BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi dan contoh dari ideal-ideal prima boolean *like* semiring. Bab ini juga menyajikan Lemma serta teorema yang berkaitan dengan ideal-ideal prima boolean *like* semiring. Sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi dan contoh dari boolean *like* semiring.

3.1 Boolean *Like* Semiring

Boolean *like* semiring merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi boolean *like* semiring, boolean *like* semiring komutatif lemah, dan ideal pada boolean *like* semiring yang dirujuk dari Vankateswaru, dkk (2011).

Definisi 3.1.1 (Boolean *like* semiring)
Misalkan R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan pergandaan dinotasikan $(R,+,\cdot)$. R disebut boolean *like* semiring jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut

i. $(R,+)$ merupakan grup komutatif,
ii. $(R,\cdot)$ merupakan semigrup,
iii. untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku sifat distributif kiri, yaitu $a(b+c) = ab + ac$,
iv. untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + a = 0$,
v. untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $ab(a + b + ab) = ab$.

Contoh 3.1.2
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_8$ terhadap operasi $\oplus$ dan $\odot$ seperti pada Contoh 2.4.2. $(\mathbb{Z}_8,\oplus,\odot)$ merupakan boolean *like* semiring.
Bukti.
Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_8$ memenuhi aksioma-aksioma pada boolean *like* semiring.

i. Berdasarkan Contoh 2.4.2, telah dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan, Selanjutnya akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_8,\oplus)$ memenuhi sifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$, berlaku $a \oplus b = b \oplus a$. Ambil $a = \bar{6}$ dan $b = \bar{7}$ berlaku

$$\bar{6} \oplus \bar{7} = \bar{1} = \bar{7} \oplus \bar{6}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$.

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_8, \oplus)$ merupakan grup komutatif.

ii. Berdasarkan Contoh 2.4.2, telah dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan semigrup terhadap operasi pergandaan.

iii. Berdasarkan Contoh 2.4.2, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ memenuhi sifat distributif kiri, yaitu $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_8$.

iv. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_8$ berlaku $a \oplus a = 0$. Hasil dari $a \oplus a$ ditunjukkan pada tabel berikut

Tabel 3.1. Hasil dari $a \oplus a$ pada $\mathbb{Z}_8$

a	$a \oplus a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$

v. untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$ berlaku $a \odot b \odot (a \oplus b \oplus a \odot b) = a \odot b$. Untuk $a = \bar{2}, b = \bar{5}$ berlaku

$$\begin{aligned} \bar{2} \odot \bar{5} \odot (\bar{2} \oplus \bar{5} \oplus (\bar{2} \odot \bar{5})) &= \bar{2} \odot \bar{5} \\ \bar{0} \odot (\bar{7} \oplus \bar{0}) &= \bar{0} \\ \bar{0} \odot \bar{7} &= \bar{0} \\ \bar{0} &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$.

Berdasarkan ii, ii, iii, iv, dan v terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ merupakan boolean *like* semiring.

Contoh 3.1.4

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi $\oplus$ dan pergandaan seperti pada Contoh 2.5.5. $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ merupakan boolean *like* semiring.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ memenuhi aksioma-aksioma pada boolean like semiring,

i) berdasarkan Contoh 2.5.5, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ merupakan ring komutatif, sehingga jelas memenuhi aksioma i), ii) dan iii).

ii) untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $a \oplus a = 0$. Hasil dari $a \oplus a$ ditunjukkan pada tabel berikut

Tabel 3.2. Hasil dari $a \oplus a$ pada $\mathbb{Z}_4$

a	$a \oplus a$
$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$

iii) untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $ab(a \oplus b \oplus ab) = ab$. Misalkan untuk $a = \overline{2}, b = \overline{3}$ berlaku

$$\overline{2} \cdot \overline{3}(\overline{2} \oplus \overline{3} \oplus (\overline{2} \cdot \overline{3})) = \overline{2} \cdot \overline{3}$$
$$\overline{2}(\overline{1} \oplus \overline{0}) = \overline{0} \cdot \overline{1}$$
$$\overline{0} \cdot \overline{1} = \overline{0} \cdot \overline{1}$$

Berdasarkan i dan ii, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ merupakan boolean *like* semiring.

Definisi 3.1.5 (Boolean *like* semiring komutatif lemah)

Misalkan R adalah boolean *like* semiring. R disebut boolean *like* semiring komutatif lemah jika memenuhi $abc = acb$ untuk setiap $a, b, c \in R$.

Contoh 3.1.6

Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.3. $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ merupakan boolean *like* semiring komutatif lemah.

Bukti.

Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ memenuhi aksioma pada boolean *like* semiring komutatif lemah, yaitu setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $abc = acb$. Misalkan untuk $a = \overline{1}, b = \overline{2}, c = \overline{3}$ berlaku

$\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2} = \bar{1} \cdot \bar{3} \cdot \bar{2}$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Jadi terbukti ($\mathbb{Z}_4$,⊕,·) merupakan boolean *like* semiring komutatif lemah.

Definisi 3.1.7 (Subgrup)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I subset tak kosong dari R. I merupakan subgrup dari R jika setiap $a, b \in I$ berlaku $a + b \in I$.

Contoh 3.1.8
Diberikan boolean *like* semiring ($\mathbb{Z}_8$,⊕,⊙) seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_8$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_8$ dengan menunjukkan $a \oplus b \in I$ untuk setiap $a, b \in I$. Hasil dari $a \oplus b$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3.3. Hasil dari $a \oplus b$ pada I

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a \oplus b}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{1}$
	$\bar{4}$	$\bar{4}$
	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
	$\bar{1}$	$\bar{0}$
	$\bar{4}$	$\bar{5}$
	$\bar{5}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
	$\bar{1}$	$\bar{5}$
	$\bar{4}$	$\bar{0}$
	$\bar{5}$	$\bar{1}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
	$\bar{1}$	$\bar{4}$
	$\bar{4}$	$\bar{1}$
	$\bar{5}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel, diperoleh setiap hasil dari $a \oplus b$ termuat dalam I, untuk setiap $a, b \in I$. Jadi terbukti bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_8$.

Definisi 3.1.9 (Ideal pada Boolean *Like* semiring)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I subset tak kosong dari R. I merupakan ideal dari R jika memenuhi aksioma-aksioma berikut

i. $(I, +)$ merupakan subgrup dari $(R, +)$,
ii. untuk setiap $r \in R$ dan $a \in I$ berlaku $ra \in I$,
iii. untuk setiap $r, s \in R$ dan $a \in I$ berlaku $(r + a)s + rs \in I$.

I disebut ideal pada R jika memenuhi aksioma i, ii, dan iii. Disebut ideal kanan pada R jika memenuhi aksioma i dan ii, dan disebut ideal kiri pada R jika memenuhi aksioma i dan iii.

Contoh 3.1.10
Diberikan boolean *like* semiring ($\mathbb{Z}_8$,$\oplus$,$\odot$) seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$adalah subset dari $\mathbb{Z}_8$. I merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_8$.

Bukti.
Akan dibuktikan I memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut

i. untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a \oplus b \in I$. berdasarkan Tabel 3.3. telah ditunjukkan hasil dari $a \oplus b \in I$, untuk setiap $a, b \in I$.
ii. untuk setiap $a \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_8$, berlaku $r \odot a \in I$. Hasil dari ra ditunjukkan pada tabel berikut

Tabel 3.4 Hasil dari $r \odot a$ pada I

$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{r \odot a}$
$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{0}$
2		$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$		$\bar{0}$
$\bar{5}$		$\bar{2}$
$\bar{6}$		$\bar{0}$
$\bar{7}$		$\bar{2}$
$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{0}$
2		$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$		$\bar{0}$
$\bar{5}$		$\bar{1}$
$\bar{6}$		$\bar{0}$
$\bar{7}$		$\bar{1}$

$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{r \odot a}$
$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$
2		$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$		$\bar{4}$
$\bar{5}$		$\bar{4}$
$\bar{6}$		$\bar{4}$
$\bar{7}$		$\bar{4}$
$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$
2		$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$		$\bar{4}$
$\bar{5}$		$\bar{5}$
$\bar{6}$		$\bar{4}$
$\bar{7}$		$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.4 diatas dapat diperoleh semua hasil dari $r \odot a$ termuat dalam I,

iii. untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}_8$ dan $a \in I$ berlaku $(r \oplus a) \odot s \oplus r \odot s \in I_1$. Ambil $r = \bar{2}, s = \bar{3}, a = \bar{4}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}(\bar{2} \oplus \bar{4}) \odot \bar{3} \oplus \bar{2} \odot \bar{3} &= \bar{6} \odot \bar{3} \oplus \bar{2} \\ &= \bar{2} \oplus \bar{2} \\ &= \bar{0}.\end{aligned}$$

Berlaku untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}_8$ dan $a \in I$.

Berdasarkan i, ii, dan iii terbukti bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_8$.

Ideal-ideal sejati yang lain dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $I_1 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, dan $I_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Ideal-ideal tak sejati dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $I_4 = \{\bar{0}\}$ dan $I_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$.

Contoh 3.1.11

Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.3. $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah subset dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti.

Akan dibuktikan I memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut

i. untuk setiap $a, b \in J$ berlaku $a \oplus b \in J$. Hasil dari $a \oplus b$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3.5 Hasil dari $a \oplus b$ pada J

a	b	$a \oplus b$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.3, diperoleh setiap hasil dari $a \oplus b$ termuat dalam J.

ii. untuk setiap $a \in J$ dan $r \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $ra \in J$. Hasil dari ra ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3.6 Hasil dari ra pada J

$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{ra}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{0}$
2		$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{2}$
2		$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.4, diperoleh setiap hasil dari ra termuat dalam J,

iii. untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}_4$ dan $a \in J$ berlaku $(r \oplus a)s \oplus rs \in J$. Hasil dari $(r \oplus a)s \oplus rs$ ditunjukkan pada tabel berikut

Tabel 3.7 Hasil dari $(r \oplus a)s \oplus rs$ pada $\mathbb{Z}_4$

r	a	$(r \oplus a)$	s	$(r \oplus a)s$	rs	$(r \oplus a)s \oplus rs$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{3}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{3}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{3}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$		$\bar{2}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{3}$		$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{3}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$		$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{1}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$		$\bar{3}$		$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$		$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$		$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{3}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$		$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$		$\bar{1}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$		$\bar{3}$		$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$		$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$		$\bar{1}$		$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.7 diperoleh setiap hasil dari $(r \oplus a)s \oplus rs \in J$.

Berdasarkan i, ii, dan iii terbukti bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_4$.

Ideal tak sejati dari $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ adalah $J_1 = \{\bar{0}\}$ dan $J_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

3.2 Lemma dan Teorema pada Ideal-Ideal Prima Boolean *Like* Semiring

Berikut ini dibuktikan lemma dan teorema yang berlaku pada ideal-ideal prima boolean *like* semiring. Sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi dan contoh dari ideal-ideal prima pada boolean *like* semiring yang dirujuk dari Yibeltal, dkk (2014).

Definisi 3.2.1 (Ideal Prima)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal sejati dari R. I disebut ideal prima dari ring R jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$ untuk $a, b \in R$.

Contoh 3.2.2
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.7. $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal prima dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal prima dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in J$ maka $a \in J$ atau $b \in J$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Ambil $ab = \bar{0}$ maka $a = \bar{2} \in J$ atau $b = \bar{2} \in J$. Jadi terbukti bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal prima dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.3 (Ideal *Primary*)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal sejati dari R. I disebut ideal primary dari ring R jika $ab \in I$ maka $a^n \in I$ atau $b \in I$ untuk $a, b \in R$ dan untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$.

Contoh 3.2.4
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal *primary* dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal *primary* dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in J$ maka $a^n \in J$ atau $b \in J$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Ambil $ab = \overline{2}$ maka $a = \overline{1} \notin J$ atau $b = \overline{2} \in J$. Jadi terbukti bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal *primary* dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.5 (Ideal 2-*absorbing*)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I disebut ideal 2-*absorbing* dari R jika $abc \in I$ maka berlaku $ab \in I$ atau $bc \in I$ atau $ac \in I$ untuk $a, b, c \in R$.

Contoh 3.2.6
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal *2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* dengan menunjukkan bahwa jika $abc \in J$ maka berlaku $ab \in J$ atau $bc \in J$ atau $ac \in J$. Ambil $abc = \overline{1} \cdot \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2} \in J$, sehingga $a = \overline{1}, b = \overline{2}, c = \overline{3}$. Selanjutnya akan ditunjukkan sebagai berikut

$$ab = \overline{1} \cdot \overline{2} = \overline{2} \in J,$$
$$bc = \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2} \in J,$$
$$ac = \overline{1} \cdot \overline{3} = \overline{3} \in J.$$

Sehingga terbukti bahwa J merupakan ideal *2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.7 (Ideal *Primary* 2-*absorbing*)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I disebut Ideal *Primary* 2-*absorbing* dari R jika $abc \in I$ maka $ab^n \in I$ atau $bc^m \in I$ atau $ac^k \in I$ untuk $a, b, c \in R$ dan untuk suatu $n, m, k \in \mathbb{Z}^+$.

Contoh 3.2.8
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan Ideal *Primary* 2-*absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah Ideal *Primary* 2-*absorbing* dengan menunjukkan bahwa jika $abc \in J$ maka $ab^n \in J$ atau $bc^m \in J$ atau $ac^k \in J$. Ambil $abc = \bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{0} \in J$, sehingga $a = \bar{0}, b = \bar{1}, c = \bar{2}$ dan terdapatlah $n = 1, m = 2, k = 3$ sedemikian sehingga

$$ab^n = \bar{0} \cdot \bar{1}^1 = \bar{0} \in J,$$
$$bc^n = \bar{1} \cdot \bar{2}^2 = \bar{0} \in J,$$
$$ac^n = \bar{0} \cdot \bar{2}^2 = \bar{0} \in J,$$

Jadi terbukti bahwa J merupakan Ideal *Primary* 2-*absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.9 (Ideal Semi Prima)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I disebut ideal semi prima dari R jika $a^2 \in I$ berlaku $a \in I$ untuk $a \in R$.

Contoh 3.2.10
Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_8$. I merupakan ideal semi prima dari $\mathbb{Z}_8$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal semi prima dengan menunjukkan bahwa untuk setiap $a^2 \in I$ berlaku $a \in I$. Sehingga untuk $a^2 = \bar{0}$ berlaku $a = \bar{0} \in I$ atau $a = \bar{1} \in I$, untuk $a^2 = \bar{4}$ berlaku $a = \bar{4} \in I$, dan untuk $a^2 = \bar{5}$ berlaku $a = \bar{5} \in I$. Jadi, terbukti bahwa I merupakan ideal semi prima dari $\mathbb{Z}_8$.

Contoh 3.2.11
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal semi prima dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal semi prima dengan menunjukkan bahwa untuk setiap $a \in J$ berlaku $a^2 \in J$. Sehingga

untuk $a = \overline{0}$ berlaku $\overline{0}^2 = \overline{0} \in J$, untuk $a = \overline{2}$ berlaku $\overline{2}^2 = \overline{0} \in J$. Jadi, terbukti bahwa J merupakan ideal semi prima dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.12 (Ideal *Almost Primary*)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal sejati dari R. I disebut ideal *almost primary* dari R jika $ab \in I - I^2$ maka $a^n \in I$ atau $b \in I$ untuk $a, b \in R$ dan untuk suatu bilangan bulat positif n.

Contoh 3.2.13
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal *almost primary* dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal *almost primary* dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in J - J^2$ maka $a^n \in J$ atau $b \in J$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}_4$ dan untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Untuk $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ diperoleh $J^2 = \{\overline{0}\}$, sehingga $J - J^2 = \{\overline{2}\}$. Ambil $ab = \overline{2}$ dengan $a = \overline{1}$ dan $b = \overline{2}$ maka terdapatlah $n = 2$ sehingga $a^n = \overline{1}^2 = \overline{1} \notin J$ atau $b = \overline{2} \in J$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $ab \in I$. Sehingga terbukti bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal *almost primary* dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.14 (Ideal Prima 2-Poten)
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I disebut ideal prima 2-poten dari R jika $ab \in I^2$ maka $a \in I$ atau $b \in I$, untuk $a, b \in R$.

Contoh 3.2.15
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal prima 2-poten dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal prima 2-poten dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in J^2$ maka $a \in J$ atau $b \in J$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Ambil sebarang $ab \in J^2$. Ambil $ab = \overline{2}^2 = \overline{0}$ maka $a = \overline{0} \in J$ atau $b = \overline{2} \in J$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $ab \in J$. Sehingga terbukti bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal prima 2-poten dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.16 (Ideal Prima Lemah (*Weakly Prime Ideal*))
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I disebut ideal prima lemah dari R jika $ab \in I, ab \neq 0$ maka $a \in I$ atau $b \in I$, untuk $a, b \in R$.

Contoh 3.2.17
Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}\}$ dan $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_8$. I dan J merupakan ideal prima lemah dari $\mathbb{Z}_8$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $I = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}\}$ dan $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal prima lemah dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in I, J$ dan $ab \neq 0$ maka $a \in I, J$ atau $b \in I, J$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$. Ambil sebarang $ab \in I, J$ dan $ab \neq 0$. Ambil $ab = \overline{4} \in I$ maka $a = \overline{4} \in I$, atau $b = \overline{7} \notin I$ dan $ab = \overline{2} \in J$ maka $a = \overline{6} \notin J$, atau $b = \overline{3} \in J$ Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $ab \in I, J$. Sehingga terbukti bahwa $I = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}\}$ dan $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal prima lemah dari $\mathbb{Z}_8$.

Contoh 3.2.18
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan Ideal prima lemah dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal prima lemah dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in J, ab \neq 0$ maka $a \in J$ atau $b \in J$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Ambil sebarang $ab \in J, ab \neq 0$. Ambil $ab = \overline{3} \in J$ maka $a = \overline{1} \in J$, atau $b = \overline{3} \in J$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $ab \in J$. Sehingga terbukti bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal prima lemah.

Definisi 3.2.19 (Ideal *Primary* Lemah (*Weakly Primary Ideal*))
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I disebut ideal *primary* lemah dari R jika $ab \in I, ab \neq 0$ maka $a^n \in I$ atau $b \in I$, untuk $a, b \in R$ dan untuk suatu bilangan bulat positif n.

Contoh 3.2.20
Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_8$. I merupakan ideal *primary* lemah dari $\mathbb{Z}_8$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal *primary* lemah dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in J, ab \neq 0$ maka $a^n \in J$ atau $b \in J$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_8$. Ambil sebarang $ab \in J, ab \neq 0$. Ambil $ab = \bar{5}$ dengan $a = \bar{5}$ dan $b = \bar{7}$, maka terdapatlah $n = 2$ sehingga $a^n = \bar{5}^2 = \bar{5} \in J$ atau $b = \bar{7} \notin J$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $ab \in J$. Sehingga terbukti bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal *primary* lemah dari $\mathbb{Z}_8$.

Contoh 3.2.21
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan Ideal *primary* lemah dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah ideal *primary* lemah dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in J, ab \neq 0$ maka $a^n \in J$ atau $b \in J$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Ambil sebarang $ab \in J, ab \neq 0$. Misalkan diambil $ab = \bar{2}$ dengan $a = \bar{2}$ dan $b = \bar{3}$, maka terdapatlah $n = 2$ sehingga $a^n = \bar{2}^2 = \bar{0} \in J$ atau $b = \bar{3} \in J$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $ab \in J$. Sehingga terbukti bahwa $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah ideal *primary* lemah dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 3.2.22 (Ideal 2-*absorbing* Lemah (*Weakly 2-absorbing Ideal*))
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I disebut ideal 2-*absorbing* lemah dari R jika $abc \in I, abc \neq 0$ maka $ab \in I$ atau $bc \in I$ atau $ac \in I$, untuk $a, b, c \in R$.

Contoh 3.2.23
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan Ideal 2-*absorbing* lemah dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* lemah dengan menunjukkan bahwa jika $abc \in J, abc \neq 0$ maka $ab \in J$ atau $bc \in J$ atau $ac \in J$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$.Ambil sebarang $abc \in J$. Misalkan diambil $abc = \overline{2} \in J$, dengan $a = \overline{1}$, $b = \overline{2}$, dan $c = \overline{3}$. Selanjutnya akan ditunjukkan sebagai berikut

$$ab = \overline{1} \cdot \overline{2} = \overline{2} \in J,$$
$$bc = \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2} \in J,$$
$$ac = \overline{1} \cdot \overline{3} = \overline{3} \in J.$$

Jadi terbukti bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* lemah dari $\mathbb{Z}_4$.

Lemma 3.2.24
Misalkan R adalah boolean *like* semiring. Untuk setiap $a \in R$ berlaku $a^4 = a^2$.
Bukti.
Ambil sebarang $a \in R$. Subtitusikan $b = a$ pada Definisi 3.1.1 bagian v, sehingga berlaku

$$\begin{aligned} aa(a + a + aa) = aa \Rightarrow aa(0 + aa) &= aa \\ \Rightarrow aa(aa) &= aa \\ \Rightarrow aaaa &= aa \\ \Rightarrow a^4 &= a^2. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.25
Misalkan R adalah boolean *like* semiring. Untuk $a \in R$ dan untuk suatu bilangan bulat positif n berlaku
i. $a^n = a$,
ii. $a^{2n} = a^2$,
iii. $a^{2n+1} = a^3$.
Bukti.
Ambil sebarang $a \in R$ dan untuk suatu bilangan bulat positif n sedemikian sehingga berlaku
i. untuk $n = 1$ berlaku $a^1 = a$,
ii. berdasarkan Lemma 3.3.1 didapatkan $a^4 = a^2$, sehingga diperoleh rumus $a^{2n} = a^2$, jadi untuk $n \geq 1$ berlaku $a^{2n} = a^2$,
iii. berdasarkan Lemma 3.2.2 bagian ii yaitu $a^{2n} = a^2$ sehingga didapatkan $a^{2n+1} = a^{2n}a = a^{2+1} = a^3$.

Teorema 3.2.26
Misalkan R adalah boolean *like* semiring komutatif lemah dan I adalah ideal dari R. Jika I adalah ideal *2-absorbing* maka $\sqrt{I}$ ideal *2-absorbing.*
Bukti.
Misalkan I adalah ideal *2-absorbing* dari R. Ambil sebarang $abc \in \sqrt{I}$ dengan $a, b, c \in R$, sehingga $(abc)^n \in \sqrt{I}$ untuk suatu bilangan positif n. Sehingga diperoleh $abc \in I$ atau $(abc)^2 \in I$ atau $(abc)^3 \in I$.
Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah sebagai berikut

1. untuk $n = 1$ maka $abc \in I$, sehingga jelas terbukti karena I adalah ideal *2-absorbing* dan $I \subset \sqrt{I}$,
2. untuk $n = 2$ maka $(abc)^2 \in I$, diperoleh $a^2b^2c^2 \in I$ dengan demikian $a^2b^2 \in I$ atau $b^2c^2 \in I$ atau $a^2c^2 \in I$. Sehingga $(ab)^2 \in I$ atau $(bc)^2 \in I$ atau $(ac)^2 \in I$, dapat ditulis menjadi $ab \in \sqrt{I}$ atau $bc \in \sqrt{I}$ atau $ac \in \sqrt{I}$,
3. untuk $n = 3$ maka $(abc)^3 \in I$, diperoleh $(abc)^2(abc) \in I$. Berdasarkan kasus 1 ditunjukkan bahwa $abc \in I$, dan berdsarkan kasus 2 ditunjukkan bahwa $(abc)^2 \in I$. Sehingga terbukti $(abc)^2(abc) \in I$.

Jadi berdasarkan kasus-kasus diatas terbukti bahwa $\sqrt{I}$ ideal *2-absorbing.*

Contoh 3.2.27
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$. $\sqrt{J}$ merupakan ideal *2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan ditunjukkan radikal dari ideal J, yaitu untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$ dan untuk suatu $n \geq 1$ berlaku $a^n \in J$, sehingga

$$\bar{0}^n = \bar{0} \in J$$
$$\bar{1}^n = \bar{1} \in J$$
$$\bar{2}^n \in J$$
$$\bar{3}^n \in J,$$

diperoleh radikal pada ideal J adalah $\sqrt{J} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Sehingga terbukti bahwa $\sqrt{J}$ merupakan ideal *2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.

Teorema 3.2.28

Misalkan R adalah boolean *like* semiring komutatif lemah dan I adalah ideal dari R. Jika I adalah ideal semi prima dan *primary 2-absorbing* maka I adalah ideal *2-absorbing*.

Bukti.

Misalkan I adalah ideal semi prima dan *primary 2-absorbing* dari R. Ambil sebarang $abc \in I$ maka $ab^n \in I$ atau $bc^m \in I$ atau $ac^k \in I$ untuk suatu bilangan bulat n, m, k.

i. Jika $ab^n \in I$ maka $ab \in I$ atau $ab^2 \in I$ atau $ab^3 \in I$. Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah sebagai berikut
   1. untuk $n = 1$ maka $ab \in I$, sehingga bukti selesai,
   2. untuk $n = 2$ maka diperoleh $ab^2 \in I$, karena I ideal semi prima sehingga $(ab^2)^2 \in I \Longrightarrow a^2b^4 \in I$. Berdasarkan Lemma 3.3.2 bagian ii, didapatkan $b^4 = b^2$ sehingga menjadi $a^2b^2 \in I \Longrightarrow (ab)^2 \in I \Longrightarrow ab \in I$.
   3. untuk $n = 3$ maka diperoleh $ab^3 \in I$, karena I ideal semi prima sehingga $(ab^3)^2 \in I \Longrightarrow a^2b^6 \in I$. Berdasarkan Lemma 3.3.2 bagian ii, didapatkan $b^6 = b^2$ sehingga menjadi $a^2b^2 \in I \Longrightarrow (ab)^2 \in I \Longrightarrow ab \in I$.

ii. Jika $bc^m \in I$ maka $bc \in I$ atau $bc^2 \in I$ atau $bc^3 \in I$. Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah sebagai berikut
   1. untuk $m = 1$ maka $bc \in I$, sehingga bukti selesai,
   2. untuk $n = 2$ maka diperoleh $bc^2 \in I$, karena I ideal semi prima sehingga $(bc^2)^2 \in I \Longrightarrow b^2c^4 \in I$. Berdasarkan Lemma 3.3.2 bagian ii, didapatkan $c^4 = c^2$ sehingga menjadi $b^2c^2 \in I \Longrightarrow (bc)^2 \in I \Longrightarrow bc \in I$.
   3. untuk $n = 3$ maka diperoleh $bc^3 \in I$, karena I ideal semi prima sehingga $(bc^3)^2 \in I \Longrightarrow b^2c^6 \in I$. Berdasarkan Lemma 3.3.2 bagian ii, didapatkan $c^6 = c^2$ sehingga menjadi $b^2c^2 \in I \Longrightarrow (bc)^2 \in I \Longrightarrow bc \in I$.

iii. Jika $ac^k \in I$ maka $ac \in I$ atau $ac^k \in I$ atau $ac^3 \in I$. Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah sebagai berikut
   1. untuk $k = 1$ maka $ac \in I$, sehingga bukti selesai,
   2. untuk $n = 2$ maka diperoleh $ac^2 \in I$, karena I ideal semi prima sehingga $(ac^2)^2 \in I \Longrightarrow a^2c^4 \in I$. Berdasarkan Lemma 3.3.2 bagian ii, didapatkan $c^4 = c^2$ sehingga menjadi $a^2c^2 \in I \Longrightarrow (ac)^2 \in I \Longrightarrow ac \in I$.

3. untuk $n = 3$ maka diperoleh $ac^3 \in I$, karena I ideal semi prima sehingga $(ac^3)^2 \in I \Longrightarrow a^2c^6 \in I$. Berdasarkan Lemma 3.3.2 bagian ii, didapatkan $c^6 = c^2$ sehingga menjadi $a^2c^2 \in I \Longrightarrow (ac)^2 \in I \Longrightarrow ac \in I$.

Berdasarkan i,ii, dan iii terbukti bahwa I adalah ideal *2-absorbing.*

Contoh 3.2.29

Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal semi prima dan *primary 2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal *2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* dengan menunjukkan bahwa jika $abc \in J$ maka berlaku $ab \in J$ atau $bc \in J$ atau $ac \in J$. Ambil $abc = \overline{1} \cdot \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2} \in J$, sehingga $a = \overline{1}, b = \overline{2}, c = \overline{3}$. Selanjutnya akan ditunjukkan sebagai berikut

$$ab = \overline{1} \cdot \overline{2} = \overline{2} \in J,$$
$$bc = \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2} \in J,$$
$$ac = \overline{1} \cdot \overline{3} = \overline{3} \in J.$$

Sehingga terbukti bahwa J merupakan ideal *2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.

Remark 3.2.30

Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I adalah ideal dari R, berlaku $I^2 \subset I$.

Teorema 3.2.31

Misalkan R adalah boolean *like* semiring komutatif lemah dan I adalah ideal dari R. Jika I adalah ideal semi prima dan ideal prima 2-potent, maka I adalah ideal prima.

Bukti.

Misalkan I adalah ideal semi prima dan ideal prima 2-potent dari R. Ambil sebarang $ab \in I$. Karena I adalah ideal semi prima dan ideal prima 2-poten maka $(ab)^2 = a^2b^2 \in I^2$. Berdasarkan Remark 3.2.30 yaitu $I^2 \subset I$, maka diperoleh $a^2b^2 \in I$. Karena I adalah ideal prima 2-poten maka $a^2 \in I$ atau $b^2 \in I$. Karena I adalah ideal semi prima sehingga menjadi $a \in I$ atau $b \in I$. Jadi, terbukti I adalah ideal prima.

Teorema 3.2.32
Misalkan R adalah boolean *like* semiring komutatif lemah dan I ideal dari R. Jika I adalah ideal prima 2-poten, maka I adalah ideal 2-*absorbing.*
Bukti.
Misalkan I adalah ideal prima 2-poten dari R. Ambil sebarang $abc \in I$, dapat dituliskan $(abc)^2 \in I^2 \Rightarrow (ab)^2c^2 \in I^2 \Rightarrow (ab)^2 \in I$ atau $c^2 \in I$. Karena I merupakan ideal prima 2-poten maka menjadi $ab \in I$ atau $c \in I$ sehingga $ab \in I$ atau $bc \in I$ atau $ac \in I$. Jadi terbukti I adalah ideal 2-*absorbing.*

Contoh 3.2.33
Diberikan boolean *like* semiring komutatif lemah $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \cdot)$ seperti pada Contoh 3.1.6. $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal prima 2-poten dari $\mathbb{Z}_4$. J merupakan ideal 2-absorbing dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* dengan menunjukkan bahwa jika $abc \in I$ maka berlaku $ab \in J$ atau $bc \in J$ atau $ac \in J$. Untuk $a = \overline{0}, b = \overline{2}, c = \overline{2}$ berlaku $abc = \overline{0} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0} \in J$. Selanjutnya akan ditunjukkan sebagai berikut

$$ab = \overline{0} \cdot \overline{2} = \overline{0} \in J,$$
$$bc = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0} \in J,$$
$$ac = \overline{0} \cdot \overline{2} = \overline{0} \in J.$$

Sehingga terbukti bahwa J merupakan ideal *2-absorbing* dari $\mathbb{Z}_4$.

Teorema 3.2.34
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I adalah ideal semi prima dari R. I merupakan ideal *almost primary* jika dan hanya jika I ideal prima lemah.
Bukti.
($\Longrightarrow$) Diketahui I merupakan ideal *almost primary.* Akan dibuktikan bahwa I merupakan ideal prima lemah.
Ambil sebarang $a, b \in R$, dan $0 \neq ab \in I - I^2$. Berdasarkan Remark 3.2.30 yaitu $I^2 \subset I$, sehingga $ab \in I$. Karena I merupakan ideal *almost primary*, sehingga $a^n \in I$ untuk suatu bilangan bulat positif n atau $b \in I$. Jika $b \in I$, maka bukti

selesai. Asumsikan jika $b \notin I$, maka harus dibuktikan $a \in I$. Jika $n = 1$, maka terbukti $a \in I$.

($\Leftarrow$) Diketahui I merupakan ideal prima lemah. Akan dibuktikan bahwa I merupakan ideal *almost primary*.

Ambil sebarang $a, b \in R$ dan $0 \neq ab \in I$. Karena I merupakan ideal prima lemah, sehingga $a \in I$ atau $b \in I$. Jika $b \in I$, maka bukti selesai. Jika $b \notin I$ maka akan dibuktikan $a^n \in I$. Jika $a^n \in I$ maka $a \in I$ atau $a^2 \in I$ atau $a^3 \in I$. Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah sebagai berikut

1. jika $a \in I$, maka bukti selesai,
2. jika $a^2 \in I$, maka jelas $a \in I$ karena I merupakan ideal semi prima,
3. jika $a^3 \in I$ maka dapat ditulis $aa^2 \in I$, karena diketahui $a \in I$ dan $a^2 \in I$ sehingga jelas $a^3 \in I$.

Contoh 3.2.35

Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ seperti pada Contoh 3.1.2 dan $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal prima lemah dari $\mathbb{Z}_8$. I merupakan ideal *almost primary* dari $\mathbb{Z}_8$.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal *almost primary* dengan menunjukkan bahwa jika $ab \in I - I^2$ maka $a^n \in I$ atau $b \in I$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}_8$ dan untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Untuk $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ diperoleh $I^2 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{5}\}$sehingga $I - I^2 = \{\bar{1}\}$. Ambil $ab = \bar{1}$, dengan $a = \bar{3}$ dan $b = \bar{4}$ maka terdapatlah $n = 2$ sehingga $a^n = \bar{3}^2 = \bar{2} \notin I$ atau $b = \bar{4} \in I$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $ab \in I$. Sehingga terbukti bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal *almost primary* dari $\mathbb{Z}_8$.

Definisi 3.2.36

Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I, J adalah ideal dari R. Hasil bagi I oleh J dinotasikan dengan $(I{:}J) = \{x \in R : xJ \subseteq I\}$.

Contoh 3.2.37

Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dan $J = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_8$. Akan ditunjukkan $(I{:}J)$.

Penyelesaian.
Akan ditunjukkan $(I:J) = \{x \in \mathbb{Z}_8 : xJ \subseteq I\}$. Hasil dari xJ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3.8 Hasil dari xJ

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{J}$	$\boldsymbol{xJ}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.8 dapat dilihat bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_8$ diperoleh $xJ = \{\bar{0}, \bar{2}\} \subseteq I$. Jadi didapat $(I:J) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$.

Teorema 3.2.38
Misalkan R adalah boolean *like* semiring komutatif lemah dan I ideal kanan dari R. Pernyataan-pernyataan berikut equivalen

1. I adalah ideal prima lemah,
2. untuk setiap $a \in R - I$, berlaku $(I:Ra) = I \cup (0:Ra)$,
3. untuk setiap $a \in R - I$, berlaku $(I:Ra) = I$ atau $(I:Ra) = (0:Ra)$.

Bukti.
$(1 \Longrightarrow 2)$ Asumsikan I adalah ideal prima lemah. Akan dibuktikan untuk setiap $a \in R - I$, berlaku $(I:Ra) = I \cup (0:Ra)$.
Berdasarkan Definisi 3.2.36, diperoleh $(I:Ra) = \{x \in R : xRa \subseteq I\}$ dan $(0:Ra) = \{x \in R : xRa = 0$. Ambil sebarang $y \in R$, sehingga

jelas $y \in I$ didapatkan $yRa \subset I \Rightarrow y \in (I: Ra)$. Karena $y \in I$ dan $y \in (I: Ra)$, maka diperoleh $I \subset (I: Ra)$. Ambil sebarang $x \in (0: Ra) \Rightarrow x(ra) = 0$ dan $x \in (I: Ra) \Rightarrow x(ra) \in I$, untuk setiap $r \in R$. Karena $x \in (0: Ra)$ dan $x \in (I: Ra)$, maka diperoleh $(0: Ra) \subset (I: Ra)$. Oleh karena itu

$$I \cup (0: Ra) \subset (I: Ra). \qquad \text{(i)}$$

Sebaliknya, ambil sebarang $x \in (I: Ra)$ sehingga diperoleh $x(ra) \in I$, untuk setiap $r \in R$. Jika $x(ra) = 0$, maka jelas $x \in (0: Ra)$. Jika $x(ra) \neq 0$, maka diperoleh $x \in I$ atau $ra \in I$ karena I adalah ideal prima lemah. Untuk setiap $r \in R$ dan $a \in R - I$ maka $ra \notin I$. Oleh karena itu

$$(I: Ra) \subset I \cup (0: Ra). \qquad \text{(ii)}$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti $(I: Ra) = I \cup (0: Ra)$.

$(2 \Longrightarrow 3)$ Asumsikan $(I: Ra) = I \cup (0: Ra)$, untuk setiap $a \in R - I$. Akan dibuktikan berlaku $(I: Ra) = I$ atau $(I: Ra) = (0: Ra)$. Berdasarkan bukti $(1 \Longrightarrow 2)$ diperoleh $I \subset (I: Ra)$ dan $(0: Ra) \subset (I: Ra)$. Selanjutnya akan dibuktikan $(I: Ra) \subset I$ atau $(I: Ra) \subset (0: Ra)$. Ambil sebarang $x \in (I: Ra) \Rightarrow x(ra) \in I$ dan$x \in (0: Ra) \Rightarrow x(ra) = 0$, untuk setiap $r \in R$. Sehingga $(I: Ra) \subset (0: Ra)$, oleh karena itu $(I: Ra) = (0: Ra)$. Selanjutnya jika $x(ra) \neq 0$, untuk setiap $r \in R$ maka $x \notin (0: Ra) \Rightarrow x \in I$. jadi berdasarkan bukti $(1 \Longrightarrow 2)$ yaitu $(I: Ra) = I \cup (0: Ra)$ didapatkan $(I: Ra) = I$.

$(3 \Longrightarrow 1)$ Asumsikan untuk setiap $a \in R - I$, berlaku $(I: Ra) = I$ atau $(I: Ra) = (0: Ra)$. Akan dibuktikan I adalah ideal prima lemah. Ambil sebarang $x, y \in R$ dan $0 \neq xy \in I$. Jika $y \notin I$ maka $(xy)r \in I \Rightarrow x(ry) \in I$, untuk setiap $r \in R$. Sehingga diperoleh $x \in (I: Ry)$. Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah

i. jika $(I: Ry) = I$, maka $x \in I$ dan bukti selesai,
ii. jika $(I: Ra) = (0: Ra)$, maka diperoleh $x \in (0: Ra) \Rightarrow xry = 0$ untuk setiap $r \in R$. Karena I ideal kanan dari R sehingga dapat ditulis $xyr = 0$. Misalkan diambil $r = 1$, maka diperoleh $xy = 0$. Karena $0 \neq xy \in I$ sehingga kasus kedua tidak berlaku.

Teorema 3.2.39

Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. Jika I merupakan ideal semi prima dan ideal *primary* lemah, maka I ideal prima lemah.

Bukti.
Misalkan I adalah ideal semi prima dan ideal *primary* lemah dari R. Ambil sebarang $a, b \in R$, dan $0 \neq ab \in I$. karena I merupakan ideal *primary* lemah sehingga didapatkan $a^n \in I$ atau $b \in I$. Jika $b \in I$ maka bukti selesai. Selanjtunya akan dibuktikan jika $b \notin I$, maka $a \in I$ atau $a^2 \in I$ atau $a^3 \in I$. kasus-kasus yang mungkin muncul adalah

i. jika $a \in I$, maka bukti selesai,
ii. jika $a^2 \in I$, maka jelas $a \in I$ karena I ideal semi prima,
iii. jika $a^3 \in I$, maka dapat dituliskan $a^3 = a^2 a$. Berdasarkan bagian i dan ii, diperoleh $a^3 = a^2 a \in I$. Jadi terbukti $a^3 \in I$.

Teorema 3.2.40
Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. I merupakan ideal *primary* lemah jika dan hanya jika $(I: x) \subset \sqrt{I}$ atau $(I: x) = (I^2: x)$, untuk setiap $x \in R - I$.
Bukti.
($\Longrightarrow$) Misalkan I ideal *primary* lemah. Akan dibuktikan $(I: x) \subset \sqrt{I}$ atau $(I: x) = (I^2: x)$, untuk setiap $x \in R - I$. Ambil sebarang $y \in (I: x)$, sehingga diperoleh $yx \in I$. kasus-kasus yang mungkin muncul adalah

i. jika $yx = 0$, maka didapatkan $yx \in I^2$.
ii. jika $yx \neq 0$, berdasarkan Definisi ideal primary lemah maka diperoleh $y^n \in I$ atau $x \in I$.

($\Longleftarrow$) Misalkan $(I: x) \subset \sqrt{I}$ atau $(I: x) = (I^2: x)$, untuk setiap $x \in R - I$. Akan dibuktikan I adalah ideal *primary* lemah. Ambil sebarang $a, b \in I$ dan $0 \neq ab \in I$. Jika $b \in I$, maka bukti selesai. Jika $b \notin I$, maka $a \in (I: b)$. Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah

i. jika $(I: b) \subseteq \sqrt{I}$, maka $a \in \sqrt{I}$. Berdasarkan Lemma 3.3.2 bagian (i) yaitu $a^n = a$ sehingga $a^n \in \sqrt{I}$, untuk $n = 1,2,3$. Ingat kembali bahwa $\sqrt{I} = I$, jadi $a^n \in I$.
ii. jika $(I: b) = (I^2: b)$ dan $(I: b) \notin \sqrt{I}$, maka terdapatlah $z \in (I: b)$ dan $z^n \notin I$ untuk $n \in \mathbb{Z}$. Untuk $z \in (I: b)$ maka diperoleh $zb \in I, \forall b \in R - I$. Misalkan $b = z$, maka diperoleh $z^2 \in I$ dan terjadi kontradiksi dengan $z^n \notin I$. sehingga kasus ii tidak berlaku.

Contoh 3.2.41

Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ideal *primary* lemah dari $\mathbb{Z}_8$. Buktikan $(I\colon x) \subset \sqrt{I}$, untuk setiap $x \in R - I$.

Bukti.

Akan dibuktikan $(I\colon x) \subset \sqrt{I}$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_8 - I$. $\mathbb{Z}_8 - I = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}\}$, sehingga $x \in \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Hasil dari $(I\colon x) = \{a \in \mathbb{Z}_8 \colon ax \subseteq I\}$ dan $\sqrt{I} = \{a \in \mathbb{Z}_8 | a^n \in I\}$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ ditunjukkan pada tabel berikut

Tabel 3.9. Hasil dari ax

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{ax}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$
	$\bar{6}$	$\bar{0}$
	$\bar{7}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$
	$\bar{6}$	$\bar{1}$
	$\bar{7}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{3}$	$\bar{2}$
	$\bar{6}$	$\bar{2}$
	$\bar{7}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{3}$	$\bar{2}$
	$\bar{6}$	$\bar{3}$
	$\bar{7}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$
	$\bar{6}$	$\bar{4}$
	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{1}$
	$\bar{6}$	$\bar{4}$
	$\bar{7}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{3}$	$\bar{2}$
	$\bar{6}$	$\bar{6}$
	$\bar{7}$	$\bar{6}$
$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{3}$	$\bar{3}$
	$\bar{6}$	$\bar{6}$
	$\bar{7}$	$\bar{7}$

Tabel 3.10. Hasil dari$\sqrt{I}$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a^2, (n = 2)}$
$\bar{0}$	$\bar{0} \in I$
$\bar{1}$	$\bar{0} \in I$
$\bar{2}$	$\bar{2} \notin I$
$\bar{3}$	$\bar{2} \notin I$
$\bar{4}$	$\bar{4} \in I$
$\bar{5}$	$\bar{5} \in I$
$\bar{6}$	$\bar{6} \notin I$
$\bar{7}$	$\bar{7} \notin I$

Berdasarkan Tabel 3.9, diperoleh Hasil dari $(I: x) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Selanjutnya berdasarkan Tabel 3.10, diperoleh $\sqrt{I} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Jadi, terbukti bahwa $(I: x) \subset \sqrt{I}$.

Teorema 3.2.42
Misalkan R adalah boolean *like* semiring. Jika I dan J masing-masing adalah ideal prima lemah yang berbeda maka $I \cap J$ merupakan ideal 2-absorbing lemah.
Bukti.
Ambil sebarang $a, b, c \in R$ dan $0 \neq abc \in I \cap J$, maka $abc \in I$ dan $abc \in J$. Karena I dan J merupakan ideal prima lemah, sehingga dapat ditulis $ab \in I$ atau $c \in I$ dan $ab \in J$ atau $c \in J$. Kasus-kasus yang mungkin muncul adalah

i. jika $ab \in I$ dan $ab \in J$, maka $ab \in I \cap J$,
ii. jika $ab \in I$ dan $c \in J$, maka $a \in I$ atau $b \in I$ atau $c \in J$ karena $0 \neq ab \in I$ dan I adalah ideal prima lemah. Selanjutnya dapat dituliskan sebagai $a \in I, b \in J$ dan $b \in I, c \in J \Longrightarrow ac \in I, ac \in J$ atau $bc \in I, bc \in J$. Karena $ac \in I$ dan $ac \in J$ sehingga dapat dituliskan $ac \in I \cap J$. Selanjutnya, karena Karena $bc \in I$ dan $bc \in J$ sehingga dapat dituliskan $bc \in I \cap J$.
iii. jika $c \in I$ dan $ab \in J$, maka $c \in I$ atau $a \in J$ atau $b \in J$ karena $0 \neq ab \in J$ dan J adalah ideal prima lemah. Selanjutnya dapat dituliskan sebagai $a \in J, c \in I$ dan $b \in J, c \in I \Longrightarrow ac \in I, ac \in J$ atau $bc \in I, bc \in J$. Karena $ac \in I$ dan $ac \in J$ sehingga dapat

dituliskan $ac \in I \cap J$. Selanjutnya, karena Karena $bc \in I$ dan $bc \in J$ sehingga dapat dituliskan $bc \in I \cap J$.

iv. jika $c \in I$ dan $c \in J$, maka $ac \in I$ dan $ac \in J$. karena $ac \in I$ dan $ac \in J$ sehingga dapat dituliskan $ac \in I \cap J$.

Berdasarkan kasus i, ii, iii, dan iv terbukti bahwa $I \cap J$ merupakan ideal 2-absorbing lemah.

Contoh 3.2.43

Diberikan boolean *like* semiring $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ seperti pada Contoh 3.1.2. $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dan $J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah ideal prima lemah dari $\mathbb{Z}_8$. $I \cap J = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan ideal *2-absorbing* lemah dari $\mathbb{Z}_8$.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $I \cap J = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* lemah dengan menunjukkan bahwa jika $abc \in I \cap J, abc \neq 0$ maka $ab \in I \cap J$ atau $bc \in I \cap J$ atau $ac \in I \cap J$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_8$. Ambil sebarang $abc \in I \cap J$. Ambil $abc = \bar{1} \in I \cap J$, dengan $a = \bar{7}$, $b = \bar{3}$, dan $c = \bar{4}$, maka $ab = \bar{3} \notin I \cap J$ atau $ac = \bar{4} \notin I \cap J$ atau $bc = \bar{1} \in I \cap J$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $abc \in I \cap J$. Sehingga terbukti bahwa $I \cap J = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah ideal 2-*absorbing* lemah dari $\mathbb{Z}_8$.

Teorema 3.2.44

Misalkan R adalah boolean *like* semiring dan I ideal dari R. Jika I ideal prima lemah maka I ideal *2-absorbing* lemah.

Bukti.

Ambil sebarang $a, b, c \in R$ dan $0 \neq abc \in I$, karena I ideal prima lemah maka dapat ditulis $a \in I$ atau $bc \in I \Rightarrow a \in I$ atau $b \in I$ atau $c \in I \Rightarrow ab \in I$ atau $bc \in I$ atau $ac \in I$. sehingga terbukti I adalah ideal *2-absorbing* lemah.