MATRIKS GENERATOR DAN KODE DUAL DARI KODE ADDITIF $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

oleh:

ALVIN SOFIFATONI
135090401111031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2017

MATRIKS GENERATOR DAN KODE DUAL DARI KODE ADDITIF $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
ALVIN SOFIFATONI
135090401111031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2017

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

MATRIKS GENERATOR DAN KODE DUAL
DARI KODE ADDITIF $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

oleh:
ALVIN SOFIFATONI
135090401111031

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 09 Agustus 2017
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Vira Hari Krisnawati, S.Si., M.Sc
NIP. 198209252006042001

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : ALVIN SOFIFATONI
NIM : 135090401111031
Jurusan : MATEMATIKA
Judul Skripsi : MATRIKS GENERATOR DAN KODE DUAL DARI KODE ADDITIF $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya saya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 09 Agustus 2017
Yang menyatakan,

(ALVIN SOFIFATONI)
NIM. 135090401111031

MATRIKS GENERATOR DAN KODE DUAL DARI KODE ADDITIF $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

ABSTRAK

Kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ adalah suatu subgrup dari suatu ruang vektor $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ yang merupakan *direct product* dari ruang vektor $\mathbb{Z}_2^\alpha$ dengan panjang vektor α atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_2$ dan ruang vektor $\mathbb{Z}_4^\beta$ dengan panjang vektor β atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_4$. Pada artikel ini dibahas kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dan korespondensi dengan bentuk binernya yaitu kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan menggunakan perluasan pemetaan Gray.

Kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ memiliki matriks generator yang dapat digunakan untuk fungsi *encoding.* Pada artikel ini, dibahas pembentukan matriks generator dalam bentuk standar. Selain itu dikaji juga mengenai definisi hasil kali dalam di kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ yang dapat digunakan untuk mencari kode dual dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

Kata Kunci : *kode linear, kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$, matriks generator, pemetaan Gray, inner product, kode dual.*

GENERATOR MATRICES AND DUAL CODE OF $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-ADDITIF CODE

ABSTRACT

The $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive code is a subgroup of a vector space $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ which is the direct product of the vector space $\mathbb{Z}_2^\alpha$ which vector length α over the commutative ring with the unity $\mathbb{Z}_2$ and the vector space $\mathbb{Z}_4^\beta$ which vector length β over the commutative ring with unity $\mathbb{Z}_4$. In this article discuss $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive code and correspondence with binary images is $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-linear code by using extended Gray mapping.

$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive code has a generator matrix that can be used for encoding function. In this article, we describe to transform generator matrix in standard form. Also we explain about the definition of inner products in $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive code which can be used to find the dual code of $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-additive code.

Keyword : *linear code,* $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-*additive code, generator matrices, Gray mapping, inner product, dual code***.**

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul '*Matriks Generator dan Kode Dual dari Kode Additif* $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$' sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika.

Dalam penulisan skripsi ini penulis mendapat banyak bimbingan, motivasi dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Vira Hari Krisnawati, S.Si., M.Sc selaku dosen pembimbing skripsi yang tak pernah lelah memberikan bimbingan, nasehat, kritik dan saran serta motivasinya.
2. Dra. Ari Andari, M.Si dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penguji skripsi atas segala kritik dan saran untuk perbaikan skripsi ini.
3. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
4. Ayah, ibu, kakak, serta keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan semangat serta kasih sayangnya kepada penulis.
5. Sahabat tercinta dan teman-teman Matematika 2013 atas segala dukungannya.
6. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk perbaikan penulisan selanjutnya dan dapat disampaikan melalui email penulis alvinsofifatoni1@gmail.com. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca umumnya.

Malang, 09 Agustus 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$\mathbb{Z}_2$	Himpunan bilangan bulat modulo 2
$\mathbb{Z}_4$	Himpunan bilangan bulat modulo 4
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\in$	Anggota/ elemen
$f: A \to B$	Pemetaan dari A ke B
Id	Pemetaan identitas
$\cong$	Isomorfik
$\mathbb{Z}_q^n$	Ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_q$ dengan panjang n
$\langle S \rangle$	Membangun /merentang
$\perp$	Ortogonal
C	Himpunan kode
$C^{\perp}$	Kode dual dari C
$\lvert C \rvert$	Banyaknya elemen pada C
$wt(c)$	Bobot Hamming dari c
$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	Jarak Hamming dari $\boldsymbol{x}$ **ke** $\boldsymbol{y}$
$W_C(x, y)$	Bobot enumerator dari kode C
G	Matriks generator dari kode C
G_S	Matriks generator dalam bentuk standar dari kode C

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan cabang ilmu murni matematika yang berkembang pesat. Salah satu bahasan yang dipelajari dalam aljabar adalah struktur aljabar yang melibatkan himpunan dengan satu atau lebih operasi biner. Jenis struktur aljabar yang mendasar adalah grup dan ring. Grup adalah suatu himpunan dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma tertentu. Dikenal juga grup abelian yang operasi binernya memenuhi hukum komutatif. Berdasarkan order atau jumlah elemennya, grup dibagi atas grup berhingga dan grup tak berhingga. Sedangkan ring adalah suatu himpunan yang dilengkapi dua operasi biner yang merupakan grup terhadap operasi penjumlahan dan asosiatif terhadap operasi pergandaan serta berlaku distributif. Salah satu jenis ring adalah ring komutatif dengan elemen satuan yaitu ring yang terhadap operasi pergandaan berlaku komutatif dan memiliki elemen identitas. Contohnya adalah $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$ yang secara berturut-turut merupakan himpunan bilangan bulat modulo 2 dan 4.

Di samping itu, materi yang dipelajari dalam aljabar adalah ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan. Ruang vektor merupakan teori matematika yang menggunakan operasi penjumlahan vektor dan pergandaan dengan skalar. Contohnya adalah $\mathbb{Z}_2^\alpha$ dan $\mathbb{Z}_4^\beta$ yang secara berturut-turut merupakan ruang vektor atas $\mathbb{Z}_2$ dengan panjang α dan $\mathbb{Z}_4$ dengan panjang β.

Aplikasi aljabar yang terkait dengan konsep ruang vektor dan ring adalah teori pengkodean. Jenis kode yang mendasar adalah kode biner dan kode kuarterner. Kode biner merupakan himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_2^\alpha$ dan disebut kode linear biner jika merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_2^\alpha$, sedangkan kode kuarterner merupakan himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_4^\beta$ dan disebut kode linear kuarterner jika merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_4^\beta$. Kode linear kuarterner dapat dipandang sebagai kode biner dengan menggunakan pemetaan Gray. Sejak tahun 1994 kode kuarterner menjadi penting karena hubungannya dengan beberapa kode biner seperti kode Kerdock, Goethal atau kode Reed-Muller.

Selain itu dalam teori pengkodean dipelajari juga kode additif yang diperkenalkan oleh Philippe Delsarte pada tahun 1973. Secara umum kode additif didefinisikan sebagai subgrup dari grup abelian yang mendasarinya. Pada kasus khusus, grup abelian yang berorder 2^n berbentuk $\mathbb{Z}_2^{\alpha}\times\mathbb{Z}_4^{\beta}$ dengan $\alpha+2\beta=n$. Kemudian subgrup dari $\mathbb{Z}_2^{\alpha}\times\mathbb{Z}_4^{\beta}$ disebut kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$. Menurut J Borges, dkk (2006) kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dapat dibentuk menjadi kode biner yang disebut kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan menggunakan perluasan pemetaan Gray.

Pada skripsi ini dibahas mengenai konstruksi kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dan korespondensinya dengan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$, serta matriks generator dalam bentuk standar dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$. Selain itu dikaji juga mengenai pendefinisian hasil kali dalam (*inner product*) dalam kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ untuk konsep dualitas. Pembahasan tersebut dipelajari dari artikel $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-*linear codes: generator matrices and duality* Oleh J Borges, dkk pada tahun 2007

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, rumusan masalah dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$?
2. Bagaimana matriks generator dalam bentuk standar dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$?
3. Bagaimana konsep dualitas dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$?

1.4 Tujuan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Membahas konstruksi kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.
2. Membahas matriks generator dalam bentuk standar dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.
3. Membahas konsep dualitas dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi, teorema, dan contoh yang digunakan sebagai acuan pada pembahasan.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, elemen-elemen suatu himpunan tak kosong dapat dipasangkan dan dikombinasikan dalam penjumlahan dan/atau pergandaan yang dikenal sebagai operasi. Selain itu, antar himpunan juga dapat memiliki hubungan berupa relasi maupun pemetaan. Berikut diberikan definisi relasi, pemetaan, operasi, dan struktur aljabar menurut Malik, dkk (2007) dan Bhattacharya, dkk (1995).

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesius)
Misalkan A dan B masing-masing merupakan suatu himpunan tak kosong. Hasil kali kartesius dari A dan B, ditulis $A \times B$, didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut dari A dan B yaitu

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Contoh 2.1.2
Diberikan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,4\}$, maka

$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}.$$

Definisi 2.1.3 (Relasi)
Misalkan A dan B masing-masing merupakan suatu himpunan tak kosong. R disebut relasi dari A ke B jika R merupakan himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(x, y) \in R$, maka x dikatakan berelasi R dengan y, ditulis xRy. Relasi dari A ke A disebut relasi pada A.

Definisi 2.1.4 (Relasi Ekuivalensi)
Misalkan X merupakan suatu himpunan tak kosong dan R merupakan relasi pada X. R disebut relasi ekuivalensi pada X jika memenuhi sifat berikut.

(i) Refleksif, yaitu
untuk setiap $x \in X$ berlaku xRx.

(ii) Simetris, yaitu
untuk setiap $x, y \in X$, jika xRy, maka yRx.

(iii) Transitif, yaitu
untuk setiap $x, y, z \in X$, jika xRy dan yRz, maka xRz.

Definisi 2.1.5 (Kelas Ekuivalensi)
Misalkan X merupakan suatu himpunan tak kosong dan E merupakan relasi ekuivalensi pada X dan $a \in X$. Himpunan semua elemen di X yang berelasi E dengan a disebut kelas ekuivalensi dari a pada relasi E dinotasikan $E(a)$. Dengan kata lain

$$E(a) = \{x \mid xEa\}.$$

Contoh 2.1.6
Diberikan n adalah konstanta tetap dan $n \in \mathbb{Z}^+$. Didefinisikan relasi $\equiv_n$ pada $\mathbb{Z}$ adalah sebagai berikut. Untuk semua $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \equiv_n y$ jika dan hanya jika $n|(x - y)$, yaitu $x - y = nk$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Buktikan $\equiv_n$ adalah relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}$ dan tentukan kelas ekuivalensi pada $\equiv_n$.

<u>Bukti.</u>

(i) Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0n$. Jadi, $x \equiv_n x$ sehingga sifat refleksif dipenuhi.

(ii) Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. jika $x \equiv_n y$, maka terdapat $q \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $qn = x - y$. Jadi, $(-q)n = y - x$ sehingga $n|(y - x)$, yaitu $y \equiv_n x$. Dengan demikian, sifat simetris dipenuhi.

(iii) Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$. jika $x \equiv_n y$ dan $y \equiv_n z$, maka terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $qn = x - y$ dan $rn = y - z$. Jadi, $(q + r)n = x - z$ dan $q + r \in \mathbb{Z}$ sehingga $x \equiv_n z$. Dengan demikian, sifat transitif dipenuhi.

Karena memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif, maka terbukti bahwa $\equiv_n$ adalah relasi ekuivalensi.

Kelas ekuivalensi pada relasi $\equiv_n$ sebagai berikut:

$E(0) = \{x = 0 + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$,
$E(1) = \{x = 1 + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, \dots\}$,
$E(2) = \{x = 2 + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2n + 2, -n + 2, 2, n + 2, \dots\}$,
$\vdots$
$E(n - 1) = \{x = (n - 1) + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\quad = \{\dots, -n - 1, -1, n - 1, 2n - 1, \dots\}$

Kemudian himpunan kelas-kelas ekuivalensi ini disebut himpunan bilangan modulo n, dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n$ yaitu

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Definisi 2.1.7 (Pemetaan)

Misalkan A dan B masing-masing merupakan suatu himpunan tak kosong. Relasi f dari A ke B disebut pemetaan jika untuk setiap $x \in A$, terdapat tepat satu $y \in B$ sedemikian sehingga x berelasi dengan y. y dikatakan sebagai bayangan x atas pemetaan f. Pemetaan f dari A ke B ditulis

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Himpunan A disebut daerah asal atau domain. Himpunan B disebut kodomain. Daerah hasil dari f merupakan himpunan semua bayangan x atas pemetaan f.

Definisi 2.1.8 (Pemetaan Identitas)

Misalkan A merupakan suatu himpunan tak kosong dan pemetaan $f: A \to A$. f disebut pemetaan identitas jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $f(a) = a$. Pemetaan identitas dinotasikan dengan Id.

Definisi 2.1.9 (Macam-macam Pemetaan Berdasarkan Sifatnya)

Misalkan A dan B masing-masing merupakan suatu himpunan tak kosong. Suatu pemetaan $f: A \to B$ disebut

(i) injektif, yaitu untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ berlaku
jika $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$

(ii) surjektif, yaitu untuk setiap $y \in B$, terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga berlaku $y = f(x)$

(iii) bijektif atau korespondensi satu-satu, yaitu pemetaan f yang memenuhi sifat injektif dan surjektif.

Contoh 2.1.10

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Didefinisikan suatu relasi sebagai berikut.

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto f(x) = x + 1$$

buktikan relasi f adalah bijektif.

Bukti:

i) Pemetaan,
Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, terdapat tepat satu $f(x) \in \mathbb{Z}$ yaitu $f(x) = x + 1$.

ii) Injektif,
Untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, berlaku jika $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Kemudian hal ini dapat dibuktikan dengan kontraposisinya, yaitu jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.
Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $f(x_1) = x_1 + 1$ dan $f(x_2) = x_2 + 1$. Jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1 + 1 &= x_2 + 1 \\ x_1 + 1 - 1 &= x_2 + 1 - 1 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

iii) Surjektif,
Untuk setiap $f(x) \in \mathbb{Z}$, terdapat $x - 1 \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $f(x-1) = (x-1) + 1 = x - 1 + 1 = x$.

Jadi karena relasi f berlaku pemetaan, injektif, dan surjektif maka terbukti f merupakan pemetaan bijektif. ■

Definisi 2.1.11 (Operasi Biner)

Misalkan S merupakan suatu himpunan tak kosong. Pemetaan

$$*: S \times S \to S$$

disebut operasi biner pada himpunan S.

Operasi biner $*$ memetakan setiap pasangan terurut $(x, y) \in S \times S$ ke satu anggota S. Bayangan (x, y) atas pemetaan $*$ ditulis $x * y$. Dengan kata lain operasi biner $*$ menandakan sifat tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in S$, $x * y \in S$.

Contoh 2.1.12

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+). Buktikan operasi penjumlahan (+) merupakan operasi biner.

Bukti:

Operasi penjumlahan pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto +(a, b) = a + b \end{aligned}$$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$, sehingga operasi penjumlahan pada bilangan bulat merupakan operasi biner. ■

Definisi 2.1.13 (Eksponen)
Misalkan a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif lebih besar dari 1. Perkalian sebarang a sebanyak n disebut eksponen n dari a, atau ditulis $a^n = a * a * a * \dots\dots * a$ (sebanyak n kali).

Definisi 2.1.14 (Struktur Aljabar)
Misalkan H adalah suatu himpunan tak kosong. H disebut struktur aljabar jika H dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner.

2.2 Matriks

Matriks merupakan susunan objek-objek yang berbentuk segi empat yang sering dijumpai dalam aljabar linear. Berikut diberikan definisi dan contoh terkait dengan matriks berdasarkan Anton dan Rorres (2014) serta Ling dan Xing(2014).

Definisi 2.2.1 (Matriks)
Matriks adalah susunan segi empat dari objek-objek. Objek-objek dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Bentuk umum suatu matriks A yang terdiri dari m baris dan n kolom adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ukuran matriks merupakan banyaknya baris dan kolom dari suatu matriks yang dinotasikan sebagai berikut.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

dengan $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$.

Definisi 2.2.2 (Matriks Nol)
Misalkan A merupakan suatu matriks ukuran $m \times n$. Matriks A disebut matrik nol jika entri dari matriks adalah nol dinotasikan dengan $\mathbf{0}$. Bentuk umum dari matriks nol adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.3 (Matriks Diagonal)
Misalkan A merupakan suatu matriks berukuran $m \times m$. A disebut matriks diagonal jika entri-entri dari A adalah nol selain entri-entri pada diagonal utama. Bentuk umum dari matriks diagonal adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.4 (Matriks Identitas)
Misalkan A merupakan suatu matriks ukuran $m \times m$. Matriks A disebut matriks identitas jika A merupakan matriks diagonal yang entri pada diagonal utama bernilai satu. Bentuk umum dari matriks identitas adalah sebagai berikut.

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.5 (Penjumlahan Matriks)
Misalkan A dan B masing-masing merupakan suatu matriks dengan ukuran yang sama. Hasil penjumlahan $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri dari B ke entri yang sesuai dari A. Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama, maka

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Contoh 2.2.6
Diberikan dua matriks *A* dan *B*, hitunglah *A*+*B*.
$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.7 (Perkalian dengan Skalar)
Misalkan A merupakan suatu matriks dan c adalah skalar. Hasil perkalian cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri dari A dengan c. Matriks cA disebut perkalian skalar dari A. Jika $A = [a_{ij}]$, maka $[cA]_{ij} = c[A]_{ij} = ca_{ij}$.

Contoh 2.2.8
Diberikan sebuah matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $2A$.
Jawab:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.2.9 (Perkalian Matriks)
Misalkan A merupakan suatu matriks berukuran $m \times r$ dan B adalah matriks berukuran $r \times n$. Perkalian AB adalah matriks berukuran $m \times n$ yang entrinya ditentukan dengan mengalikan entri yang sesuai pada baris i dari A dengan kolom j dari matriks B, kemudian menambahkan hasil kali tersebut dan dapat dinotasikan dengan

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}.$$

Definisi 2.2.10 (Matriks Partisi)
Misalkan A merupakan suatu matriks berukuran $m \times n$. A dapat dipartisi menjadi matriks-matriks yang berukuran lebih kecil dengan menambahkan garis horizontal dan vertikal.

Contoh 2.2.11
Diberikan matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A dapat dipartisi menjadi

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right].$$

Definisi 2.2.12 (Operasi Baris Elementer)

Misalkan A merupakan suatu matriks berukuran $m \times n$. Operasi baris elementer terhadap matriks A adalah satu dari operasi-operasi berikut.

i. $B_i \sim B_j$: baris ke i ditukar dengan baris ke j.

ii. kB_i : setiap elemen baris ke i digandakan dengan skalar $k \neq 0$.

iii. $B_i + kB_j$: setiap elemen baris ke i ditambah hasil kali skalar k dengan baris ke j.

Definisi 2.2.13 (Matriks Ekuivalen)

Misalkan A dan B masing-masing merupakan suatu matriks. A dan B disebut ekuivalen jika salah satu matriks diperoleh dari matriks lainnya dengan operasi baris elementer.

Contoh 2.2.14

Diberikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

dan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Buktikan matriks A dan B adalah ekuivalen.

<u>Bukti:</u>

Berdasarkan Definisi 2.2.13 matriks A dan B ekuivalen jika B dapat diperoleh dari matriks A dengan operasi baris elementer, diperlukan beberapa langkah untuk mendapatkan matriks B sebagai berikut

i) Mengubah elemen baris kedua kolom pertama menjadi nol

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - B_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ii) Mengubah elemen baris pertama kolom kedua dengan nol

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1+B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = B$$

Terbukti A dan B adalah ekuivalen. ■

2.3 Grup

Grup adalah salah satu struktur aljabar yang sederhana karena hanya dilengkapi satu operasi biner. Pada bagian ini diberikan beberapa definisi menurut Bhattacharya dkk (1995), Malik dkk (2007), dan Andari (2015) serta contoh yang berkaitan dengan grup.

Definisi 2.3.1 (Grup)
Misalkan G merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi biner $*$. G disebut grup jika memenuhi aksioma berikut.

(i) Operasi $*$ memenuhi sifat asosiatif.
Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(ii) G memiliki elemen identitas.
Terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$, sedemikian sehingga berlaku $a * e = a = e * a$.

(iii) Setiap elemen dari G memiliki invers.
Untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * b = e = b * a$.

Jika operasi $*$ pada G memenuhi sifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka G disebut grup komutatif/abelian.

Contoh 2.3.2
Diberikan $\mathbb{Z}_4$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 4, dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_4$ adalah grup abelian.
Jawab:

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

(i) Asosiatif,

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_4$, dimana $\bar{a} = a + 4x$, $\bar{b} = b + 4y$, dan $\bar{c} = c + 4z$ untuk suatu $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right) &= (a + 4x) + [(b + 4y) + (c + 4z)] \\
&= (a + 4x) + [(b + c) + 4(y + z)] \\
&= (a + b + c) + 4(x + y + z) \\
&= [(a + b) + 4(x + y)] + (c + 4z) \\
&= [(a + 4x) + (b + 4y)] + (c + 4z) \\
&= (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}
\end{aligned}$$

sehingga asosiatif terpenuhi.

(ii) Memiliki elemen identitas,

Ambil sebarang $\bar{a} = (a + 4x) \in \mathbb{Z}_4$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$. Misalkan $\bar{e} = (e + 4y) \in \mathbb{Z}_4$,

$$\begin{aligned}
\bar{a} + \bar{e} &= \bar{a} \\
(a + 4x) + (e + 4y) &= (a + 4x) \\
(a + e) + 4(x + y) &= (a + 4x)
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
a + e &= a \\
e &= 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
x + y &= x \\
y &= 0
\end{aligned}$$

dan diperoleh elemen identitas $\bar{e} = \bar{0} = (0 + 4 \cdot 0) \in \mathbb{Z}_4$.

(iii) Invers,

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4$, dimana $\bar{a} = a + 4x$, $\bar{b} = b + 4y$, untuk suatu $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$, misalkan invers dari $\bar{a}$ adalah $\bar{b}$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
\bar{a} + \bar{b} &= \bar{0} \\
(a + 4x) + (b + 4y) &= 0 + 4 \cdot 0 \\
(a + b) + 4(x + y) &= 0 + 4 \cdot 0
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
a + b &= 0 \\
b &= -a
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
x + y &= 0 \\
y &= -x
\end{aligned}$$

dan diperoleh,

$$\begin{aligned} \bar{b} &= -a + 4(-x) \\ &= -a - 4x \\ &= -(a + 4x) \\ &= -\bar{a} \end{aligned}$$

Jadi, invers dari $\bar{a}$ adalah $-\bar{a}$.

(iv) Berdasarkan Tabel 2.1, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4$ berlaku komutatif yaitu $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Terbukti $\mathbb{Z}_4$ adalah grup abelian dengan operasi penjumlahan. ■

Definisi 2.3.3 (Grup Siklik)

Misalkan G merupakan suatu grup terhadap suatu operasi $*$. G disebut grup siklik jika G dapat dibangun oleh satu elemen $a \in G$, dinotasikan dengan $G = \langle a \rangle$, sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G$,

$$x = a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ faktor}}$$

untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. a disebut pembangun atau generator dari G.

Dengan kata lain,

$$G = \langle a \rangle = \{x = a^n \text{: untuk suatu } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Contoh 2.3.4

Diberikan himpunan yang sama pada Contoh 2.3.2. $\mathbb{Z}_4$ merupakan grup siklik.

Bukti:

Diketahui $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

i) Terdapat $\bar{1} \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G$, $x = n\bar{1}$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$.
$\bar{0} = n \cdot \bar{1}$ untuk $n = 0, 4, 8, \dots \in \mathbb{Z}$,
$\bar{1} = n \cdot \bar{1}$ untuk $n = 1, 5, 9, \dots \in \mathbb{Z}$,
$\bar{2} = n \cdot \bar{1}$ untuk $n = 2, 6, 10, \dots \in \mathbb{Z}$,
$\bar{3} = n \cdot \bar{1}$ untuk $n = 3, 7, 11, \dots \in \mathbb{Z}$.

ii) Terdapat $\bar{3} \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G$, $x = n\bar{1}$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$.
$\bar{0} = n \cdot \bar{3}$ untuk $n = 0, 4, 8, \dots \in \mathbb{Z}$,
$\bar{1} = n \cdot \bar{3}$ untuk $n = 3, 7, 11, \dots \in \mathbb{Z}$,
$\bar{2} = n \cdot \bar{3}$ untuk $n = 2, 6, 10, \dots \in \mathbb{Z}$,

$\overline{3} = n \cdot \overline{3}$ untuk $n = 1, 5, 9, ... \in \mathbb{Z}$.

Oleh karena itu, $\mathbb{Z}_4$ merupakan grup siklik yang dibangun oleh $\overline{1}$ dan $\overline{3}$, dengan kata lain, $\mathbb{Z}_4 = \langle \overline{1} \rangle$ atau $\mathbb{Z}_4 = \langle \overline{3} \rangle$. ∎

Definisi 2.3.5 (Order Grup)

Misalkan G merupakan suatu grup. Order dari G dinotasikan dengan $o(G)$, adalah banyaknya elemen dari G. Dan G merupakan grup berhingga jika $o(G)$ berhingga.

Definisi 2.3.6 (Order Elemen dalam Grup)

Misalkan G merupakan suatu grup dan $a \in G$. Order dari a dinotasikan dengn $o(a)$, adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$. Jika tidak ada bilangan bulat positif n yang memenuhi, maka dikatakan order a adalah tak berhingga, dinotasikan dengan ∞.

Contoh 2.3.7

Diberikan $\mathbb{Z}_4$ adalah grup dengan operasi penjumlahan. Tentukan order semua elemen dari $\mathbb{Z}_4$.

Jawab:

$\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ dan elemen identitas di $\mathbb{Z}_4$ adalah $e = \overline{0}$.

$o(\overline{0}) = 1$ karena 1 adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$,

$o(\overline{1}) = 4$ karena 4 adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $4 \cdot \overline{1} = \overline{0}$,

$o(\overline{2}) = 2$ karena 2 adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $2 \cdot \overline{2} = \overline{0}$,

$o(\overline{3}) = 4$ karena 4 adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $4 \cdot \overline{3} = \overline{0}$.

Definisi 2.3.8 (Subgrup)

Misalkan G merupakan suatu grup dan K merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari G. K disebut subgrup dari G jika terhadap operasi biner yang sama dengan G, K juga merupakan grup.

Teorema 2.3.9
Misalkan G merupakan suatu grup dan K merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari G. K adalah subgrup dari G jika dan hanya jika
(i) untuk setiap $a, b \in K$ berlaku $a * b \in K$, dan
(ii) untuk setiap $a \in K$ terdapat $a^{-1} \in K$, dengan a^{-1} adalah invers dari a.

Bukti.
($\Rightarrow$) Diketahui K adalah subgrup G.
Akan dibuktikan ketentuan (i) dan (ii) berlaku.
Karena pada K terdapat operasi biner $*$, maka K tertutup. Karena K subgrup, berarti K merupakan grup sehingga memenuhi aksioma asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers.
Jadi, ketentuan (i) dan (ii) dipenuhi.
($\Leftarrow$) Diketahui ketentuan (i) dan (ii) berlaku.
Akan dibuktikan K adalah subgrup.
- Sifat asosiatif dipenuhi karena setiap elemen K juga merupakan elemen G yang asosiatif.
- Ambil $a \in K$. Dari ketentuan (ii) maka $a^{-1} \in K$.
  Karena $a, a^{-1} \in K$ dan berlaku sifat tertutup, maka $a * a^{-1} \in K$. Karena $a * a^{-1} = e$ maka diperoleh $e \in K$.
- Setiap elemen memiliki invers dipenuhi oleh ketentuan (ii).

Jadi, K adalah subgrup dari G terhadap operasi $*$. ■

Contoh 2.3.10
Diberikan $\mathbb{Z}_4$ grup terhadap operasi penjumlahan seperti pada Contoh 2.3.2. Diberikan $K = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah himpunan bagian $\mathbb{Z}_4$. Buktikan bahwa K adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_4$.

Jawab:
Berdasarkan Teorema 2.3.9, K adalah subgrup jika memenuhi aksioma tertutup dan memiliki invers.
(i) Tertutup,

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan pada $K = \{\bar{0}, \bar{2}\}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Dapat dilihat pada Tabel 2.2 di atas menunjukkan untuk setiap $a, b \in K$, $a + b \in K$ sehingga sifat tertutup dari K terpenuhi,

(ii) Dapat dilihat juga pada Tabel 2.2 setiap $a \in K$ memiliki invers $(-a) \in K$ sehingga berlaku

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

Invers dari $\overline{0}$ adalah $\overline{0}$ dan invers dari $\overline{2}$ adalah $\overline{2}$.

Jadi terbukti K merupakan subgrup dari G. ■

Definisi 2.3.11 (Homomorfisma dan Isomorfisma)

Misalkan G dan H secara berturut-turut merupakan suatu grup dengan operasi $*$ dan $\circ$, dan suatu pemetaan

$$\varphi: G \to H$$

φ disebut homomorfisma jika untuk setiap $x, y \in G$, berlaku:

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

Pemetaan $\varphi: G \to H$ disebut isomorfisma, atau G dan H disebut dua grup yang saling isomorfik, dinotasikan $G \cong H$, jika:

i) Pemetaan φ merupakan homomorfisma.

ii) Pemetaan φ bijektif.

Contoh 2.3.12

Diberikan $(G, +)$ grup siklik abelian berorder 4 dengan generator a yaitu $G = \{a, 2a, 3a, 4a = 0\}$, dan $\mathbb{Z}_4$ adalah grup dengan operasi penjumlahan.

Didefinisikan pemetaan $\varphi: G \to \mathbb{Z}_4$

$$ia \mapsto \varphi(ia) = \overline{\imath}$$

untuk setiap $i = 0, 1, 2, 3$.

Buktikan pemetaan φ adalah isomorfisma.

Jawab:

i) Homomorfisma,

Akan dibuktikan φ merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $ja, ka \in G$ dengan $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \varphi(ja + ka) &= \varphi\big((j + k)a\big) \\ &= \overline{\jmath + k} \\ &= \overline{\jmath} + \overline{k} \\ &= \varphi(ja) + \varphi(ka) \end{aligned}$$

ii) Bijektif,

Pemetaan $\varphi(ia)$ merupakan korespondensi satu-satu hal ini dapat ditunjukkan dalam Tabel 2.3 berikut

Tabel 2.3 Pemetaan $\varphi(ia)$ dari $G = \{a, 2a, 3a, 4a = 0\}$

$ia \in G$	0	a	$2a$	$3a$
$\varphi(ia) = \bar{\imath} \in \mathbb{Z}_4$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Terbukti pemetaan φ merupakan isomorfisma karena homomorfisma dan bijektif. ■

Teorema 2.3.13

Misalkan G dan H secara berturut-turut merupakan suatu grup dengan operasi $*$ dan $\circ$. e_G dan e_H secara berturut-turut adalah elemen identitas di G dan H. Jika pemetaan $\varphi: G \to H$ merupakan suatu homomorfisma, maka berlaku

i) $\varphi(e_G)= e_H$.

ii) Untuk setiap $x, x^{-1} \in G$, berlaku $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

<u>Bukti:</u>

i) Karena φ merupakan homomorfisma dari G ke H maka

$$\begin{aligned} \varphi(e_G) \circ \varphi(e_G) &= \varphi(e_G * e_G) \\ \varphi(e_G) \circ \varphi(e_G) &= \varphi(e_G) \\ \varphi(e_G) \circ \varphi(e_G) &= e_H \circ \varphi(e_G) \\ \varphi(e_G) &= e_H \end{aligned}$$

ii) Karena φ merupakan homomorfisma dari G ke H dan berdasarkan (i), maka

$$\begin{aligned} \varphi(x) \circ \varphi(x^{-1}) &= \varphi(x * x^{-1}) \\ \varphi(x) \circ \varphi(x^{-1}) &= \varphi(e_G) \\ \varphi(x) \circ \varphi(x^{-1}) &= e_H \end{aligned}$$

sehingga $\varphi(x^{-1})$ merupakan invers dari $\varphi(x)$.

Dengan kata lain, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$. ■

Definisi 2.3.14 (Dual Grup)

Misalkan G merupakan suatu grup siklik abelian dengan operasi $*$ berorder *m* dengan generator a. Dual grup dari G dinotasikan dengan $\hat{G}$ adalah grup homomorfisma dari G ke $\mathbb{Z}_m$. Dengan kata lain, $\hat{G} = Hom(G, \mathbb{Z}_m)$.

Contoh 2.3.15

Diberikan $G = \langle a \rangle$ grup siklik berorder 4 dengan operasi penjumlahan yaitu $G = \{a, 2a, 3a, 4a = 0\}$, $\mathbb{Z}_4$ adalah grup bilangan bulat modulo 4 dengan operasi penjumlahan, dan $\varphi \in \hat{G}$ seperti pada

Contoh 2.3.12. Diperoleh empat homomorfisma berbeda sebagai berikut:

i) φ_0,

$$\varphi_0 : G \to \mathbb{Z}_4$$
$$ia \mapsto \varphi_0(ia) = \overline{0}$$

ii) φ_1,

$$\varphi_1 : G \to \mathbb{Z}_4$$
$$ia \mapsto \varphi_1(ia) = \overline{\imath}$$

iii) φ_2,

$$\varphi_2 : G \to \mathbb{Z}_4$$
$$ia \mapsto \varphi_2(ia) = \overline{2\imath}$$

iv) φ_3,

$$\varphi_3 : G \to \mathbb{Z}_4$$
$$ia \mapsto \varphi_3(ia) = \overline{3\imath}$$

Buktikan $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ merupakan homomorfisma.

<u>Bukti:</u>

i) Akan dibuktikan φ_0 merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $ja, ka \in G$ dengan $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \varphi_0(ja + ka) &= \varphi_0\big((j + k)a\big) \\ &= \overline{0} \\ &= \overline{0} + \overline{0} \\ &= \varphi_0(ja) + \varphi_0(ka). \end{aligned}$$

ii) Akan dibuktikan φ_1 merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $ja, ka \in G$ dengan $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \varphi_1(ja + ka) &= \varphi_1\big((j + k)a\big) \\ &= \overline{\jmath + k} \\ &= \overline{\jmath} + \overline{k} \\ &= \varphi_1(ja) + \varphi_1(ka). \end{aligned}$$

iii) Akan dibuktikan φ_2 merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $ja, ka \in G$ dengan $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \varphi_2(ja + ka) &= \varphi_2\big((j + k)a\big) \\ &= \overline{2(\jmath + k)} \\ &= \overline{2\jmath} + \overline{2k} \\ &= \varphi_2(ja) + \varphi_2(ka). \end{aligned}$$

iv) Akan dibuktikan φ_3 merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $ja, ka \in G$ dengan $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\varphi_3(ja + ka) = \varphi_3\big((j + k)a\big)$$

$$= \overline{3(j+k)}$$
$$= \overline{3j} + \overline{3k}$$
$$= \varphi_3(ja) + \varphi_3(ka).$$

Jadi terbukti $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ merupakan homomorfisma, sedemikian sehingga $\hat{G} = Hom(G, \mathbb{Z}_4) = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Dengan demikian dapat dibuat tabel homomorfisma sebagai berikut.

Tabel 2.4 Homomorfisma dari $G = \{a, 2a, 3a, 4a = 0\}$ ke $\mathbb{Z}_4$

φ	$\varphi(0)$	$\varphi(a)$	$\varphi(2a)$	$\varphi(3a)$
φ_0	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
φ_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
φ_2	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
φ_3	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Definisi 2.3.16 (Hasil Kali Dalam dari Grup)

Misalkan G merupakan suatu grup abelian berhingga berorder m dengan generator a terhadap operasi $*$ dan $\hat{G} = Hom(G, \mathbb{Z}_m)$ adalah dual grup dari G. Jika $\varphi(a) = k \in \mathbb{Z}_m$ maka homomorfisma dinotasikan dengan φ_k. Hasil kali dalam untuk $b, c \in G$ yang dinotasikan dengan $\langle b, c\rangle$ didefinisikan sebagai berikut,

Untuk setiap $b, c \in G$ dimana $b = ia$ dan $c = ja$ serta untuk setiap $i, j \in \{0,1,2, \dots, (m-1)\}$

$$(b, c) \longmapsto \langle b, c\rangle = \varphi_j(b) = \varphi_j(ia) = \bar{j}\bar{i} \in \mathbb{Z}_m.$$

Karena $\mathbb{Z}_m$ berlaku komutatif maka

$$\langle b, c\rangle = \bar{i}\bar{j} \in \mathbb{Z}_m.$$

Contoh 2.3.17

Diberikan $G = \langle a\rangle$ grup siklik berorder 4 dengan operasi penjumlahan yaitu $G = \{a, 2a, 3a, 4a = 0\}$, $\mathbb{Z}_4$ adalah grup bilangan bulat modulo 4 dengan operasi penjumlahan serta dual grup seperti pada Contoh 2.3.15. Tentukan hasil kali dalam dari $2a, 3a \in G$

<u>Jawab:</u>

$$\langle 2a, 3a\rangle = \varphi_3(2a)$$
$$= \bar{3} \cdot \bar{2}$$
$$= \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2}.$$

Definisi 2.3.18 (Direct Product dari Grup)

Misalkan G dan H secara berturut-turut merupakan suatu grup dengan operasi $*$ dan $\circ$. *Direct product* $G\times H$ didefinisikan sebagai berikut.

(i) $G\times H$ adalah himpunan hasil kali kartesius, yaitu himpunan pasangan terurut (g, h) dengan $g \in G$ dan $h \in H$.

(ii) Operasi biner pada $G\times H$ didefinisikan sebagai

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \circ h_2)$$

dengan $g_1, g_2 \in G$ dan $h_1, h_2 \in H$.

Dan *direct product* $G\times H$ merupakan grup terhadap operasi biner $(\cdot)$. Definisi 2.3.18 dapat diperumum pada grup $G_1, G_2, \dots, G_n$ dengan operasi $*_1, *_2, \dots, *_n$ secara berturut-turut, yaitu

$$G_1\times G_2\times \dots \times G_n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) : p_1 \in G_1, p_2 \in G_2, \dots, p_n \in G_n\}$$

dan

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \cdot (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 *_1 q_1, p_2 *_2 q_2, \dots, p_n *_n q_n)$$

untuk $p_1, q_1 \in G_1$, $p_2, q_2 \in G_2$, dan seterusnya hingga $p_n, q_n \in G_n$.

Contoh 2.3.19

Diberikan dua grup $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi penjumlahan. Tentukan *direct product* dari dua grup tersebut.

<u>Jawab:</u>

$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

i) himpunan hasil kali kartesius elemen di $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$ adalah $\{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{3}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{1},\bar{3})\}$
sehingga
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4 = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{3}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{1},\bar{3})\}$.

ii) Operasi biner pada $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ yang dapat ditunjukkuan dalam Tabel 2.5 berikut.

Tabel 2.5 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$

$+$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$
$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$
$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$
$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$
$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{0})$
$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{3})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{3})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$

2.4 Ring Komutatif dengan Elemen Satuan

Pada skripsi ini akan membahas kode atas ring komutatif dengan elemen satuan. Pada bagian ini diberikan beberapa definisi, teorema dan contoh yang berkaitan dengan ring komutatif dengan elemen satuan berdasarkan Bhattacharya, dkk (1995) dan Malik, dkk (2007).

Definisi 2.4.1 (Ring)
Misalkan R merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi penjumlahan '+' dan pergandaan '$\cdot$'. R disebut ring jika memenuhi aksioma sebagai berikut.

i) R merupakan grup abelian dengan operasi penjumlahan.
ii) R asosiatif dengan operasi pergandaan.
iii) Distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Definisi 2.4.2 (Ring Komutatif dengan Elemen Satuan)
Misalkan R merupakan suatu ring. R disebut ring komutatif dengan elemen satuan jika terhadap operasi pergandaan berlaku hukum komutatif dan memiliki elemen satuan, yaitu terdapat $1 \in R$ sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ untuk setiap $a \in R$.

Contoh 2.4.3
Diberikan $\mathbb{Z}_4$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 4, dilengkapi dua operasi biner penjumlahan '+' dan operasi pergandaan '$\cdot$'. Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_4$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.
Jawab:
Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_4$, dimana $\bar{a} = a + 4x$, $\bar{b} = b + 4y$, dan $\bar{c} = c + 4z$ untuk suatu $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z}$.

i) $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi penjumlahan merupakan grup abelian. Terpenuhi berdasarkan Contoh 2.3.2.
ii) Asosiatif,

$$\begin{aligned}\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) &= (a + 4x)[(b + 4y)(c + 4z)] \\ &= (a + 4x)[bc + 4(yc + bz) + 16yz] \\ &= (a + 4x)(bc + 4yc + 4bz + 16yz) \\ &= abc + a4yc + a4bz + a16yz + 4xbc + \\ &\quad 16xyc + 16xbz + 64xyz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= abc + 4acy + 4abz + 16ayz + 4bcx + \\
&\quad 16cxy + 16bxz + 64xyz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{a}\bar{b})\bar{c} &= [(a+4x)(b+4y)](c+4z) \\
&= (ab + 4(ay+bx) + 16xy)(c+4z) \\
&= (ab + 4ay + 4bx + 16xy)(c+4z) \\
&= abc + ab4z + 4ayc + 16ayz + 4bxc + \\
&\quad 16bxz + 16xyc + 64xyz \\
&= abc + 4abz + 4acy + 16ayz + 4bcx + \\
&\quad 16bxz + 16cxy + 64xyz
\end{aligned}
$$

iii) Distributif,

$$
\begin{aligned}
\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) &= a + 4x(b + 4y + c + 4z) \\
&= a + 4x\big(b + c + 4(y+z)\big) \\
&= a(b+c) + 4a(y+z) + 4x(b+c) + \\
&\quad 16x(y+z) \\
&= ab + ac + 4ay + 4az + 4xb + 4xc + \\
&\quad 16xy + 16xz \\
&= ab + 4ay + 4xb + 16xy + ac + 4az + \\
&\quad 4xc + 16xz \\
&= ab + 4ay + 4xb + 16xy + ac + 4az + \\
&\quad 4xc + 16xz \\
&= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}.
\end{aligned}
$$

Karena (i), (ii), dan (iii) terpenuhi maka $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring.

iv) Komutatif,

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \in \mathbb{Z}_4$, dimana $\bar{a} = a + 4x$, $\bar{b} = b + 4y$ untuk setiap $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
\bar{a} \cdot \bar{b} &= ab + 4ay + 4xb + 16xy \\
&= ba + 4ya + 4bx + 16yx \\
&= \bar{b} \cdot \bar{a}.
\end{aligned}
$$

v) Terdapat $\bar{1} \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_4$, $x \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot x = x$.

Jadi $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. ∎

2.5 Ruang Vektor atas Ring Komutatif dengan Elemen Satuan

Teori pengkodean erat kaitannya dengan ruang vektor. Pada bagian ini akan diberikan definisi, teorema, dan contoh yang berkaitan dengan ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan berdasarkan Anton dan Rorres (2014) serta Ling dan Xing (2004).

Definisi 2.5.1 (Ruang Vektor)

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan berorder q dan V adalah himpunan tak kosong atas R. V yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan dengan skalar disebut ruang vektor atas R jika untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ dan untuk setiap skalar $\lambda, \mu \in R$ berlaku aksioma-aksioma berikut

i) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$.
ii) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.
iii) Terdapat $\mathbf{0} \in V$ untuk setiap $\boldsymbol{v} \in V$ sedemikian sehingga memenuhi $\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$.
iv) Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in V$ terdapat $-\boldsymbol{u} \in V$ sedemikian sehingga memenuhi $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
v) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
vi) $\lambda \boldsymbol{v} \in V$.
vii) $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v}$.
viii) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{u}$.
ix) $(\lambda\mu)\boldsymbol{u} = \lambda(\mu \boldsymbol{u})$.
x) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Definisi 2.5.2 (Ruang Vektor $\mathbb{Z}_q^n$)

Misalkan $\mathbb{Z}_q$ merupakan suatu himpunan bilangan bulat modulo q yang merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. $\mathbb{Z}_q^n$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{Z}_q$ dengan panjang vektor n dinotasikan sebagai berikut.

$$\mathbb{Z}_q^n = \{(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) : \bar{v}_i \in \mathbb{Z}_q\}.$$

$\mathbf{0}$ adalah notasi untuk vektor nol $(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) \in \mathbb{Z}_q^n$.

Didefinisikan penjumlahan vektor untuk $\mathbb{Z}_q^n$, yaitu untuk setiap

$$\boldsymbol{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) \in \mathbb{Z}_q^n \text{ dan } \boldsymbol{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n) \in \mathbb{Z}_q^n,$$

berlaku

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (\bar{v}_1 + \bar{w}_1, \bar{v}_2 + \bar{w}_2, \dots, \bar{v}_n + \bar{w}_n) \in \mathbb{Z}_q^n.$$

Didefinisikan juga perkalian vektor dengan skalar untuk $\mathbb{Z}_q^n$, yaitu untuk setiap $\boldsymbol{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) \in \mathbb{Z}_q^n$ dan $\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}_q$,

berlaku

$$\bar{\lambda}\boldsymbol{v} = \left(\bar{\lambda}\bar{v}_1, \bar{\lambda}\bar{v}_2, \dots, \bar{\lambda}\bar{v}_n\right) \in \mathbb{Z}_q^n.$$

Dengan demikian, $\mathbb{Z}_q^n$ adalah suatu ruang vektor.

Agar lebih sederhana, untuk selanjutnya vektor $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ dapat ditulis menjadi vektor $v_1 v_2 \dots v_n$.

Contoh 2.5.3

Diberikan himpunan vektor

$$\mathbb{Z}_2^2 = \{\boldsymbol{v} = v_1 v_2 \text{:untuk setiap } v_1 v_2 \in \mathbb{Z}_2\}$$

Buktikan $\mathbb{Z}_2^2$ adalah ruang vektor.

Bukti:

$$\mathbb{Z}_2^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

Tabel 2.6 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2^2$.

+	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

Tabel 2.7 Operasi Pergandaan dengan Skalar pada $\mathbb{Z}_2^2$

·	00	01	10	11
0	00	00	00	00
1	00	01	10	11

Berdasarkan Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 dapat dilihat bahwa $\mathbb{Z}_2^2$ memenuhi aksioma-aksioma ruang vektor berikut.

i. Terlihat jelas pada Tabel 2.6 bahwa untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2$, berlaku $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2$.

ii. Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}_2^2$. $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ untuk $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} &= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2) \\ &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})\end{aligned}$$

sehingga asosiatif terpenuhi

iii. Terdapat $\mathbf{0} = 00 \in V$ untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2$ sedemikian sehingga memenuhi $\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$.

iv. Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in V$ terdapat $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2$ sedemikian sehingga memenuhi $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
Invers dari 00 adalah 00 karena $00 + 00 = 00$,
Invers dari 01 adalah 01 karena $01 + 01 = 00$,
Invers dari 10 adalah 10 karena $10 + 10 = 00$,
Invers dari 11 adalah 11 karena $11 + 11 = 00$.

v. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2$ berlaku $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

vi. Terlihat jelas pada Tabel 2.7 bahwa untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2$ dan $\lambda \in \mathbb{Z}_2$, berlaku $\boldsymbol{u}\lambda \in \mathbb{Z}_2^2$.

vii. Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2$ dan $\lambda \in \mathbb{Z}_2$. dimana $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ untuk $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= \lambda \cdot [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] \\ &= \lambda \cdot (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (\lambda u_1 + \lambda v_1, \lambda u_2 + \lambda v_2) \\ &= [(\lambda u_1, \lambda u_2) + (\lambda v_1, \lambda v_2)] \\ &= \lambda(u_1, u_2) + \lambda(v_1, v_2) \\ &= \lambda \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

viii. Ambil sebarang $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2$ dan $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2$ dimana $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ untuk $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\boldsymbol{u} &= (\lambda + \mu)(u_1, u_2) \\ &= [(\lambda + \mu)u_1, (\lambda + \mu)u_2] \\ &= (\lambda u_1 + \mu u_1, \lambda u_2 + \mu u_2) \\ &= (\lambda u_1, \lambda u_2) + (\mu u_1, \mu u_2) \\ &= \lambda(u_1, u_2) + \mu(u_1, u_2) \\ &= \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

ix. Ambil sebarang $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2$ dan $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2$ dimana $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ untuk $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)\boldsymbol{u} &= (\lambda \cdot \mu) \cdot (u_1, u_2) \\ &= [(\lambda \cdot \mu)u_1, (\lambda \cdot \mu)u_2] \\ &= (\lambda \cdot \mu \cdot u_1, \lambda \cdot \mu \cdot u_2) \\ &= \lambda \cdot (\mu u_1), \lambda \cdot (\mu u_2) \\ &= \lambda(\mu u_1, \mu u_2) \\ &= \lambda[\mu(u_1, u_2)] \\ &= \lambda(\mu \boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

x. Terdapat $1 \in \mathbb{Z}_2$ untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2$ sedemikian sehingga memenuhi $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}1 = \boldsymbol{v}$.

Karena $\mathbb{Z}_2^2$ memenuhi 10 aksioma yang tercantum pada Definisi 2.5.1, maka $\mathbb{Z}_2^2$ merupakan ruang vektor. ■

Definisi 2.5.4 (Direct Product dari Ruang Vektor)

Misalkan $\mathbb{Z}_q^n$ dan $\mathbb{Z}_r^m$ masing-masing merupakan suatu ruang vektor secara berturut-turut atas $\mathbb{Z}_q$ dengan panjang n dan atas $\mathbb{Z}_r$ dengan panjang m. *Direct product* $\mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_r^m$ didefinisikan sebagai berikut.

(i) $\mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_r^m$ adalah himpunan hasil kali kartesius, yaitu himpunan pasangan terurut $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2})$ dengan $\boldsymbol{u_1} \in \mathbb{Z}_q^n$ dan $\boldsymbol{u_2} \in \mathbb{Z}_r^m$.

(ii) Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_r^m$ didefinisikan sebagai

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2).$$

(iii) Perkalian dengan skalar $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ didefinisikan sebagai

$$(\lambda, \mu)(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}) = (\lambda \boldsymbol{u_1}, \mu \boldsymbol{u_2}).$$

Agar lebih sederhana, vektor

$$(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}) = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2} \dots u_{n+m})$$

dapat ditulis menjadi vektor $u_1 u_2 \dots u_n | u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+m}$.

Contoh 2.5.5

Diberikan dua ruang vektor $\mathbb{Z}_2^2$ dan $\mathbb{Z}_4^1$. Buktikan $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ merupakan ruang vektor.

Bukti:

$$\mathbb{Z}_2^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

dan

$$\mathbb{Z}_4^1 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1 = \{&(00|0), (00|1), (00|2), (00|3), (01|0), (01|1), (01|2), \\ &(01|3), (10|0), (10|1), (10|2), (10|3), (11|0), (11|1), \\ &(11|2), (11|3)\} \\ \cong \{&a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p\} \end{aligned}$$

dimana

$a = (00|0) = \mathbf{0}$, $b = (00|1)$, $c = (00|2)$, $d = (00|3)$, $e = (01|0)$, $f = (01|1)$, $g = (01|2)$, $h = (01|3)$, $i = (10|0)$, $j = (10|1)$, $k = (10|2)$, $l = (10|3)$, $m = (11|0)$, $n = (11|1)$, $o = (11|2)$, $p = (11|3)$

Tabel 2.8 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$

$+$	$\mathbf{0}$	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
b	b	c	d	$\mathbf{0}$	f	g	h	e	j	k	l	i	n	o	p	m
c	c	d	$\mathbf{0}$	b	g	h	e	f	k	l	i	j	o	p	m	n
d	d	$\mathbf{0}$	b	c	h	e	f	g	l	i	j	k	p	m	n	o
e	e	f	g	h	$\mathbf{0}$	b	c	d	m	n	o	p	i	j	k	l
f	f	g	h	e	b	c	d	$\mathbf{0}$	n	o	p	m	j	k	l	i
g	g	h	e	f	c	d	o	b	o	p	m	n	k	l	i	j
h	h	e	f	g	d	$\mathbf{0}$	b	c	p	m	n	o	l	i	j	k
i	i	j	k	l	m	n	o	p	$\mathbf{0}$	b	c	d	e	f	g	h
j	j	k	l	i	n	o	p	m	b	c	d	$\mathbf{0}$	f	g	h	e
k	k	l	i	j	o	p	m	n	c	d	$\mathbf{0}$	b	g	h	e	f
l	l	i	j	k	p	m	n	o	d	$\mathbf{0}$	b	c	h	e	f	g
m	m	n	o	p	i	j	k	l	e	f	g	h	$\mathbf{0}$	b	c	d
n	n	o	p	m	j	k	l	i	f	g	h	e	b	c	d	$\mathbf{0}$
o	o	p	m	n	k	l	i	j	g	h	e	f	c	d	$\mathbf{0}$	b
p	p	m	n	o	l	i	j	k	h	e	f	g	d	$\mathbf{0}$	b	c

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ dan $(\lambda, \mu), (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ untuk $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_2$ dan $u_3, v_3, w_3 \in \mathbb{Z}_4$.

i. Tertutup,
   Berdasarkan Tabel 2.8 untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ berlaku $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$.

ii. Asosiatif

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\
&= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, u_3 + v_3 + w_3) \\
&= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\
&= (u_1, u_2, u_3) + [(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)] \\
&= \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}).
\end{aligned}$$

iii. Terdapat $\mathbf{0} = (00|0) \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ sedemikian sehingga memenuhi $\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$.

iv. Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ terdapat $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ sedemikian sehingga memenuhi $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Invers dari $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ adalah $(-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}_1, -\boldsymbol{u}_2)$ untuk $-\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{Z}_2^2$ dan

$-\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{Z}_4^1$ masing-masing secara berturut-turut merupakan invers dari $\boldsymbol{u}_1$ dan $\boldsymbol{u}_2$.

v. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ berlaku $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

vi. Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ dan $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ berlaku $(\lambda, \mu)(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan Tabel 2.9 berikut.

Tabel 2.9 Operasi pergandaan dengan skalar pada $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$

+	$\mathbf{0}$	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
(0,0)	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
(0,1)	$\mathbf{0}$	b	c	d	$\mathbf{0}$	b	c	d	$\mathbf{0}$	b	c	d	$\mathbf{0}$	b	c	d
(0,2)	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c
(0,3)	$\mathbf{0}$	d	c	b	$\mathbf{0}$	d	c	b	$\mathbf{0}$	d	c	b	$\mathbf{0}$	d	c	b
(1,0)	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	e	e	e	e	i	i	i	i	m	m	m	m
(1,1)	$\mathbf{0}$	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
(1,2)	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{0}$	c	e	g	e	g	i	k	i	k	m	o	m	o
(1,3)	$\mathbf{0}$	d	c	b	e	h	g	f	i	l	k	j	m	p	o	n

vii. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ dan $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ berlaku $(\lambda, \mu)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (\lambda, \mu)\boldsymbol{u} + (\lambda, \mu)\boldsymbol{v}$,

$$\begin{aligned}
(\lambda, \mu)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= (\lambda, \mu) \cdot [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] \\
&= (\lambda, \mu) \cdot (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&= (\lambda(u_1 + v_1), \lambda(u_2 + v_2), \mu(u_3 + v_3)) \\
&= (\lambda u_1 + \lambda v_1, \lambda u_2 + \lambda v_2, \mu u_3 + \mu v_3) \\
&= (\lambda u_1, \lambda u_2, \mu u_3) + (\lambda v_1, \lambda v_2, \mu v_3) \\
&= (\lambda, \mu)\boldsymbol{u} + (\lambda, \mu)\boldsymbol{v}.
\end{aligned}$$

viii. Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ dan $(\lambda, \mu), (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ berlaku $[(\lambda, \mu) + (\gamma, \delta)]\boldsymbol{u} = (\lambda, \mu)\boldsymbol{u} + (\gamma, \delta)\boldsymbol{u}$,

$$\begin{aligned}
[(\lambda, \mu) + (\gamma, \delta)]\boldsymbol{u} &= (\lambda + \gamma, \mu + \delta)(u_1, u_2, u_3) \\
&= [(\lambda + \gamma)u_1, (\lambda + \gamma)u_2, (\mu + \delta)u_3] \\
&= (\lambda u_1 + \gamma u_1, \lambda u_2 + \gamma u_2, \mu u_3 + \delta u_3) \\
&= (\lambda u_1, \lambda u_2, \mu u_3) + (\gamma u_1, \gamma u_2, \delta u_3) \\
&= (\lambda, \mu)(u_1, u_2, u_3) + (\gamma, \delta)(u_1, u_2, u_3) \\
&= (\lambda, \mu)\boldsymbol{u} + (\gamma, \delta)\boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

ix. Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ dan $(\lambda, \mu), (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ berlaku $[(\lambda, \mu)(\gamma, \delta)]\boldsymbol{u} = (\lambda, \mu)[(\gamma, \delta)\boldsymbol{u}]$,

$$\begin{aligned}
[(\lambda, \mu)(\gamma, \delta)]\boldsymbol{u} &= \big((\lambda, \mu) \cdot (\gamma, \delta)\big) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\
&= (\lambda\gamma, \mu\delta) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\
&= (\lambda\gamma u_1, \lambda\gamma u_2, \mu\delta u_3)
\end{aligned}$$

$$= (\lambda, \mu)(\gamma u_1, \gamma u_2, \delta u_3)$$
$$= (\lambda, \mu)[(\gamma, \delta)(u_1, u_2, u_3)]$$
$$= (\lambda, \mu)[(\gamma, \delta)\boldsymbol{u}].$$

x. Terdapat $(1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ sedemikian sehingga memenuhi $(1,1)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(1,1) = \boldsymbol{u}$.

Karena $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ memenuhi 10 aksioma yang tercantum pada Definisi 2.5.1 maka $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^1$ merupakan ruang vektor. ■

Direct product ruang vektor yang didefinisikan pada Definisi 2.5.4 merupakan ruang vektor dan juga merupakan grup abelian karena memenuhi aksioma (i) sampai (v) pada Definisi 2.5.1.

Definisi 2.5.6 (Subruang Vektor)

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R dan S adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari V. S disebut subruang dari V jika S merupakan ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian vektor dengan skalar yang didefinisikan pada V.

Teorema 2.5.7

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R dan S adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari V. S disebut subruang dari V jika dan hanya jika memenuhi ketentuan berikut.

i. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in S$.

ii. Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in S$ dan $\lambda \in \mathbb{Z}_q$, $\lambda\boldsymbol{u} \in S$.

<u>Bukti.</u>

(⇒) Jika S adalah subruang dari V, maka berdasarkan Definisi 2.5.6, semua aksioma ruang vektor terpenuhi, sehingga aksioma (i) dan (iv) yang merupakan ketentuan pada Teorema 2.5.7 terpenuhi.

(⇐) Misalkan S himpunan bagian dari V, dan $S \neq \emptyset$. Akan ditunjukkan S memenuhi aksioma pada Definisi 2.5.1. Diketahui ketentuan (i) dan (ii) pada Teorema 2.5.7 terpenuhi. Jika $\boldsymbol{u} \in S$, kemudian diasumsikan $-\boldsymbol{u} \in S$, sehingga berlaku $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \in S$. Dengan demikian, aksioma lainnya pada Definisi 2.5.1 jelas terpenuhi karena setiap elemen pada S juga merupakan elemen pada V.

Contoh 2.5.8

Diberikan himpunan vektor V adalah himpunan bagian dari ruang vektor $\mathbb{Z}_4^4$, yaitu

$$V = \{2110, 1101, 3211, 1321, 0312, 1013, 2330, 3303, 1233, 3123, 0132, 3031, 0220, 2202, 2022, 0000\}$$

Buktikan V adalah subruang dari $\mathbb{Z}_4^4$.

<u>Bukti:</u>

Andaikan $V \cong \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p\}$

$$\begin{aligned} V &= \{2110, 1101, 3211, 1321, 0312, 1013, 2330, 3303, \\ &\quad 1233, 3123, 0132, 3031, 0220, 2202, 2022, 0000\} \\ &\cong \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p\} \end{aligned}$$

dengan

$a = 2110$, $b = 1101$, $c = 3211$, $d = 1321$, $e = 0312$, $f = 1013$, $g = 2330$, $h = 3303$, $i = 1233$, $j = 3123$, $k = 0132$, $l = 3031$, $m = 0220$, $n = 2202$, $o = 2022$, $p = 0000$.

i) Tertutup,

Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ berlaku $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ hal ini dapat ditunjukkan dalam Tabel 2.10 berikut.

Tabel 2.10 Operasi penjumlahan pada V

+	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
a	m	c	d	l	o	j	p	f	h	i	n	b	g	e	k	a
b	c	n	e	o	f	a	l	p	g	m	i	k	d	h	j	b
c	d	e	o	k	j	m	b	a	p	g	h	n	l	f	i	c
d	l	o	k	n	i	g	c	m	a	p	f	e	b	j	h	d
e	o	f	j	i	m	d	n	c	b	l	p	h	k	a	g	e
f	j	a	m	g	d	o	h	e	n	k	b	p	i	c	l	f
g	p	e	b	c	n	h	m	i	j	f	o	d	a	k	e	g
h	f	p	a	m	c	e	i	b	k	o	l	g	j	b	d	h
i	h	g	p	a	b	n	j	k	o	e	d	m	f	l	c	i
j	i	m	g	p	l	k	f	o	e	n	c	a	h	d	b	j
k	n	i	h	f	p	b	o	l	d	c	m	j	e	g	a	k
l	b	k	n	e	h	p	d	g	m	a	j	o	c	i	f	l
m	g	d	l	b	k	i	a	j	f	h	e	c	p	o	n	m
n	e	h	f	j	a	c	k	b	l	d	g	i	o	p	m	n
o	k	j	i	h	g	l	e	d	c	b	a	f	n	m	p	o
p	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p

ii) Pergandaan dengan skalar,

Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in V$ terdapat $\lambda \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $\lambda\boldsymbol{u} \in V$ hal ini dapat ditunjukkan dalam Tabel 2.11 berikut.

Tabel 2.11 Operasi pergandaan dengan skalar pada V

$+$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
0	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
2	m	n	o	n	m	o	m	n	o	n	m	o	p	p	p	p
3	g	h	i	j	k	l	a	b	c	d	e	f	m	n	o	p

Jadi V adalah subruang dari $\mathbb{Z}_4^4$. ■

Definisi 2.5.9 (Kombinasi Linear)

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R. Vektor $\boldsymbol{v}$ disebut kombinasi linear dari $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_r} \in V$ jika

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_r\boldsymbol{v_r}$$

dengan $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in R$ adalah skalar.

Definisi 2.5.10 (Membangun atau Merentang)

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R dan $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari V. S disebut membangun atau merentang V jika setiap elemen di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S dan dinotasikan sebagai berikut

$$V = \langle S\rangle = \{\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k : \lambda_i \in R\}.$$

Definisi 2.5.11 (Bebas Linear)

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R dan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$ merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari V. S disebut himpunan bebas linear jika persamaan vektor

$$\lambda_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_r\boldsymbol{v_r} = \boldsymbol{0}$$

mempunyai solusi yang tunggal, yaitu $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Definisi 2.5.12 (Basis)

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R dan $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$

merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari V. B disebut basis untuk V jika B bebas linear dan B merentang V.

Definisi 2.5.13 (Dimensi)
Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R dan $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ merupakan basis di V. Dimensi dari V adalah banyaknya elemen yang menjadi basis dalam V atas R dinotasikan dengan dim(V).

Contoh 2.5.14
Diberikan suatu subruang vektor V atas $\mathbb{Z}_4$, yaitu

$$\begin{aligned} V = \{&2110, 1101, 3211, 1321, 0312,\\ &1013, 2330, 3303, 1233, 3123,\\ &0132, 3031, 0220, 2202, 2022,\\ &0000\} \end{aligned}$$

dan

$$S = \{2110, 1101\}$$

merupakan himpunan bagian dari V. Buktikan S merupakan basis untuk ruang vektor V.

Bukti:

i) Untuk $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in S$ yaitu $\boldsymbol{v}_1 = 2110$, $\boldsymbol{v}_2 = 1101$. Diperoleh persamaan vektor berikut

$$\begin{aligned} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{0}\\ \lambda_1(2,1,1,0) + \lambda_2(1,1,0,1) &= (0,0,0,0)\\ (2\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, 0) + (\lambda_2, \lambda_2, 0, \lambda_2) &= (0,0,0,0)\\ (2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dari sistem persamaan tersebut $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ merupakan satu-satunya solusi.

Karena $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ merupakan satu-satunya solusi, maka V adalah bebas linear.

ii) Akan ditunjukkan bahwa S merentang V hal ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan Tabel 2.12 berikut.

Tabel 2.12 Kombinasi linear pada S

λ_1	λ_2	$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2$
0	0	0000
0	1	1101
0	2	2202
0	3	3303
1	0	2110
1	1	3211
1	2	0312
1	3	1013
2	0	0220
2	1	1321
2	2	2022
2	3	3123
3	0	2330
3	1	3031
3	2	0132
3	3	1233

Karena S bebas linear dan merentang V, maka S merupakan basis untuk ruang vektor V. Banyaknya elemen yang menjadi basis dalam ruang vektor V adalah 2, sehingga $\dim(V) = 2$. ■

Lemma 2.5.15

Misalkan G merupakan suatu grup abelian dengan operasi penjumlahan berorder eksponen m dari m_1 untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$ adalah isomorfik dengan hasil kali grup siklik yang dapat dinyatakan dengan

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

yang memenuhi $1 < m_1 | m_2 | \ldots | m_k$, dimana $m_i | m_j$ notasi dari m_i dapat membagi m_j.

Contoh 2.5.16

Diberikan hasil kali grup siklik

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{3}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{1},\bar{3})\}$$

dan grup abelian berorder eksponen 3 dari 2 atau $2^3 = 8$,

$$G = \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a = 0\}.$$

<u>Bukti:</u>

Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong G$ sehingga perlu dibuktikan terdapat suatu pemetaan yang isomorfisma dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ke G
ambil pemetaan γ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\gamma: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto \gamma(x, y) = (x + 3y)a$$

i) Ambil sebarang $(p, q), (r, s) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$,

$$\begin{aligned}
\gamma\big((p, q) + (r, s)\big) &= \gamma\big((p + r), (q + s)\big) \\
&= ((p + r) + 3(q + s))a \\
&= (p + r + 3q + 3s)a \\
&= pa + ra + 3qa + 3sa \\
&= pa + 3qa + ra + 3sa \\
&= (p + 3q)a + (r + 3s)a \\
&= \gamma(a, b) + \gamma(c, d)
\end{aligned}$$

jadi γ merupakan homomorfisma.

ii) Bijektif,

Tabel 2.13 Nilai fungsi $\gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{0}, \bar{3})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{2})$	$(\bar{1}, \bar{3})$
$\gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$	0	$3a$	$2a$	$5a$	a	$4a$	$7a$	$6a$

Berdasarkan Tabel 2.13 pemetaan γ merupakan bijektif.

Jadi pemetaan γ isomorfisma, sehingga terbukti $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong G$. ■

Proposisi 2.5.17

Misalkan $(G, +)$ adalah suatu grup abelian berorder eksponen t dari m_1 untuk $t \in \mathbb{Z}$ dan

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

dimana $1 < m_1 | m_2 | \ldots | m_k = m$ jika $a_i \in \mathbb{Z}_{mi}$ merupakan generator dari $\mathbb{Z}_{mi}$ untuk setiap $i = 1, \ldots, k$ maka setiap elemen di G dapat dinyatakan dengan $u = u_1 a_1 + u_2 a_2 + \cdots + u_k a_k$ dan dapat ditulis berupa vektor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in G$.

Contoh 2.5.18

Diberikan hasil kali grup siklik $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ dan G grup abelian berorder eksponen 3 dari 2 atau $2^3 = 8$ seperti pada Contoh 2.5.16 yang keduanya saling isomorfik.

$$G = \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a = 0\}.$$

$\mathbb{Z}_2 = \langle\bar{1}\rangle$ dan $\mathbb{Z}_4 = \langle\bar{3}\rangle$.

Setiap elemen dari $\mathbb{Z}_8$ dapat dinyatakan dalam $u_1\bar{1} + u_2\bar{3}$ untuk $u_1 \in \mathbb{Z}_2$ dan $u_2 \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Contoh 2.5.16 bentuk $u_1\bar{1} + u_2\bar{3}$ merupakan pemetaan bijektif sehingga setiap elemen dari G dapat dinyatakan sebagai berikut.

$0 = (\bar{0}, \bar{0})$, $a = (\bar{1}, \bar{0})$, $2a = (\bar{0}, \bar{2})$, $3a = (\bar{0}, \bar{1})$, $4a = (\bar{1}, \bar{1})$, $5a = (\bar{0}, \bar{3})$, $6a = (\bar{1}, \bar{3})$, dan $7a = (\bar{1}, \bar{2})$.

Definisi 2.5.19 (Hasil Kali Dalam)

Misalkan $(G, +)$ adalah suatu grup abelian berhingga berorder eksponen t untuk $t \in \mathbb{Z}$ dan

$$G \cong \mathbb{Z}_{m1} \times \mathbb{Z}_{m2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{mk}$$

dimana $1 < m_1|m_2| \ldots |m_k = m$ dan $m = s_i m_i$ serta $\bar{s_i} \in \mathbb{Z}_m$ untuk grup siklik berorder m_i. Hasil kali dalam dari dua elemen $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in G$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in G$ didefiniskan secara khusus dengan

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_i \bar{s_i}\, \langle u_i, v_i\rangle_{mi} = \sum_i \bar{s_i}\, u_i v_i \in \mathbb{Z}_m$$

Contoh 2.5.20

Diberikan hasil kali grup siklik $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ dan G grup abelian berorder 8 seperti pada Contoh 2.5.15 yang keduanya saling isomorfik.

$$G = \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a = 0\}.$$

Hitung hasil kali dalam dari $2a, 3a \in G$, dinotasikan $\langle 2a, 3a\rangle_4$.

<u>Jawab:</u>

Karena $m_1 = 2$ dan $m = 4 = s_1 m_1$ maka $\bar{s_1} = \bar{2}$.

Karena $m_2 = 4$ dan $m = 4 = s_2 m_2$ maka $\bar{s_2} = \bar{1}$.

Berdasarkan Contoh 2.5.18 $2a = (\bar{0}, \bar{2})$ dan $3a = (\bar{0}, \bar{1})$

$$\begin{aligned}
\langle 2a, 3a\rangle_4 &= \bar{s_1} \cdot \bar{0} \cdot \bar{0} + \bar{s_2} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1} \\
&= \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{2} \cdot \bar{2} \\
&= \bar{0} + \bar{0} \\
&= \bar{0}.
\end{aligned}$$

Definisi 2.5.21 (Ortogonal dan Komplemen Ortogonal)
Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan V merupakan suatu ruang vektor atas R dan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ dengan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

i. Vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ dikatakan ortogonal jika $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.
ii. Misalkan S adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari V. Komplomen ortogonal $S^{\perp}$ dari S didefinisikan sebagai berikut.
$$S^{\perp} = \{\boldsymbol{u} \in V : \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{s} \rangle = 0 \text{ untuk setiap } \boldsymbol{s} \in S\}.$$

Contoh 2.5.22
Diberikan ruang vektor $\mathbb{Z}_2^4$ dan $S = \{0100, 0101, 0010\}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_2^4$. Komplemen ortogonal $S^{\perp}$ dari S adalah sebagai berikut.
$$S^{\perp} = \{0000,1000\}.$$
Bukti:
$$\mathbb{Z}_2^4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$
Berdasarkan Definisi 2.5.18 hasil kali dalam dari $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^4$ didefinisikan
$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{4} \bar{s}_i\, u_i v_i \in \mathbb{Z}_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$
Ambil sebarang $\boldsymbol{u} = (u_1 u_2 u_3 u_4) \in S$, maka
$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u}, (0100) \rangle &= 0, \\ (u_1 0 + u_2 1 + u_3 0 + u_4 0) &= 0, \\ u_2 &= 0, \end{aligned}$$
dan
$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u}, (0101) \rangle &= 0, \\ (u_1 0 + u_2 1 + u_3 0 + u_4 1) &= 0, \\ u_2 + u_4 &= 0, \\ u_4 &= 0, \end{aligned}$$
dan
$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u} \cdot (0010) \rangle &= 0, \\ (u_1 0 + u_2 0 + u_3 1 + u_4 0) &= 0, \\ u_3 &= 0, \end{aligned}$$
Karena $u_2 = u_3 = u_4 = 0$, maka $\boldsymbol{u} = (u_1 000)$, dimana $u_1 \in \mathbb{Z}_2$. Dengan demikian, $S^{\perp} = \{0000,1000\}$. ■

2.6 Teori Pengkodean

Teori pengkodean merupakan teori aplikasi matematika yang berhubungan dengan pengiriman dan penerimaan pesan. Berikut ini diberikan beberapa definisi, contoh, maupun istilah dalam teori pengkodean yang diperkenalkan oleh Roth(2006).

Definisi 2.6.1 (Kode Alfabet)
Misalkan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ merupakan suatu himpunan ukuran q, Himpunan A disebut kode alfabet dan elemen dari kode alfabet disebut kode simbol.

i) Suatu *word* dengan panjang n atas A merupakan suatu barisan $w = w_1 w_2 \dots w_n$ untuk setiap $w_i \in A$.
ii) Suatu *block* kode dengan panjang *n* atas *A* adalah himpunan tak kosong *word C* yang memiliki panjang *n.*
iii) Suatu elemen dari *C* disebut *codeword* dalam *C.*
iv) Banyaknya *codewords* di *C*, dinotasikan |*C*|, disebut ukuran dari *C.*
v) Himpunan kode dengan panjang n dan ukuran k disebut kode-(*n,k*).

Definisi 2.6.2 (Bobot Hamming)
Misalkan C merupakan suatu himpunan kode dan $c \in C$. Bobot Hamming dari *c* adalah banyaknya elemen tak nol di c. Dinotasikan dengan $wt(c)$.

Contoh 2.6.3
Diberikan himpunan kode $C = \{x, y, z\}$ dan $x = 01010$, $y = 01101$, $z = 11101$. Tentukan bobot Hamming dari masing-masing elemen dari C.
Jawab:
$wt(x) = 2$ karena terdapat dua elemen tak nol dalam x,
$wt(y) = 3$ karena terdapat tiga elemen tak nol dalam y,
$wt(z) = 4$ karena terdapat empat elemen tak nol dalam z.

Definisi 2.6.4 (Jarak Hamming)
Misalkan C merupakan suatu himpunan kode dengan panjang n dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ dimana $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dan $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Jarak

Hamming dari $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{y}$, dinotasikan dengan $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, didefinisikan sebagai banyaknya digit yang berbeda dari $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$, yaitu

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\{i: 1 \leq i \leq n,\ x_i \neq y_i\}|.$$

Contoh 2.6.5

Diberikan himpunan kode $C = \{x, y, z\}$ dan $x = 01010$, $y = 01101$, $z = 11101$. Tentukan jarak Hamming di antara dua elemen di C.

Jawab:

$$d(x,y) = |\{i: 1 \leq i \leq n,\ x_i \neq y_i\}| = |\{3,4,5\}| = 3,$$
$$d(x,z) = |\{i: 1 \leq i \leq n,\ x_i \neq y_i\}| = |\{1,3,4,5\}| = 4,$$
$$d(y,z) = |\{i: 1 \leq i \leq n,\ x_i \neq y_i\}| = |\{1\}| = 1.$$

Definisi 2.6.6 (Jarak Hamming Minimum)

Misalkan C merupakan suatu himpunan kode. Jarak Hamming minimum dari C adalah jarak Hamming terkecil di antara setiap dua *codeword* dalam C. Dinotasikan dengan d. Dengan kata lain,

$$d = \min\{d(c_1, c_2) : \text{untuk setiap } c_1, c_2 \in C, c_1 \neq c_2\}.$$

Contoh 2.6.7

Diberikan himpunan kode $C = \{x, y, z\}$ dan $x = 01010$, $y = 01101$, $z = 11101$. Berdasarkan Contoh 2.6.5 diperoleh jarak Hamming minimum adalah $d = 1$.

Definisi 2.6.8 (Kode atas $\mathbb{Z}_q^n$)

Misalkan $\mathbb{Z}_q^n$ merupakan suatu ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_q$ dan panjang vektor n. Kode C disebut kode atas $\mathbb{Z}_q^n$ jika C merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_q^n$.

Definisi 2.6.9 (Kode Linear atas $\mathbb{Z}_q^n$)

Misalkan $\mathbb{Z}_q^n$ merupakan suatu ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_q$ dan panjang vektor n. Kode C atas $\mathbb{Z}_q^n$ disebut kode linear atas $\mathbb{Z}_q^n$ jika C merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_q^n$. Dengan kata lain, untuk setiap dua *codewords* $c_1, c_2 \in C$ diperoleh $c_1 + c_2 \in C$ dan $-c \in C$.

Contoh 2.6.10

Diberikan sebuah ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_4^3$ dan kode $\mathcal{C} = \{121, 323, 103, 301, 000, 202, 220,\ 022\}$. $\mathcal{C}$ merupakan kode linear atas $\mathbb{Z}_4^3$.

<u>Jawab:</u>

Akan dibuktikan $\mathcal{C}$ merupakan kode linear atas $\mathbb{Z}_4^3$.

i) Untuk setiap $u, v \in \mathcal{C}$ berlaku $u + v \in \mathcal{C}$ hal dapat ditunjukkan pada Tabel 2.14 berikut.

Tabel 2.14 Operasi penjumlahan pada elemen-elemen di $\mathcal{C}$

+	121	323	103	301	000	202	220	022
121	202	000	220	022	121	323	301	103
323	000	202	022	220	323	121	103	301
103	220	022	202	000	103	301	323	121
301	022	220	000	202	301	103	121	323
000	121	323	103	301	000	202	220	022
202	323	121	301	103	202	000	022	220
220	301	103	323	121	220	022	000	202
022	103	301	121	323	022	220	202	000

ii) Untuk setiap $u \in \mathcal{C}$ terdapat $-u \in \mathcal{C}$. Hal ini dapat ditunjukkan pada Tabel 2.15 berikut.

Tabel 2.15 Invers dari elemen-elemen di $\mathcal{C}$

$u \in \mathcal{C}$	121	323	103	301	000	202	220	022
$-u \in \mathcal{C}$	323	121	301	103	000	202	220	022

Jadi $\mathcal{C}$ kode linear atas $\mathbb{Z}_4^3$. ■

Definisi 2.6.11 (Kode Biner)

Misalkan $\mathbb{Z}_2^n$ adalah suatu ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_2$ dan panjang vektor n. Kode C adalah kode biner jika C merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_2^n$.

Definisi 2.6.12 (Kode Biner Linear)

Misalkan $\mathbb{Z}_2^n$ adalah suatu ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_2$ dan panjang vektor n. Kode C merupakan kode biner linear jika C merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_2^n$.

Contoh 2.6.13
Diberikan himpunan vektor atas $\mathbb{Z}_2$,yaitu

$$C = \{0000,1100,0011,1111\}.$$

Buktikan kode $C = \{0000,1100,0011,1111\}$ merupakan kode biner linear.

Bukti:

i) Untuk setiap $u, v \in C$ berlaku $u + v \in C$. Hal ini dapat ditunjukkan dalam Tabel 2.16 berikut.

Tabel 2.16 Operasi penjumlahan pada C.

+	0000	1100	0011	1111
0000	0000	1010	0101	1111
1100	110	0000	1111	0011
0011	0101	1111	0000	1100
1111	1111	0011	1010	0000

ii) Untuk setiap $u \in C$ terdapat $-u \in C$. Hal ini dapat ditunjukkan dalam Tabel 2.17 berikut.

Tabel 2.17 Invers setiap elemen di C

$u \in C$	0000	1100	0011	1111
$-u \in C$	0000	1100	0011	1111

Jadi C merupakan kode biner linear. ■

Definisi 2.6.14 (Kode Kuarterner)
Misalkan $\mathbb{Z}_4^n$ adalah suatu ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_4$ dan panjang vektor n. Kode $\mathcal{C}$ merupakan kode kuarterner jika $\mathcal{C}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_4^n$.

Definisi 2.6.15 (Kode Kuarterner Linear)
Misalkan $\mathbb{Z}_4^n$ adalah suatu ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_4$ dan panjang vektor n. Kode $\mathcal{C}$ merupakan kode kuarterner linear jika $\mathcal{C}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_4^n$.

Contoh 2.6.16
Diberikan sebuah ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_4^3$ dan kode $\mathcal{C} = \{121, 323, 103, 301, 000, 202, 220,\ 022\}$.

Berdasarkan Contoh 2.6.10 kode $\mathcal{C}$ terbukti merupakan kode linear atas $\mathbb{Z}_4^3$ karena $\mathcal{C}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_4^3$. Jadi dapat disimpulkan juga bahwa $\mathcal{C}$ merupakan kode kuarterner linear.

Definisi 2.6.17 (Pemetaan Gray)
Misalkan ϕ merupakan suatu pemetaan bijektif dari $\mathbb{Z}_4$ ke $\mathbb{Z}_2^2$. ϕ disebut pemetaan Gray didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{Z}_4 &\longrightarrow \mathbb{Z}_2^2 \\ 0 &\longmapsto \phi(0) = (0,0) \\ 1 &\longmapsto \phi(1) = (0,1) \\ 2 &\longmapsto \phi(2) = (1,1) \\ 3 &\longmapsto \phi(3) = (1,0). \end{aligned}$$

Definisi 2.6.18 (Kode Biner dari Kode Kuarterner)
Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode kuarterner dengan panjang vektor n, ϕ adalah pemetaan Gray dari $\mathbb{Z}_4$ ke $\mathbb{Z}_2^2$ dan C merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_2^{2n}$. C disebut kode biner dari kode kuarterner $\mathcal{C}$ jika C merupakan himpunan semua bayangan elemen di $\mathcal{C}$ atas pemetaan Gray ϕ. Dengan kata lain, $C = \phi(\mathcal{C})$.

Contoh 2.6.19
Diberikan $\mathbb{Z}_4^3$ merupakan ruang vektor atas ring komutatif $\mathbb{Z}_4$ dengan panjang 3 dan kode $\mathcal{C} = \{121, 323, 103, 301, 000, 202, 220, 022\}$. Berdasarkan Contoh 2.6.16, kode $\mathcal{C}$ merupakan kode kuarterner linear. Tentukan kode biner dari kode kuarterner $\mathcal{C}$.
<u>Bukti:</u>

Tabel 2.18 Pemetaan ϕ dari $\mathbb{Z}_4^3$ ke $\mathbb{Z}_2^6$

$\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$	$\boldsymbol{c} \in C = \phi(\mathcal{C})$
121	011101
323	101110
103	010010
301	100001
000	000000
202	110011
220	111100
022	001111

$$C = \{\phi(\boldsymbol{c}) : \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}\}$$
sehingga diperoleh kode $C = \phi(\mathcal{C})$
$$C = \{011101, 101110, 010010, 100001, 000000, \\ 110011, 111100, 001111\}.$$

Definisi 2.6.20 (Kode Dual dari Kode Linear)
Misalkan C merupakan suatu kode linear atas $\mathbb{Z}_q^n$. Kode dual dari C dinotasikan dengan $C^\perp$ didefinisikan sebagai komplemen orthogonal dari subgrup C atas $\mathbb{Z}_q^n$. Dengan kata lain,
$$C^\perp = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_q^n : \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0, \text{untuk setiap } \boldsymbol{w} \in C\right\}.$$

Contoh 2.6.21
Diberikan ruang vektor atas ring komutatif berhingga $\mathbb{Z}_4^3$ dan kode $\mathcal{C} = \{121, 323, 103, 301, 000, 202, 220,\ 022\}$ berdasarkan Contoh 2.6.16 kode $\mathcal{C}$ merupakan kode kuarterner linear. Tentukan kode dual $\mathcal{C}^\perp$ dari $\mathcal{C}$.
Jawab**.**
$$\mathcal{C}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_4^3 : \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0, \text{untuk setiap } \boldsymbol{w} \in \mathcal{C}\}.$$
$$\boldsymbol{v} = (v_1 v_2 v_3).$$
$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
$\langle \boldsymbol{v}, (000) \rangle = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (121) \rangle = 0$, sehingga $v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (323) \rangle = 0$, sehingga $3v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (103) \rangle = 0$, sehingga $v_1 + 3v_3 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (301) \rangle = 0$, sehingga $3v_1 + v_3 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (202) \rangle = 0$, sehingga $2v_1 + 2v_3 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (220) \rangle = 0$, sehingga $2v_1 + 2v_2 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (022) \rangle = 0$, sehingga $2v_2 + 2v_3 = 0$,
Dengan persamaan
$$2v_1 + 2v_3 = 0$$
diperoleh penyelesaian
$$\mathcal{C}^\perp = \{0v_2 0, 1v_2 1, 1v_2 3, 2v_2 2, 3v_2 3, 3v_2 1\}$$
kemudian dengan persamaan $v_1 + 3v_3 = 0$ dan $3v_1 + v_3 = 0$
untuk $v_1 = 1$ dan $v_3 = 3$, $v_1 + 3v_3 = 2 \neq 0$, dan
untuk $v_1 = 3$ dan $v_3 = 1$, $v_1 + 3v_3 = 2 \neq 0$.
sehingga diperoleh penyelesaian
$$\mathcal{C}^\perp = \{0v_2 0, 1v_2 1, 2v_2 2, 3v_2 3\}$$

kemudian dengan persamaan $2v_1 + 2v_2 = 0$ dan $2v_2 + 2v_3 = 0$ diperoleh penyelesaian sebagai berikut.

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{000,111,131,222,202,020,313,333\}$$

selanjutnya nilai dari $f = v_1 + 2v_2 + v_3$ dan $f = 3v_1 + 2v_2 + 3v_3$ dapat ditunjukkan pada Tabel 2.19 berikut.

Tabel 2.19 Nilai $f = v_1 + 2v_2 + v_3$dan $f = 3v_1 + 2v_2 + 3v_3$

$f(v_1v_2v_3)$	$v_1 + 2v_2 + v_3$	$3v_1 + 2v_2 + 3v_3$
$f(000)$	0	0
$f(111)$	0	0
$f(131)$	0	0
$f(222)$	0	0
$f(202)$	0	0
$f(020)$	0	0
$f(313)$	0	0
$f(333)$	0	0

Dengan demikian diperoleh

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{000,111,131,222,202,020,333,313\}.$$

Definisi 2.6.22 (Kode Parameter)

Misalkan C merupakan suatu kode linear atas $\mathbb{Z}_q^n$ dengan panjang vektor n. Kode parameter pada kode linear adalah suatu kode dengan panjang n dan dimensi k yang dinotasikan dengan kode $[n, k]$.

Contoh 2.6.23

Diberikan C merupakan himpunan kode dengan panjang $n = 4$ berdasarkan Contoh 2.5.14 yang memiliki basis $S = \{2110, 1101\}$. Karena basis untuk C memiliki 2 elemen maka dimensi dari kode C adalah $k = 2$. Oleh karena itu, kode parameternya adalah kode [4,2].

Definisi 2.6.24 (Matrik Generator)

Misalkan C merupakan suatu kode linear $[n, k]$. Matriks G disebut matriks generator jika barisnya terbentuk dari basis untuk C. Matriks G memiliki ukuran $k \times n$. Jika G dapat ditansformasi menjadi $G_S = [I_k | X]$, maka G_S disebut matriks generator bentuk standar.

Definisi 2.6.25 (Fungsi *Encoding* pada Kode Linear)
Misalkan C merupakan suatu kode linear $[n, k]$ atas $\mathbb{Z}_q$ dengan panjang vektor n, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}_q^k$, dan G merupakan matriks generator dari C. Untuk setiap $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}_q^k$ dapat di-*encode* sebagai *codeword* berikut.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot G = y_1\boldsymbol{g}_1 + y_2\boldsymbol{g}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{g}_k \in C,$$

dimana $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \dots, \boldsymbol{g}_n$ merupakan vektor baris pada G.
Encoding pada kode linear merupakan proses untuk mengubah elemen $\boldsymbol{y}$ atas $\mathbb{Z}_q^k$ menjadi *codeword* $\boldsymbol{x}$ pada C dan dapat didefinisikan sebagai fungsi

$$\begin{aligned} E: \mathbb{Z}_q^k &\to \mathbb{Z}_q^n \\ \boldsymbol{y} &\mapsto \boldsymbol{y} \cdot G, \end{aligned}$$

sehingga $C = \{\boldsymbol{y} \cdot G : \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}_q^k\}$.

Contoh 2.6.26
Diberikan C merupakan kode-[4,2] dengan matriks generator yang baris-barisnya disusun dari basis di C berdasarkan Contoh 2.5.14

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tentukan semua *codewords* dengan melakukan *encoding*, yaitu

$$\begin{aligned} E: \mathbb{Z}_4^2 &\to \mathbb{Z}_4^4 \\ \boldsymbol{y} &\mapsto \boldsymbol{y} \cdot G, \end{aligned}$$

Jawab:

Tabel 2.20 *Encoding* kode C dengan matriks G

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}_4^2$	$\boldsymbol{y} \cdot G \in \mathbb{Z}_4^4$	$\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}_4^2$	$\boldsymbol{y} \cdot G \in \mathbb{Z}_4^4$
00	0000	20	0220
01	1101	21	1321
02	2202	22	2022
03	3303	23	3123
10	2110	30	2330
11	3211	31	3031
12	0312	32	0132
13	1013	33	1233

$$C = \{\boldsymbol{y} \cdot G : \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}_4^2\},$$

sehingga diperoleh 16 *codewords* pada kode C, yaitu

$C = \{2110, 1101, 3211, 1321, 0312, 1013, 2330, 3303,$
$1233, 3123, 0132, 3031, 0220, 2202, 2022, 0000\}.$

Definisi 2.6.27 (Bobot Enumerator)
Misalkan C merupakan suatu kode linear dengan panjang n dan $wt(u)$ adalah bobot Hamming dari $u \in C$. Bobot enumerator dari kode C dinotasikan dengan $W_C(x, y)$ didefinisikan sebagai polinomial berikut

$$W_C(x, y) = \sum_{u \in C} x^{n-wt(u)} y^{wt(u)} = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} y^i$$

dimana $A_i = |\{u \in C: wt(u) = i\}|$.

Contoh 2.6.28
Diberikan C merupakan kode biner dari kode kuarterner $\mathcal{C}$ pada Contoh 2.6.19.

$$C = \{011101, 101110, 010010, 100001, 000000, 110011, 111100, 001111\}.$$

Tentukan bobot enumerator dari kode C.
Jawab:

Tabel 2.21 Bobot Hamming dari $\boldsymbol{c} \in C = \phi(\mathcal{C})$

$\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$	$\boldsymbol{c} \in C = \phi(\mathcal{C})$	$wt(\boldsymbol{c})$
121	011101	4
323	101110	4
103	010010	2
301	100001	2
000	000000	0
202	110011	4
220	111100	4
022	001111	4

$A_0 = |\{u \in C: wt(u) = 0\}| = |\{000000\}| = 1,$
$A_2 = |\{u \in C: wt(u) = 2\}| = |\{010010, 100001\}| = 2,$
$A_4 = |\{u \in C: wt(u) = 4\}|$
$= |\{011101, 101110, 110011, 111100, 001111\}| = 5$
$A_1 = A_3 = A_5 = A_6 = |\emptyset| = 0.$

Oleh karena itu, diperoleh bobot enumerator dari kode linear C dalam bentuk polinomial berikut.

$$\begin{aligned} W_C(x,y) &= \sum_{i=0}^{6} A_i x^{6-i} y^i \\ &= 1x^6 + 0x^5y + 2x^4y^2 + 0x^3y^3 + 5x^2y^4 + 0xy^5 + 0y^6 \\ &= x^6 + 2x^4y^2 + 5x^2y^4. \end{aligned}$$

Teorema 2.6.29 (Identitas MacWilliam)
Jika C kode biner linear [*n*, *k*] dengan kode dual $C^\perp$, maka

$$W_{C^\perp}(x,y) = \frac{1}{|C|} W_C(x+y, x-y)$$

dimana $|C| = 2^k$ banyaknya *codeword* di C.

Contoh 2.6.30
Diberikan C merupakan kode biner dari kode kuarterner $\mathcal{C}$ pada Contoh 2.6.19.

$$C = \{011101, 101110, 010010, 100001, 000000, 110011, 111100, 001111\}.$$

Buktikan

$$W_{C^\perp}(x,y) = \frac{1}{|C|} W_C(x+y, x-y).$$

<u>Bukti:</u>
Berdasarkan Contoh 2.6.21 kode $\mathcal{C}$ memiliki kode dual yaitu,

$$\mathcal{C}^\perp = \{000, 111, 131, 222, 202, 020, 333, 313\},$$

sehingga dengan pemetaan Gray dapat diperoleh kode dual dari kode biner C yang dapat ditunjukkan pada Tabel 2.22 berikut beserta bobot Hamming untuk setiap *codeword* di $C^\perp$.

Tabel 2.22 Pemetaan ϕ dari $\mathbb{Z}_4^3$ ke $\mathbb{Z}_2^6$

$\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}^\perp$	$\boldsymbol{c} \in C^\perp = \phi(\mathcal{C}^\perp)$	$wt(\boldsymbol{c})$
000	000000	0
111	010101	3
131	011001	3
222	111111	6
202	110011	4
020	001100	2
313	100110	3
333	101010	3

$A_0 = |\{u \in C: wt(u) = 0\}| = |\{000000\}| = 1,$
$A_2 = |\{u \in C: wt(u) = 2\}| = |\{001100\}| = 1,$
$A_3 = |\{u \in C: wt(u) = 3\}|$
$\quad = |\{010101, 011001, 100110, 101010\}| = 4,$
$A_4 = |\{u \in C: wt(u) = 4\}| = |\{110011\}| = 1,$
$A_6 = |\{u \in C: wt(u) = 6\}| = |\{111111\}| = 1,$
$A_1 = A_5 = |\emptyset| = 0.$

Oleh karena itu, diperoleh bobot enumerator dari kode linear $C^\perp$ dalam bentuk polinomial berikut.

$$\begin{aligned}
W_{C^\perp}(x,y) &= \sum_{i=0}^{6} A_i x^{6-i} y^i \\
&= 1x^6 + 0x^5y + 1x^4y^2 + 4x^3y^3 + 1x^2y^4 + 0xy^5 + 1y^6 \\
&= x^6 + x^4y^2 + 4x^3y^3 + x^2y^4 + y^6.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Contoh 2.6.28 diperoleh

$$W_C(x,y) = x^6 + 2x^4y^2 + 5x^2y^4$$

maka,

$$\begin{aligned}
W_C(x+y, x-y) &= (x+y)^6 + 2(x+y)^4(x-y)^2 + 5(x+y)^2(x-y)^4 \\
&= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \\
&\quad +2(x^6 + 2x^5y - x^4y^2 - 4x^3y^3 - x^2y^4 + 2xy^5 + y^6) \\
&\quad +5(x^6 - 2x^5y - x^4y^2 + 4x^3y^3 - x^2y^4 - 2xy^5 + y^6) \\
&= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \\
&\quad +2x^6 + 4x^5y - 2x^4y^2 - 8x^3y^3 - 2x^2y^4 + 4xy^5 \\
&\quad +2y^6 + 5x^6 - 10x^5y - 5x^4y^2 + 20x^3y^3 - 5x^2y^4 \\
&\quad -10xy^5 + 5y^6 \\
&= 8x^6 + 8x^4y^2 + 32x^3y^3 + 8x^2y^4 + 8y^6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|C|} W_C(x+y, x-y) &= \frac{1}{8}(8x^6 + 8x^4y^2 + 32x^3y^3 + 8x^2y^4 + 8y^6) \\
&= x^6 + x^4y^2 + 4x^3y^3 + x^2y^4 + y^6 \\
&= W_{C^\perp}(x,y).
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\frac{1}{|C|} W_C(x+y, x-y) = W_{C^\perp}(x,y)$. ■

Definisi 2.6.31 (Kode *Puncture*)

Misalkan C merupakan suatu himpunan kode dengan panjang n dan C_p merupakan suatu himpunan kode dengan panjang m. C_p disebut kode *puncture* jika setiap *codeword* di C_p merupakan *codewors* di C yang dihapus sebanyak $n - m$ elemen pada koordinat tertentu.

Contoh 2.6.32

Diberikan himpunan kode $C = \{x, y, z\}$ dan $x = 01010$, $y = 01101$, $z = 11101$. Tentukan C_p kode *puncture* dari C dengan menghapus dua elemen pertama dari *codeword* di C.

Jawab:

Karena $x = 01010$ maka $x_p = 010$,
karena $y = 01101$ maka $y_p = 101$,
karena $z = 11101$ maka $z_p = 101$.
Oleh karena itu, $C_p = \{010,101\}$.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada skripsi ini, pembahasan dibagi menjadi tiga bagian. Pada bagian pertama dibahas kontruksi kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$, bagian kedua membahas matriks generator dalam bentuk standar, kemudian yang ketiga tentang konsep dualitas dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.

3.1 Kode Linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

Pada subbab ini dibahas definisi kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ yang pada dasarnya merupakan kombinasi dari kode biner linear dan kode kuarterner linear. Selain itu dibahas mengenai gambaran biner dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ atas perluasan pemetaan Gray yang kemudian disebut dengan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.1.1 (Kode Additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$)
Diberikan $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$ secara berturut-turut merupakan himpunan bilangan bulat modulo 2 dan 4 yang merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Himpunan vektor dengan panjang α atas ring $\mathbb{Z}_2$ dinotasikan $\mathbb{Z}_2^\alpha$ dan himpunan vektor dengan panjang β atas ring $\mathbb{Z}_4$ dinotasikan $\mathbb{Z}_4^\beta$. Didefinisikan $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ merupakan *direct product* dari $\mathbb{Z}_2^\alpha$ dan $\mathbb{Z}_4^\beta$. Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$. $\mathcal{C}$ disebut kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ jika $\mathcal{C}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$.

Contoh 3.1.2
Diberikan $\mathcal{C}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^4$, yaitu

$$\mathcal{C} = \{00|0000, 11|2211, 00|0022, 11|2233,$$
$$10|2020, 01|0231, 10|2002, 01|0213\}$$

Buktikan $\mathcal{C}$ merupakan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.
<u>Bukti:</u>
Akan dibuktikan $\mathcal{C}$ adalah kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan ditunjukkan $\mathcal{C}$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^4$ yaitu berlaku aksioma $\mathcal{C}$ tertutup dan setiap elemen memiliki invers.

Tabel 3.1 Operasi penjumlahan pada $\mathcal{C}$

+	00|0000	11|2211	00|0022	11|2233	10|2020	01|0231	10|2002	01|0213
00|0000	00|0000	11|2211	00|0022	11|2233	10|2020	01|0231	10|2002	01|0213
11|2211	11|2211	00|0022	11|2233	00|0000	01|0231	10|2002	01|0213	10|2020
00|0022	00|0022	11|2233	00|0000	11|2211	10|2002	01|0213	10|2020	01|0231
11|2233	11|2233	00|0000	11|2211	00|0022	01|0213	10|2020	01|0231	10|2002
10|2020	10|2020	01|0231	10|2002	01|0213	00|0000	11|2211	00|0022	11|2233
01|0231	01|0231	10|2002	01|0213	10|2020	11|2211	00|0022	11|2233	00|0000
10|2002	10|2002	01|0213	10|2020	01|0231	00|0022	11|2233	00|0000	11|2211
01|0213	01|0213	10|2020	01|0231	10|2002	11|2233	00|0000	11|2211	00|0022

Tabel 3.2 Invers untuk setiap elemen di $\mathcal{C}$

$u \in \mathcal{C}$	00|0000	11|2211	00|0022	11|2233	10|2020	01|0231	10|2002	01|0213
$-u \in \mathcal{C}$	00|0000	11|2233	00|0022	11|2211	10|2020	01|0213	10|2002	01|0231

iii) Berdasarkan Tabel 3.1 aksioma tertutup terpenuhi yaitu untuk setiap $u, v \in \mathcal{C}$ berlaku $u + v \in \mathcal{C}$

i) Berdasarkan Tabel 3.2 untuk setiap $u \in \mathcal{C}$ terdapat $-u \in \mathcal{C}$ sedemikian sehingga $u + (-u) = \mathbf{0}$.

Jadi $\mathcal{C}$ merupakan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$. ■

Definisi 3.1.3 (Perluasan Pemetaan Gray)

Misalkan Φ merupakan suatu pemetaan bijektif dari $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ ke $\mathbb{Z}_2^n$ dengan $n = \alpha + 2\beta$. Φ disebut perluasan pemetaan Gray didefinisikan sebagai berikut:

$$\Phi: \mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$$
$$\Phi(x, y) = (x, \phi(y_1), \dots, \phi(y_\beta))$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_2^{\alpha}$ dan $y \in \mathbb{Z}_4^{\beta}$ dengan ϕ adalah pemetaan Gray seperti yang tercantum pada Definisi 2.6.17.

Definisi 3.1.4 (Tipe Kode Additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$)
Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}_2^{\gamma}\times\mathbb{Z}_4^{\delta}$ untuk suatu γ dan δ. Misalkan X dan Y secara berturut-turut merupakan himpunan dari koordinat posisi $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$, sehingga $|X| = \alpha$ dan $|Y| = \beta$. Misalkan $\mathcal{C}_X$ dan $\mathcal{C}_Y$ masing-masing secara berturut-turut adalah kode *puncture* dengan menghapus koordinat selain X dan Y. Misalkan $\mathcal{C}_b$ merupakan himpunan bagian dari $\mathcal{C}$ yang memuat semua *codewords* berorder dua, dan κ adalah dimensi dari $(\mathcal{C}_b)_X$. Tipe dari $\mathcal{C}$ adalah $(\alpha, \beta; \gamma, \delta; \kappa)$.

Contoh 3.1.5
Diberikan $\mathcal{C}$ merupakan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ sesuai pada Contoh 3.1.2, yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \{&00|0000, 11|2211, 00|0022, 11|2233,\\ &10|2020, 01|0231, 10|2002, 01|0213\}\end{aligned}$$

Tentukan tipe dari $\mathcal{C}$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.
<u>Jawab:</u>
Diketahui $|\mathcal{C}| = 8$.
Karena $\left|\mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^1\right| = 8$ dapat diduga $\mathcal{C} \cong \mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^1$, namun hal ini harus dibuktikan dengan adanya pemetaan isomorfisma dari $\mathcal{C}$ ke $\mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^1$.
Ambil pemetaan γ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\gamma: \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^1$$
$$(c_1c_2c_3c_4c_5c_6) \mapsto (c_1c_5)$$

i) Homomorfisma,
Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$ dimana
$\boldsymbol{x} = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ dan $\boldsymbol{y} = y_1y_2y_3y_4y_5y_6$

$$\begin{aligned}\gamma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \gamma(x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + y_1y_2y_3y_4y_5y_6)\\ &= \gamma(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4, x_5+y_5, x_6+y_6)\\ &= (x_1+y_1, x_5+y_5)\\ &= (x_1, x_5) + (y_1, y_5)\\ &= \gamma(x_1x_2x_3x_4x_5x_6) + \gamma(y_1y_2y_3y_4y_5y_6)\\ &= \gamma(\boldsymbol{x}) + \gamma(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

ii) Bijektif,
Pemetaan γ merupakan korespondensi satu-satu, hal ini dapat ditunjukkan dalam Tabel 3.3 berikut.

Tabel 3.3 Pemetaan γ dari $\mathcal{C}$ ke $\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$

$c \in \mathcal{C}$	$\gamma(c) \in \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$
00|0000	(0,0)
11|2211	(1,1)
00|0022	(0,2)
11|2233	(1,3)
10|2020	(1,2)
01|0231	(0,3)
10|2002	(1,0)
01|0213	(0,1)

Jadi terbukti $\mathcal{C} \cong \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$ sehingga tipe dari $\mathcal{C}$ adalah $(2,4; 1,1; \kappa)$. Selanjutnya adalah menentukan nilai dari κ dengan beberapa tahapan berikut

i) Menentukan *codeword* berorder 2,
$o(00|0000) = 0$ karena elemen identitas
$o(11|2211) = 4$ karena $4 \cdot (11|2211) = 0$
$o(00|0022) = 2$ karena $2 \cdot (00|0022) = 0$
$o(11|2233) = 4$ karena $4 \cdot (11|2233) = 0$
$o(10|2020) = 2$ karena $2 \cdot (10|2020) = 0$
$o(01|0231) = 4$ karena $4 \cdot (01|0231) = 0$
$o(10|2002) = 2$ karena $2 \cdot (10|2002) = 0$
$o(01|0213) = 4$ karena $4 \cdot (01|0213) = 0$,
$$\mathcal{C}_b = \{00|0022, 10|, 10|2002\}.$$

ii) Kode *puncture* dari $\mathcal{C}_b$ dengan menghapus koordinat elemen $\mathbb{Z}_4$,
$$(\mathcal{C}_b)_X = \{00,10\}.$$

Basis dari $(\mathcal{C}_b)_X$ adalah $\{10\}$ sehingga dimensi dari $(\mathcal{C}_b)_X$ adalah $\kappa = 1$.
Oleh karena itu, tipe dari $\mathcal{C}$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ adalah $(2,4; 1,1; 1)$.

Definisi 3.1.6 (Tipe Kode Kuarterner Linear)
Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode kuarterner dan $\mathcal{C}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_4^n$ yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}_2^\gamma \times \mathbb{Z}_4^\delta$ untuk suatu γ dan δ. Tipe dari $\mathcal{C}$ adalah $4^\delta 2^\gamma$.

Contoh 3.1.7

Diberikan $\mathcal{C}$ kode kuarterner linear dengan panjang 8 seperti pada Contoh 2.6.16 dan $\mathcal{C} = \{121, 323, 103, 301, 000, 202, 220, 022\}$. Tentukan tipe dari kode $\mathcal{C}$.

Jawab:

Diketahui $|\mathcal{C}| = 8$.

Karena $\left|\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1\right| = 8$ dapat diduga $\mathcal{C} \cong \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$, namun hal ini harus dibuktikan dengan adanya pemetaan isomorfisma dari $\mathcal{C}$ ke $\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$.

Ambil pemetaan γ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\gamma: \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$$
$$(c_1 c_2 c_3) \mapsto (\frac{c_2}{2} c_3)$$

iii) Homomorfisma,

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$ dimana

$\boldsymbol{x} = x_1 x_2 x_3$dan $\boldsymbol{y} = y_1 y_2 y_3$

$$\begin{aligned}
\gamma(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \gamma(x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3) \\
&= \gamma(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\ ) \\
&= (\frac{x_2 + y_2}{2}, x_3 + y_3) \\
&= \left(\frac{x_2}{2} x_3\right) + (\frac{y_2}{2} y_3) \\
&= \gamma(x_1 x_2 x_3) + \gamma(y_1 y_2 y_3) \\
&= \gamma(\boldsymbol{x}) + \gamma(\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

iv) Bijektif,

Pemetaan γ merupakan korespondensi satu-satu, hal ini dapat ditunjukkan dalam Tabel 3.4 berikut.

Tabel 3.4 Pemetaan γ dari $\mathcal{C}$ ke $\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$

$c \in \mathcal{C}$	$\gamma(c) \in \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$
121	(1,1)
323	(1,3)
103	(0,3)
301	(0,1)
000	(0,0)
202	(0,2)
220	(1,0)
022	(1,2)

Jadi terbukti $\mathcal{C} \cong \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$ sehingga tipe dari $\mathcal{C}$ adalah $4^1 2^1$.

Definisi 3.1.8 (Kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$)
Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha, \beta; \gamma, \delta; \kappa)$ dan Φ merupakan perluasan pemetaan Gray dari $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ ke $\mathbb{Z}_2^n$ dengan $n = \alpha + 2\beta$ dan C merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_2^n$. C disebut kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha, \beta; \gamma, \delta; \kappa)$ jika C adalah himpunan semua bayangan elemen di $\mathcal{C}$ atas perluasan pemetaan Gray Φ. Dengan kata lain, $C = \Phi(\mathcal{C})$.

Contoh 3.1.9
Diberikan kode $\mathcal{C}$ pada Contoh 3.1.2 merupakan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$. Tentukan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan menggunakan perluasan pemetaan Gray.
<u>Jawab:</u>
Diketahui $\alpha = 2$ dan $\beta = 4$, sehingga $n = 2 + 2 \cdot 4 = 10$

$$\Phi: \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{10}$$

sehingga diperoleh pemetaan Gray yang terkait:

$$\Phi(x, y) = (x, \phi(y_1), \dots, \phi(y_4))$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_2^2$ dan $y \in \mathbb{Z}_4^4$
dimana ϕadalah pemetaan Gray.

Tabel 3.5 Pemetaan Gray dari $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^4$ ke $C \in \mathbb{Z}_2^{10}$

$c \in \mathcal{C}$	$c \in C = \Phi(\mathcal{C})$
00|0000	00|00000000
11|2211	11|11110101
00|0022	00|00001111
11|2233	11|11111010
10|2020	10|11001100
01|0231	01|00111001
10|2002	10|11000011
01|0213	01|00110110

Jadi diperoleh kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ yaitu

$$C = \{00|00000000, 11|11110101, 00|00001111, 11|11111010, 10|11001100, 01|00111001, 10|11000011, 01|00110110\}.$$

3.2 Matrik Generator dalam Bentuk Standar dari Kode Additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

Pada subbab ini dibahas mengenai kontruksi matriks generator kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$. Dan setelah itu dibahas suatu teorema untuk mengubah sebarang matriks generator kode additif. $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ menjadi matriks generator dalam bentuk standar.

Kontruksi 3.2.1
Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha, \beta; \gamma, \delta; \kappa)$. Setiap *codewords* di $\mathcal{C}$ dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk.

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i u_i + \sum_{j=\gamma+1}^{\gamma+\delta} \mu_j v_j$$

untuk $\lambda_i \in \mathbb{Z}_2$ dan $\mu_j \in \mathbb{Z}_4$ dan u_i,v_j masing-masing merupakan vektor dari $\mathbb{Z}_2^{\alpha} \times \mathbb{Z}_4^{\beta}$ yang berorder 2 dan 4. Vektor u_i,v_j menghasilkan matriks generator G untuk kode $\mathcal{C}$ dengan ukuran $(\gamma + \delta) \times (\alpha + \beta)$.

$$G = \begin{bmatrix} B_1 & 2B_3 \\ B_2 & Q \end{bmatrix}$$

dimana B_1, B_2, B_3 merupakan matriks atas $\mathbb{Z}_2$ secara berturut-turut ukuran $\gamma \times \alpha, \delta \times \alpha$ dan $\gamma \times \beta$ dan Q merupakan matriks atas $\mathbb{Z}_4$ ukuran $\delta \times \beta$ dengan baris vektor kuarterner order empat.

Contoh 3.2.2
Diberikan $\mathcal{C}$ adalah kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(2,4; 1,1; 1)$ seperti pada Contoh 3.1.5. kontruksikan matriks generator untuk kode $\mathcal{C}$.
<u>Jawab:</u>
Kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(2,4; 1,1; 1)$ maka $\gamma = 1$ dan $\delta = 1$, sehingga Setiap *codeword* di $\mathcal{C}$ dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk

$$\sum_{i=1}^{1} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{2} \mu_j v_j = \lambda_1 u_1 + \mu_2 v_2$$

untuk $\lambda_1 \in \mathbb{Z}_2$ dan $\mu_2 \in \mathbb{Z}_4$ serta u_1 adalah *codeword* berorder 2 dan v_2 adalah *codeoword* berorder 4.
Ambil $u_1 = 10|2020$ dan $v_2 = 11|2211$, setiap *codeword* di $\mathcal{C}$ dapat dinyatakan dengan $\lambda_1 u_1 + \mu_2 v_2$ dapat ditunjukkan dalam Tabel 3.5 berikut.

Tabel 3.5 Hasil dari $\lambda_1 u_1 + \mu_2 v_2$

$\lambda_1 \in \mathbb{Z}_2$	$\mu_2 \in \mathbb{Z}_4$	$\lambda_1 u_1 + \mu_2 v_2$ $\lambda_1(10\|2020) + \mu_2(11\|2211)$
0	0	00|0000
0	1	11|2211
0	2	00|0022
0	3	11|2233
1	0	10|2020
1	1	01|0231
1	2	10|2002
1	3	01|0213

Jadi $u_1 = 10|2020$ dan $v_2 = 11|2211$ yang selanjutnya membentuk sebuah matriks generator $G = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 & 2B_3 \\ B_2 & Q \end{bmatrix}$

Definisi 3.2.3 (Fungsi *Encoding* Kode Additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$)

Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha, \beta; \gamma, \delta; \kappa)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_\gamma, w_{\gamma+1}, \dots, w_\delta) \in \mathbb{Z}_2^\gamma \times \mathbb{Z}_4^\delta$ untuk $w_1, \dots, w_\gamma \in \mathbb{Z}_2$ dan $w_{\gamma+1}, \dots, w_\delta \in \mathbb{Z}_4$ dan G merupakan matriks generator dari $\mathcal{C}$. Untuk setiap $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}_2^\gamma \times \mathbb{Z}_4^\delta$ dapat di-*encode* sebagai *codeword* berikut.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{w} \cdot G = w_1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + w_\gamma \boldsymbol{g}_\gamma + w_{\gamma+1} \boldsymbol{g}_{\gamma+1} + w_\delta \boldsymbol{g}_\delta \in \mathcal{C},$$

dimana $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \dots, \boldsymbol{g}_n$ merupakan vektor baris pada G.

Encoding pada kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ adalah proses untuk mengubah elemen $\boldsymbol{w}$ dari $\mathbb{Z}_2^\gamma \times \mathbb{Z}_4^\delta$ menjadi *codeword* $\boldsymbol{c}$ pada $\mathcal{C}$ dan dapat didefinisikan sebagai fungsi

$$E: \mathbb{Z}_2^\gamma \times \mathbb{Z}_4^\delta \to \mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$$
$$\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w} \cdot G,$$

sehingga $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{w} \cdot G : \boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}_2^\gamma \times \mathbb{Z}_4^\delta\}$.

Contoh 3.2.4

Diberikan $\mathcal{C}$ adalah kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(2,4;1,1;1)$ dan matriks generator $G = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Dengan melakukan *encoding* tentukan kode $\mathcal{C}$.

$$E: \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1 \to \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4^4$$

Jawab:

Fungsi *encoding* dari kode $\mathcal{C}$ dapat ditunjukkan dalam Tabel 3.6 berikut.

Tabel 3.6 *Encoding* kode $\mathcal{C}$ dengan matriks G

$w \in \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1$	$\mathcal{C} = wG$
00	00|0000
01	11|2211
02	00|0022
03	11|2233
10	10|2020
11	01|0231
12	10|2002
13	01|0213

$$C = \{\boldsymbol{w} \cdot G : \boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^1\},$$

sehingga diperoleh 8 *codewords* pada kode $\mathcal{C}$, yaitu

$$\mathcal{C} = \{00|0000, 11|2211, 00|0022, 11|2233, \\ 10|2020, 01|0231, 10|2002, 01|0213\}.$$

Teorema 3.2.5 (Matrik Generator Kode Kuarterner)

Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode kuarterner linear tipe $4^\delta 2^\gamma$ dengan panjang *codeword* n. Kode $\mathcal{C}$ adalah setara dengan kode kuarterner linear dengan matrik generator dalam bentuk.

$$G = \begin{bmatrix} 2T & 2I_\gamma & \mathbf{0} \\ S & R & I_\delta \end{bmatrix}$$

dengan R, T adalah matrik atas $\mathbb{Z}_2$ masing-masing ukuran $\delta \times \gamma$ dan $\gamma \times (n - \gamma - \delta)$, S adalah matrik atas $\mathbb{Z}_4$ ukuran $\delta \times (n - \gamma - \delta)$.

Berdasarkan Teorema 3.2.5 dapat diturunkan secara langsung sebagai matriks generator untuk kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ $(0, \beta; \gamma, \delta; 0)$ yang merupakan kode kuarterner linear, sehingga diperoleh proposisi 3.2.6 berikut.

Proposisi 3.2.6

Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan tipe $(0, \beta; \gamma, \delta; 0)$. Kode $\mathcal{C}$ adalah setara dengan kode kuarterner linear dengan matrik generator dalam bentuk

$$G_S = \begin{bmatrix} 2T & 2I_\gamma & \mathbf{0} \\ S & R & I_\delta \end{bmatrix}$$

dengan R, T adalah matrik atas $\mathbb{Z}_2$ masing-masing ukuran $\delta\times\gamma$ dan $\gamma\times(\beta-\gamma-\delta)$, S adalah matrik atas $\mathbb{Z}_4$ ukuran $\delta\times(\beta-\gamma-\delta)$.

Selanjutnya akan dibentuk suatu teorema tentang matriks generator kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha,\beta;\gamma,\delta;\kappa)$ dalam bentuk standar.

Teorema 3.2.7

Misalkan $\mathcal{C}$ merupakan suatu kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha,\beta;\gamma,\delta;\kappa)$. Kemudian $\mathcal{C}$ adalah ekuivalen dengan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan matrik generator dalam bentuk standar.

$$G_S = \begin{bmatrix} I_\kappa & T_b & 2T_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2T_1 & 2I_{\gamma-\delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_b & S_q & R & I_\delta \end{bmatrix}$$

dimana T_b, T_1, T_2, R, S_b adalah matrik atas $\mathbb{Z}_2$ dan S_q adalah matrik atas $\mathbb{Z}_4$.

Sebelum membuktikan Teorema 3.2.7 didefinisikan suatu pemetaan θ yang mengubah 1 pada koordinat $\mathbb{Z}_2$ menjadi 2 untuk memandang kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ sebagai kode kuarterner. Dengan kata lain, pemetaan θ didefinisikan sebagai berikut.

$$\theta: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$$
$$x \mapsto \theta(x) = 2x$$

dan dapat diperluas sehingga didapatkan pemetaan dari $\mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_4^\beta$ ke $\mathbb{Z}_4^\alpha\times\mathbb{Z}_4^\beta$, yaitu

$$(\theta, Id): \mathbb{Z}_2^\alpha\times\mathbb{Z}_4^\beta \to \mathbb{Z}_4^\alpha\times\mathbb{Z}_4^\beta$$
$$(x,y) \mapsto \big(\theta(x), Id(y)\big) = (2x, y).$$

<u>Bukti:</u>

$\mathcal{C}$ merupakan suatu kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ bertipe $(\alpha,\beta;\gamma,\delta;\kappa)$. Berdasarkan Kontruksi 3.2.1 kode $\mathcal{C}$ memilki matrik generator

$$G = \begin{bmatrix} B_1 & 2B_3 \\ B_2 & Q \end{bmatrix}$$

dengan B_1, B_2, B_3 merupakan matriks atas $\mathbb{Z}_2$ secara berturut-turut ukuran $\gamma\times\alpha, \delta\times\alpha$ dan $\gamma\times\beta$ dan Q matriks atas $\mathbb{Z}_4$ ukuran $\delta\times\beta$ dengan baris vektor kuarterner order empat. Karena κ merupakan dimensi dari kode *puncture* yang mengahapus koordinat elemen $\mathbb{Z}_4$ himpunan bagian dari kode $\mathcal{C}$ dengan elemennya setiap *codeword* berorder 2 maka κ merupakan dimensi dari matriks B_1 dalam matriks generator G, sehingga dapat diperoleh

$$B_1 = \begin{bmatrix} I_\kappa & \bar{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

dimana $\bar{B}_1$ merupakan suatu matriks atas $\mathbb{Z}_2$ ukuran $\kappa \times (\alpha - \kappa)$. Sehingga diperoleh matriks generator yang baru

$$G = \left[\begin{array}{c|c|c} I_\kappa & \bar{B}_1 & 2\bar{B}_3 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\bar{B}_4 \\ \hline \mathbf{0} & \bar{B}_2 & Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_\kappa & \mathcal{B} \\ \hline \mathbf{0} & \mathcal{D} \end{array}\right]$$

dimana $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$, dan $\bar{B}_4$ merupakan matriks atas $\mathbb{Z}_2$ secara berturut-turut berukuran $\kappa \times (\alpha - \kappa)$, $\delta \times (\alpha - \kappa)$, $\kappa \times \beta$, dan $(\alpha - \kappa) \times \beta$ dan Q adalah matriks atas $\mathbb{Z}_4$ ukuran $\delta \times \beta$.

Berdasarkan Proposisi 3.2.6, suatu kode kuarterner linear $\mathcal{D}$ tipe $(0, \alpha - \kappa + \beta; \gamma - \kappa, \delta; 0)$ yang dibangun dengan matriks generator

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & 2\bar{B}_4 \\ \hline 2\bar{B}_2 & Q \end{array}\right]$$

adalah ekuivalen dengan kode kuarterner linear dengan matriks generator

$$G_{\mathcal{D}} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{0} & 2T_1 & 2I_{\gamma-\kappa} & \mathbf{0} \\ \hline 2S_b & S_q & R & I_\delta \end{array}\right].$$

Oleh karena itu, kode kuarterner linear $\theta(\mathcal{C})$ dengan matriks generator

$$\theta(G) = \left[\begin{array}{ccc} 2I_\kappa & 2\bar{B}_1 & 2\bar{B}_3 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\bar{B}_4 \\ \mathbf{0} & 2\bar{B}_2 & Q \end{array}\right]$$

adalah ekuivalen dengan kode kuarterner linear dengan matriks generator

$$G_\theta = \left[\begin{array}{ccccc} 2I_\kappa & 2T_b & 2T_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2T_1 & 2I_{\gamma-\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2S_b & S_q & R & I_\delta \end{array}\right].$$

Jadi, $\mathcal{C}$ adalah ekuivalen dengan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan matriks generator $\theta^{-1}(G_\theta) = G_S$. ■

$$G_S = \left[\begin{array}{c|cccc} I_\kappa & T_b & 2T_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2T_1 & 2I_{\gamma-\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_b & S_q & R & I_\delta \end{array}\right]$$

Contoh 3.2.8

Diberikan $\mathcal{C}_1$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(1,3;1,2;1)$ dengan matriks generator.

$$G = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Buktikan $\mathcal{C}_1$ adalah ekuivalen dengan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan matrik generator

$$G_S = \begin{bmatrix} I_1 & 2T_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_q & I_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

<u>Bukti:</u>

Akan dibuktikan matriks generator G ekuivalen dengan matriks generator G_S. Berdasarkan Definisi 2.2.13, G_S dapat diperoleh dari matriks G dengan menggunakan operasi baris elementer dengan menggunakan beberapa langka berikut

i) Mengubah matriks generator G untuk $\mathcal{C}_1$ menjadi matriks generator G_θ untuk kode kuarterner $\theta(\mathcal{C}_1)$

$$G_\theta = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

ii) Mengubah elemen baris ketiga kolom pertama dengan nol

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3+B_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Mengubah elemen baris pertama kolom ketiga dan keempat dengan nol

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1+2B_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1+2B_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iv) Mengubah kembali menjadi matriks generator untuk $\mathcal{C}_1$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan menggunakan invers pemetaan θ

$$\theta^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] = G_S.$$

Jadi, tebukti $\mathcal{C}_1$ merupakan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan matriks generator G ekuivalen dengan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan matriks generator G_S, karena matriks G_S dapat diperoleh dari matriks G menggunakan operasi baris elementer. ■

3.3 Konsep Dualitas dari Kode Additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$

Pada subbab ini dibahas secara khusus hasil kali dalam antar elemen di $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ yang berkaitan dengan kode dual. Dan kemudian dibahas juga kode dual dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ yang juga merupakan kode additif.

Definisi 3.3.1 (Hasil Kali Dalam)
Misalkan $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ adalah suatu ruang vektor atas ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Hasil kali dalam didefinisikan sebagai

$$\langle u, v\rangle = 2\left(\sum_{i=1}^{\alpha} u_i v_i\right) + \sum_{j=\alpha+1}^{\alpha+\beta} u_j v_j \in \mathbb{Z}_4$$

dimana $u, v \in \mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$.
Atau dalam bentuk lain

$$\langle u, v\rangle = u \cdot J_n \cdot v^t$$

dimana $J_n = \begin{bmatrix} 2I_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_\beta \end{bmatrix}$ adalah matrik diagonal atas $\mathbb{Z}_4$.

Contoh 3.3.2
Diberikan kode $\mathcal{C}$ pada Contoh 3.1.2 merupakan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.

$$\mathcal{C} = \{00|0000, 11|2211, 00|0022, 11|2233,$$
$$10|2020, 01|0231, 10|2002, 01|0213\}$$

untuk $u = 11|2211, v = 00|0022$. Tunjukkan $\langle u, v\rangle = 4$.
<u>Bukti:</u>

$$\langle u, v\rangle = 2\left(\sum_{i=1}^{2} u_i v_i\right) + \sum_{j=3}^{6} u_j v_j$$

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= 2(u_1v_1 + u_2v_2) + u_3v_3 + u_4v_4 + u_5v_5 + u_6v_6 \\ &= 2(1\cdot 0 + 1\cdot 0) + (2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2) \\ &= 2(0+0) + (0+0+2+2) \\ &= 0+0+0+0+2+2 \\ &= 4.\end{aligned}$$

■

Definisi 3.3.3 (Kode Dual dari Kode Additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$)
Misalkan $\mathcal{C}$ adalah kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$tipe $(\alpha,\beta;\gamma,\delta;\kappa)$ dan diberikan $C=\Phi(\mathcal{C})$ korespondensi dengan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$. Kode dual additif dari $\mathcal{C}$ dinotasikan dengan $\mathcal{C}^{\perp}$ didefinisikan dengan

$$\mathcal{C}^{\perp}=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}_2^{\alpha}\times\mathbb{Z}_4^{\beta}:\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\boldsymbol{0}\text{ untuk setiap } u\in\mathcal{C}\}.$$

Contoh 3.3.4
Diberikan $\mathcal{C}_1$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(1,3;1,2;1)$ dengan matriks generator seperti pada Contoh 3.2.8. Tentukan kode dual dari kode $\mathcal{C}_1$.
<u>Jawab:</u>

$$G_S=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Fungsi *encoding*-nya sebagai berikut

$$E:\mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^2\to\mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^3$$
$$\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{w}\cdot G_S$$

Tabel 3.7 *Encoding* kode $\mathcal{C}_1$ dengan matriks G_S

$w\in\mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^2$	$\mathcal{C}_1=wG_S$	$w\in\mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^2$	$\mathcal{C}_1=wG_S$
0|00	0|000	1|00	1|200
0|01	0|301	1|01	1|101
0|02	0|202	1|02	1|002
0|03	0|103	1|03	1|303
0|10	0|110	1|10	1|310
0|11	0|011	1|11	1|211
0|12	0|312	1|12	1|112
0|13	0|213	1|13	1|013
0|20	0|220	1|20	1|020
0|21	0|121	1|21	1|321
0|22	0|022	1|22	1|222
0|23	0|323	1|23	1|123
0|30	0|330	1|30	1|130
0|31	0|231	1|31	1|031
0|32	0|132	1|32	1|332
0|33	0|033	1|33	1|233

$$\mathcal{C}_1=\{\boldsymbol{w}\cdot G_S:\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}_2^1\times\mathbb{Z}_4^2\}$$

sehingga diperoleh 32 *codewords* pada kode $\mathcal{C}_1$, yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 = \{&0|000, 0|301, 0|202, 0|103, 0|110, 0|011, 0|312, 0|213,\\ &0|220, 0|121, 0|022, 0|323, 0|330, 0|231, 0|132, 0|033,\\ &1|200, 1|101, 1|002, 1|303, 1|310, 1|211, 1|112, 1|013,\\ &1|020, 1|321, 1|222, 1|123, 1|130, 1|031, 1|332, 1|233\}\end{aligned}$$

sehingga kode dualnya adalah

$$\mathcal{C}_1{}^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_4^3 : \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0 \in \mathbb{Z}_4, \text{untuk setiap } \boldsymbol{w} \in \mathcal{C}_1\}.$$

$\boldsymbol{v} = (v_1|v_2v_3v_4)$ untuk $v_1 \in \mathbb{Z}_2$ dan $v_2v_3v_4 \in \mathbb{Z}_4$

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 2\left(\sum_{i=1}^{1} v_i w_i\right) + \sum_{j=2}^{4} v_j w_j$$

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 2(v_1 w_1) + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4$$

$\langle \boldsymbol{v}, (0|000) \rangle = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|301) \rangle = 0,$ sehingga $3v_2 + 1v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|202) \rangle = 0,$ sehingga $2v_2 + 2v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|103) \rangle = 0,$ sehingga $1v_2 + 3v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|110) \rangle = 0,$ sehingga $v_2 + v_3 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|011) \rangle = 0,$ sehingga $v_3 + v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|312) \rangle = 0,$ sehingga $3v_2 + v_3 + 2v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|213) \rangle = 0,$ sehingga $2v_2 + v_3 + 3v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|220) \rangle = 0,$ sehingga $2v_2 + 2v_3 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|121) \rangle = 0,$ sehingga $v_2 + 2v_3 + v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|022) \rangle = 0,$ sehingga $2v_3 + 2v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|323) \rangle = 0,$ sehingga $3v_2 + 2v_3 + 3v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|330) \rangle = 0,$ sehingga $3v_2 + 3v_3 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|231) \rangle = 0,$ sehingga $2v_2 + 3v_3 + v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|132) \rangle = 0,$ sehingga $v_2 + 3v_3 + 2v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (0|033) \rangle = 0,$ sehingga $3v_3 + 3v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|200) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 2v_2 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|101) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + v_2 + v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|002) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 2v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|303) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 3v_2 + 3v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|310) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|211) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 2v_2 + v_3 + v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|112) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + v_2 + v_3 + 2v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|013) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + v_3 + 3v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|020) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 2v_3 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|321) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 3v_2 + 2v_3 + v_4 = 0,$
$\langle \boldsymbol{v}, (1|222) \rangle = 0,$ sehingga $2v_1 + 2v_2 + 2v_3 + 2v_4 = 0,$

$\langle \boldsymbol{v}, (1|123)\rangle = 0$, sehingga $2v_1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (1|130)\rangle = 0$, sehingga $2v_1 + v_2 + 3v_3 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (1|031)\rangle = 0$, sehingga $2v_1 + 3v_3 + v_4 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (1|332)\rangle = 0$, sehingga $2v_1 + 3v_2 + 3v_3 + 2v_4 = 0$,
$\langle \boldsymbol{v}, (1|233)\rangle = 0$, sehingga $2v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 3v_4 = 0$.
Dari 32 persamaan diatas salah satu persamaan yang sederhana adalah $v_2 + v_3 = 0$. Sehingga untuk himpunan penyelesaian dari sistem persamaan yang memiliki 32 persamaaan tersebut harus memenuhi persamaan $v_2 + v_3 = 0$. Dan $v_2 + v_3 = 0$ memiliki solusi $v_2 = -v_3$ artinya v_2 dan v_3 saling invers. Sehingga himpunan penyelesaian kode dual sementara adalah

$$\mathcal{C}_1{}^{\perp} = \{v_1|00v_4, v_1|13v_4, v_1|22v_4, v_1|31v_4\}$$

kemudian sistem persamaan tersebut juga harus memenuhi persamaan $v_3 + v_4 = 0$. Dan $v_3 + v_4 = 0$ memiliki solusi $v_3 = -v_4$ artinya v_3 dan v_4 saling invers. Sehingga himpunan penyelesaian kode dual sementaranya adalah

$$\mathcal{C}_1{}^{\perp} = \{v_1|000, v_1|131, v_1|222, v_1|313\}$$

kemudian sistem persamaan tersebut juga harus memenuhi persamaan $2v_1 + 2v_2 = 0 \in \mathbb{Z}_4$ untuk $v_1 \in \mathbb{Z}_2$ dan $v_2 \in \mathbb{Z}_4$, dan $2v_1 + 2v_2 = 0$ memiliki solusi:
$v_1 = 0$ untuk $v_2 = 0$ dan 2, dan $v_1 = 1$ untuk $v_2 = 1$ dan 3.
Oleh karena itu, himpunan penyelesaian kode dual dari $\mathcal{C}_1$ adalah

$$\mathcal{C}_1{}^{\perp} = \{0|000, 1|131, 0|222, 1|313\}$$

selanjutnya dapat ditunjukkan untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}_1{}^{\perp}$ dan $\boldsymbol{w} \in \mathcal{C}_1$ berlaku $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$ pada Tabel 3.8 sebagai berikut.

Tabel 3.8 Hasil kali dalam $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ untuk $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}_1{}^{\perp}$ dan $\boldsymbol{w} \in \mathcal{C}_1$

$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$	0|000	1|131	0|222	1|313
0|000	0	0	0	0
0|301	0	$0+3+0+1=0$	$2+0+2=0$	$0+1+0+3=0$
0|202	0	$0+2+0+2=0$	$0+0+0=0$	$0+2+0+2=0$
0|103	0	$0+1+0+3=0$	$2+0+2=0$	$0+3+0+1=0$
0|110	0	$0+1+3+0=0$	$2+2+0=0$	$0+3+1+0=0$
0|011	0	$0+0+3+1=0$	$0+2+2=0$	$0+0+1+3=0$
0|312	0	$0+3+3+2=0$	$2+2+0=0$	$0+1+1+2=0$
0|213	0	$0+2+3+3=0$	$0+2+2=0$	$0+2+1+1=0$
0|220	0	$0+2+2+0=0$	$0+0+0=0$	$0+2+2+0=0$
0|121	0	$0+1+2+1=0$	$2+0+2=0$	$0+3+2+3=0$
0|022	0	$0+0+2+2=0$	$0+0+0=0$	$0+0+2+2=0$
0|323	0	$0+3+2+3=0$	$2+0+2=0$	$0+1+2+1=0$
0|330	0	$0+3+1+0=0$	$2+2+0=0$	$0+1+3+0=0$
0|231	0	$0+2+1+1=0$	$0+2+2=0$	$0+2+3+3=0$
0|132	0	$0+1+1+2=0$	$2+2+0=0$	$0+3+3+2=0$
0|033	0	$0+0+1+3=0$	$0+2+2=0$	$0+0+3+1=0$
1|200	0	$2+2+0+0=0$	$0+0+0=0$	$2+2+0+0=0$
1|101	0	$2+1+0+1=0$	$2+0+2=0$	$2+3+0+3=0$
1|002	0	$2+0+0+2=0$	$0+0+0=0$	$2+0+0+2=0$
1|303	0	$2+3+0+3=0$	$2+0+2=0$	$2+1+0+1=0$
1|310	0	$2+3+3+0=0$	$2+2+0=0$	$2+1+1+0=0$
1|211	0	$2+2+3+1=0$	$0+2+2=0$	$2+2+1+3=0$
1|112	0	$2+1+3+2=0$	$2+2+0=0$	$2+3+1+2=0$
1|013	0	$2+0+3+3=0$	$0+2+2=0$	$2+0+1+1=0$
1|020	0	$2+0+2+0=0$	$0+0+0=0$	$2+0+2+0=0$
1|321	0	$2+3+2+1=0$	$2+0+2=0$	$2+1+2+3=0$
1|222	0	$2+2+2+2=0$	$0+0+0=0$	$2+2+2+2=0$
1|123	0	$2+1+2+3=0$	$2+0+2=0$	$2+3+2+1=0$
1|130	0	$2+1+1+0=0$	$2+2+0=0$	$2+3+3+0=0$
1|031	0	$2+0+1+1=0$	$0+2+2=0$	$2+0+3+3=0$
1|332	0	$2+3+1+2=0$	$2+2+0=0$	$2+1+3+2=0$
1|233	0	$2+2+1+3=0$	$0+2+2=0$	$2+2+3+1=0$

sehingga diperoleh himpunan

$$\mathcal{C}_1{}^{\perp} = \{0|000, 1|131, 0|222, 1|313\}$$

merupakan kode dual dari $\mathcal{C}_1$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.

Lemma 3.3.5
Jika $\mathcal{C}$ adalah kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha,\beta;\gamma,\delta;\kappa)$ dan $\mathcal{C}^{\perp}$ adalah kode dual additif dari $\mathcal{C}$, maka $|\mathcal{C}||\mathcal{C}^{\perp}| = 2^n$ dimana $n = \alpha + 2\beta$.
<u>Bukti:</u>
Berdasarkan Definisi 3.1.8 kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ korespondensi satu-satu dengan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan panjang $n = \alpha + 2\beta$. Berdasarkan Teorema 2.6.28 karena $\mathcal{C}$ bisa dipandang sebagai kode biner linear yaitu C kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ maka berlaku persamaan

$$W_{C^{\perp}}(x,y) = \frac{1}{|C|} W_C(x+y, x-y)$$

misalkan $x = y$,
sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
W_{C^{\perp}}(x,x) &= \frac{1}{|C|} W_C(2x,0) \\
\sum_{u\in C} x^{n-wt(u)} x^{wt(u)} &= \frac{1}{|C|} \sum_{u\in C} (2x)^{n-wt(u)} 0^{wt(u)} \\
\sum_{u\in C} x^{n-wt(u)+wt(u)} &= \frac{1}{|C|} (2x)^{n-wt(\mathbf{0})} 0^{wt(\mathbf{0})} \\
\sum_{u\in C} x^{n} &= \frac{1}{|C|} (2x)^{n-wt(\mathbf{0})} 1 \\
\sum_{u\in C} x^{n} &= \frac{1}{|C|} (2x)^{n} \\
|C^{\perp}| x^n &= \frac{1}{|C|} (2x)^{n} \\
|C^{\perp}| x^n &= \frac{1}{|C|} 2^n x^n \\
|C||C^{\perp}| &= 2^n
\end{aligned}$$

karena kode C korespondensi satu-satu dengan kode $\mathcal{C}$, maka

$$|\mathcal{C}||\mathcal{C}^{\perp}| = 2^n$$

dengan $n = \alpha + 2\beta$. ■

Contoh 3.3.6
Diberikan $\mathcal{C}_1$ merupakan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(1,3;1,2;1)$ dengan matriks generator seperti pada Contoh 3.2.8 yang memiliki ukuran 32. Berdasarkan Contoh 3.3.4 kode $\mathcal{C}_1$ memiliki kode dual $\mathcal{C}_1{}^{\perp}$ yang berukuran 4. Jika dibuktikan dengan Lemma 3.3.5 maka kode dual

$\mathcal{C}_1{}^{\perp}$ yang dicari pada Contoh 3.3.4 sudah tepat karena memenuhi persamaan

$$|\mathcal{C}||\mathcal{C}^{\perp}| = 2^n$$
$$32 \cdot 4 = 2^n$$

dengan $n = 1 + 2(3) = 7$.

$$32 \cdot 4 = 2^7$$
$$128 = 2^7.$$

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Kode additif yang diperkenalkan oleh Philippe Delsarte pada tahun 1973. Secara umum kode additif didefinisikan sebagai subgrup dari grup abelian yang mendasarinya. Pada kasus khusus, grup abelian yang berorder 2^n berbentuk $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ dengan $\alpha + 2\beta = n$. Kemudian subgrup dari $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ disebut kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ adalah suatu subgrup dari suatu ruang vektor $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$ atas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ yang merupakan *direct product* dari $\mathbb{Z}_2^\alpha$ dan $\mathbb{Z}_4^\beta$ secara berturut-turut merupakan ruang vektor atas ring komutatif dengan elemen satuan $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$. Dan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ yang merupakan kode biner adalah bayangan dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ atas perluasan pemetaan Gray.
2. Jika $\mathcal{C}$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ tipe $(\alpha, \beta; \gamma, \delta; \kappa)$ maka $\mathcal{C}$ adalah ekuivalen dengan kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dengan matrik generator dalam bentuk standar yaitu
$$G_S = \begin{bmatrix} I_\kappa & T_b & 2T_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2T_1 & 2I_{\gamma-\delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_b & S_q & R & I_\delta \end{bmatrix}$$
dimana T_b, T_1, T_2, R, S_b adalah matrik atas $\mathbb{Z}_2$ dan S_q adalah matrik atas $\mathbb{Z}_4$. Sehingga matriks G_S dapat disebut sebagai matriks generator kode $\mathcal{C}$ dalam bentuk standar.
3. Didefinisikan secara khusus untuk hasil kali dalam di ruang vektor $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta$. Sehingga dapat didefinisikan untuk kode dual dari $\mathcal{C}$ kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$, yaitu
$$\mathcal{C}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta : \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \mathbf{0} \text{ untuk setiap } u \in \mathcal{C}\}$$
kemudian dalam pencarian semua elemen dari kode dual dapat dicek berdasarkan ukuran dari kode dual menggunakan persamaan $|\mathcal{C}||\mathcal{C}^\perp| = 2^n$ untuk $n = \alpha + 2\beta$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas tentang definisi dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ dan kode linear $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$, juga dibahas matriks generatornya dalam bentuk standar, dan kode dual dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$, tetapi penulis tidak membahas matriks generator dari kode dualnya yang biasa disebut matrik *parity*-*check* serta beberapa kondisi untuk self-dual. Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji matrik *parity*-*check* dan keterkaitannya dengan matriks generator kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ serta kondisi untuk kode *self*-*dual* dari kode additif $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2014. *Ring, Field, dan Daerah Integral*. Universitas Brawijaya Press. Malang.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press. Malang.

Anton, H. dan Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra 11th Edition*. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.

Bhattacharya, P. B., Jain, S. K., dan Nagpul, S. R. 1995. *Basic Abstract Algebra 2nd Edition*. Cambridge University Press. United Kingdom.

Borges, J., Fernandez. C, Pujol. J, Rif`a. J, and Villanueva. M. 2006. On $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-linear codes and duality. *V Jornades de Matematica Discreta i Algorısmica*.11-14.171-177.

Borges, J., Fernandez. C, Pujol. J, Rif`a. J, and Villanueva. M. 2010. On $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-linear codes: generator matrices and duality. Designs, Codes and Cryptography. vol. 54(2). 167-179.

Ling, S. dan Xing, C. 2004. *Coding Theory*. Cambridge University Press. New York.

MacWilliam, F. J., Sloane. N. J. A. 1977. The Theory of Error-Correcting Codes. North Holland Publishing Company. Netherlands.

Malik, D.S., J.N. Mordeson, dan M.K. Sen. 2007. *Introduction to Abstract Algebra*. Creighton University Press. Nebraska.

Roth, Ron. M.2006. *Introduction to Coding Theory*. Cambridge University Press. New York.