BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini akan diuraikan dasar-dasar teori yang berkaitan dengan pembahasan skripsi yaitu relasi, pemetaan, grup, himpunan *fuzzy*, dan himpunan bagian *Q-fuzzy*.

2.1 Relasi dan Pemetaan

Relasi adalah suatu hubungan yang memasangkan anggota-anggota pada dua himpunan. Pemetaan adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota pada himpunan pertama dengan tepat satu anggota pada himpunan kedua. Berikut ini akan diberikan definisi relasi dan pemetaan dirujuk dari buku Bhattacharya (1994) dan Baisuni (1986).

Definisi 2.1.1 (Hasil kali kartesian)
Misalkan A dan B keduanya merupakan himpunan tak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesian dari A dan B, dinotasikan $A \times B$ sebagai

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Contoh 2.1.2
Diberikan himpunan $A = \{1,2\}$ dan $B = \{x, y, z\}$. Perkalian kartesian dari A ke B adalah

$$A \times B = \{(1, x), (2, x), (1, y), (2, y), (1, z), (2, z)\}.$$

Definisi 2.1.3 (Relasi)
Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan A dan himpunan B dengan aturan tertentu.

Misalkan R adalah relasi dari A ke B. Jika $x \in A$ berelasi dengan $y \in B$ oleh R, maka relasi tersebut dapat ditulis sebagai xRy atau dalam bentuk himpunan terurut $R = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

Contoh 2.1.4
Diberikan himpunan $A = \{1,2\}$ dan himpunan $B = \{1,4,7,8\}$. Didefinisikan relasi "pasangan bilangan genap" himpunan A ke himpunan B dengan $(x, y) \in R$, adalah

$A \times B = \{(1,1),(1,4),(1,7),(1,8),(2,1),(2,4),(2,7),(2,8)\}$ dan $R = \{(2,4),(2,8)\} \subseteq A \times B$.

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)
Misalkan A dan B keduanya adalah himpunan tak kosong. Relasi f dari A ke B disebut pemetaan dari A ke B jika untuk setiap $x \in A$ terdapat tepat satu $y \in B$, sedemikian sehingga $y = f(x)$. Pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B, dapat ditulis

$$f: A \longrightarrow B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B.$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Contoh 2.1.6
Diberikan himpunan A dan B seperti pada Contoh 2.1.4. Akan ditunjukkan bahwa $R = \{(2,4),(2,8)\}$ adalah pemetaan dari A ke B.
Jawab:
Berdasarkan Contoh 2.1.4, terbukti bahwa R merupakan suatu relasi dari A ke B. Untuk setiap $a \in A$ berpasangan dengan tepat satu $b \in B$, terbukti R adalah pemetaan dari A ke B dan dituliskan sebagai $R: A \to B$.

2.2 Grup

Salah satu struktur aljabar adalah grup. Grup merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi, teorema beserta contoh yang berkaitan dengan grup, dikutip dari Andari (2015).

Definisi 2.2.1 (Grup)
Misalkan G adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut grup jika aksioma berikut dipenuhi,

1. Tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$.
2. Asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku
$$(a * b) * c = a * (b * c).$$
3. Mempunyai elemen satuan atau elemen identitas, yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga berlaku
$$e * a = a * e = a.$$
4. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga berlaku

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Contoh 2.2.2

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup.

Jawab:

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

i) Berlaku sifat tertutup.
Pada Tabel 2.1 terlihat bahwa penjumlahan antar elemen $\mathbb{Z}_6$ akan menghasilkan elemen $\mathbb{Z}_6$ pula, maka sifat tertutup dipenuhi.

ii) Berlaku sifat asosiatif.
Ambil $a = \bar{2}$, $b = \bar{3}$, $c = \bar{1}$, maka berlaku
$(a + b) + c = (\bar{2} + \bar{3}) + \bar{1} = \bar{0}$
$a + (b + c) = \bar{2} + (\bar{3} + \bar{1}) = \bar{0}$
Sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$.

iii) Memiliki elemen netral atau elemen identitas yaitu $e = \bar{0}$.
Terlihat pada kolom kedua dan baris kedua Tabel 2.1, bahwa semua elemen $\mathbb{Z}_6$ yang dijumlahkan dengan $\bar{0}$ akan menghasilkan elemen itu sendiri.

iv) Setiap elemen mempunyai invers.
Dari Tabel 2.1 didapat bahwa:
Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, sebab $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$;
Invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{5}$, sebab $\bar{1} + \bar{5} = \bar{5} + \bar{1} = \bar{0}$;
Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$, sebab $\bar{2} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$;
Invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{3}$, sebab $\bar{3} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$;
Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$, sebab $\bar{4} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$;
Invers dari $\bar{5}$ adalah $\bar{1}$, sebab $\bar{5} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$;

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup.

Definisi 2.2.3 (Subgrup)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup. H adalah himpunan bagian tak kosong pada G. H disebut subgrup dari G jika $(H,*)$ juga merupakan grup.

Contoh 2.2.4
Diketahui $(\mathbb{Z}_6,+)$ grup dan $H=\{\bar{0},\bar{3}\}$ himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa H subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.
Jawab:

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan pada H

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$

i) Berlaku sifat tertutup.
Sebab $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}\in H$; $\bar{0}+\bar{3}=\bar{3}\in H$; $\bar{3}+\bar{0}=\bar{3}\in H$; $\bar{3}+\bar{3}=\bar{0}\in H$.

ii) Berlaku sifat asosiatif.

Tabel 2.3 Assosiatif pada H

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$

Pada Tabel 2.3 terbukti bahwa untuk setiap $a,b,c\in H$, berlaku $(a+b)+c=a+(b+c)$.

iii) Memiliki elemen netral atau elemen identitas yaitu $e=\bar{0}$.
Ambil $a=\bar{3}$, maka $\bar{0}+\bar{3}=\bar{3}+\bar{0}=\bar{3}$

iv) Setiap elemen mempunyai invers. Dari Tabel 2.2 didapat bahwa:
Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, sebab $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$;

Invers dari $\bar{3}$ adalah 3, sebab $\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$;

Jadi terbukti bahwa $(H, +)$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

Teorema 2.2.5

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan $H \subseteq G$. $(H,*)$ merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika

1. Untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$
2. Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui bahwa H subgrup dari G. Akan dibuktikan bahwa berlaku ketentuan 1 dan 2. Karena H subgrup, berarti H merupakan grup. Sehingga berlaku sifat tertutup, assosiatif, mempunyai elemen satuan dan setiap elemen mempunyai invers. Dengan demikian ketentuan 1 dan 2 terpenuhi.

($\Longleftarrow$) Diketahui berlaku ketentuan 1 dan 2 tersebut, akan dibuktikan H adalah subgrup. Sifat tertutup pada H telah dipenuhi pada ketentuan 1. Sifat assosiatif juga dipenuhi karena semua elemen H juga merupakan elemen G. Setiap elemen mempunyai invers yang dipenuhi oleh ketentuan 2. H mempunyai elemen satuan, ambil a, $a^{-1} \in H$ karena berlaku sifat tertutup, maka $a * a^{-1} = e \in H$. Sehingga diperoleh $e \in H$. Jadi terbukti bahwa H merupakan subgrup. ■

Contoh 2.2.6

Diketahui $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa H subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

Jawab:

i) Pada Tabel 2.4 terlihat bahwa penjumlahan antar elemen H akan menghasilkan elemen H pula, sehingga sifat tertutup dipenuhi.

Tabel 2.4 Operasi penjumlahan pada H

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

ii) Setiap elemen H mempunyai invers yang juga merupakan elemen H.

Invers dari $\overline{0}$ adalah $\overline{0}$, sebab $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$;
Invers dari $\overline{2}$ adalah $\overline{4}$, sebab $\overline{2} + \overline{4} = \overline{4} + \overline{2} = \overline{0}$;
Invers dari $\overline{4}$ adalah $\overline{2}$, sebab $\overline{4} + \overline{2} = \overline{2} + \overline{4} = \overline{0}$;

Jadi terbukti bahwa H merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

Teorema 2.2.7

H merupakan subgrup dari $(G,*)$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $a * b^{-1} \in H$.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui bahwa H merupakan subgrup. Akan dibuktikan $a * b^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$. Karena H subgrup sehingga menurut Teorema 2.2.5 berlaku

i) $a * b \in H$, untuk setiap $a, b \in H$
ii) $a^{-1} \in H$, untuk setiap $a \in H$.

Karena setiap elemen dari H mempunyai invers, untuk $b \in H$ diperoleh $b^{-1} \in H$. Selanjutnya untuk $a, b^{-1} \in H$ diperoleh $a * b^{-1} \in H$. Jadi, terbukti bahwa $a * b^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$.

($\Longleftarrow$) Diketahui bahwa untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b^{-1} \in H$. Akan dibuktikan H merupakan subgrup pada G, dalam hal ini

i) $a^{-1} \in H$, untuk setiap $a \in H$
ii) $a * b \in H$, untuk setiap $a, b \in H$.

Sesuai yang diketahui, diperoleh bahwa $a * a^{-1} = e \in H$. Dengan demikian, karena $e \in H$ dan $a \in H$, diperoleh

$$e * a^{-1} = a^{-1} \in H.$$

Demikian halnya untuk $b \in H$, didapat $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$. Karena $a, b^{-1} \in H$, diperoleh $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$. Jadi:

(i) $a^{-1} \in H$, untuk setiap $a \in H$ dan
(ii) $a * b \in H$, untuk setiap $a, b \in H$.

Dengan demikian terbukti bahwa H merupakan subgrup dari G. ■

Contoh 2.2.8

Diberikan $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ dan $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa K merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{Z})$.

Jawab:

Karena $(M_2(\mathbb{Z}), +)$ grup, maka untuk membuktikan bahwa K merupakan subgrup digunakan operasi penjumlahan. Ambil $A, B \in K$, maka

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K$$

Karena $A - B \in K$, dapat disimpulkan bahwa K merupakan subgrup dari $M_2(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.2.9

Jika H dan K masing-masing merupakan subgrup dari grup G maka $H \cap K$ juga merupakan subgrup.

Bukti:

i) Ambil sembarang $a, b \in H \cap K$, maka $a, b \in H$ dan $a, b \in K$. $a, b \in H$, karena H merupakan subgrup sehingga berlaku $a * b \in H$. Demikian juga dengan $a, b \in K$, karena K subgrup , berlaku $a * b \in K$. Karena $a * b \in H$ dan $a * b \in K$, jadi $a * b \in H \cap K$.

ii) Ambil $a \in H \cap K$, maka $a \in H$ dan $a \in K$. Karena H subgrup dan $a \in H$, sehingga berlaku $a^{-1} \in H$. Demikian halnya dengan K subgrup dan $a \in K$, berlaku $a^{-1} \in K$. Karena $a^{-1} \in H$ dan $a^{-1} \in K$, maka $a^{-1} \in H \cap K$.

Dari i) dan ii) menurut Teorema 2.2.5 terbukti bahwa $H \cap K$ merupakan subgrup dari grup G. ■

Contoh 2.2.10

Diketahui $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup, $H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $L = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ masing-masing subgrup dari $\mathbb{Z}_6$ seperti pada Contoh 2.2.4 dan

Contoh 2.2.6. Akan ditunjukkan bahwa $H \cap L$ juga merupakan subgrup.

Jawab:

$H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, $L = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, sehingga $H \cap L = \{\bar{0}\}$. Karena $\{\bar{0}\}$ merupakan subgrup, jadi terbukti bahwa $H \cap L$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

Definisi 2.2.11 (Koset)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup, $a \in G$, dan $H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots\}$.

$$a * H = \{a * h_1, a * h_2, a * h_3, \ldots\}$$

disebut koset kiri relatif terhadap subgrup H, dan

$$H * a = \{h_1 * a, h_2 * a, h_3 * a, \ldots\}$$

disebut koset kanan relatif terhadap subgrup H.

Contoh 2.2.12

Diketahui $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup, dan $H = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$. Tentukan banyaknya koset di $\mathbb{Z}$ relatif terhadap H.

Jawab:

$0 + H = H$

$1 + H = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots\}$

$2 + H = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\} = H$

$3 + H = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots\} = 1 + H$

Dan seterusnya, sehingga banyaknya koset ada 2 yaitu H dan $1 + H$.

Definisi 2.2.13 (Subgrup normal)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan N adalah subgrup dari G. N disebut subgrup normal dari G jika berlaku $a * n * a^{-1} \in N$, untuk setiap $a \in G$ dan $n \in N$. N subgrup normal dari grup G biasa diberi notasi $N \lhd G$.

Contoh 2.2.14

Diketahui G merupakan grup terhadap operasi perkalian, dengan $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} : a, b \in R, a > 0\right\}$, dan $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in R\right\}$. Tunjukkan bahwa S merupakan subgrup normal.

Jawab:

Karena G adalah grup terhadap operasi perkalian matriks, akan ditunjukkan bahwa S merupakan subgrup terhadap operasi perkalian.

Ambil A dan B elemen di S, misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, diperoleh

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b+a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S.$$

Karena untuk setiap $A, B \in S$ berlaku $AB^{-1} \in S$ maka S merupakan subgrup. Selanjutnya akan ditunjukkan S adalah normal. Ambil $A \in G$ dan $B \in S$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
$A^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, diperoleh

$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & ac+b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aa^{-1} & -ab + a^{-1}ac + a^{-1}b \\ 0 & a^{-1}a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -ab + c + a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S \end{aligned}$$

Jadi S merupakan normal. Karena S subgrup dan normal, terbukti bahwa S merupakan subgrup normal.

Sifat 2.2.15
Jika N_1, N_2 masing-masing adalah subgrup normal dari grup $(G,*)$, maka $N_1 \cap N_2$ juga merupakan subgrup normal.

Bukti:
Ambil $x \in (N_1 \cap N_2\}$, maka $x \in N_1$ dan $x \in N_2$. Karena $x \in N_1$, untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * x * a^{-1} \in N_1$ dan karena $x \in N_2$, untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * x * a^{-1} \in N_2$. Karena $a * x * a^{-1} \in N_1$ dan $a * x * a^{-1} \in N_2$, dapat disimpulkan bahwa $a * x * a^{-1} \in (N_1 \cap N_2)$.
Terbukti bahwa $N_1 \cap N_2$ merupakan subgrup normal. ■

Definisi 2.2.16 (Normalisator)
Misalkan $(G,*)$ grup dan S adalah himpunan bagian dari G. Normalisator dari S di G, yang diberi notasi N_S adalah himpunan

semua $n \in G$ sedemikian sehingga $n * S = S * n$. Secara matematis dapat dituliskan sebagai:

$$N_S = \{n \in G | n * S = S * n\}$$

Contoh 2.2.17
Diberikan grup $(G,\times)$ dan subgrub S seperti pada Contoh 2.2.14. Akan ditentukan normalisator dari S di G.
Jawab:
Jika diambil n elemen di G, dan harus berlaku $nS = Sn$, maka hanya dipenuhi oleh I di G, yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Jadi normalisator S di G adalah

$$N_S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Definisi 2.2.18 (Homomorfisma)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan $(M,\cdot)$ adalah grup. Didefinisikan $\rho: G \rightarrow M$, ρ disebut homomorfisma grup bila dan hanya bila dipenuhi:

$$\rho(a * b) = \rho(a) \cdot \rho(b)$$

Contoh 2.2.19
Diberikan suatu pemetaan yang didefinisikan sebagai berikut

$$g: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$$
$$a \mapsto 2a$$

Tunjukkan bahwa pemetaan tersebut merupakan suatu homomorfisma grup.
Jawab:

$$\begin{aligned} g(a) &= 2a \\ g(a+b) &= 2(a+b) \\ &= 2a + 2b \\ &= g(a) + g(b) \end{aligned}$$

Jadi g merupakan homomorfisma grup.

Misalkan M dan N masing-masing adalah grup dan $\rho: M \rightarrow N$ adalah suatu homomorfisma. ρ disebut epimorfisma jika ρ merupakan homomorfisma yang surjektif.

2.3 Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* adalah sebuah himpunan yang anggotanya memiliki derajat keanggotaan tertentu yang ditentukan oleh fungsi keanggotaan atau fungsi karakteristik. Berikut ini diberikan definisi-definisi yang berhubungan dengan himpunan *fuzzy* dikutip dari Priya, dkk.(2013) dan Klir & Yuan (1995).

Definisi 2.3.1 (Himpunan *fuzzy*)
Misalkan X adalah sembarang himpunan tak kosong. Himpunan *fuzzy* atau disebut juga sebagai himpunan bagian *fuzzy* μ pada X adalah pemetaan $\mu: X \to [0,1]$. Karena μ adalah pemetaan, maka μ dapat ditulis dalam bentuk himpunan terurut, dalam hal ini

$$\mu = \{(x, \mu(x)) | x \in X\}.$$

Contoh 2.3.2
Diberikan suatu himpunan $X = \{0,1,10,100,1000\}$, dan pemetaan μ yang didefinisikan $\mu: X \to [0,1]$ sedemikian sehingga $\mu(0) = 0; \mu(1) = 0.25; \mu(10) = 0.5; \mu(100) = 0.75; \mu(1000) = 1.$ Himpunan $\mu = \{(0,0), (1,0.25), (10,0.5), (100,0.75), (1000,1)\}$ disebut sebagai himpunan *fuzzy* atau himpunan bagian *fuzzy* pada X.

Definisi 2.3.3 (Operasi standar *fuzzy*)
Misalkan μ dan β masing-masing merupakan himpunan bagian *fuzzy* pada X. Irisan dan gabungan dari μ dan β didefinisikan sebagai berikut:

a. $(\mu \cap \beta)(x) = \min\{\mu(x), \beta(x)\}$,
b. $(\mu \cup \beta)(x) = \max\{\mu(x), \beta(x)\}$.

Contoh 2.3.4
Diberikan suatu himpunan $X = \{0,1,2,3,4\}$ serta μ dan β himpunan bagian *fuzzy* pada X, sedemikian sehingga

$$\mu(0) = 0; \mu(1) = 0.25; \mu(2) = 0.5; \mu(3) = 0.75; \mu(4) = 1,$$
$$\beta(0) = 0; \beta(1) = 0.3;\ \beta(2) = 0.5; \beta(3) = 0.8; \beta(4) = 1.$$

Akan ditentukan $(\mu \cap \beta)(1)$, $(\mu \cup \beta)(1)$, $(\mu \cap \beta)(3)$, dan $(\mu \cup \beta)(3)$.
Jawab:

- $(\mu \cap \beta)(1) = \min\{\mu(1), \beta(1)\} = \min\{0.25,0.3\} = 0.25$
- $(\mu \cup \beta)(1) = \max\{\mu(1), \beta(1)\} = \max\{0.25,0.3\} = 0.3$
- $(\mu \cap \beta)(3) = \min\{\mu(3), \beta(3)\} = \min\{0.75,0.8\} = 0.75$

- $(\mu \cup \beta)(3) = \max\{\mu(3), \beta(3)\} = \max\{0.75, 0.8\} = 0.8$

Definisi 2.3.5 (Subgrup *fuzzy*)
Misalkan $(G,*)$ grup. Himpunan bagian fuzzy μ dari G disebut subgrup *fuzzy* jika untuk setiap $x, y \in G$, berlaku
i) $\mu(x * y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
ii) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

Contoh 2.3.6
Diberikan suatu grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ dan pemetaan $\mu: \mathbb{Z}_6 \to [0,1]$, sedemikian sehingga,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.3\ ; & x \in \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\} \\ 0.7\ ; & x = \bar{3} \\ 0.9\ ; & x = \bar{0} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan μ merupakan subgrup *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$.
Jawab:
$\mathbb{Z}_6$ merupakan grup terhadap penjumlahan, maka akan ditunjukkan bahwa μ memenuhi $\mu(x + y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dan $\mu(-x) = \mu(x)$.

i) Berdasarkan Tabel 2.5 didapat bahwa $\mu(x + y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$.

ii) Berdasarkan Tabel 2.6, didapat bahwa $\mu(-x) = \mu(x)$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi, maka terbukti bahwa μ merupakan subgrup *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.5 Hasil operasi pemeriksaan subgrup *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x+y}$	$\boldsymbol{\mu(x)}$	$\boldsymbol{\mu(y)}$	$\boldsymbol{\mu(x+y)}$	$\mathbf{min}\{\boldsymbol{\mu(x)},\boldsymbol{\mu(y)}\}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9	0.9	0.9
	$\bar{1}$	$\bar{1}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{2}$	$\bar{2}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{3}$	$\bar{3}$		0.7	0.7	0.7
	$\bar{4}$	$\bar{4}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{5}$	$\bar{5}$		0.3	0.3	0.3
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	0.3	0.9	0.3	0.3
	$\bar{1}$	$\bar{2}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{2}$	$\bar{3}$		0.3	0.7	0.3
	$\bar{3}$	$\bar{4}$		0.7	0.3	0.3
	$\bar{4}$	$\bar{5}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{5}$	$\bar{0}$		0.3	0.9	0.3
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	0.3	0.9	0.3	0.3
	$\bar{1}$	$\bar{3}$		0.3	0.7	0.3
	$\bar{2}$	$\bar{4}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{3}$	$\bar{5}$		0.7	0.3	0.3
	$\bar{4}$	$\bar{0}$		0.3	0.9	0.3
	$\bar{5}$	$\bar{1}$		0.3	0.3	0.3
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	0.7	0.9	0.7	0.7
	$\bar{1}$	$\bar{4}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{2}$	$\bar{5}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{3}$	$\bar{0}$		0.7	0.9	0.7
	$\bar{4}$	$\bar{1}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{5}$	$\bar{2}$		0.3	0.3	0.3
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	0.3	0.9	0.3	0.3
	$\bar{1}$	$\bar{5}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{2}$	$\bar{0}$		0.3	0.9	0.3
	$\bar{3}$	$\bar{1}$		0.7	0.3	0.3
	$\bar{4}$	$\bar{2}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{5}$	$\bar{3}$		0.3	0.7	0.3
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	0.3	0.9	0.3	0.3
	$\bar{1}$	$\bar{0}$		0.3	0.9	0.3
	$\bar{2}$	$\bar{1}$		0.3	0.3	0.3
	$\bar{3}$	$\bar{2}$		0.7	0.3	0.3
	$\bar{4}$	$\bar{3}$		0.3	0.7	0.3
	$\bar{5}$	$\bar{4}$		0.3	0.3	0.3

Tabel 2.6 Pemeriksaan kesamaan $\mu(x)$ dengan $\mu(-x)$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-x}$	$\boldsymbol{\mu(x)}$	$\boldsymbol{\mu(-x)}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
$\bar{1}$	$\bar{5}$	0.3	0.3
$\bar{2}$	$\bar{4}$	0.3	0.3
$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.7	0.7
$\bar{4}$	$\bar{2}$	0.3	0.3
$\bar{5}$	$\bar{1}$	0.3	0.3

Definisi 2.3.7 (Subgrup normal *fuzzy*)
Misalkan $(G,*)$ grup. Subgrup *fuzzy* μ pada G dikatakan normal jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu(x * y * x^{-1}) = \mu(y) \text{ atau } \mu(x * y) = \mu(y * x).$$

Contoh 2.3.8
Diberikan grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ dan subgrup *fuzzy* μ seperti pada Contoh 2.3.6. Akan ditunjukkan bahwa μ merupakan subgrup normal *fuzzy*.
Jawab:
Karena $\mathbb{Z}_6$ grup terhadap penjumlahan, maka akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $\mu(x + y + (-x)) = \mu(y)$ atau $\mu(x + y) = \mu(y + x)$,

Berdasarkan Tabel 2.7 didapat bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $\mu(x + y + (-x)) = \mu(y)$. Maka μ merupakan subgrup normal *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.7 Hasil operasi pemeriksaan subgrup normal *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$-\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x}))$	$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y})$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{4}$		$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{5}$	0.3	0.3
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{4}$		$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{5}$	0.3	0.3
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{4}$		$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{5}$	0.3	0.3
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{4}$		$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{5}$	0.3	0.3
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{4}$		$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{5}$	0.3	0.3
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{4}$		$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{5}$	0.3	0.3

Definisi 2.3.9 (Level subset)
Misalkan G merupakan grup dan μ subgrup *fuzzy* dari G. Untuk sembarang $t \in [0,1]$, level subset dari μ adalah

$$\mu^t = \{x \in G | \mu(x) \geq t\}.$$

Contoh 2.3.10
Akan ditentukan himpunan $\mu^{0.5}$ pada Contoh 2.3.6.
Jawab:
Himpunan $\mu^{0.5} = \{x \in \mathbb{Z}_6 : \mu(x) \geq 0.5\} = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.

Berikut diberikan definisi dari koset kanan (kiri) *fuzzy* dan koset tengah *fuzzy* yang dikutip dari Onasanya & Ilori (2013).

Definisi 2.3.11 (Koset *fuzzy*)
Misal μ merupakan subgrup *fuzzy* dari grup $(G,*)$. Untuk $a \in G$, koset kiri (atau kanan) *fuzzy* ${}_a\mu$ (atau μ_a) dari G oleh a dan μ didefinisikan dengan $({}_a\mu)(x) = \mu(a^{-1} * x)$ (atau $(\mu_a)(x) = \mu(x * a^{-1})$) untuk semua $x \in G$. Maka koset kiri dan koset kanan *fuzzy* yaitu,

$${}_a\mu = \{(x, \mu(a^{-1} * x)) | x \in G\}, \text{ dan}$$
$$\mu_a = \{(x, \mu(x * a^{-1})) | x \in G\}.$$

Koset kiri dan koset kanan *fuzzy* dikatakan sama $({}_a\mu = \mu_a)$ jika untuk setiap $x \in G$, berlaku $({}_a\mu)(x) = (\mu_a)(x)$.

Contoh 2.3.12
Diberikan suatu grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ dan pemetaan $\mu: \mathbb{Z}_6 \to [0,1]$, sedemikian sehingga,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.3\,; & x \in \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}\} \\ 0.7\,; & x = \overline{3} \\ 0.9\,; & x = \overline{0} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$. Seperti pada Contoh 2.3.6, μ merupakan subgrup *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditentukan koset kiri *fuzzy* $({}_a\mu)(x) = \mu((-a) + x)$ dan koset kanan *fuzzy* $(\mu_a)(x) = \mu(x + (-a))$ dari $\mathbb{Z}_6$ untuk $a \in \mathbb{Z}_6$.
Jawab:

Tabel 2.8 Hasil operasi penentuan koset kiri (kanan) *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x}$	$(-\boldsymbol{a})$	$(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{a})$	$\boldsymbol{\mu}((-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{a}))$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{4}$		$\bar{4}$	$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{5}$	$\bar{5}$	0.3	0.3
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	0.3	0.3
	$\bar{1}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{2}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{4}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{5}$		$\bar{4}$	$\bar{4}$	0.3	0.3
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{1}$		$\bar{5}$	$\bar{5}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{3}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{4}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.7	0.7
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{1}$		$\bar{4}$	$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{5}$	$\bar{5}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{4}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	0.3	0.3
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{1}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{2}$		$\bar{4}$	$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{3}$		$\bar{5}$	$\bar{5}$	0.3	0.3
	$\bar{4}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9
	$\bar{5}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	0.3	0.3
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0.3	0.3
	$\bar{1}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	0.3	0.3
	$\bar{2}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.7	0.7
	$\bar{3}$		$\bar{4}$	$\bar{4}$	0.3	0.3
	$\bar{4}$		$\bar{5}$	$\bar{5}$	0.3	0.3
	$\bar{5}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.9	0.9

Dari Tabel 2.8 didapat bahwa koset kanan dan kiri *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai berikut:

- $$_{\overline{0}}\mu(x) = \mu_{\overline{0}}(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}\} \\ 0.7, & x = \overline{3} \\ 0.9, & x = \overline{0} \end{cases}$$
  $$_{\overline{0}}\mu = \mu_{\overline{0}} = \{(\overline{0}, 0.9), (\overline{1}, 0.3), (\overline{2}, 0.3), (\overline{3}, 0.7), (\overline{4}, 0.3), \big(\overline{5}, 0.3\big)\}$$

- $$_{\overline{1}}\mu(x) = \mu_{\overline{1}}(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ 0.7, & x = \overline{4} \\ 0.9, & x = \overline{1} \end{cases}$$
  $$_{\overline{1}}\mu = \mu_{\overline{1}} = \{(\overline{0}, 0.3), (\overline{1}, 0.9), (\overline{2}, 0.3), (\overline{3}, 0.3), (\overline{4}, 0.7), \big(\overline{5}, 0.3\big)\}$$

- $$_{\overline{2}}\mu(x) = \mu_{\overline{2}}(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\} \\ 0.7, & x = \overline{5} \\ 0.9, & x = \overline{2} \end{cases}$$
  $$_{\overline{2}}\mu = \mu_{\overline{2}} = \{(\overline{0}, 0.3), (\overline{1}, 0.3), (\overline{2}, 0.9), (\overline{3}, 0.3), (\overline{4}, 0.3), \big(\overline{5}, 0.7\big)\}$$

- $$_{\overline{3}}\mu(x) = \mu_{\overline{3}}(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}\} \\ 0.7, & x = \overline{0} \\ 0.9, & x = \overline{3} \end{cases}$$
  $$_{\overline{3}}\mu = \mu_{\overline{3}} = \{(\overline{0}, 0.7), (\overline{1}, 0.3), (\overline{2}, 0.3), (\overline{3}, 0.9), (\overline{4}, 0.3), \big(\overline{5}, 0.3\big)\}$$

- $$_{\overline{4}}\mu(x) = \mu_{\overline{4}}(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ 0.7, & x = \overline{1} \\ 0.9, & x = \overline{4} \end{cases}$$
  $$_{\overline{4}}\mu = \mu_{\overline{4}} = \{(\overline{0}, 0.3), (\overline{1}, 0.7), (\overline{2}, 0.3), (\overline{3}, 0.3), (\overline{4}, 0.9), \big(\overline{5}, 0.3\big)\}$$

- $$_{\overline{5}}\mu(x) = \mu_{\overline{5}}(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\} \\ 0.7, & x = \overline{2} \\ 0.9, & x = \overline{5} \end{cases}$$
  $$_{\overline{5}}\mu = \mu_{\overline{5}} = \{(\overline{0}, 0.3), (\overline{1}, 0.3), (\overline{2}, 0.7), (\overline{3}, 0.3), (\overline{4}, 0.3), \big(\overline{5}, 0.9\big)\}$$

Koset kiri dan koset kanan *fuzzy* diatas sama ($_a\mu = \mu_a$) untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$.

Definisi 2.3.13 (Koset tengah *fuzzy*)
Misal μ merupakan subgrup *fuzzy* dari grup $(G,*)$. Untuk semua $a, b \in G$, koset tengah *fuzzy* ${}_a\mu_b$ dari G didefinisikan sebagai $({}_a\mu_b)(x) = \mu(a^{-1} * x * b^{-1})$ untuk setiap $x \in G$. Maka koset tengah *fuzzy* yaitu,

$${}_a\mu_b = \{(x, \mu(a^{-1} * x * b^{-1}))|x \in G\}.$$

Contoh 2.3.14
Diberikan suatu grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ dan pemetaan $\mu: \mathbb{Z}_6 \to [0,1]$, sedemikian sehingga,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.3 \,; & x \in \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\} \\ 0.7 \,; & x = \bar{3} \\ 0.9 \,; & x = \bar{0} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$. Seperti pada Contoh 2.3.6. μ merupakan subgrup *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditentukan koset tengah *fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$.
Ambil $a, b \in \mathbb{Z}_6$.
Untuk $a = \bar{0}$ dan $b = \bar{2}$, maka

Tabel 2.9 Hasil operasi penentuan koset tengah $\left({}_{\bar{0}}\mu_{\bar{2}}\right)$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{b}$	$-\boldsymbol{a}$	$-\boldsymbol{b}$	$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{b})$	$\boldsymbol{\mu}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{b}))$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	0.3
	$\bar{1}$				$\bar{5}$	0.3
	$\bar{2}$				$\bar{0}$	0.9
	$\bar{3}$				$\bar{1}$	0.3
	$\bar{4}$				$\bar{2}$	0.3
	$\bar{5}$				$\bar{3}$	0.7

Maka koset tengah ${}_a\mu_b$ adalah

$$\left({}_{\bar{0}}\mu_{\bar{2}}\right)(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\} \\ 0.7, & x = \bar{5} \\ 0.9, & x = \bar{2} \end{cases}$$

$${}_{\bar{0}}\mu_{\bar{2}} = \{(\bar{0}, 0.3), (\bar{1}, 0.3), (\bar{2}, 0.9), (\bar{3}, 0.3), (\bar{4}, 0.3), (\bar{5}, 0.7)\}.$$

Untuk $a = \overline{3}$ dan $b = \overline{4}$, maka

Tabel 2.10 Hasil operasi penentuan koset tengah $\left({}_{\overline{3}}\mu_{\overline{4}} \right)$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{b}$	$-\boldsymbol{a}$	$-\boldsymbol{b}$	$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{b})$	$\boldsymbol{\mu}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{b}))$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	0.3
	$\overline{1}$				$\overline{0}$	0.9
	$\overline{2}$				$\overline{1}$	0.3
	$\overline{3}$				$\overline{2}$	0.3
	$\overline{4}$				$\overline{3}$	0.7
	$\overline{5}$				$\overline{4}$	0.3

Maka koset tengah ${}_{a}\mu_{b}$ adalah

$$\left({}_{\overline{3}}\mu_{\overline{4}} \right)(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ 0.7, & x = \overline{4} \\ 0.9, & x = 1 \end{cases}$$

${}_{\overline{3}}\mu_{\overline{4}} = \{(\overline{0}, 0.3), (\overline{1}, 0.9), (\overline{2}, 0.3), (\overline{3}, 0.3), (\overline{4}, 0.7), \left(\overline{5}, 0.3\right)\}$.

2.4 Himpunan Bagian *Q-Fuzzy*

Himpunan bagian *Q-fuzzy* merupakan pengembangan dari himpunan bagian *fuzzy* yang diperkenalkan oleh Solairaju dan Nagarajan (2009). Berikut ini diberikan definisi-definisi yang berhubungan dengan himpunan bagian *Q-fuzzy* dikutip dari Priya, dkk. (2013).

Definisi 2.4.1 (Himpunan bagian *Q-fuzzy*)
Misalkan G dan Q keduanya merupakan himpunan tak kosong. Himpunan bagian *Q-fuzzy* μ pada G adalah suatu pemetaan

$$\mu: G \times Q \to [0,1].$$

Karena μ adalah pemetaan, maka μ dapat ditulis dalam bentuk himpunan terurut, dalam hal ini

$$\mu = \{\left((x,q), \mu(x,q)\right) | (x,q) \in G \times Q\}.$$

Contoh 2.4.2
Diberikan himpunan $G = \{0,1,2\}$ dan $Q = \{1,2\}$. Hasil kali kartesian dari G dengan Q adalah

$$G \times Q = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}.$$

Pemetaan μ didefinisikan $\mu: G \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\mu(0,1) = 0; \mu(0,2) = 0.2; \mu(1,1) = 0.4;$$
$$\mu(1,2) = 0.6; \mu(2,1) = 0.8; \mu(2,2) = 1.$$

Himpunan

$$\mu = \{[(0,1), 0], [(0,2), 0.2], [(1,1), 0.4], \\ [(1,2), 0.6], [(2,1), 0.8], [(2,2), 1]\}$$

disebut sebagai himpunan bagian *Q-fuzzy* pada G.

Definisi 2.4.3 (Subgrup *Q-fuzzy*)

Himpunan bagian *Q-fuzzy* μ merupakan subgrup *Q-fuzzy* dari $(G,*)$ jika untuk setiap $x, y \in G$, $q \in Q$ memenuhi

i) $\mu(x * y, q) \geq \min\{\mu(x,q), \mu(y,q)\}$

ii) $\mu(x^{-1}, q) = \mu(x,q)$.

Contoh 2.4.4

Diberikan $(\mathbb{Z}_6, +)$ grup dan himpunan $Q = \{1,2\}$ dengan pemetaan μ yang didefinisikan $\mu: \mathbb{Z}_6 \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\mu(x,q) = \begin{cases} 0, (x,q) \in \{(\bar{1},1), (\bar{2},1), (\bar{4},1), (\bar{5},1)\} \\ 0.4, (x,q) \in \{(\bar{1},2), (\bar{2},2), (\bar{4},2), (\bar{5},2)\} \\ 0.8, (x,q) \in \{(\bar{3},1), (\bar{3},2)\} \\ 1, (x,q) \in \{(\bar{0},1), (\bar{0},2)\} \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa μ merupakan subgrup *Q-fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$.

Jawab:

i) Akan ditunjukkan bahwa $\mu(x + y, q) \geq \min\{\mu(x,q), \mu(y,q)\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dan $q \in Q$.

Dari Tabel 2.11 dan Tabel 2.12 terlihat bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dan $q \in Q$ berlaku$(x + y, q) \geq \min\{\mu(x,q), \mu(y,q)\}$, maka syarat pertama terpenuhi.

Tabel 2.11 Hasil operasi pemeriksaan subgrup *Q-fuzzy* untuk $q = 1$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{\mu(x,1)}$	$\boldsymbol{\mu(y,1)}$	$\boldsymbol{\mu(x+y,1)}$	$\boldsymbol{min\{\mu(x,1),\mu(y,1)\}}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	1	1	1	1
	$\bar{1}$		0	0	0
	$\bar{2}$		0	0	0
	$\bar{3}$		0.8	0.8	0.8
	$\bar{4}$		0	0	0
	$\bar{5}$		0	0	0
$\bar{1}$	$\bar{0}$	0	1	0	0
	$\bar{1}$		0	0	0
	$\bar{2}$		0	0.8	0
	$\bar{3}$		0.8	0	0
	$\bar{4}$		0	0	0
	$\bar{5}$		0	1	0
$\bar{2}$	$\bar{0}$	0	1	0	0
	$\bar{1}$		0	0.8	0
	$\bar{2}$		0	0	0
	$\bar{3}$		0.8	0	0
	$\bar{4}$		0	1	0
	$\bar{5}$		0	0	0
$\bar{3}$	$\bar{0}$	0.8	1	0.8	0.8
	$\bar{1}$		0	0	0
	$\bar{2}$		0	0	0
	$\bar{3}$		0.8	1	0.8
	$\bar{4}$		0	0	0
	$\bar{5}$		0	0	0
$\bar{4}$	$\bar{0}$	0	1	0	0
	$\bar{1}$		0	0	0
	$\bar{2}$		0	1	0
	$\bar{3}$		0.8	0	0
	$\bar{4}$		0	0	0
	$\bar{5}$		0	0.8	0
$\bar{5}$	$\bar{0}$	0	1	0	0
	$\bar{1}$		0	1	0
	$\bar{2}$		0	0	0
	$\bar{3}$		0.8	0.8	0
	$\bar{4}$		0	0	0
	$\bar{5}$		0	0	0

Tabel 2.12 Hasil operasi pemeriksaan subgrup *Q-fuzzy* untuk $q = 2$

x	y	$\mu(x,2)$	$\mu(y,2)$	$\mu(x+y,2)$	$min\{\mu(x,2),\mu(y,2)\}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	1	1	1	1
	$\bar{1}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{2}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{3}$		0.8	0.8	0.8
	$\bar{4}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{5}$		0.4	0.4	0.4
$\bar{1}$	$\bar{0}$	0.4	1	0.4	0.4
	$\bar{1}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{2}$		0.4	0.8	0.4
	$\bar{3}$		0.8	0.4	0.4
	$\bar{4}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{5}$		0.4	1	0.4
$\bar{2}$	$\bar{0}$	0.4	1	0.4	0.4
	$\bar{1}$		0.4	0.8	0.4
	$\bar{2}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{3}$		0.8	0.4	0.4
	$\bar{4}$		0.4	1	0.4
	$\bar{5}$		0.4	0.4	0.4
$\bar{3}$	$\bar{0}$	0.8	1	0.8	0.8
	$\bar{1}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{2}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{3}$		0.8	1	0.8
	$\bar{4}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{5}$		0.4	0.4	0.4
$\bar{4}$	$\bar{0}$	0.4	1	0.4	0.4
	$\bar{1}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{2}$		0.4	1	0.4
	$\bar{3}$		0.8	0.4	0.4
	$\bar{4}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{5}$		0.4	0.8	0.4
$\bar{5}$	$\bar{0}$	0.4	1	0.4	0.4
	$\bar{1}$		0.4	1	0.4
	$\bar{2}$		0.4	0.4	0.4
	$\bar{3}$		0.8	0.4	0.4
	$\bar{4}$		0.4	0.8	0.4
	$\bar{5}$		0.4	0.4	0.4

ii) Akan ditunjukkan bahwa $\mu(-x,q) = \mu(x,q)$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$ dan $q \in Q$.

Tabel 2.13 Pemeriksaan kesamaan $\mu(x,q)$ dengan $\mu(-x,q)$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-x}$	$\boldsymbol{\mu(x,1)}$	$\boldsymbol{\mu(-x,1)}$	$\boldsymbol{\mu(x,2)}$	$\boldsymbol{\mu(-x,2)}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	1	1	1	1
$\bar{1}$	$\bar{5}$	0	0	0.4	0.4
$\bar{2}$	$\bar{4}$	0	0	0.4	0.4
$\bar{3}$	$\bar{3}$	0.8	0.8	0.8	0.8
$\bar{4}$	$\bar{2}$	0	0	0.4	0.4
$\bar{5}$	$\bar{1}$	0	0	0.4	0.4

Dari Tabel 2.13 terbukti $\mu(-x,q) = \mu(x,q)$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$ dan $q \in Q$.

Dengan terpenuhinya i) dan ii), maka terbukti bahwa μ merupakan subgrup *Q-fuzzy* dari $\mathbb{Z}_6$.

Contoh 2.4.5

Diberikan $(\mathbb{Z},+)$ grup dan himpunan $Q = \{q\}$ dengan pemetaan α yang didefinisikan $\alpha: \mathbb{Z} \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\alpha(x,q) = \begin{cases} 1, & x \in 2\mathbb{Z} \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa α merupakan subgrup *Q-fuzzy* dari $\mathbb{Z}$.

Jawab:

i) Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(x+y,q) \geq \min\{\alpha(x,q), \alpha(y,q)\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ dan $q \in Q$.

- Untuk x genap dan y genap, maka $x+y$ genap, sehingga
$$\alpha(x+y,q) = 1$$
$$\alpha(x,q) = 1$$
$$\alpha(y,q) = 1$$
Didapat $\alpha(x+y,q) = \min\{\alpha(x,q), \alpha(y,q)\}$.

- Untuk x genap dan y ganjil, maka $x+y$ ganjil, sehingga
$$\alpha(x+y,q) = 0$$
$$\alpha(x,q) = 1$$
$$\alpha(y,q) = 0$$
Didapat $\alpha(x+y,q) = \min\{\alpha(x,q), \alpha(y,q)\}$.

- Untuk x ganjil dan y ganjil, maka $x + y$ genap, sehingga

$$\alpha(x + y, q) = 1$$
$$\alpha(x, q) = 0$$
$$\alpha(y, q) = 0$$

Didapat $\alpha(x + y, q) \geq \min\{\alpha(x, q), \alpha(y, q)\}$.

Dari ketiga kemungkinan tersebut, semuanya memenuhi $\alpha(x + y, q) \geq \min\{\alpha(x, q), \alpha(y, q)\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ dan $q \in Q$.

ii) Akan ditunjukkan bahwa $\alpha(-x, q) = \alpha(x, q)$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ dan $q \in Q$. Karena untuk x genap inversnya adalah $(-x)$ yang juga genap, pastilah

$$\alpha(-x, q) = \alpha(x, q) = 1$$

begitu pula untuk x ganjil inversnya adalah $(-x)$ yang juga ganjil, sehingga

$$\alpha(-x, q) = \alpha(x, q) = 0.$$

Terbukti $\alpha(-x, q) = \alpha(x, q)$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ dan $q \in Q$.

Dengan terpenuhinya i) dan ii), maka α merupakan subgrup *Q-fuzzy* dari $\mathbb{Z}$.

Untuk selanjutnya penulisan $(G,*)$ dinotasikan sebagai G, dan $(x * y)$ sebagai (xy).