uji Kenormalan

Langkah-langkah untuk menguji kenormalan data multivariat adalah sebagai berikut:

1. Menghitung nilai d_i^2 menggunakan persamaan (2.8)
2. Mengurutkan nilai d_i^2 dari yang terkecil sampai terbesar
3. Menghitung nilai q_i menggunakan persamaan (2.9) yang bersesuaian untuk tiap nilai d_i^2
4. Membuat plot d_i^2 versus q_i dan periksa kelinierannya dalam plot
5. Menghitung nilai korelasi antara d_i^2 dan q_i

3.2.2 Grafik Kendali MEWMA

Langkah-langkah untuk membuat grafik kendali MEWMA adalah sebagai berikut:

1. Menghitung pergeseran rata-rata proses δ dengan menggunakan persamaan (2.33) dan menentukan w yang sesuai menggunakan Tabel 2.1

2. Menghitung vektor rata-rata $\bar{x}_i$ untuk tiap titik pengambilan sampel menggunakan persamaan (2.34)
3. Menghitung vektor MEWMA Z_i menggunakan persamaan (2.28) dengan nilai inisialisasi $Z_0 = 0$
4. Menghitung ragam untuk tiap titik pengambilan sampel menggunakan persamaan (2.36) dan peragam untuk tiap titik pengambilan sampel menggunakan persamaan (2.37)
5. Menghitung matriks peragam Σ_x yang diduga dengan $\hat{S}$ di mana elemen-elemennya dihitung menggunakan persamaan (2.38) dan (2.39)
6. Menghitung matriks peragam Σ_{Z_i} menggunakan persamaan (2.30) dan invers dari matriks Σ_{Z_i} yaitu $\Sigma_{Z_i}^{-1}$
7. Menghitung nilai statistik MEWMA menggunakan persamaan (2.29)
8. Menentukan batas pengendali
9. Membuat plot nilai statistik MEWMA beserta batas pengendalnya

3.2.3 Grafik Kendali USS MEWMA

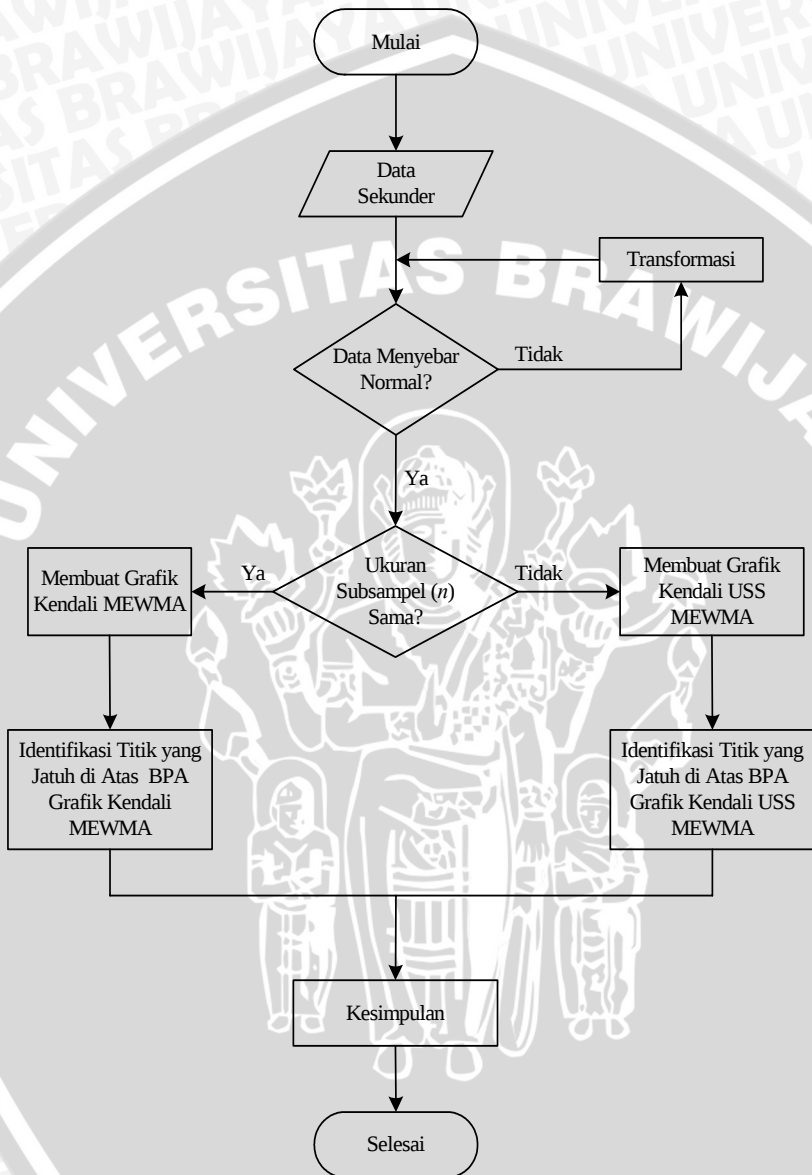
Langkah-langkah untuk membuat grafik kendali USS MEWMA adalah sebagai berikut:

- a. Menghitung pergeseran rata-rata proses δ dengan menggunakan persamaan (2.33) dan menentukan w yang sesuai menggunakan Tabel 2.1
- b. Menghitung nilai Z_{ki} menggunakan persamaan (2.40)
- c. Menghitung statistik EWMA E_{ki} menggunakan persamaan (2.42)
- d. Menghitung matriks peragam Σ_{0Z}
- e. Menghitung statistik USS MEWMA menggunakan persamaan (2.45)
- f. Menentukan batas pengendali

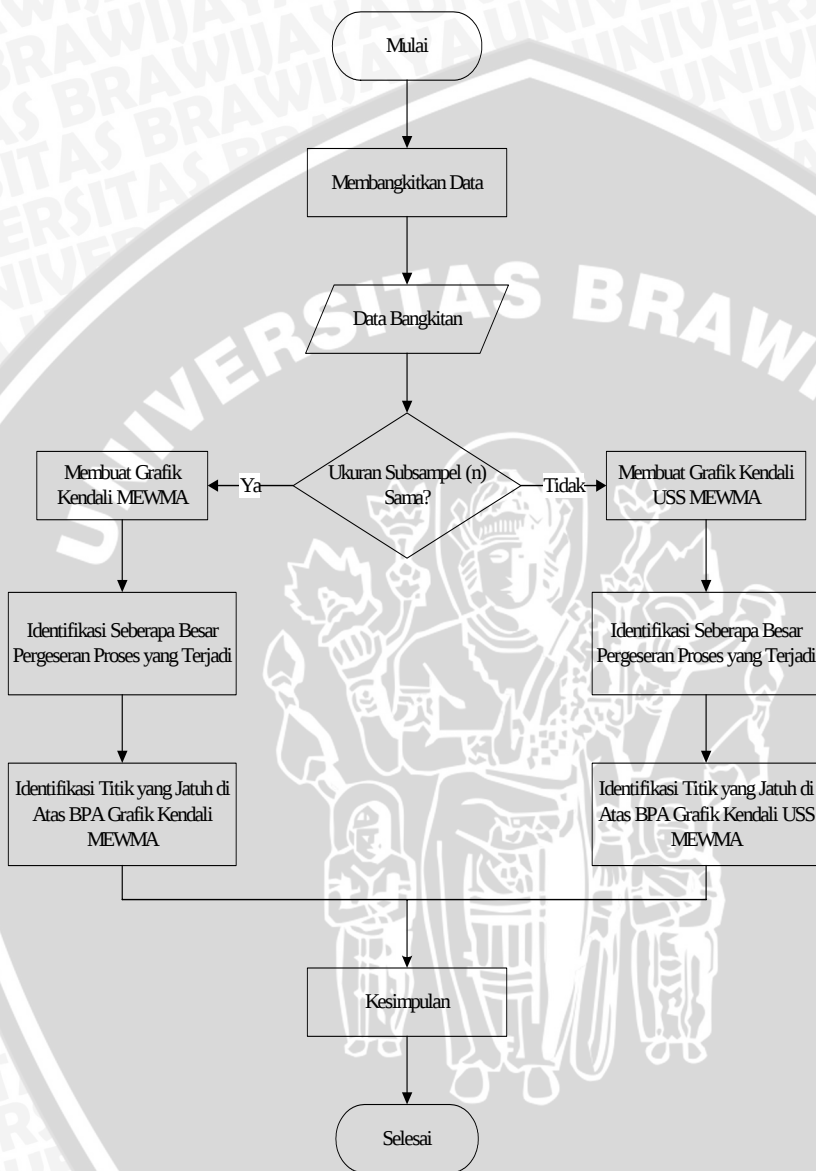
- g. Membuat plot nilai statistik USS MEWMA beserta batas pengendalinya

Diagram alir dari langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2. Analisis data dilakukan dengan bantuan *software* Minitab 13, Minitab 15, Microsoft Fortran Power Station 4.0, dan R 2.5.1.





Gambar 3.1 Diagram Alir Langkah-Langkah Penelitian untuk Data Sekunder



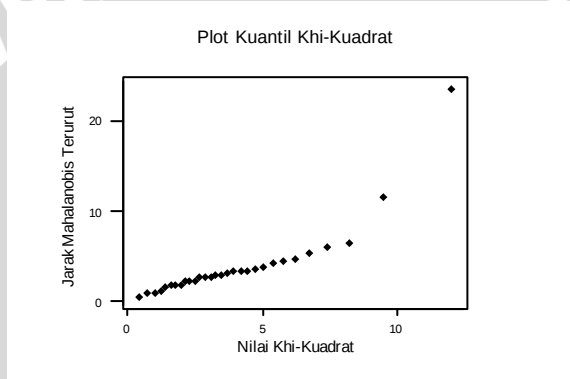
Gambar 3.2 Diagram Alir Langkah-Langkah Penelitian untuk Data Bangkutan

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Uji Kenormalan Data

Sebelum membuat grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA, perlu diuji kenormalan data menggunakan Plot Kuantil Khi-Kuadrat. Plot Kuantil Khi-Kuadrat dibuat dengan menggunakan *macro* Minitab 13. Hasil uji kenormalan data menggunakan Plot Kuantil Khi Kuadrat adalah sebagai berikut:



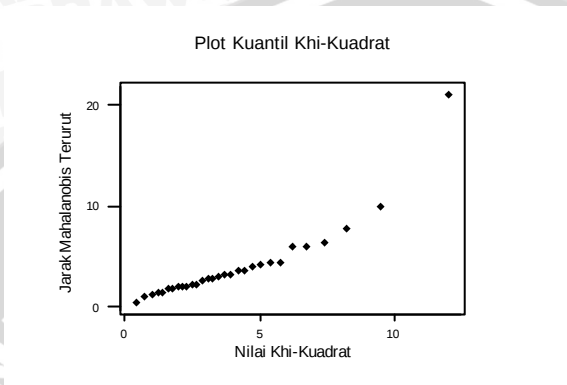
Gambar 4.1 Plot Kuantil Khi Kuadrat Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Sama

Dari Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa pola yang terbentuk cenderung linier. Untuk membuktikan bahwa pola dalam Gambar 4.1 tersebut benar-benar linier, maka dicari nilai korelasi antara Jarak Mahalanobis Terurut (d_i^2) dengan Nilai Khi-Kuadrat (q_i). Hasil analisis korelasi dengan menggunakan Minitab 13 disajikan sebagai berikut:

Pearson correlation of Jarak Mahalanobis Terurut and Nilai Khi-Kuadrat = 0.875
P-Value = 0.000

Didapatkan nilai korelasi sebesar 0.875 dan *p-value* yang dihasilkan yaitu 0.000 lebih kecil dari nilai taraf nyata $\alpha = 0.05$. Ini menunjukkan bahwa d_i^2 dan q_i memiliki hubungan linier yang

nyata, sehingga dapat disimpulkan bahwa data kualitas gula dengan ukuran subsampel sama mengikuti distribusi normal multivariat.



Gambar 4.2 Plot Kuantil Khi Kuadrat Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Tidak Sama

Dari Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa pola yang terbentuk cenderung linier. Untuk membuktikan bahwa pola dalam Gambar 4.2 tersebut benar-benar linier, maka dicari nilai korelasi antara Jarak Mahalanobis Terurut (d_i^2) dengan Nilai Khi-Kuadrat (q_i). Hasil analisis korelasi dengan menggunakan Minitab 13 disajikan sebagai berikut:

Pearson correlation of Jarak Mahalanobis Terurut and Nilai Khi-Kuadrat = 0.913
P-Value = 0.000

Didapatkan nilai korelasi sebesar 0.913 dan *p-value* yang dihasilkan yaitu 0.000 lebih kecil dari nilai taraf nyata $\alpha = 0.05$. Ini menunjukkan bahwa d_i^2 dan q_i memiliki hubungan linier yang nyata, sehingga dapat disimpulkan bahwa data kualitas gula dengan ukuran subsampel tidak sama mengikuti distribusi normal multivariat.

4.2 Grafik Kendali MEWMA dan USS MEWMA

Sebelum dibentuk grafik kendali MEWMA ataupun USS MEWMA, perlu dipilih parameter pembobot w yang tepat dengan

harapan agar grafik kendali yang dibentuk mampu mendeteksi pergeseran proses secara optimal. Untuk dapat memilih pembobot w yang tepat, perlu dihitung terlebih dahulu pergeseran rata-rata proses (δ) yang terjadi.

4.2.1 Data Sekunder

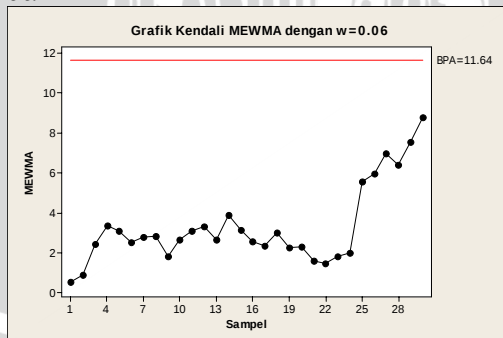
Untuk data kualitas gula dengan ukuran subsampel yang sama dianalisis dengan menggunakan grafik kendali MEWMA. Dari sampel pendahuluan sebanyak 20 sampel, didapatkan vektor rata-rata terkendali adalah: $\mu_0 = (0.108, 99.893, 0.927, 97.924)'$ dan matriks

peragam yang terkendali dalam bentuk korelasi adalah:

$$\Sigma_{0C} = \begin{bmatrix} 1 & -0.865 & 0.110 & -0.268 \\ -0.865 & 1 & -0.057 & 0.254 \\ 0.110 & -0.057 & 1 & -0.058 \\ -0.268 & 0.254 & -0.058 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari 30 sampel yang diambil untuk membentuk grafik kendali MEWMA, vektor rata-rata bergeser menuju $\mu_1 = (0.105, 99.893, 0.909, 97.879)'$. Dengan menggunakan persamaan (2.33) didapatkan hasil pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.053$. Dari Tabel 2.1, dipilih nilai pembobot w yang tepat untuk $\delta = 0.053$, yaitu $w = 0.06$.

Selanjutnya dengan menggunakan Minitab 15 dibentuk grafik kendali MEWMA seperti yang tampak pada Gambar 4.3 sebagai berikut:



Gambar 4.3 Grafik Kendali MEWMA

untuk Data Kualitas Gula

Dari Gambar 4.3 terlihat bahwa tidak terdapat titik sampel yang jatuh diluar Batas Pengendali Atas (BPA). Hal ini mengindikasikan bahwa proses telah terkendali secara statistik.

Untuk data kualitas gula dengan ukuran subsampel yang tidak sama dianalisis dengan menggunakan grafik kendali USS MEWMA. Terdapat 4 peubah yang diawasi dan diasumsikan bahwa peubah X_1 (Kadar Air) dipertimbangkan lebih penting di dalam mempengaruhi kualitas produk dibandingkan peubah yang lainnya. Dari sampel pendahuluan sebanyak 20 sampel, didapatkan vektor rata-rata terkendali adalah: $\mu_0 = (0.10, 99.896, 0.909, 97.799)'$ dan

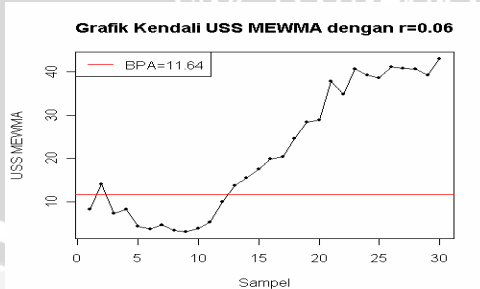
matriks peragam yang terkendali dalam bentuk korelasi adalah:

$$\Sigma_{0C} = \begin{bmatrix} 1 & 0.503 & 0.254 & -0.292 \\ 0.503 & 1 & -0.163 & -0.537 \\ 0.254 & -0.163 & 1 & 0.125 \\ -0.292 & -0.537 & 0.125 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari 30 sampel yang diambil untuk membentuk grafik kendali MEWMA, vektor rata-rata bergeser menuju $\mu_1 = (0.094, 99.904, 0.919, 98.161)'$. Dengan menggunakan

persamaan (2.33) didapatkan hasil pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.434$. Dari Tabel 2.1, dipilih nilai pembobot w yang tepat untuk $\delta = 0.434$, yaitu $w = 0.06$. Menggunakan Microsoft Fortran Power Station 4.0 dihasilkan BPA = 11.64.

Selanjutnya dengan menggunakan R 2.5.1 dibentuk grafik kendali USS MEWMA seperti yang tampak pada Gambar 4.4 sebagai berikut:



Gambar 4.4 Grafik Kendali USS MEWMA

untuk Data Kualitas Gula

Dari Gambar 4.4 terlihat bahwa terdapat 18 titik sampel yang keluar dari BPA, yaitu titik sampel ke-2, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30. Selain itu juga tampak adanya pola kecenderungan (*trend*) naik. Terdapat indikasi bahwa proses tidak terkendali secara statistik yang disebabkan oleh variasi dari sebab-sebab terduga. Ada tiga sumber yang perlu diselidiki dan ditelusuri lebih lanjut berkaitan dengan adanya variasi dari sebab-sebab terduga, yaitu: mesin, operator, dan bahan baku.

4.2.2 Data Bangkitan

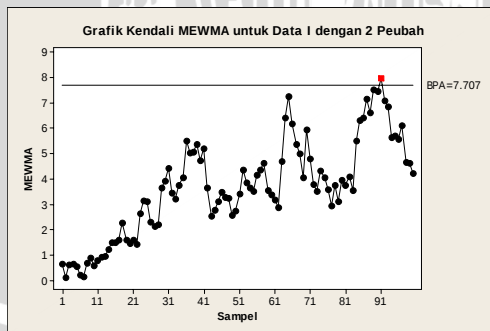
Pembangkitan data dilakukan dengan *software* R 2.5.1 menggunakan *mvtnorm package*.

1) Ukuran Subsampel Sama

Untuk ukuran subsampel sama, dibangkitkan data yang terdiri dari 2 peubah, 3 peubah, dan 4 peubah, di mana masing-masing terdiri dari 3 data bangkitan dengan nilai peragam Σ yang berbeda-beda, yaitu nilai ragam pada diagonal utama yang semakin meningkat. Akan dilihat seberapa besar pergeseran rata-rata proses yang menyebabkan grafik kendali MEWMA menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali.

a. Data I dengan 2 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Grafik Kendali MEWMA untuk

Data I dengan 2 Peubah

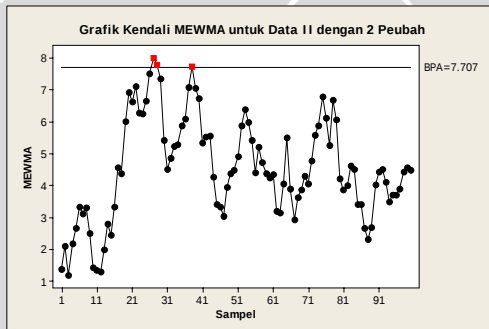
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.0265 & 0.0336 \\ 0.0336 & 0.0518 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali MEWMA pada Gambar 4.5 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-91, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0543$.

b. Data II dengan 2 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Grafik Kendali MEWMA untuk Data II dengan 2 Peubah

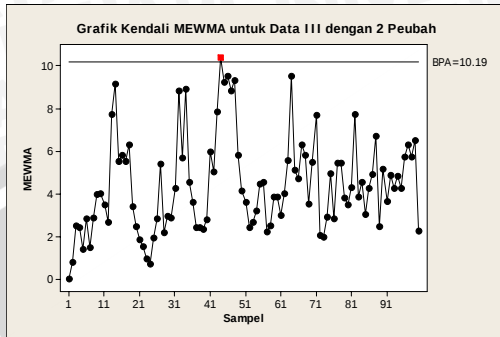
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.693 & 0.651 \\ 0.651 & 0.734 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali MEWMA pada Gambar 4.6 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 3 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-27, 28, dan 38, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.3375$.

c. Data III dengan 2 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Grafik Kendali MEWMA untuk Data III dengan 2 Peubah

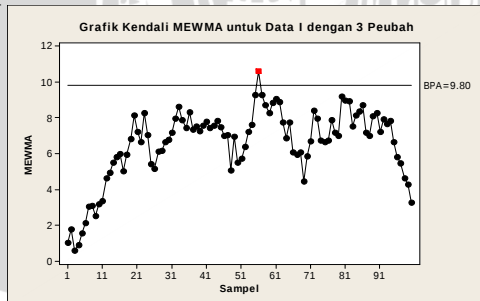
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.655 & 4.722 \\ 4.722 & 6.071 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali MEWMA pada Gambar 4.7 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-44, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 1.9965$.

d. Data I dengan 3 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0508$. Terdapat 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA yaitu titik sampel ke-56. Grafik kendali MEWMA yang terbentuk dapat dilihat pada Gambar 4.8.



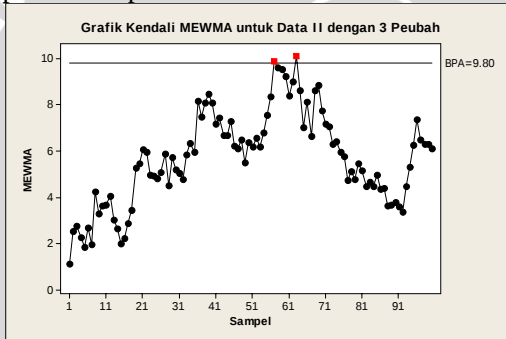
Gambar 4.8 Grafik Kendali MEWMA untuk Data I dengan 3 Peubah

Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.055 & 0.062 & 0.029 \\ 0.062 & 0.084 & 0.036 \\ 0.029 & 0.036 & 0.0197 \end{bmatrix}$$

e. Data II dengan 3 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.3112$. Terdapat 2 titik sampel yang jatuh di atas BPA yaitu titik sampel ke-57 dan 63. Grafik kendali MEWMA yang terbentuk dapat dilihat pada Gambar 4.9.



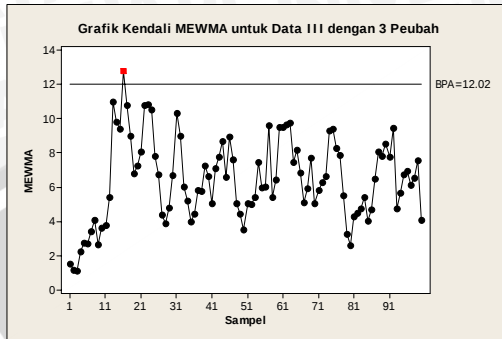
Gambar 4.9 Grafik Kendali MEWMA untuk Data II dengan 3 Peubah

Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.501 & 0.597 & 0.528 \\ 0.597 & 0.894 & 0.703 \\ 0.528 & 0.703 & 0.693 \end{bmatrix}$$

f. Data III dengan 3 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 1.4485$. Terdapat 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA yaitu titik sampel ke-16. Grafik kendali MEWMA yang terbentuk dapat dilihat pada Gambar 4.10.



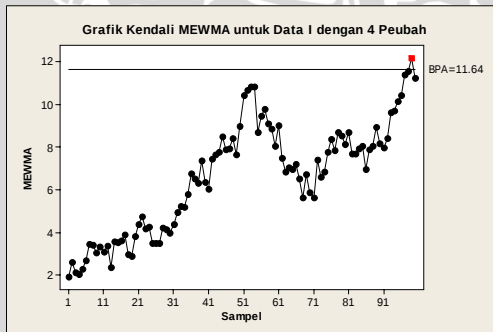
Gambar 4.10 Grafik Kendali MEWMA untuk Data III dengan 3 Peubah

Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3.637 & 5.035 & 3.849 \\ 5.035 & 8.711 & 5.978 \\ 3.849 & 5.978 & 4.993 \end{bmatrix}$$

g. Data I dengan 4 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.11.



Gambar 4.11 Grafik Kendali MEWMA untuk Data I dengan 4 Peubah

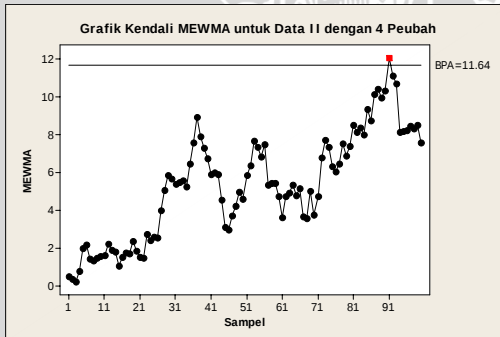
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0269 & 0.034 & 0.018 & 0.042 \\ 0.034 & 0.053 & 0.026 & 0.058 \\ 0.018 & 0.026 & 0.016 & 0.031 \\ 0.042 & 0.058 & 0.031 & 0.080 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali MEWMA pada Gambar 4.11 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-99, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0405$.

h. Data II dengan 4 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Grafik Kendali MEWMA untuk Data II dengan 4 Peubah

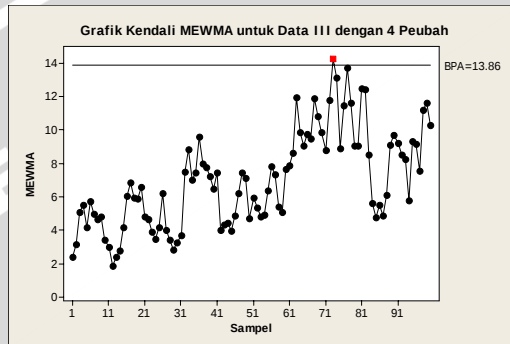
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.462 & 0.504 & 0.289 & 0.440 \\ 0.504 & 0.672 & 0.349 & 0.528 \\ 0.289 & 0.349 & 0.231 & 0.313 \\ 0.440 & 0.528 & 0.313 & 0.535 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali MEWMA pada Gambar 4.12 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-91, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.1776$.

i. Data III dengan 4 Peubah

Grafik kendali MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.13.



Gambar 4.13 Grafik Kendali MEWMA untuk Data III dengan 4 Peubah

Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3.592 & 3.907 & 5.229 & 4.333 \\ 3.907 & 5.240 & 6.232 & 5.187 \\ 5.229 & 6.232 & 9.207 & 6.811 \\ 4.333 & 5.187 & 6.811 & 6.277 \end{bmatrix}$$

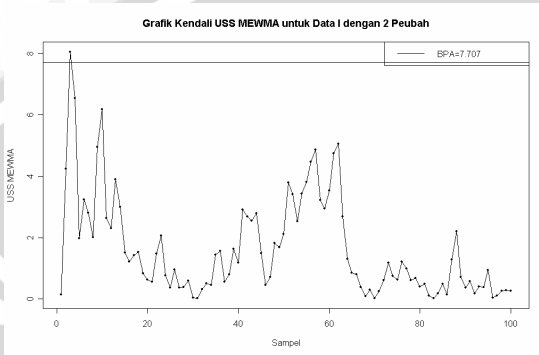
Grafik kendali MEWMA pada Gambar 4.13 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-73, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 1.3499$.

2) Ukuran Subsampel Tidak Sama

Untuk ukuran subsampel tidak sama, dibangkitkan data yang terdiri dari 2 peubah, 3 peubah, dan 4 peubah, di mana masing-masing terdiri dari 3 data bangkitan dengan nilai peragam $\hat{\Sigma}$ yang berbeda-beda, yaitu nilai ragam pada diagonal utama yang semakin meningkat. Akan dilihat seberapa besar pergeseran rata-rata proses yang menyebabkan grafik kendali USS MEWMA menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali.

a. Data I dengan 2 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.14.



Gambar 4.14 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data I dengan 2 Peubah

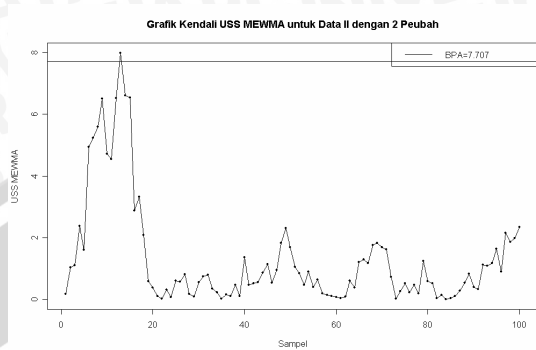
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0266 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0517 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.14 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-3, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0014$.

b. Data II dengan 2 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.15.



Gambar 4.15 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data II dengan 2 Peubah

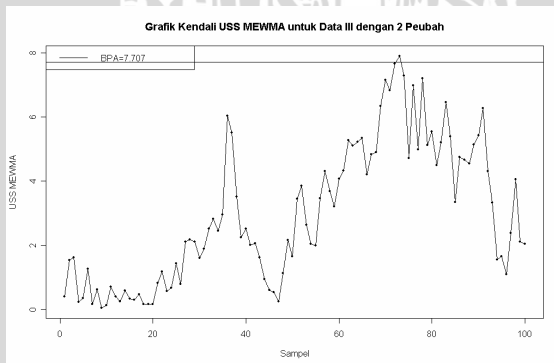
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.672 & -0.009 \\ -0.009 & 0.715 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.15 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-13, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0427$.

c. Data III dengan 2 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.16.



Gambar 4.16 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data III dengan 2 Peubah

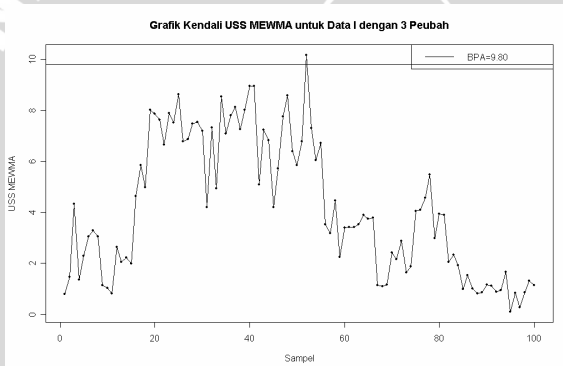
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.911 & -0.269 \\ -0.269 & 6.968 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.16 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-73, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.3619$.

d. Data I dengan 3 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.17.



Gambar 4.17 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data I dengan 3 Peubah

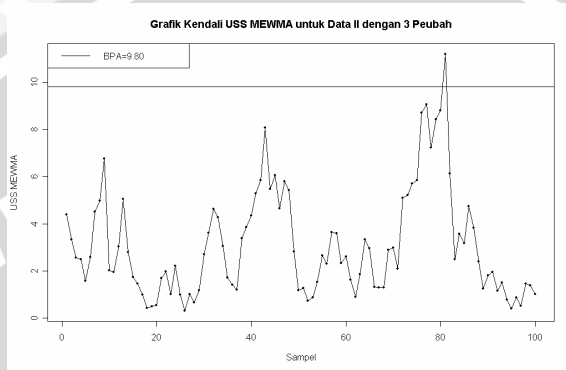
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.052 & -0.009 & -0.006 \\ -0.009 & 0.0820 & 0.037 \\ -0.006 & 0.037 & 0.020 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.17 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke- 52, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0188$.

e. Data II dengan 3 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.18.



Gambar 4.18 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data II dengan 3 Peubah

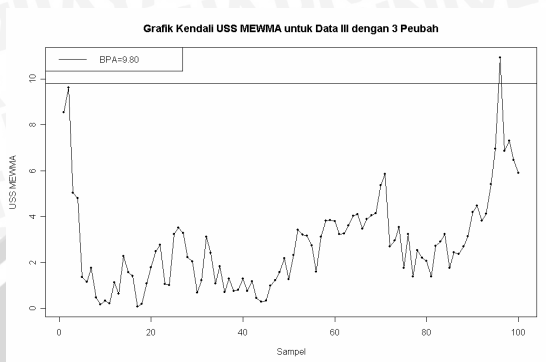
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.487 & 0.065 & 0.026 \\ 0.065 & 0.838 & 0.705 \\ 0.026 & 0.705 & 0.753 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.18 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-79, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0556$.

f. Data III dengan 3 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.19.



Gambar 4.19 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data III dengan 3 Peubah

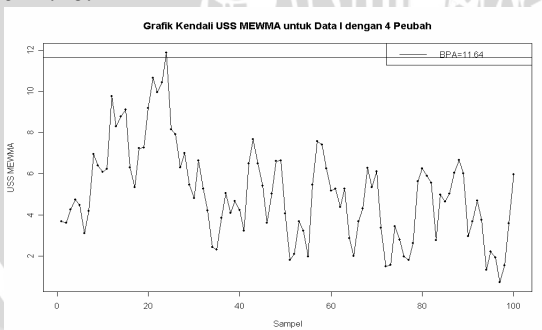
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3.538 & -0.166 & -0.118 \\ -0.166 & 7.906 & 5.420 \\ -0.118 & 5.420 & 4.513 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.19 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-96, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.2181$.

g. Data I dengan 4 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.20.



Gambar 4.20 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data I dengan 4 Peubah

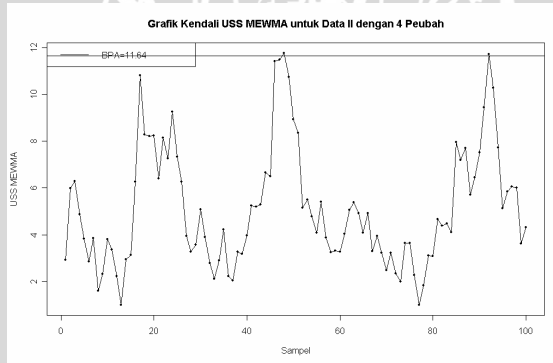
Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.0243 & 0.0076 & 0.0037 & 0.0093 \\ 0.0076 & 0.0539 & 0.0269 & 0.0603 \\ 0.0037 & 0.0269 & 0.0161 & 0.0329 \\ 0.0093 & 0.0603 & 0.0329 & 0.0831 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.20 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 1 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-25, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0157$.

h. Data II dengan 4 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.21.



Gambar 4.21 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data II dengan 4 Peubah

Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

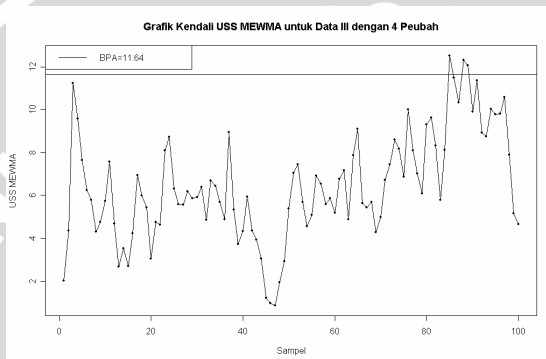
$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.489 & 0.014 & 0.003 & 0.015 \\ 0.014 & 0.615 & 0.299 & 0.434 \\ 0.003 & 0.299 & 0.196 & 0.248 \\ 0.015 & 0.434 & 0.248 & 0.397 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.21 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 2

titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-48, dan 92, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.0758$.

i. Data III dengan 4 Peubah

Grafik kendali USS MEWMA yang terbentuk ditampilkan pada Gambar 4.22.



Gambar 4.22 Grafik Kendali USS MEWMA untuk Data III dengan 4 Peubah

Matriks peragam yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.335 & 0.259 & -0.024 & 0.123 \\ 0.259 & 4.493 & 5.441 & 4.739 \\ -0.024 & 5.441 & 8.480 & 6.381 \\ 0.123 & 4.739 & 6.381 & 6.125 \end{bmatrix}$$

Grafik kendali USS MEWMA pada Gambar 4.22 menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali dengan adanya 3 titik sampel yang jatuh di atas BPA, yaitu titik sampel ke-85, 88 dan 89, pada pergeseran rata-rata proses sebesar $\delta = 0.3998$.

Dari analisis menggunakan data bangkitan, secara umum diperlihatkan bahwa grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA mampu mendeteksi pergeseran rata-rata proses yang kecil, yaitu pergeseran rata-rata proses dengan nilai $\delta < 2$. Besarnya pergeseran rata-rata proses yang menyebabkan munculnya titik di atas BPA sebagai indikasi bahwa proses tidak terkendali pada grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA dipengaruhi oleh besarnya nilai ragam

pada tiap peubah. Semakin besar nilai ragam maka semakin besar pula nilai pergeseran rata-rata proses yang menyebabkan grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali.

Tabel 4.1 Nilai Pergeseran Proses (δ) untuk Data Bangkitan dengan Ukuran Subsampel Sama

Jumlah Peubah		Pergeseran (δ)
2 Peubah	Data I	0.0543
	Data II	0.3375
	Data III	1.9965
3 Peubah	Data I	0.0508
	Data II	0.3112
	Data III	1.4485
4 Peubah	Data I	0.0405
	Data II	0.1776
	Data III	1.3499

Tabel 4.2 Nilai Pergeseran Proses (δ) untuk Data Bangkitan dengan Ukuran Subsampel Tidak Sama

Jumlah Peubah		Pergeseran (δ)
2 Peubah	Data I	0.0014
	Data II	0.0427
	Data III	0.3619
3 Peubah	Data I	0.0188
	Data II	0.0556
	Data III	0.2181
4 Peubah	Data I	0.0157
	Data II	0.0758
	Data III	0.3998

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA mampu mendeteksi pergeseran rata-rata proses yang kecil pada data yang berdistribusi normal multivariat
2. Besarnya pergeseran rata-rata proses yang menyebabkan munculnya tanda bahwa proses tidak terkendali pada grafik kendali MEWMA adalah sebagai berikut: Data dengan 2 Peubah (0.0543; 0.3375; 1.9965), Data dengan 3 Peubah (0.0508; 0.3112; 1.4485), Data dengan 4 Peubah (0.0405; 0.1776; 1.3499) dan pada grafik kendali USS MEWMA adalah sebagai berikut: Data dengan 2 Peubah (0.0014; 0.0427; 0.3619), Data dengan 3 Peubah (0.0188; 0.0556; 0.2181), Data dengan 4 Peubah (0.0157; 0.0758; 0.3998)
3. Besarnya pergeseran rata-rata proses yang menyebabkan munculnya tanda bahwa proses tidak terkendali pada grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA dipengaruhi oleh besarnya nilai ragam pada tiap peubah, semakin besar nilai ragam maka semakin besar pula nilai pergeseran rata-rata proses yang menyebabkan grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA menunjukkan tanda bahwa proses tidak terkendali

5.2 Saran

1. Grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA sebaiknya digunakan jika di dalam pengawasan proses produksi dikehendaki adanya pendeteksian pergeseran rata-rata proses yang kecil
2. Untuk penelitian selanjutnya, perlu dibahas tentang kepekaan grafik kendali MEWMA dan USS MEWMA pada data yang berdistribusi non-normal multivariat

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Anonymous. 2007. <http://www.sys.virginia.edu/mqc/>. Tanggal akses: 19 Februari 2007.
- Aparisi, F. dan J. C. Garcia-Diaz. 2004. Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving average control charts using genetic algorithms. *Computers and Operations Research*. 1437-1454.
- Bodden, K. M. dan S. E. Rigdon. 1999. A program for approximating the in-control arl for the mewma chart. *Journal of Quality Technology*. 31:120-123.
- Gazperz, V. 2003. Metode Analisis untuk Peningkatan Kualitas. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Grant, E. L. dan R. S. Leavenworth. 1989. Pengendalian Mutu Statistis. Jilid Satu. Edisi Keenam. Alih Bahasa: Hudaya Kandahjaya. Penerbit Erlangga. Jakarta.
- Gujarati, D. 1991. Ekonometrika Dasar. Alih Bahasa: Sumarno Zain. Penerbit Erlangga. Jakarta.
- <http://cran.r-project.org/src/contrib/Descriptions/mvtnorm.html>.,
Tanggal akses: 24 Januari 2008.
- <http://lib.stat.cmu.edu/jqt/31-1> , Tanggal akses: 1 Oktober 2007.
- <http://www.sys.virginia.edu/mqc/index2b.html>,
Tanggal akses: 1 Oktober 2007.
- Johnson, R.A. dan D.W. Wichern. 2002. Applied Multivariate Statistical Analysis. Prentice-Hall, Inc. New Jersey.
- Kim, K. dan M.R. Reynolds Jr. 2005. Multivariate monitoring using an mewma control chart with unequal sample sizes. *Journal of Quality Technology*. 37:267-281.

- Kolarik, J. W. 1999. *Creating Quality: Process Design for Results*. McGraw-Hill. Singapore.
- Kume, H. 1989. *Metode Statistik Pengendalian Mutu*. Edisi Kedua. Alih Bahasa: Cornel Naiboho dan Nawolo Widodo. Mediyatama Sarana Perkasa. Jakarta.
- Lee, M. H. dan M. B. C. Khoo. 2006. Optimal statistical design of a multivariate ewma chart based on arl and mrl. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 35:831-847.
- Lowry, C.A., W.H. Woodall, C.W. Champ, dan S.E. Rigdon. 1992. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*. 34:46-53.
- Mattjik, A. A., I. M. Sumertajaya, H. Wijayanto, Indahwati, A. Kurnia, dan B. Sartono. 2002. *Aplikasi Analisis Peubah Ganda*. Jurusan Statistika Fakultas MIPA Institut Pertanian Bogor. Bogor.
- Mendenhall, W., R.L. Scheaffer, dan D.D. Wackerly. 1981. *Mathematical Statistics with Applications*. Second Edition. Duxbury Press. Boston.
- Montgomery, D.C. 1995. *Pengantar Pengendalian Kualitas Statistik*. Alih Bahasa: Zanzawi Soejoeti. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.
- Yuanita, E. 2007. *Perbandingan Analisis Diskriminan Klasik dan Robust*. Skripsi. Fakultas MIPA Universitas Brawijaya. Malang (tidak dipublikasikan).

Lampiran 1. Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Sama

No	X ₁			X ₂			X ₃			X ₄		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0.08	0.1	0.11	99.92	99.91	99.89	0.96	0.95	0.95	97.38	97.9	98.3
2	0.15	0.1	0.12	99.85	99.9	99.88	1.08	0.97	0.88	97.62	97.89	98.6
3	0.05	0.09	0.08	99.95	99.91	99.92	0.97	1.02	0.94	97.68	98.48	98.4
4	0.07	0.11	0.1	99.93	99.89	99.9	0.98	0.96	0.96	97.34	98.32	98.6
5	0.12	0.08	0.11	99.88	99.92	99.89	0.96	0.94	0.9	98.31	98.41	98.4
6	0.09	0.1	0.05	99.91	99.9	99.95	0.91	0.86	0.79	98.5	98.6	97.37
7	0.12	0.05	0.12	99.88	99.91	99.88	0.96	0.94	0.9	97.25	98.5	98.15
8	0.08	0.09	0.13	99.92	99.91	99.87	0.97	0.84	0.86	98.46	98.6	98.42
9	0.17	0.11	0.24	99.82	99.89	99.76	0.84	0.85	0.84	98.17	98.2	98.14
10	0.12	0.1	0.17	99.88	99.9	99.83	0.94	0.82	0.85	98.24	98.2	98.3
11	0.13	0.12	0.1	99.87	99.88	99.9	0.91	0.85	0.92	98.4	98.4	97.51
12	0.11	0.09	0.09	99.89	99.91	99.91	0.88	1.01	0.75	97.93	98.6	97.38
13	0.1	0.05	0.09	99.9	99.95	99.91	0.97	0.83	0.91	98.2	95.18	98.17
14	0.11	0.1	0.13	99.89	99.9	99.87	0.81	0.91	0.82	98	96.94	98.13
15	0.09	0.15	0.12	99.91	99.85	99.88	0.92	0.94	0.98	98.2	97.64	97.93
16	0.11	0.14	0.1	99.89	99.86	99.91	0.96	0.86	0.98	97.9	97.62	96.95
17	0.12	0.14	0.11	99.88	99.86	99.89	0.93	0.96	0.93	98	96.74	98.42
18	0.1	0.16	0.12	99.9	99.84	99.88	0.81	0.95	0.94	98.4	97.54	96.98
19	0.09	0.05	0.08	99.91	99.95	99.92	0.96	0.91	0.95	98.4	96.07	97.94
20	0.16	0.1	0.09	99.84	99.9	99.91	0.85	0.92	0.96	97.65	98.51	98.2
21	0.14	0.11	0.08	99.86	99.89	99.92	1.06	1.01	0.87	97.11	97.92	98.1
22	0.07	0.09	0.06	99.93	99.91	99.94	1.03	0.88	0.86	97.26	98.36	98.1
23	0.12	0.14	0.08	99.88	99.86	99.92	0.91	0.89	0.86	97.32	97.93	98.5
24	0.13	0.1	0.09	99.87	99.9	99.91	0.97	0.91	0.88	96.87	97.59	98.1
25	0.13	0.09	0.07	99.87	99.91	99.83	0.91	0.87	0.9	96.47	98.12	98.2
26	0.12	0.08	0.09	99.88	99.92	99.91	0.81	0.87	0.92	97.86	97.96	98.1
27	0.09	0.11	0.13	99.91	99.89	99.87	0.89	0.84	0.8	98.12	98.1	97.86
28	0.12	0.1	0.07	99.88	99.9	99.93	0.92	1.02	0.91	96.52	98.1	97.68
29	0.09	0.08	0.09	99.91	99.92	99.91	0.9	0.83	0.86	98.21	98.2	96.55
30	0.1	0.09	0.14	99.9	99.91	99.86	0.84	0.85	0.87	98.18	98.5	96.56

Lampiran 2. Data Kualitas Gula dengan Ukuran Subsampel Tidak Sama

No	X ₁						X ₂		X ₃		X ₄	
	1	2	3	4	5	6	1	2	1	2	1	2
1	0.14	0.11	0.08	0.07	0.09	0.06	99.92	99.94	0.87	0.86	98.1	98.1
2	0.12	0.14	0.08	0.13	0.1	0.09	99.92	99.91	0.86	0.88	98.5	98.1
3	0.13	0.09	0.07	0.12	0.08	0.09	99.83	99.91	0.9	0.92	98.2	98.1
4	0.09	0.11	0.13	0.12	0.1	0.07	99.87	99.93	0.8	0.91	97.86	97.68
5	0.09	0.08	0.09	0.1	0.09	0.14	99.91	99.86	0.86	0.87	96.55	96.56
6	0.13	0.07	0.06	0.09	0.08	0.09	99.94	99.91	0.97	0.98	98.66	98.46
7	0.07	0.1	0.11	0.09	0.06	0.11	99.89	99.89	0.86	0.94	98.26	97.98
8	0.1	0.09	0.12	0.1	0.1	0.09	99.88	99.91	0.97	0.93	97.97	98.02
9	0.08	0.12	0.1	0.11	0.12	0.09	99.9	99.91	0.93	0.9	97.92	98.1
10	0.07	0.1	0.11	0.08	0.09	0.12	99.89	99.88	0.94	0.93	98.45	97.85
11	0.11	0.09	0.1	0.08	0.11	0.09	99.9	99.91	0.94	0.91	98.2	98.4
12	0.09	0.08	0.08	0.06	0.09	0.1	99.92	99.9	0.82	0.93	98.4	98.2
13	0.08	0.12	0.09	0.11	0.1	0.08	99.91	99.92	0.89	0.87	98.4	98.5
14	0.08	0.09	0.07	0.08	0.1	0.11	99.93	99.89	0.89	0.96	98.3	97.82
15	0.1	0.08	0.1	0.09	0.11	0.06	99.9	99.94	0.95	0.86	97.86	98.18
16	0.08	0.09	0.08	0.11	0.1	0.09	99.92	99.91	0.91	1.07	98.16	98.65
17	0.1	0.08	0.12	0.09	0.09	0.11	99.88	99.89	0.98	0.87	98.42	98.18
18	0.08	0.1	0.09	0.1	0.07	0.12	99.91	99.88	0.89	0.92	98.55	98.43
19	0.09	0.06	0.08	0.11	0.08	0.1	99.92	99.9	0.87	0.91	98.16	98.14
20	0.09	0.11	0.08	0.1	0.08	0.09	99.92	99.91	0.95	0.91	98.13	97.95
21	0.06	0.1	0.1	0.07	0.08	0.07	99.9	99.93	0.88	0.88	98.4	98.4
22	0.11	0.09	0.1	0.09	0.12	0.11	99.9	99.89	0.92	0.91	98	98.3
23	0.08	0.1	0.09	0.06	0.08	0.1	99.91	99.9	0.88	0.89	98.1	98.4
24	0.12	0.09	0.08	0.11	0.09	0.12	99.92	99.88	0.91	0.98	98.5	98.2
25	0.08	0.1	0.08	0.1	0.09	0.11	99.92	99.89	0.96	1.08	97.86	98.63
26	0.09	0.08	0.12	0.1	0.09	0.05	99.88	99.95	1.01	0.96	97.92	98.47
27	0.11	0.1	0.1	0.09	0.08	0.11	99.9	99.89	1	0.93	98.24	98.25
28	0.1	0.07	0.1	0.11	0.09	0.08	99.9	99.92	0.94	0.92	98.1	97.9
29	0.1	0.12	0.11	0.09	0.11	0.1	99.89	99.9	0.92	0.89	98.64	98.12
30	0.12	0.07	0.09	0.11	0.08	0.08	99.91	99.92	0.95	0.96	98.44	98.34

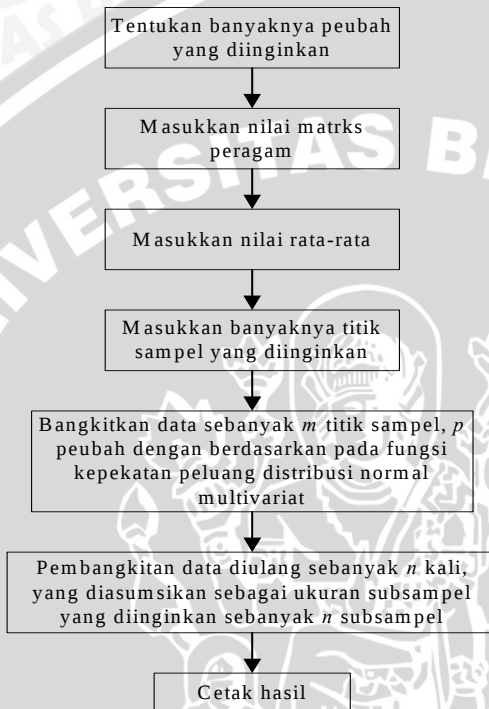
Lampiran 3. *Macro* Minitab untuk Menguji Kenormalan Multivariat

```
macro
mahalanobis x.1-x.p
mcolumn x.1-x.p y.1-y.p
mcolumn c1 c2 pj q
mconstant i j k l
mmatrix m1 m2 m3 m4 m5
name c1='j.mahalanobis' c2='Jarak Mahalanobis
Terurut' q='Nilai Khi-Kuadrat'
do i=1:p
  let y.i=x.i-mean(x.i)
enddo
cova x.1-x.p m1
inve m1 m2
let k=count(x.1)
do j=1:k
  copy y.1-y.p m3;
  use j.
  tran m3 m4
  mult m3 m2 m5
  mult m5 m4 l
  let c1(j)=l
enddo
sort c1 c2
do j=1:k
  let pj(j)=(j-0.5)/k
enddo
brief 1
INVCDF pj q;
CHISQUARE p.
plot q*c2;
symbol;
title "Plot Kuantil Khi-Kuadrat"
print c1 c2 q j
print (q,c2)
endmacro
```

(Sumber: Yuanita, 2007)

Lampiran 4. Pembangkitan Data Normal Multivariat

a. Langkah-Langkah Pembangkitan Data Normal Multivariat:



b. Source Code R dari mvtnorm Package untuk Membangkitkan Data Berdistribusi Normal Multivariat

```
function (n, mean = rep(0, nrow(sigma)), sigma =  
diag(length(mean)),  
method = c("svd", "chol"))  
{  
  if (nrow(sigma) != ncol(sigma)) {  
    stop("sigma must be a square matrix")  
  }  
  if (length(mean) != nrow(sigma)) {  
    stop("mean and sigma have non-conforming  
size")  
  }  
}
```

Lampiran 4. (Lanjutan)

```
method <- match.arg(method)
if (method == "svd") {
  ev <- eigen(sigma, sym = TRUE)$values
  if (!all(ev >= -sqrt(.Machine$double.eps) *
abs(ev[1]))) {
    warning("sigma is numerically not
positive definite")
  }
  sigsvd <- svd(sigma)
  retval <- t(sigsvd$v %*% (t(sigsvd$u) *
sqrt(sigsvd$d)))
}
if (method == "chol") {
  retval <- chol(sigma, pivot = T)
  o <- order(attr(retval, "pivot"))
  retval <- retval[, o]
}
retval <- matrix(rnorm(n * ncol(sigma)), nrow =
n) %*% retval
retval <- sweep(retval, 2, mean, "+")
retval
}
<environment: namespace:mvtnorm>
```

(Sumber: <http://cran.r-project.org/src/contrib/Descriptions/mvtnorm.html>)

c. Contoh Perintah untuk Membangkitkan Data Normal Multivariat

Dibangkitkan data sebanyak 500 titik sampel yang terdiri dari 2 peubah yang berdistribusi normal multivariat dengan nilai rata-rata

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} \text{ dan matriks peragam } \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 7.79 \\ 7.79 & 7.5 \end{bmatrix}.$$

Perintah:

```
> sigma=matrix(c(10,7.79,7.79,7.5),ncol=2)
> data=rmvnorm(n=500,mean=c(1.5,2.5),sigma=sigma)
```

Untuk mencetak hasil:

```
> data
```

Lampiran 5. *Source Code* R untuk Membentuk Grafik Kendali
USS MEWMA

```
function(x,mu.k=NA)
{
nk<-dim(x)[1]
ni<-dim(x)[2]
xmat<-as.matrix(x)
mu0i<-mean(xmat)
sigma0i<-sd(as.vector(xmat))
xki<-apply(x,FUN=mean,MARGIN=1)
if (is.na(mu.k))
zki<-((xki-mu0i)*sqrt(ni))/sigma0i
else
zki<-((xki-mu.k)*sqrt(ni))/sigma0i
zki
}

function(zki,r)
{
n<-length(zki)
Eki<-numeric(n)
for (k in 1:n)
{
if (k==1)
Eki[k]<-r*zki[k]
else
Eki[k]<-(1-r)*Eki[(k-1)]+r*zki[k]
}
Eki
}

function(x,r,mu=NA)# program utama "USSMEWMA.stat",
                    # untuk membentuk grafik
                    # kendali USS MEWMA
{
if (!is.list(x))
stop()
nlist<-length(x)
nr<-dim(x[[1]])[1]
zki<-NA
Eki<-NA
```

Lampiran 5. (Lanjutan)

```
for (k in 1:nlist)
{
  if (!is.na(mu[k]))
    mu.k<-mu[k]
  else
    mu.k<-NA
  zki<-cbind(zki,baku(x[[k]],mu.k))
}
zki<-matrix(c(na.omit(as.vector(zki))),nrow=nr)

for (k in 1:nlist)
{
  Eki<-cbind(Eki,EWMA.stat(zki[,k],r))
}
Eki<-matrix(c(na.omit(as.vector(Eki))),nrow=nr)
SIGMA0Z<-cov(zki)
c<-numeric(nr)

for (k in 1:nr)
{
  c[k]<-(r*(1-((1-r)^(2*k))))/(2-r)
}
cinv<-1/c
Y<-numeric(nr)

for (k in 1:nr)
{
  Eki.k<-matrix(Eki[k,])
  Y[k]<-cinv[k]*(Eki[k,]%*%solve(SIGMA0Z)%*%Eki.k)
}
Y
}
```

Lampiran 6. *Source Code* Fortran untuk Menghitung Batas Pengendali Atas Grafik Kendali MEWMA dan USS MEWMA

```

PROGRAM MEWMA

C *****
C * This program is designed to compute either the *
C * upper control limit (h4) for the MEWMA , when *
C * the desired in-control ARL is given, or the ARL*
C * for a given h4 value. The smoothing constant *
C * (r) and the number of quality characteristics *
C * (np) are given by the user. *
C *****
C *****
C *                               Main Program                               *
C *****

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /ival/ np, nlimit
      COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
      CHARACTER*1      jopt
1  WRITE(*,*) 'Enter the smoothing constant r: '
      READ(*,*) r
      IF ((r .LT. 0.0D0) .OR. (r .GT. 1.0D0)) THEN
        PRINT*
        WRITE(*,*) 'Need 0 <= r <= 1 .'
        PRINT*
        GOTO 1
      END IF
2  WRITE(*,*) 'Enter the number of',
    & ' quality characteristics: '
      READ(*,*) np
      IF (np .LT. 2) THEN
        PRINT*
        WRITE(*,*) 'The number of quality',
    & ' characteristics must be',
    & ' an integer > 1.'
        PRINT*
        GOTO 2
      END IF
      PRINT*
3  WRITE(*,*) ' Enter A if you would like to ',
    & ' obtain the ARL for a fixed value',
    & ' of h4, or enter H if you would',
    & ' like to determine the value of',
    & ' h4 that yields the desired ARL:'
      READ(*,7) jopt
      IF ((jopt .EQ. 'A') .OR.
    & (jopt .EQ. 'a')) THEN
        WRITE(*,*) 'Enter the value for h4: '
        READ(*,*) h4
        CALL ICHECK(' h4 value: ', h4, *1, *4)
4      arlval = ARL(h4)
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,9) "Smoothing constant: ", r

```

Lampiran 6. (lanjutan)

```

WRITE(*,10) "Quality characteristics: ", np
WRITE(*,9) "h4 value: ", h4
WRITE(*,9) "Average run length: ", arlval
WRITE(*,*)

ELSE IF ((jopt .EQ. 'H') .OR.
& (jopt .EQ. 'h')) THEN

    WRITE(*,*) 'Enter the desired ARL: '
    READ(*,*) desarl
    CALL ICHECK('Desired ARL: ', desarl, *1, *5)
5    CALL SECANT(desarl)
    ELSE
        GO TO 3
    END IF
7    FORMAT (A1)
9    FORMAT (1X,A26,F11.4)
10   FORMAT (1X,A26,I6)
11   FORMAT (1X,A11,A11)
    END
C    *****
C    SUBROUTINE ICHECK(jarg, argval, *, *)
C    *****
C    * Checks to see if input is correct. *
C    *****
    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
    COMMON /ival/ np ,nlimit
    COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
    CHARACTER*1 jcheck
    CHARACTER*13 jarg
    WRITE(*,9) 'Smoothing constant: ', r
    WRITE(*,10) "Quality characteristics: ", np
    WRITE(*,9) jarg, argval
    PRINT*
1    WRITE(*,*) 'Is the information correct ?'
    WRITE(*,*) 'Enter Y for yes or N for no: '
    READ(*,7) jcheck
    IF ((jcheck .EQ. 'N') .OR.
& (jcheck .EQ. 'n')) THEN
        RETURN 1
    ELSE IF ((jcheck .EQ. 'Y') .OR.
& (jcheck .EQ. 'y')) THEN
        RETURN 2
    ELSE
        GO TO 1
    END IF
7    FORMAT (A1)
9    FORMAT (1X,A26,F11.4)
10   FORMAT(1X,A26,I6)
    END
C    *****
C    SUBROUTINE SECANT(desarl)
C    *****
C    * This subroutine uses the secant method to *
C    * calculate the value of h4 that satisfies *
C    *  $val(0 | h4) = desarl$  *

```

Lampiran 6. (lanjutan)

```

C      * Where vall( 0 | h4) denotes the          *
C      * in-control ARL. (dmax is the maximum    *
C      * number of iterations)                   *
C      *****
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /ival/ np, nlimit
      COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
      max = 60
      WRITE(*,8) " Smoothing constant (r): ", r
      WRITE(*,7) "Quality characteristics: ", np
      WRITE(*,9) "      Desired ARL: ", desarl
      WRITE(*,5) "Iteration", "      ARL ", "      h4 "
      WRITE(*,5) "_____", "_____", "_____"
      h40 = 12.0D0 + 1.53D0*DBLE(np) + 8.0D-4*desarl
      z0 = ARL(h40) - desarl
      indsec = 1
      WRITE(*,6) indsec, (z0 + desarl), h40
      IF (DABS(z0) .GT. 0.0D0) THEN
          h41 = h40 - 2.0D0
      ELSE
          h41 = h40 + 2.0D0
      ENDIF
      z1 = ARL(h41) - desarl
      indsec = 2
      WRITE(*,6) indsec, (z1 + desarl), h41
      DO i=3,max
          h42 = h41 - z1*(h41 - h40) / (z1 - z0)
          z2 = ARL(h42) - desarl
          WRITE(*,6) i, (z2 + desarl), h42
          h40 = h41
          h41 = h42
          z0 = z1
          z1 = z2
          diff = DABS(h41 - h40)
          IF (diff .LE. epsilon) THEN
              indsec = i + 1
              GOTO 4
          END IF
      END DO
4      WRITE(*,*)
      & '_____ '
      WRITE(*,*)

5      FORMAT(1X, A9, 6X, A9, 6X, A9)
6      FORMAT(5X, I2, 9X, F9.2, 6X, F9.4)
7      FORMAT(1X, A25, I6)
8      FORMAT(1X, A25, F11.4)
9      FORMAT(1X, A25, F11.4,/)
10     FORMAT(12X, A12, A11)
      END
C      *****
C      FUNCTION ARL(h4)
C      *****
C      * This function computes the average run length *
C      * (ARL) for the MEWMA control chart for a      *
C      * specified upper control limit (h4), smoothing *

```

Lampiran 6. (lanjutan)

```

C      * constant (r), and number of quality      *
C      * characteristics to be studied (np)        *
C      *****
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /ival/ np, nlimit
      COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
      DIMENSION AUGINV(50,50), weight(50),
&      valk(50,50), A(50,50), valL(50),
&      F(50), coef(50,50), AUG(50,50),
&      eye(50,50), delta(50)
      h5 = (r / (2.0D0 - r))*h4
      cnst2 = (h5/2.0D0)
      DO i=1, nlimit
          delta(i) = epsilon + cnst2 + cnst2*xxx(i,1)
          weight(i) = cnst2*xxx(i,2)
      END DO
      DO i=1, nlimit
          deltai = delta(i)
          DO j=1, nlimit
              deltaj = delta(j)
              valk(i,j) = vkern(deltai, deltaj)
          END DO
      END DO
      DO i=1, nlimit
          F(i) = 1.0D0
          DO j=1, nlimit
              coef(i,j) = weight(j)
              A(i,j) = (coef(i,j))*(valk(i,j))
              IF (i .EQ. j) THEN
                  eye(i,j) = 1.0D0
              ELSE
                  eye(i,j) = 0.0D0
              END IF
              AUG(i,j) = eye(i,j) - A(i,j)
          END DO
      END DO
      CALL XINV(AUG, AUGINV)
      CALL PROD(AUGINV, F, valL)
      ARL = valL(1)
      END
C      *****
C      FUNCTION vkern(delta, s)
C      *****
C      * Kernel element of the routine following, *
C      * used to estimate the pdf of the non-central *
C      * chi-square distribution. *
C      *****
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /ival/ np, nlimit
      COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
      x = (s/(r*r))
      val = (1.0D0 - r)/r
      valncp = val*val*delta
      z = ( pdnccs(x, valncp) ) / (r*r)

```

Lampiran 6. (lanjutan)

```

vkern = z
END
C *****
C FUNCTION pdnccs(x, valncp)
C *****
C * This function computes the probability *
C * density of the noncentral chi-squared *
C * distribution evaluated at x; with (np) *
C * degrees of freedom and noncentrality *
C * parameter (noncnt). *
C *****
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C COMMON /ival/ np, nlimit
C COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
C IF ((r .LE. .5) .AND. (valncp .GT. 150)) THEN
C   pdnccs = dncsda(x,valncp)
C ELSE
C   dnp = DBLE(np)
C   term1 = EXPFN(-.5D0*(x + valncp))
C   const = (2.0D0)**(.5D0*dnp)
C   term2 = (term1 / const)
C   term3 = x*valncp/4.0D0
C   term = (x**(.5D0*dnp - 1.0D0)) /
& GAMMA(.5D0*dnp)
C   sum = term
C   j = 1
C   DO 10
C     dj = DBLE(j)
C     term = term * term3 /
& ((.5D0*dnp+dj-1.0D0)*dj)
C     sum = sum + term
C     IF (term .LT. epsilon) GOTO 20
C     j = j + 1
10 CONTINUE
20 pdnccs = (term2)*(sum)
C   ENDIF
C   END
C *****
C FUNCTION dncsda(x,valncp)
C *****
C * Computes an estimate of the non-central *
C * chi-square pdf using a normal approximation. *
C * The approximation was taken from *
C * Handbook of Mathematical, Scientific, *
C * and Engineering Formulas, Tables, *
C * Functions, Graphs, Transforms *
C * (1984, revised printing 1988) *
C *****
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C COMMON /ival/ np, nlimit
C COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
C DATA PI/3.14159265359D0/
C dnp = DBLE(np)
C a = dnp + valncp
C b = valncp/(dnp + valncp)

```

Lampiran 6. (lanjutan)

```

      dmu = DSQRT(2.0D0*a/(1.0D0+b) - 1.0D0)
      sig2 = 1.0D0
      val1 = 1.0D0/DSQRT(2.0D0*PI*sig2)
      sig = DSQRT(sig2)
      val5 = DSQRT(2.0D0*x/(1.0D0+b))
      dncsda = val1 * DEXP(-.5D0*((val5-dmu)/sig) *
&      ((val5-dmu)/sig)) *
&      (1.0D0/(2.0D0*val5)) * (2.0D0/(1.0D0+b))
      END
C *****
C      FUNCTION GAMMA(xx)
C *****
C      * This function computes the value of *
C      * gamma(xx) for xx > 0. It uses a rational *
C      * function approximation which is essentially *
C      * Hastings approximation. *
C      *****
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,0-Z)
      sum = 0
      ixx = INT(xx)
      DO 10 n=1, ixx-1
          dn = DBLE(n)
          sum = sum + DLOG(xx - dn)
10      CONTINUE
      dn = dn + 1.0D0
      x1 = xx - dn
      x2 = x1*x1
      x3 = x2*x1
      x4 = x3*x1
      x5 = x4*x1
      x6 = x5*x1
      x7 = x6*x1
      x8 = x7*x1
      g = 1.0D0 - 0.577191652D0*x1 + 0.988205891D0*x2
&      - 0.897056937D0*x3 + 0.918206857D0*x4
&      - 0.756704078D0*x5 + 0.482199394D0*x6
&      - 0.193527818D0*x7 + 0.035868343D0*x8
      GAMMA = g * DEXP(sum)
      RETURN
      END
C *****
C      FUNCTION EXPFN(xval)
C *****
C      * Controls for underflow when evaluating the *
C      * function exp(xval). *
C      *****
      IMPLICIT REAL*8(A-H,0-Z)
      UFLOW = -500.0D0
      IF (xval .LE. UFLOW) THEN
          EXPFN = 0.0D0
      ELSE
          EXPFN = DEXP(xval)
      ENDIF
      END
C *****
C      SUBROUTINE XINV(AUG, AUGINV)

```

Lampiran 6. (lanjutan)

```

C      *****
C      * Calculate the inverse of the matrix AUG where*
C      * AUG = eye - A. The inverse is the n+1 column*
C      * vectors which are the solutions to AX=B where*
C      *
C      *      1      0      0
C      *      B=  0      , 1      , ..., 0
C      *      :      :      :
C      *      0      0      1
C      *
C      *****
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      COMMON /ival/ np, nlimit
C      COMMON /array/r,xxx(50,2),epsilon
C      DIMENSION AUG(50,50), AUGINV(50,50), X(50),
&      AUGT(50, 50)
C      DO ind = 1, nlimit
C      DO i=1, nlimit
C      AUG(i, nlimit+1) = 0.0D0
C      DO j = 1, nlimit
C      AUGT(i,j) = AUG(i,j)
C      ENDDO
C      ENDDO
C      AUG(ind, nlimit+1) = 1.0D0
C      DO i = 1, nlimit
C      ** Locate nonzero diagonal entry **
C      IF (DABS(AUG(i,i)) .LE. epsilon) THEN
C      npivot = 0
C      j = i + 1
30      IF ((npivot .EQ. 0) .AND.
&      (j .LE. nlimit)) THEN
C      IF (DABS(AUG(j,i)) .GT. epsilon) THEN
C      npivot = j
C      END IF
C      j = j + 1
C      GO TO 30
C      END IF
C      IF (npivot .EQ. 0) THEN
C      STOP 'MATRIX IS SINGULAR'
C      ELSE
C      ** Interchange rows i and npivot ***
C      DO j = 1, nlimit+1
C      temp = AUG(i,j)
C      AUG(i,j) = AUG(npivot,j)
C      AUG(npivot,j) = temp
C      ENDDO
C      END IF
C      END IF
C      ** Eliminate ith unknown from ***
C      ** equations i+1, ..., nlimit ***
C      DO j = i + 1, nlimit
C      xmult = -AUG(j,i) / AUG(i,i)
C      DO k = i, nlimit+1
C      AUG(j,k) = AUG(j,k) + xmult*AUG(i,k)
C      ENDDO
C      ENDDO

```

Lampiran 6. (lanjutan)

```

                                ENDDO
C  ** Find the solutions ***
                                Xnum = AUG(nlimit, nlimit + 1)
                                Xden = AUG(nlimit, nlimit)
                                X(nlimit) = Xnum / Xden
                                DO j = nlimit-1, 1, -1
                                    X(j) = AUG(j,nlimit+1)
                                    DO k = j + 1, nlimit
                                        X(j) = X(j) - AUG(j,k)*X(k)
                                    ENDDO
                                    X(j) = X(j) / AUG(j,j)
                                ENDDO
C  *** Put solution into AUGINV matrix ***
                                DO j=1, nlimit
                                    AUGINV(j,ind) = X(j)
                                ENDDO
                                DO i = 1, nlimit
                                    DO j = 1, nlimit
                                        AUG(i,j) = AUGT(i,j)
                                    ENDDO
                                ENDDO
                                END
C  *****
C  SUBROUTINE PROD(AUGINV, F, valL)
C  *****
C  * Calculate the product of matrices *
C  * AUGINV and F. *
C  *****
                                IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
                                COMMON /ival/ np, nlimit
                                DIMENSION AUGINV(50,50), F(50),
                                & valL(50)
                                DO i = 1, nlimit+1
                                    sum = 0.0D0
                                    DO j = 1, nlimit+1
                                        sum = sum + AUGINV(i,j)*F(j)
                                    ENDDO
                                    valL(i) = sum
                                ENDDO
                                END
C  *****
                                BLOCK DATA
                                IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
                                COMMON /ival/ np, nlimit
                                COMMON /array/r,xxx(50,2),epslon
                                DATA nlimit/48/,epslon/1.0D-8/
                                DATA ((xxx(i,j), j=1,2), i=1,48)
                                &/ -1.000000000000000000, 0.0008680555555555556 ,
                                & -0.996815500101172076, 0.005345579628845765 ,
                                & -0.989337912541926162, 0.009603345551856183 ,
                                & -0.977623138429484980, 0.013817738874809271 ,
                                & -0.961722254795566622, 0.01797265357083222 ,
                                & -0.941703513132110026, 0.022050529685245171 ,
                                & -0.917652682929882286, 0.026033955858195271 ,
                                & -0.889672770715431335, 0.029905889784945662 ,

```

Lampiran 6. (lanjutan)

& -0.857883598344460032,	0.033649756952390463 ,
& -0.822421295698331831,	0.037249527996751623 ,
& -0.783437719846155751,	0.040689789317951670 ,
& -0.741099805634426269,	0.043955809798239195 ,
& -0.695588851242958231,	0.047033604175064650 ,
& -0.647099742035433817,	0.049909993059006868 ,
& -0.595840116135041487,	0.052572659433223936 ,
& -0.542029475344821331,	0.055010201429378796 ,
& -0.485898245241646763,	0.057212181169856888 ,
& -0.427686788479489076,	0.059169169474386057 ,
& -0.367644375532824279,	0.060872786243151668 ,
& -0.306028117290724131,	0.062315736345288487 ,
& -0.243101864074195127,	0.063491840860036231 ,
& -0.179135075792380770,	0.064396063537317130 ,
& -0.114401668076417894,	0.065024532364737514 ,
& -0.049178839332363210,	0.065374556148845975 ,
& 0.016254116263833859,	0.065444636039760693 ,
& 0.081617004746232289,	0.065234471949892564 ,
& 0.146629932192228035,	0.064744963839333900 ,
& 0.211014503271412870,	0.063978207862454768 ,
& 0.274495013377611998,	0.062937487392253945 ,
& 0.336799629239276566,	0.061627258960954684 ,
& 0.397661552952809006,	0.060053133177125867 ,
& 0.456820164454478545,	0.058221850701159936 ,
& 0.514022137539061200,	0.056141253382171116 ,
& 0.569022524646860642,	0.053820250680226434 ,
& 0.621585805774928711,	0.051268781518251304 ,
& 0.671486897022692059,	0.048497771727984373 ,
& 0.718512114456469665,	0.045519087274148504 ,
& 0.762460089171490172,	0.042345483461026732 ,
& 0.803142629644749895,	0.038990550347152928 ,
& 0.840385527710328803,	0.035468654620299217 ,
& 0.874029304759641082,	0.031794878226319879 ,
& 0.903929895100081608,	0.027984954133074460 ,
& 0.929959263886618519,	0.024055199855878627 ,
& 0.952005958004138795,	0.020022450233048356 ,
& 0.969975591182829878,	0.015903994737382806 ,
& 0.983791277688609234,	0.011717546846874561 ,
& 0.993394119715343174,	0.007481473991793522 ,
& 0.998745140050780040,	0.003219702225518571 /

END

C *****	
C *	END *
C *****	

(Sumber: <http://lib.stat.cmu.edu/jqt/31-1>)

Lampiran 7. Faktor-Faktor untuk Pendugaan σ dari $\bar{s}$

Jumlah Subsampel (n)	Faktor c_4 $c_4 = \frac{\bar{s}}{\sigma}$
2	0.7979
3	0.8862
4	0.9213
5	0.9400
6	0.9515
7	0.9594
8	0.9650
9	0.9693
10	0.9724
11	0.9754
12	0.9776
13	0.9794
14	0.9810
15	0.9823
16	0.9835
17	0.9845
18	0.9854
19	0.9862
20	0.9869
30	0.9914
40	0.9936
50	0.9949
60	0.9958
70	0.9964
80	0.9968
90	0.9972
100	0.9975

(Sumber: Grant dan Leavenworth, 1989)

Lampiran 8. Nilai Korelasi Antar Peubah

1. Data Sekunder

- Ukuran Subsampel Sama

	X1	X2	X3	X4
X1	1	-0.909 (0.000)	0.119 (0.260)	-0.082 (0.445)
X2		1	-0.126 (0.236)	0.005 (0.966)
X3			1	-0.028 (0.791)
X4				1

- Ukuran Subsampel Tidak Sama

	X1	X2	X3	X4
X1	1	-0.072 (0.584)	0.163 (0.213)	-0.004 (0.977)
X2		1	-0.292 (0.024)	0.164 (0.211)
X3			1	0.036 (0.784)
X4				1

2. Data Bangkitan

- Ukuran Subsampel Sama

Data dengan 2 Peubah

Data I

	X1	X2
X1	1	0.906 (0.000)
X2		1

Data II

	X1	X2
X1	1	0.912 (0.000)
X2		1

Lampiran 8. (lanjutan)

Data III

	X1	X2
X1	1	0.888 (0.000)
X2		1

Data dengan 3 Peubah

Data I

	X1	X2	X3
X1	1	0.909 (0.000)	0.888 (0.000)
X2		1	0.889 (0.000)
X3			1

Data II

	X1	X2	X3
X1	1	0.892 (0.000)	0.895 (0.000)
X2		1	0.894 (0.000)
X3			1

Data III

	X1	X2	X3
X1	1	0.894 (0.000)	0.903 (0.000)
X2		1	0.906 (0.000)
X3			1

Lampiran 8. (lanjutan)

Data dengan 4 Peubah

Data I

	X1	X2	X3	X4
X1	1	0.917 (0.000)	0.902 (0.000)	0.896 (0.000)
X2		1	0.921 (0.000)	0.892 (0.000)
X3			1	0.889 (0.000)
X4				1

Data II

	X1	X2	X3	X4
X1	1	0.905 (0.000)	0.883 (0.000)	0.885 (0.000)
X2		1	0.886 (0.000)	0.880 (0.000)
X3			1	0.889 (0.000)
X4				1

Data III

	X1	X2	X3	X4
X1	1	0.900 (0.000)	0.909 (0.000)	0.913 (0.000)
X2		1	0.897 (0.000)	0.904 (0.000)
X3			1	0.896 (0.000)
X4				1

Lampiran 8. (lanjutan)

- Ukuran Subsampel Tidak Sama

Data dengan 2 Peubah

Data I

	X1	X2
X1	1	0.017 (0.813)
X2		1

Data II

	X1	X2
X1	1	-0.014 (0.849)
X2		1

Data III

	X1	X2
X1	1	-0.046 (0.518)
X2		1

Data dengan 3 Peubah

Data I

	X1	X2	X3
X1	1	-0.144 (0.041)	-0.169 (0.016)
X2		1	0.896 (0.000)
X3			1

Data II

	X1	X2	X3
X1	1	0.102 (0.150)	0.043 (0.548)
X2		1	0.887 (0.000)
X3			1

Lampiran 8. (lanjutan)

Data III

	X1	X2	X3
X1	1	-0.031 (0.659)	-0.029 (0.679)
X2		1	0.908 (0.000)
X3			1

Data dengan 4 Peubah

Data I

	X1	X2	X3	X4
X1	1	0.209 (0.003)	0.188 (0.008)	0.207 (0.003)
X2		1	0.917 (0.000)	0.902 (0.000)
X3			1	0.901 (0.000)
X4				1

Data II

	X1	X2	X3	X4
X1	1	0.025 (0.722)	0.009 (0.904)	0.034 (0.632)
X2		1	0.859 (0.000)	0.879 (0.000)
X3			1	0.888 (0.000)
X4				1

Lampiran 8. (lanjutan)

Data III

	X1	X2	X3	X4
X1	1	0.079 (0.260)	-0.005 (0.940)	0.033 (0.647)
X2		1	0.882 (0.000)	0.903 (0.000)
X3			1	0.885 (0.000)
X4				1



Lampiran 9. Data Bangkitan

- Ukuran Subsampel Sama

Data dengan 2 Peubah

Data I

No	X ₁			X ₂		
	1	...	4	1	...	4
1	9.714	...	10.163	7.171	...	7.587
2	9.856	...	9.974	7.292	...	7.583
	.		.	.		.
	.		.	.		.
	.		.	.		.
99	9.883	...	10.225	7.255	...	7.796
100	9.947	...	9.915	7.245	...	7.458

Data II

No	X ₁			X ₂		
	1	...	4	1	...	4
1	9.529	...	9.563	7.240	...	7.076
2	9.932	...	10.383	7.421	...	8.006
	.		.	.		.
	.		.	.		.
	.		.	.		.
99	8.668	...	9.413	6.040	...	7.013
100	10.759	...	9.975	8.361	...	7.890

Data III

No	X ₁			X ₂		
	1	...	4	1	...	4
1	11.203	...	8.783	8.879	...	6.343
2	4.408	...	9.179	1.746	...	6.742
	.		.	.		.
	.		.	.		.
	.		.	.		.
99	10.720	...	6.788	7.669	...	5.236
100	11.694	...	7.590	9.242	...	3.479

Lampiran 9. (lanjutan)

Data dengan 3 Peubah

Data I

No	X ₁			X ₂			X ₃		
	1	...	4	1	...	4	1	...	4
1	5.064	...	5.065	10.016	...	10.129	7.557	...	7.471
2	5.038	...	5.154	9.96	...	10.154	7.580	...	7.524
.			.			.			.
.			.			.			.
.			.			.			.
99	5.506	...	5.138	10.565	...	9.998	7.741	...	7.545
100	4.796	...	5.129	9.698	...	10.167	7.393	...	7.555

Data II

No	X ₁			X ₂			X ₃		
	1	...	4	1	...	4	1	...	4
1	5.310	...	5.498	11.140	...	10.902	8.035	...	7.794
2	4.877	...	4.483	10.233	...	8.760	7.468	...	6.669
.			.			.			.
.			.			.			.
.			.			.			.
99	4.652	...	5.555	10.246	...	11.049	7.070	...	7.867
100	6.373	...	5.482	11.892	...	11.096	9.082	...	8.466

Data III

No	X ₁			X ₂			X ₃		
	1	...	4	1	...	4	1	...	4
1	6.150	...	5.019	10.522	...	7.748	7.850	...	6.204
2	3.636	...	2.166	6.929	...	5.314	5.210	...	5.858
.			.			.			.
.			.			.			.
.			.			.			.
99	1.872	...	4.218	4.661	...	9.471	4.200	...	5.865
100	5.968	...	3.207	12.448	...	10.162	8.781	...	5.566

Lampiran 9. (lanjutan)

Data dengan 4 Peubah

Data I

No	X ₁			...	X ₄		
	1	...	4		1	...	4
1	5.196	...	5.045	...	8.302	...	8.158
2	4.963	...	5.012	...	8.004	...	7.873
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
99	4.979	...	5.147	...	7.811	...	8.367
100	5.076	...	5.052	...	8.248	...	8.173

Data II

No	X ₁			...	X ₄		
	1	...	4		1	...	4
1	5.006	...	4.183	...	8.158	...	6.776
2	4.458	...	5.560	...	7.176	...	8.542
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
.	.		.		.		.
99	5.016	...	3.976	...	8.133	...	6.656
100	4.704	...	4.052	...	8.076	...	7.298

Data III

No	X ₁			...	X ₄		
	1	...	4		1	...	4
1	4.591	...	8.316	...	7.266	...	10.946
2	2.136	...	6.409	...	5.826	...	10.301
.			.		.		.
.			.		.		.
.			.		.		.
99	5.101	...	4.212	...	7.255	...	8.352
100	4.752	...	5.760	...	7.757	...	11.158

Lampiran 9. (lanjutan)

- Ukuran Subsampel Tidak Sama

Data dengan 2 Peubah

Data I

No	X ₁			X ₂	
	1	...	6	1	2
1	9.714	...	9.961	7.171	7.743
2	9.856	...	10.113	7.292	6.980
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
99	9.883	...	9.910	7.255	7.619
100	9.947	...	9.996	7.245	7.835

Data II

No	X ₁			X ₂	
	1	...	6	1	2
1	9.529	...	10.360	7.240	7.399
2	9.932	...	9.304	7.421	8.848
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
99	8.668	...	10.993	6.040	8.432
100	10.759	...	9.442	8.361	7.018

Data III

No	X ₁			X ₂	
	1	...	6	1	2
1	11.203	...	10.491	8.879	8.321
2	4.408	...	7.003	1.746	4.962
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
99	10.720	...	7.855	7.669	4.215
100	11.694	...	9.204	9.242	6.013

Lampiran 9. (lanjutan)

Data dengan 3 Peubah

Data I

No	X ₁			X ₂		X ₃	
	1	...	8	1	2	1	2
1	5.064	...	4.860	10.016	10.154	7.557	7.575
2	5.038	...	5.129	9.968	9.657	7.580	7.318
.	.		.	.	.	.	.
.	.		.	.	.	.	.
.	.		.	.	.	.	.
99	5.506	...	4.772	10.565	9.731	7.741	7.371
100	4.796	...	5.179	9.698	9.841	7.393	7.287

Data II

No	X ₁			X ₂		X ₃	
	1	...	8	1	2	1	2
1	5.310	...	5.277	11.140	9.774	8.035	6.743
2	4.877	...	4.454	10.233	11.420	7.468	8.584
.	.		.	.	.	.	.
.	.		.	.	.	.	.
.	.		.	.	.	.	.
99	4.652	...	4.398	10.246	10.234	7.070	7.543
100	6.373	...	4.661	11.892	9.360	9.082	6.534

Data III

No	X ₁			X ₂		X ₃	
	1	...	8	1	2	1	2
1	6.150	...	7.975	4.310	7.748	3.437	6.204
2	3.636	...	2.441	10.583	5.314	8.566	5.858
.	.		.	.	.	.	.
.	.		.	.	.	.	.
.	.		.	.	.	.	.
99	1.872	...	4.880	14.199	9.471	10.510	5.865
100	5.968	...	5.994	10.747	10.162	7.431	5.566

Lampiran 9. (lanjutan)

Data dengan 4 Peubah

Data I

No	X ₁			X ₂		...	X ₄	
	1	...	10	1	2	...	1	2
1	5.196	...	4.700	7.786	7.509	...	8.302	8.286
2	4.963	...	4.913	7.480	7.748	...	8.004	8.241
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
99	4.979	...	5.136	7.471	7.533	...	7.811	8.194
100	5.076	...	5.339	7.533	7.787	...	8.248	8.163

Data II

No	X ₁			X ₂		...	X ₄	
	1	...	10	1	2	...	1	2
1	5.006	...	5.106	7.727	6.982	...	8.158	6.984
2	4.458	...	4.848	6.235	6.791	...	7.176	6.744
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
99	5.016	...	3.933	7.538	7.264	...	8.133	7.763
100	4.704	...	5.118	7.003	8.432	...	8.076	8.036

Data III

No	X ₁			X ₂		...	X ₄	
	1	...	10	1	2	...	1	2
1	4.591	...	6.216	8.117	9.202	...	7.266	11.703
2	2.136	...	2.823	7.195	3.437	...	5.826	5.528
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
99	5.101	...	0.915	8.301	4.972	...	7.255	6.393
100	4.752	...	4.459	7.485	6.060	...	7.757	6.855