



**MODEL PREDATOR-PREY STAGE STRUCTURE DENGAN FUNGSI
RESPON RATIO-DEPENDENT, ANTI-PREDATOR, DAN PERTOLONGAN
PREDATOR DEWASA**

TESIS



Oleh

ADINA APRIYANI
NIM. 166090400011013

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT MATEMATIKA BIOLOGI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
M A L A N G
2018



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Komunitas adalah kumpulan populasi berbagai spesies yang berinteraksi satu sama lain di lingkungan yang sama. Ilmu yang mempelajari interaksi dalam suatu komunitas disebut ekologi komunitas. Para ahli ekologi mengkaji bagaimana interaksi antar individu dalam suatu komunitas memengaruhi komunitas. Salah satu contoh interaksi yang terjadi karena adanya hubungan makan dan dimakan antar organisme adalah predasi, yang melibatkan *predator* dan *prey* (Mader, 2010).

Interaksi *predator-prey* dapat dimodelkan dalam bentuk matematika. Pemodelan matematika yang sistematis dapat mengarah pada pemahaman yang lebih baik tentang interaksi tersebut. Model matematika sederhana yang menggambarkan interaksi *predator-prey* adalah model Lotka-Volterra (Panja, dkk., 2017). Pada tahun 1925 dan 1926, Lotka dan Volterra, secara berturut-turut memodelkan interaksi *predator-prey* yang terdiri dari dua populasi, yaitu populasi *predator* dan *prey*. Model Lotka-Volterra pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui pengaruh *predator* pada pertumbuhan populasi *prey* dan kepunahan populasi *prey*. Populasi *prey* memiliki makanan yang tersedia setiap saat dan populasi *predator* bertahan hidup dengan memakan *prey*. Model *predator-prey* Lotka-Volterra belum memperhitungkan waktu yang diperlukan oleh *predator* untuk berburu, membunuh, memakan, dan mencerna *prey* serta kenyataan bahwa sumber makanan *prey* terbatas.

Pada tahun 1965 Holling memperkenalkan fungsi respon, yaitu suatu fungsi yang dalam ekologi menyatakan jumlah *prey* yang dimakan oleh *predator* sebagai

fungsi kepadatan *prey*. Holling mengkarakterisasi tiga tipe umum fungsi respon, yaitu tipe I, tipe II, dan tipe III (Mcnaughton dan Wolf, 1992). Selain ketiga fungsi respon yang dikemukakan Holling, beberapa fungsi respon yang terkenal dalam interaksi *predator-prey* adalah Beddington-DeAngelis, Monod-Haldane, Crowley-Martin, *ratio-dependent*, dan lain-lain.

Model Lotka-Volterra juga mengabaikan struktur ukuran dan struktur umur *prey* maupun *predator*. Padahal, dalam banyak kasus, populasi bergantung pada struktur ukuran atau struktur umur. Akan lebih baik, apabila suatu populasi dimodelkan sebagai dua subpopulasi atau disebut *stage structure* yang dapat memengaruhi evolusi populasi (Khajanchi, 2014). Dalam beberapa dekade terakhir, model *predator-prey stage structure* dengan fungsi respon telah banyak mendapat perhatian dari para peneliti. Xu, dkk. (2004) memodelkan *stage structure* pada *predator-prey* dengan *stage structure* dalam umur untuk populasi *prey*. Model tersebut terdiri dari tiga variabel yang mewakili kepadatan populasi *prey* muda, kepadatan populasi *prey* dewasa, dan kepadatan populasi *predator* dengan menggunakan fungsi respon *ratio-dependent*. Selanjutnya, Meng, dkk. (2014) memodifikasi model tersebut dengan mengubah fungsi respon menjadi fungsi respon Crowley-Martin. Kant dan Kumar (2016) juga memodelkan *stage structure* untuk populasi *prey*, dengan menambahkan asumsi bahwa *predator* memangsa *prey* muda dan *prey* dewasa dengan fungsi respon Holling tipe I.

Bukan hanya model *predator-prey* dengan *stage structure* pada populasi *prey* yang dikaji oleh beberapa peneliti, melainkan juga *stage structure* pada populasi *predator*. Georgercu dan Hsieh (2007) membahas model *predator-prey* yang terdiri dari tiga populasi, yaitu populasi *prey*, *predator* muda, dan *predator* dewasa dengan fungsi respon Holling tipe II. Kemudian, Khajanchi (2014) memodifikasi fungsi respon model tersebut dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis. Khajanchi (2017) memodifikasi model Khajanchi (2014) dengan

mengubah fungsi respon model tersebut dengan fungsi respon Monod-Haldane. Fungsi respon Monod-Haldane menggambarkan laju predasi oleh *predator* yang menurun karena meningkatnya kemampuan *prey* untuk mempertahankan diri dengan lebih baik, bila jumlah populasi *prey* cukup besar.

Panja, dkk. (2017) membahas model *predator-prey stage structure* untuk populasi *prey*, dengan fungsi respon *ratio-dependent* dan menambahkan efek pertahanan yang dilakukan oleh *prey* dewasa, yaitu *anti-predator*. Perilaku *anti-predator* pada populasi *prey* dapat berupa perubahan morfologi atau perubahan perilaku, dan serangan *prey* terhadap *predator* (Tang dan Xiao, 2015). Dalam model ini diasumsikan mekanisme pertahanan *anti-predator* hanya dilakukan oleh *prey* dewasa, karena *prey* dewasa memiliki kemampuan yang lebih kuat daripada *prey* muda. Berdasarkan model *predator-prey* dengan *stage structure* yang terdiri dari tiga populasi sebelumnya, Mortoza, dkk. (2018) mengembangkan model tersebut menjadi model *predator-prey* empat dimensi yang terdiri dari populasi *prey* dan *predator* yang masing-masing terbagi menjadi dua sub populasi, yaitu muda dan dewasa. Dalam model ini juga terdapat mekanisme pertahanan *anti-predator*, yaitu *prey* dewasa menyerang *predator* dewasa. Fungsi respon *predator* dewasa terhadap *prey* muda menggunakan Holling tipe II, sedangkan terhadap *prey* dewasa menggunakan Monod-Haldane (Holling tipe IV).

Pada penelitian ini dilakukan pengembangan terhadap model *predator-prey* Khajanchi (2017). Modifikasi dilakukan terhadap fungsi respon yang digunakan, yaitu *ratio-dependent*. Fungsi respon *ratio-dependent* merupakan fungsi respon yang bergantung pada *predator*. Fungsi ini bergantung pada rasio jumlah populasi *prey* terhadap jumlah populasi *predator*. Selain fungsi respon, dalam penelitian dipertimbangkan juga efek pertahanan *anti-predator* dan mempertimbangkan situasi yang menarik, yaitu adanya pertolongan *predator* dewasa ketika *predator* muda diserang oleh *prey*. Situasi ini didasarkan pada

Elettrey dan El-Metwally (2007) yang telah memodelkan interaksi tiga populasi, yaitu dua populasi *prey* yang saling menolong untuk melawan *predator* ketika salah satu dari mereka diserang *predator*.

Selanjutnya dilakukan analisis dinamik pada model yang dibentuk dengan menentukan titik kesetimbangan beserta syarat eksistensinya, analisis kestabilan titik kesetimbangan, dan analisis bifurkasi Hopf pada salah satu titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan dan memverifikasi hasil analisis.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model *predator-prey stage structure* yang dimodifikasi dengan fungsi respon *ratio-dependent*, *anti-predator*, dan adanya pertolongan dari *predator* dewasa?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan syarat eksistensi model tersebut?
3. Bagaimana hasil analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan model tersebut?
4. Bagaimana hasil analisis terjadinya bifurkasi Hopf pada model tersebut?
5. Bagaimana hasil simulasi numerik model tersebut?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Mengembangkan model *predator-prey stage structure* yang dimodifikasi dengan fungsi respon *ratio-dependent*, *anti-predator*, dan adanya pertolongan dari *predator* dewasa.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan syarat eksistensi titik kesetimbangan model tersebut.
3. Melakukan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan model tersebut.



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Tesis ini membahas model *predator-prey stage structure* dengan fungsi respon *ratio-dependent*, *anti-predator*, dan adanya pertolongan dari *predator* dewasa. Oleh sebab itu, pada bab ini diberikan teori-teori yang digunakan dalam pembahasan, yaitu sistem dinamik, analisis kestabilan, model pertumbuhan satu dimensi, model pertumbuhan *predator-prey*, fungsi respon, dan model *predator-prey* dengan *stage structure*, untuk membantu memahami persoalan yang dibahas dalam penulisan tesis ini.

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang terdiri dari sekumpulan kemungkinan kondisi yang dilengkapi dengan persyaratan untuk menentukan kondisi saat ini berdasarkan kondisi pada masa lalu (Alligood, 2000).

Sistem dinamik terbagi atas dua jenis, yaitu sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskret dinyatakan dalam bentuk persamaan beda, yaitu

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{F}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \vee t \in \mathbb{N}, \vec{x}_t \in \mathbb{R}^n,$$

sedangkan sistem dinamik kontinu dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Robinson, 2004)

Pada penelitian ini, sistem yang dibahas merupakan sistem dinamik kontinu.

2.1.1 Sistem *Autonomous*

Suatu sistem persamaan diferensial orde satu berdimensi n yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan fungsi F_i adalah fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t , tetapi hanya bergantung pada variabel x_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$, disebut sistem *autonomous*. Sistem *autonomous* dibedakan menjadi dua jenis, yaitu linear dan nonlinear. Sistem *autonomous* dikatakan linear jika F_i fungsi linear untuk setiap i dan dikatakan nonlinear jika F_i fungsi nonlinear minimal untuk suatu F_i .

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Definisi 2.1 (Titik Kesetimbangan)

Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ disebut titik kesetimbangan sistem *autonomous* (2.1) jika memenuhi $F_i(\vec{x}^*) = 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Pada kondisi $\frac{dx_i}{dt} = 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, solusi sistem *autonomous* (2.1) bernilai konstan, yaitu tidak mengalami perubahan nilai seiring dengan peningkatan nilai t (Boyce dan DiPrima, 2012).

Untuk menentukan titik kesetimbangan yang melibatkan polinom berderajat tiga tidak selalu mudah. Salah satu cara yang digunakan untuk menentukan

eksistensi titik kesetimbangan yang bernilai positif adalah dengan menggunakan Metode Cardan, yang dijelaskan pada Lemma 2.2 berikut.

Lemma 2.2 (Eksistensi Kepositifan Titik Kesetimbangan dengan Metode Cardan)

Jika diberikan persamaan polinom berderajat tiga, yaitu

$$x^3 + 3\omega_1 x^2 + 3\omega_2 x + \omega_3 = 0, \quad (2.2)$$

maka dengan melakukan transformasi $z = x + \omega_1$ pada persamaan (2.2), diperoleh

$$h(z) = z^3 + 3\rho_1 z + \rho_2 = 0, \quad (2.3)$$

dengan

$$\rho_1 = \omega_2 - \omega_1^2,$$

$$\rho_2 = \omega_3 - 3\omega_1\omega_2 + 2\omega_1^3.$$

Akar-akar persamaan (2.3) dapat ditentukan berdasarkan kriteria berikut ini.

(a) Jika $\rho_2 < 0$, maka persamaan (2.3) memiliki satu akar positif.

(b) Jika $\rho_2 > 0$ dan $\rho_1 < 0$, maka

(b1) persamaan (2.3) memiliki dua akar positif kembar, jika

$$\rho_2^2 + 4\rho_1^3 = 0,$$

(b2) persamaan (2.3) memiliki dua akar positif berbeda, jika

$$\rho_2^2 + 4\rho_1^3 < 0.$$

(c) Jika $\rho_2 = 0$ dan $\rho_1 < 0$, maka persamaan (2.3) memiliki satu akar positif.

Sementara itu, jika $\rho_2 > 0$, $\rho_1 > 0$ atau $\rho_2 > 0$, $\rho_1 = 0$ atau $\rho_1 < 0$,

$\rho_2^2 + 4\rho_1^3 > 0$ atau $\rho_2 = 0$, $\rho_1 > 0$ atau $\rho_2 = 0$, $\rho_1 = 0$, maka persamaan (2.3)

tidak memiliki akar positif. Dengan komputasi aljabar, apabila persamaan (2.3)

memiliki dua akar positif, maka salah satunya adalah $z_1 = \frac{\sqrt[3]{Z^2 - 4\rho_1}}{2\sqrt[3]{Z}}$, dengan

$Z = -4\rho_2 + 4\sqrt{4\rho_1^3 + \rho_2^2}$ dan akar lainnya $z_2 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\frac{z_1^3 + 4\rho_2}{2\sqrt{z_1}}}$. Apabila

persamaan (2.3) memiliki satu akar positif maka akar tersebut $z_1 = \frac{\sqrt[3]{Z^2 - 4\rho_1}}{2\sqrt[3]{Z}}$.

(Cai, dkk., 2015)

Definisi 2.3 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem *autonomous* (2.1) bersifat

1. stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x}(t)$ yang pada $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

ada, $\forall t > 0$ dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

2. stabil asimtotik, jika \vec{x}^* stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tidak stabil, jika tidak memenuhi kriteria pertama.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.1.1.1 Sistem *autonomous* linear

Perhatikan sistem *autonomous* linear

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Sistem persamaan (2.4) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.5)$$

dengan $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ dan A merupakan matriks koefisien sistem persamaan (2.4), yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dengan } |A| \neq 0.$$

Penentuan tipe kestabilan titik kesetimbangan pada sistem *autonomous* linear bergantung pada nilai eigen atau akar persamaan karakteristik matriks A .

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Teorema 2.4 (Kestabilan Sistem *Autonomous* Linear)

Titik kesetimbangan $(0, 0, \dots, 0)$ sistem (2.5) bersifat:

- (i) stabil asimtotik, jika $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$,
- (ii) stabil, jika $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$ dan $Re(\lambda_i) < 0, i = m + 1, \dots, n$, dengan $m < n$,
- (iii) tidak stabil, jika kriteria (i) dan (ii) tidak terpenuhi.

(Mattheij dan Molenaar, 2002)

2.1.1.2 Sistem *autonomous nonlinear*

Pandang sistem *autonomous nonlinear* dengan n persamaan berikut.

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Misalkan F_i adalah fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Deret Taylor fungsi F_i di sekitar \vec{x}^* adalah

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + v_i(\vec{x}), \quad (2.7)$$

dengan $v_i(\vec{x})$ merupakan suku sisa, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Suku sisa pada hampiran orde satu memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{v_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$.

Berdasarkan persamaan (2.7) dan mengingat bahwa

$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i - x_i^*)}{dt}$, serta $F_i(\vec{x}^*) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka sistem (2.6) dapat ditulis

sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Secara ringkas persamaan (2.8) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{v}, \quad (2.9)$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ disebut matriks Jacobi.}$$

Jika \vec{x} berada dekat dengan \vec{x}^* maka \vec{v} bernilai kecil, sehingga $\|\vec{v}\| \leq \|\vec{w}\|$.

Oleh karena itu, \vec{v} dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.6) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} \quad (2.10)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, diperoleh $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$, sehingga titik kesetimbangan sistem (2.10) adalah $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$. Proses menghampiri persamaan (2.6) dengan sistem (2.10) dinamakan proses linearisasi.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Teorema 2.5 (Kestabilan *Autonomous Nonlinear*)

Titik kesetimbangan sistem *autonomous nonlinear* bersifat

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.10) stabil asimtotik.
2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.10) tidak stabil.

(Finizio dan Ladas, 1982)

2.1.2 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + \varphi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} \lambda + \varphi_n = 0, \quad (2.11)$$

dengan $\varphi_n \neq 0$, maka kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.6.

Teorema 2.6

Pandang matriks berorde $k \times k$, D_k sebagai berikut

$$D_1 = [\varphi_1], D_2 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ 1 & \varphi_2 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_4 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_3 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$D_k = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 & \dots & \dots & \varphi_{2n-1} \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_4 & \dots & \dots & \varphi_{2n-2} \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_3 & \dots & \dots & \varphi_{2n-3} \\ 0 & 1 & \varphi_2 & \dots & \dots & \varphi_{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \varphi_n \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $\varphi_j = 0$, $j > n$ dan φ_j koefisien polinom pada persamaan (2.11). Matriks D_k selanjutnya disebut sebagai matriks Routh-Hurwitz. Jika $|D_k| > 0 \forall k$, maka titik kesetimbangan sistem tersebut bersifat stabil.

Untuk kasus tertentu, misalnya $n = 3$, maka persamaan (2.11) menjadi

$$\lambda^3 + \varphi_1 \lambda^2 + \varphi_2 \lambda + \varphi_3 = 0. \quad (2.12)$$

Akar-akar persamaan (2.12) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

1. $|D_1| = |\varphi_1| = \varphi_1 > 0$,
2. $|D_2| = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ 1 & \varphi_2 \end{vmatrix} = \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3 > 0$,
3. $|D_3| = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_4 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_3 \end{vmatrix} = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_3^2 > 0$, sehingga $\varphi_3 > 0$.

(Murray, 2002)

2.1.3 Bifurkasi Hopf

Misalkan diberikan suatu sistem *autonomous nonlinear* sebagai berikut.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{b}), \quad (2.13)$$

dengan $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel dan $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ adalah parameter. Bifurkasi adalah perubahan sifat solusi sistem (2.13) karena perubahan nilai parameter. Nilai parameter yang menyebabkan terjadinya perubahan sifat solusi sistem dinamik disebut nilai bifurkasi.

Salah satu jenis bifurkasi adalah bifurkasi Hopf, yaitu berubahnya jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan (2.13) dikarenakan munculnya sepasang nilai eigen bernilai imajiner murni.

(Kuznetsov, 1998)

Teorema 2.7

Misalkan diberikan sistem *autonomous nonlinear* 3 dimensi dengan parameter bifurkasi b yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3, b), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3, b), \\ \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3, b), \end{aligned} \quad (2.14)$$

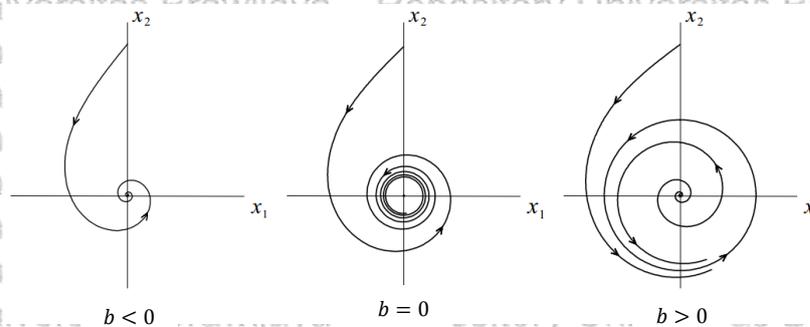
dengan $b \in \mathbb{R}$. Misalkan matriks Jacobi di suatu titik kesetimbangan sistem (2.14) mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + \varphi_1 \lambda^2 + \varphi_2 \lambda + \varphi_3 = 0. \quad (2.15)$$

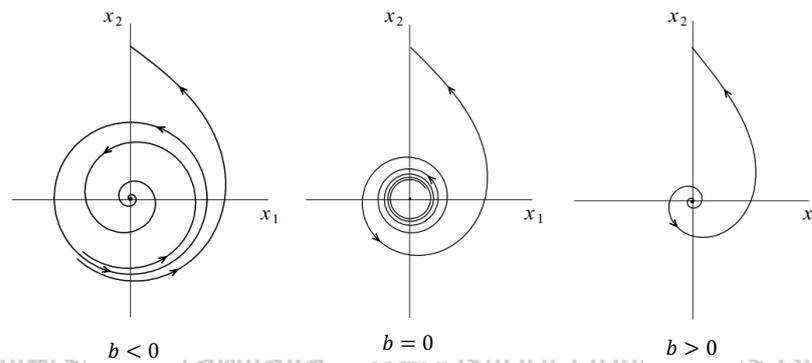
Syarat terjadinya bifurkasi Hopf adalah jika terdapat $b = b_{cr}$ yang memenuhi

1. $\varphi_j(b_{cr}) > 0, \forall j = 1, 2,$
2. $\varphi_1(b_{cr})\varphi_2(b_{cr}) - \varphi_3(b_{cr}) = 0,$
3. Jika akar persamaan karakteristik berbentuk $\lambda_j = p \pm iq$, maka $Re\left\{\frac{d}{db}\lambda_j\right\}\Big|_{b=b_{cr}} \neq 0, \forall j = 1, 2.$

(Khajanchi, 2017)



Gambar 2.1. Bifurkasi Hopf *supercritical*



Gambar 2.2. Bifurkasi Hopf *subcritical*

Terdapat dua jenis bifurkasi Hopf, yaitu bifurkasi Hopf *supercritical* dan bifurkasi Hopf *subcritical*. Bifurkasi Hopf *supercritical* ditandai oleh munculnya *limit cycle* yang stabil setelah parameter bifurkasi b melampaui nilai bifurkasi b_{cr} .

Struktur perubahan kestabilan di sekitar $b = b_{cr}$ ditunjukkan pada Gambar 2.1.

Bifurkasi Hopf *subcritical* terjadi ketika *limit cycle* yang tidak stabil menghilang setelah parameter bifurkasi b melampaui suatu nilai bifurkasi b_{cr} . Struktur perubahan kestabilan di sekitar $b = b_{cr}$ ditunjukkan pada Gambar 2.2.

(Kuznetsov, 1998)

2.2 Model Pertumbuhan Satu Populasi

Pada tahun 1798, Malthus pertama kali memperkenalkan model pertumbuhan satu populasi dikenal dengan model eksponensial. Model eksponensial merupakan model pertumbuhan yang sangat sederhana, yang dituliskan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

dengan $N(t)$ menyatakan kepadatan populasi setiap saat dan r konstanta positif yang menyatakan laju pertumbuhan populasi. Model ini menggambarkan perkembangbiakan populasi yang tumbuh secara eksponensial tanpa batas.

Pada kenyataannya, pertumbuhan secara eksponensial hanya akan dialami dalam waktu singkat. Kemudian, pada tahun 1838 Verhulst mempertimbangkan bahwa proses *self-limiting* harus terjadi ketika populasi terlalu besar. Model yang diusulkan adalah

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right), \quad (2.16)$$

dengan r dan k adalah konstanta positif. Model (2.16) disebut model logistik, dengan r laju pertumbuhan intrinsik dan k menyatakan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*).

(Murray, 2002)

2.3 Model Predator-Prey

2.3.1 Model Predator-Prey Lotka-Volterra

Pada tahun 1925 dan 1926, Lotka dan Volterra, secara berturut-turut memperkenalkan suatu model *predator-prey* yang masih sederhana. Model ini, menggambarkan predasi suatu spesies oleh spesies lain. Jika $N(t)$ menyatakan kepadatan populasi *prey* dan $P(t)$ menyatakan kepadatan populasi *predator* pada saat t , maka model Lotka-Volterra dinyatakan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP), \quad (2.17)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cN - e),$$

dengan a, b, d , dan e adalah konstanta positif. Tanpa adanya predasi, populasi *prey* tumbuh secara eksponensial yang dinyatakan oleh suku aN . Pengurangan laju pertumbuhan populasi *prey* per kapita hanya disebabkan oleh predasi yang dinyatakan oleh suku $-bNP$. Ketiadaan populasi *prey* untuk dikonsumsi menyebabkan *predator* mengalami kematian alami dengan laju $-eP$.

Pertumbuhan *predator* sebagai hasil predasi terhadap *prey* dinyatakan oleh suku cNP .

(Murray, 2002)

2.3.2 Fungsi Respon *Ratio-Dependent*

Pada model Lotka-Volterra, suku bNP pada persamaan (2.17) menunjukkan interaksi antara *prey* dan *predator*. Parameter b menyatakan tingkat *predator* menangkap *prey*. Tingkat predasi *predator* terhadap *prey* disebut fungsi respon, sehingga fungsi respon berkaitan erat dengan peningkatan populasi *predator* atau pengurangan populasi *prey* saat saling berinteraksi. Suku bNP disebut juga fungsi respon Holling tipe I (Ruan dan Xiao, 2001).

Bentuk umum model *predator-prey* dengan fungsi respon adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= g(N)N - f(N, P)P, \\ \frac{dP}{dt} &= cf(N, P)P - eP.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Pada persamaan (2.18), $g(N)$ menyatakan fungsi laju pertumbuhan populasi *prey*, $f(N, P)$ menyatakan fungsi respon, dan parameter c menyatakan koefisien konversi atau peningkatan reproduksi *predator* akibat predasi (Akcaakaya, dkk., 1995).

Pada tahun 1913, Michaelis dan Menten memperkenalkan sebuah fungsi respon, yaitu

$$f(N) = \frac{gN}{N + \psi},\tag{2.19}$$

dengan g dan ψ adalah parameter positif yang masing-masing menyatakan laju pertumbuhan maksimal *predator* dan konstanta saturasi. Pada tahun 1959, Holling juga menggunakan fungsi respon ini sebagai salah satu fungsi respon *predator*, yang sekarang disebut sebagai fungsi Michaelis-Menten atau fungsi Holling tipe II. Fungsi (2.19) dapat ditulis sebagai

$$f(N) = \frac{gN}{\psi(1 + (N/\psi))} = \frac{(g/\psi)N}{1 + (1/\psi)N} = \frac{bN}{1 + \phi N},\tag{2.20}$$

dengan $b = g\psi$ dan $\phi = (1/\psi)$.

Fungsi respon dalam bentuk $f(N, P) = f(N)$, yaitu fungsi respon yang hanya bergantung pada kepadatan *prey*, telah banyak digunakan sebagai laju predasi *predator* terhadap *prey*. Arditi dan Ginzburg menyatakan bahwa fungsi respon seharusnya tidak hanya bergantung pada kepadatan *prey*, melainkan

bergantung pula pada kepadatan *predator*. Hal ini terjadi ketika *predator* harus mencari *prey*, maka akan ada persaingan antar *predator* untuk mendapatkan *prey*. Berdasarkan fungsi respon Holling tipe II (2.20), Arditi dan Ginzburg mengusulkan sebuah fungsi respon dengan bentuk

$$f(N/P) = \frac{b(N/P)}{1 + \phi(N/P)} = \frac{bN}{P + \phi N}, \quad (2.21)$$

yang dikenal sebagai fungsi respon *ratio-dependent*. Fungsi respon *ratio-dependent* (2.21) diperoleh dengan mensubstitusikan perbandingan *prey* dan *predator* (N/P) untuk menggantikan kepadatan populasi *prey* (N).

(Xiao dan Ruan, 2001)

2.3.3 Model *Predator-Prey* dengan *Stage Structure*

Dalam beberapa dekade terakhir, model *predator-prey* dengan *stage structure* telah banyak mendapat perhatian dari para peneliti. Model ini membagi satu populasi menjadi dua subpopulasi, yaitu muda dan dewasa. Beberapa peneliti telah memodelkan model *predator-prey* dengan *stage structure* yang terdiri dari tiga persamaan diferensial biasa nonlinear.

Dalam penelitian sebelumnya, Georgercu dan Hsieh (2007) memodelkan model *stage structure* untuk populasi *predator*. Interaksi ini terjadi antara populasi *prey* ($x(t)$), *predator* muda ($y_1(t)$), dan *predator* dewasa ($y_2(t)$). Model yang diusulkan adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)(r - k_1x(t)) - \frac{bx(t)y_2(t)}{1 + \phi x(t)}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{cbx(t)y_2(t)}{1 + \phi x(t)} - (\alpha + \delta_1)y_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \alpha y_1(t) - \delta_2 y_2(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

dengan semua parameter r , k_1 , α , ϕ , b , c , δ_1 , dan δ_2 bernilai positif. Diasumsikan bahwa hanya *predator* dewasa yang menyerang *prey* dan memiliki kemampuan reproduksi. Populasi *prey* tumbuh secara logistik tanpa adanya populasi *predator* dengan tingkat pertumbuhan intrinsik r dan *carrying capacity* r/k_1 . Parameter b , c , dan ϕ memiliki interpretasi yang sama seperti disebutkan sebelumnya. Akan tetapi, parameter ϕ dapat juga menggambarkan waktu penanganan *prey*. Konstanta δ_1 dan δ_2 mewakili tingkat kematian *predator* muda dan dewasa, dan α menunjukkan laju transisi dari *predator* muda menjadi *predator* dewasa.

Khajanchi (2014) mengkaji ulang model (2.22) dengan memodifikasi fungsi respon model tersebut menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{bx(t)y_2(t)}{1 + \phi x(t) + \gamma y_2(t)}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{cbx(t)y_2(t)}{1 + \phi x(t) + \gamma y_2(t)} - (\alpha + \delta_1)y_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \alpha y_1(t) - \delta_2 y_2(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

dengan γ adalah parameter positif yang menggambarkan persaingan antara *predator* untuk memperebutkan *prey*. Pada model ini diasumsikan bahwa populasi *prey* tumbuh secara logistik dengan tingkat pertumbuhan intrinsik r dan *carrying capacity* k , dengan r dan k bernilai positif.

Sementara itu, model (2.23) *predator-prey* dengan *stage structure* untuk populasi *predator* yang dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis dimodifikasi dengan fungsi respon Monod-Haldane (Khajanchi, 2017) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{bx(t)y_2(t)}{\psi + \phi x^2(t)}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{cbx(t)y_2(t)}{\psi + \phi x^2(t)} - (\alpha + \delta_1)y_1(t), \end{aligned}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \alpha y_1(t) - \delta_2 y_2(t).$$

Fungsi respon Monod-Haldane menggambarkan laju predasi oleh *predator* yang menurun karena meningkatnya kemampuan *prey* untuk mempertahankan diri dengan lebih baik. Jika jumlah populasi *prey* cukup besar mengakibatkan berkurangnya kemampuan oleh *predator* untuk menangkap *prey*.

Panja, dkk. (2017) memodelkan model *predator-prey stage structure* untuk populasi *prey*, dengan menambahkan efek pertahanan yaitu *anti-predator*. Dalam model ini diasumsikan mekanisme pertahanan *anti-predator* hanya dilakukan oleh *prey* dewasa, karena *prey* dewasa memiliki pertahanan yang lebih kuat daripada *prey* muda. Fungsi respon untuk predasi oleh *predator* terhadap *prey* muda dan *prey* dewasa diasumsikan mengikuti fungsi respon Holling tipe IV dengan dasar fungsi respon *ratio-dependent*. Model yang diusulkan adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r_1 x_1(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{k} \right) - \alpha_1 x_1(t) - \frac{b_1 x_1(t) y^2(t)}{y^2(t) + \gamma_1 x_1(t) y(t) + \phi_1 x_1^2(t)}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_1 x_1(t) - d_1 x_1(t) - \frac{b_2 x_2(t) y^2(t)}{y^2(t) + \gamma_2 x_2(t) y(t) + \phi_2 x_2^2(t)}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{c_1 b_1 x_1(t) y^2(t)}{y^2(t) + \gamma_1 x_1(t) y(t) + \phi_1 x_1^2(t)} + \frac{c_2 b_2 x_2(t) y^2(t)}{y^2(t) + \gamma_2 x_2(t) y(t) + \phi_2 x_2^2(t)} \\ &\quad - d_2 y(t) - \eta x_2(t) y(t), \end{aligned}$$

dengan semua parameter $r_1, k, \alpha_1, \gamma_1, \gamma_2, \phi_1, \phi_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1,$ dan d_2 bernilai positif. Populasi *prey* muda tumbuh secara logistik tanpa adanya populasi *predator* dengan tingkat pertumbuhan intrinsik r_1 dan *carrying capacity* k .

Parameter $b_{1,2}, c_{1,2}, \phi_{1,2},$ dan $\gamma_{1,2}$ masing-masing memiliki interpretasi yang sama seperti $b, c, \phi,$ dan γ disebutkan sebelumnya. Konstanta d_1 dan d_2 mewakili tingkat kematian *prey* dewasa dan *predator*, dan α_1 menunjukkan laju transisi

dari prey muda menjadi prey dewasa. Parameter η adalah tingkat perilaku anti-predator oleh prey dewasa ke predator.





BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas konstruksi model *predator-prey* dengan *stage structure* pada *predator* yang terdiri dari populasi *prey*, *predator* muda, dan *predator* dewasa. Kemudian dilakukan analisis dinamik meliputi penentuan titik kesetimbangan dan menganalisis jenis kestabilannya. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis yang telah diperoleh.

3.1 Konstruksi Model

3.1.1 Pertumbuhan populasi *prey*

Kepadatan populasi *prey* setiap saat dinyatakan dengan x . Populasi *prey* diasumsikan tumbuh secara logistik tanpa adanya *predator* dengan laju pertumbuhan intrinsik r dan *carrying capacity* k . Jumlah populasi *prey* berkurang karena adanya pemangsaan oleh *predator* dewasa (y_2) dengan koefisien pemangsaan sebesar b dan ϕ yang merupakan konstanta yang berkaitan dengan saturasi. Dengan demikian laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{bx(t)y_2(t)}{y_2(t) + \phi x(t)} \quad (3.1)$$

3.1.2 Pertumbuhan populasi *predator*

Terdapat dua jenis *predator* dalam model *predator-prey* dengan *stage structure* pada *predator*, yaitu *predator* muda dan *predator* dewasa. Kepadatan populasi *predator* muda setiap saat dinyatakan dengan y_1 dan untuk *predator* dewasa setiap saat dinyatakan dengan y_2 . Populasi *predator* dapat bertahan

hidup dengan melakukan pemangsaan. Diasumsikan bahwa hanya *predator* dewasa yang menyerang *prey* dan memiliki kemampuan reproduksi. Oleh karena itu, populasi *predator* akan bertambah setelah melakukan pemangsaan terhadap *prey* dengan koefisien pemangsaan sebesar c . Tingkat konsumsi *predator* dewasa mengikuti fungsi respon *ratio-dependent*. Laju transisi dari individu *predator* muda menjadi individu *predator* dewasa sebanding dengan jumlah populasi *predator* muda setiap saat dengan koefisien α . Jumlah populasi *predator* muda dapat berkurang karena adanya kematian alami dengan laju δ_1 dan efek pertahanan *anti-predator* terhadap *predator* muda oleh *prey* dengan laju η . Oleh karena adanya efek pertahanan *anti-predator*, *predator* dewasa menolong *predator* muda ketika diserang oleh *prey* dengan laju σ . Dengan demikian laju pertumbuhan populasi *predator* muda dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{cbx(t)y_2(t)}{y_2(t) + \phi x(t)} - (\alpha + \delta_1)y_1(t) - (\eta - \sigma y_2(t))x(t)y_1(t). \quad (3.2)$$

Laju pertumbuhan *predator* dewasa bergantung pada transformasi *predator* muda menjadi *predator* dewasa yang dinyatakan dengan koefisien α . Jumlah populasi *predator* dewasa dapat berkurang karena adanya kematian alami *predator* dewasa dengan laju sebesar δ_2 . Dengan demikian laju pertumbuhan populasi *predator* dewasa dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy_2}{dt} = \alpha y_1(t) - \delta_2 y_2(t). \quad (3.3)$$

3.1.3 Model *predator-prey stage structure* dengan fungsi respon *ratio-dependent*, *anti-predator*, dan pertolongan dari *predator* dewasa

Berdasarkan persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3), diperoleh sistem yang menyatakan model *predator-prey* dengan *stage structure* pada *predator*, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{bx(t)y_2(t)}{y_2(t) + \phi x(t)},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{cbx(t)y_2(t)}{y_2(t) + \phi x(t)} - (\alpha + \delta_1)y_1(t) - (\eta - \sigma y_2(t))x(t)y_1(t), \quad (3.4)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \alpha y_1(t) - \delta_2 y_2(t),$$

dengan syarat awal $x(0) \geq 0$, $y_1(0) \geq 0$, $y_2(0) > 0$. Diasumsikan semua parameter $r, k, b, c, \phi, \alpha, \delta_1, \delta_2, \eta$, dan σ bernilai positif.

3.2 Titik Kesetimbangan Model

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.4) diperoleh jika

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = 0,$$

yaitu

$$rx \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{bxy_2}{y_2 + \phi x} = 0, \quad (3.5a)$$

$$\frac{cbxy_2}{y_2 + \phi x} - (\alpha + \delta_1)y_1 - (\eta - \sigma y_2)xy_1 = 0, \quad (3.5b)$$

$$\alpha y_1 - \delta_2 y_2 = 0. \quad (3.5c)$$

Dari persamaan (3.5a) diperoleh

$$x = 0, \quad (3.6a)$$

atau

$$r \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{by_2}{y_2 + \phi x} = 0, \quad (3.6b)$$

Sementara itu, dari persamaan (3.5c) diperoleh



$$y_1 = \frac{\delta_2 y_2}{\alpha} \quad (3.7)$$

Kasus 1. Kombinasi persamaan (3.5b), (3.6a), dan (3.7) menghasilkan nilai $x = 0$, $y_1 = 0$, dan $y_2 = 0$ yang bertentangan dengan $y_2 + \phi x \neq 0$. Kombinasi ini tidak menghasilkan titik kesetimbangan.

Kasus 2. Pada kasus ini ditinjau kombinasi (3.5b), (3.6b), dan (3.7). Substitusi persamaan (3.7) ke persamaan (3.5b) menghasilkan

$$\frac{cbx y_2}{y_2 + \phi x} - (\alpha + \delta_1) \left(\frac{\delta_2 y_2}{\alpha} \right) - (\eta - \sigma y_2) x \left(\frac{\delta_2 y_2}{\alpha} \right) = 0,$$

yang ekuivalen dengan

$$y_2 \left(\frac{cbx}{y_2 + \phi x} - (\alpha + \delta_1) \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) - (\eta - \sigma y_2) x \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) \right) = 0.$$

Dari persamaan tersebut diperoleh

$$y_2 = 0, \quad (3.8a)$$

atau

$$\frac{cbx}{y_2 + \phi x} - (\alpha + \delta_1) \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) - (\eta - \sigma y_2) x \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) = 0. \quad (3.8b)$$

Kasus 2a. Kombinasi dari (3.6b), (3.7), dan (3.8a) menghasilkan $x = k$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (k, 0, 0)$ yang menyatakan kepunahan populasi predator muda dan dewasa.

Kasus 2b. Kombinasi dari (3.6b), (3.7), dan (3.8b) menghasilkan titik kesetimbangan $E_2 = (x^*, y_1^*, y_2^*)$, dengan $y_1^* = \frac{a_2 y_2^*}{\alpha}$, $y_2^* = x^* r \phi \left(\frac{k - x^*}{bk - rk + rx^*} \right)$, dan x^* diperoleh dari persamaan

$$x^{*3} + 3\omega_1 x^{*2} + 3\omega_2 x^* + \omega_3 = 0, \quad (3.9)$$

dengan

$$\omega_1 = \frac{(\delta_2 k \phi \eta - car - \sigma \delta_2 k^2 \phi^2)}{3\sigma \delta_2 k \phi^2},$$

$$\omega_2 = \frac{(2car^2 + \alpha \delta_2 r \phi + \delta_1 \delta_2 r \phi + b \delta_2 k \phi \eta - 2carb - \delta_2 r k \phi \eta)}{3\sigma \delta_2 r \phi^2},$$

$$\omega_3 = \frac{(2carb k + ab \delta_2 k \phi + b \delta_1 \delta_2 k \phi - cab^2 k - car^2 k - \alpha \delta_2 r k \phi - \delta_1 \delta_2 r k \phi)}{\sigma \delta_2 r \phi^2}.$$

Kemudian, dengan menerapkan transformasi $z = x^* + \omega_1$ pada persamaan (3.9) diperoleh persamaan

$$z^3 + 3\rho_1 z + \rho_2 = 0, \quad (3.10)$$

dengan

$\rho_1 = \omega_2 - \omega_1^2$, dan $\rho_2 = \omega_3 - 3\omega_1 \omega_2 + 2\omega_1^3$. Oleh karena $x^* = z - \omega_1$, $x^* < 0$ ketika $z < 0$, maka pada kasus ini hanya dipertimbangkan ketika $z > 0$.

Berdasarkan Lemma (2.2), metode Cardan menjamin nilai akar untuk persamaan (3.10) bernilai positif jika memenuhi

(a) Jika $\rho_2 < 0$, maka persamaan (3.10) memiliki satu akar positif.

(b) Jika $\rho_2 > 0$ dan $\rho_1 < 0$, maka

(b1) persamaan (3.10) memiliki dua akar positif kembar, jika

$$\rho_2^2 + 4\rho_1^3 = 0,$$

(b2) persamaan (3.10) memiliki dua akar positif berbeda, jika

$$\rho_2^2 + 4\rho_1^3 < 0.$$

(c) Jika $\rho_2 = 0$ dan $\rho_1 < 0$, maka persamaan (3.10) memiliki satu akar positif.

Titik kesetimbangan $E_2 = (x^*, y_1^*, y_2^*)$ eksis jika $x^* > 0$, $y_1^* > 0$, dan $y_2^* > 0$.

Oleh karena itu, titik kesetimbangan E_2 eksis jika $0 < \frac{rk-bk}{r} < x^* < k$ atau

$0 < k < x^* < \frac{rk-bk}{r}$. Titik kesetimbangan $E_2 = (x^*, y_1^*, y_2^*)$ dapat diartikan bahwa semua populasi dapat hidup berdampingan.

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Model *predator-prey* dengan *stage structure* pada *predator* merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear, sehingga untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan dilakukan proses linearisasi. Dari hasil proses linearisasi sistem persamaan (3.4) diperoleh matriks Jacobi

$$J(x, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \frac{by_2^2}{(y_2 + \phi x)^2} & 0 & \frac{b\phi x^2}{(y_2 + \phi x)^2} \\ \frac{cb y_2^2}{(y_2 + \phi x)^2} - (\eta - \sigma y_2) y_1 & -(\alpha + \delta_1) - (\eta - \sigma y_2) x & \frac{cb\phi x^2}{(y_2 + \phi x)^2} + \sigma x y_1 \\ 0 & \alpha & -\delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.3.1 Kestabilan titik kesetimbangan E_1

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -r & 0 & -\frac{b}{\phi} \\ 0 & -(\alpha + \delta_1) - \eta k & -\frac{cb}{\phi} \\ 0 & \alpha & -\delta_2 \end{bmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik

$$(-r - \lambda) \left(\lambda^2 + (\delta_2 + \alpha + \delta_1 + \eta k) \lambda + \alpha \delta_2 + \delta_1 \delta_2 + \eta k \delta_2 - \frac{cab}{\phi} \right) = 0.$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -r < 0$ dan $\lambda_{2,3}$ yang memenuhi persamaan kuadrat

$$\lambda^2 + \xi_1 \lambda + \xi_2 = 0,$$

dengan



$\xi_1 = \delta_2 + \alpha + \delta_1 + \eta k > 0$ dan $\xi_2 = \alpha\delta_2 + \delta_1\delta_2 + \eta k\delta_2 - \frac{cab}{\phi}$. Nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(\xi_1) \pm \sqrt{(\xi_1)^2 - 4(\xi_2)}}{2}$$

Titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik lokal jika $Re(\lambda_{2,3}) < 0$. Nilai $\lambda_{2,3}$ memiliki beberapa kemungkinan

1. Jika $(\xi_1)^2 - 4(\xi_2) < 0$, maka $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ dengan $Re(\lambda_{2,3}) < 0$.
2. Jika $(\xi_1)^2 - 4(\xi_2) = 0$, maka $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{(\xi_1)}{2} < 0$.
3. Jika $(\xi_1)^2 - 4(\xi_2) > 0$, maka $\lambda_{2,3} \in \mathbb{R}$. $\lambda_{2,3} < 0$ jika $\frac{cab}{\phi} < \alpha\delta_2 + \delta_1\delta_2 + \eta k\delta_2$ atau $R = \frac{(\alpha\delta_2 + \delta_1\delta_2 + \eta k\delta_2)\phi}{cab} > 1$.

Nilai $R > 1$ mengindikasikan bahwa predator akan punah di masa yang akan datang sementara prey akan bertahan dan tumbuh secara logistik dengan carrying capacity k . Situasi ini terjadi ketika tingkat pertumbuhan predator muda lebih kecil dari total tingkat predator muda yang meninggalkan kompartemen.

Tingkat pertumbuhan predator muda menjadi lebih kecil ketika tingkat predasi b atau tingkat konversi predasi ke tingkat pertumbuhan predator muda c menurun; atau ketika koefisien saturasi ϕ ditingkatkan. Tingkat total predator muda yang meninggalkan kompartemen lebih besar jika tingkat kematian predator muda δ_1 dan kematian predator dewasa δ_2 atau ketika tingkat anti-predator η meningkat.

3.3.2 Kestabilan titik kesetimbangan E_2

Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar $E_2 = (x^*, y_1^*, y_2^*)$ adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx^*}{k} - \frac{b(y_2^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} & 0 & -\frac{b\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \\ \frac{cb(y_2^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} - (\eta - \sigma y_2^*)y_1^* & -(\alpha + \delta_1) - (\eta - \sigma y_2^*)x^* & \frac{cb\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} + \sigma x^* y_1^* \\ 0 & \alpha & -\delta_2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.6b), (3.7), dan (3.8b) matriks $J(E_2)$ dapat disederhanakan menjadi

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} \frac{b\phi x^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} - \frac{rx^*}{k} & 0 & \frac{b\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \\ \frac{cb(y_2^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} - (\eta - \sigma y_2^*) y_1^* & -(\alpha + \delta_1) - (\eta - \sigma y_2^*) x^* & \frac{cb\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} + \sigma x^* y_1^* \\ 0 & \alpha & -\delta_2 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobi $J(E_2)$ adalah

$$\lambda^3 + \varphi_1 \lambda^2 + \varphi_2 \lambda + \varphi_3 = 0, \quad (3.12)$$

dengan

$$\varphi_1 = (\alpha + \delta_1 + \delta_2) + x^*(\eta - \sigma y_2^*) + \frac{rx^*}{k} - \frac{b\phi x^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2},$$

$$\varphi_2 = \delta_2(\alpha + \delta_1) + \delta_2 x^*(\eta - \sigma y_2^*) + (\alpha + \delta_1 + \delta_2) \left(\frac{rx^*}{k} - \frac{b\phi x^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) + x^*(\eta - \sigma y_2^*) \left(\frac{rx^*}{k} - \frac{b\phi x^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) - \alpha \sigma x^* y_1^* - \frac{b\alpha c\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2},$$

$$\varphi_3 = \left(\delta_2(\alpha + \delta_1) - \alpha \sigma y_1^* x^* - \frac{b\alpha c\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) \left(\frac{rx^*}{k} - \frac{b\phi x^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) + \delta_2(\eta - \sigma y_2^*) \left(\frac{r(x^*)^2}{k} - \frac{b\phi(x^*)^2 y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) + \left(\frac{b\alpha\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) \left(\frac{bcx^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} + \sigma y_1^* y_2^* - \eta y_1^* \right),$$

$$\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3 = (\alpha + \delta_1 + \delta_2) \left(\delta_2(\alpha + \delta_1) - \alpha \sigma y_1^* x^* - \frac{b\alpha c\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) + x^*(\eta - \sigma y_2^*) \left(\delta_2(\alpha + \delta_1) - \alpha \sigma y_1^* x^* - \frac{b\alpha c\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) + ((\alpha + \delta_1 + \delta_2)\delta_2 x^* + \delta_2(x^*)^2)(\eta - \sigma y_2^*) + ((\alpha + \delta_1 + \delta_2) + x^*(\eta - \sigma y_2^*)) \left(\frac{rx^*}{k} - \frac{b\alpha c\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right)^2 + ((\alpha + \delta_1 + \delta_2)^2 + (\eta x^* - \sigma y_2^* x^*)^2) \left(\frac{rx^*}{k} - \frac{b\alpha c\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) + 2x^*(\eta - \sigma y_2^*)(\alpha + \delta_1 + \delta_2) \left(\frac{rx^*}{k} - \frac{b\phi x^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) + \left(\frac{b\alpha\phi(x^*)^2}{(y_2^* + \phi x^*)^2} \right) \left(\frac{cbx^* y_2^*}{(y_2^* + \phi x^*)^2} + \sigma y_1^* y_2^* - \eta y_1^* \right).$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan E_2 akan stabil atau semua nilai eigen untuk persamaan karakteristik (3.12) akan memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $\varphi_1 > 0$, $\varphi_3 > 0$, dan $\varphi_1\varphi_2 - \varphi_3 > 0$.

3.4 Bifurkasi Hopf

Pada bagian ini dianalisis kemungkinan terjadinya bifurkasi Hopf di titik kesetimbangan E_2 dengan parameter bifurkasi b .

Teorema 3.1

Bifurkasi Hopf terjadi pada titik kesetimbangan E_2 , jika terdapat $b = b_{cr}$ yang memenuhi

- 1) $\varphi_1(b_{cr}) > 0$,
- 2) $\varphi_2(b_{cr}) > 0$,
- 3) $\varphi_1(b_{cr})\varphi_2(b_{cr}) - \varphi_3(b_{cr}) = 0$, dan
- 4) Jika nilai eigen dari persamaan karakteristik berbentuk $\lambda_j = p + iq$, maka $Re\left\{\frac{d}{db}\lambda(b)\right\}_{b=b_{cr}} \neq 0$.

Bukti

Diasumsikan terdapat $b = b_{cr}$ yang memenuhi kondisi (3), sehingga

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_3. \quad (3.13)$$

Berdasarkan (3.13), persamaan karakteristik (3.12) dapat dinyatakan sebagai

$$(\lambda^2 + \varphi_2)(\lambda + \varphi_1) = 0. \quad (3.14)$$

Akar-akar persamaan karakteristik (3.14) adalah

$$\lambda_1(b_{cr}) = \sqrt{-\varphi_2}, \lambda_2(b_{cr}) = -\sqrt{-\varphi_2}, \text{ dan } \lambda_3(b_{cr}) = -\varphi_1.$$

Berdasarkan kondisi (1) maka $\lambda_3(b_{cr}) < 0$. Bifurkasi Hopf dapat terjadi jika terdapat nilai eigen imajiner murni. Kondisi ini terpenuhi jika $\varphi_2(b_{cr}) > 0$.

Dengan demikian diperoleh nilai eigen $\lambda_{1,2}(b_{cr}) = \pm i\sqrt{\varphi_2}$. Untuk setiap b , akar-akar persamaan karakteristik secara umum berbentuk

$$\lambda_{1,2}(b) = p(b) \pm iq(b),$$

$$\lambda_3(b) = -\varphi_1(b).$$

Untuk membuktikan kondisi (4), $\lambda_1(b) = p(b) + iq(b)$ disubstitusikan ke persamaan (3.14) sehingga diperoleh

$$0 = \left((p(b) + iq(b))^2 + \varphi_2 \right) \left((p(b) + iq(b)) + \varphi_1 \right),$$

$$0 = p^3(b) + ip^2(b)q(b) + p^2(b)\varphi_1(b) + 2ip^2(b)q(b) - 2p(b)q^2(b) + 2ip(b)q(b)\varphi_1(b) - p(b)q^2(b) - iq^3(b) - q^2(b)\varphi_1(b) + p(b)\varphi_2(b) + iq(b)\varphi_2(b) + \varphi_1(b)\varphi_2(b),$$

$$0 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

dengan

$$\varepsilon_1 = p^3(b) + p^2(b)\varphi_1(b) - 3p(b)q^2(b) - q^2(b)\varphi_1(b) + p(b)\varphi_2(b) + \varphi_1(b)\varphi_2(b),$$

$$\varepsilon_2 = 3p^2(b)q(b) + 2p(b)q(b)\varphi_1(b) - q^3(b) + q(b)\varphi_2(b).$$

Agar persamaan (3.14) terpenuhi, haruslah $\varepsilon_1 = 0$ dan $\varepsilon_2 = 0$. Turunan ε_1 dan ε_2 terhadap b

$$\frac{d\varepsilon_1}{db} = M_1(b)p'(b) - M_2(b)q'(b) + S_1(b) = 0, \quad (3.15a)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{db} = M_2(b)p'(b) + M_1(b)q'(b) + S_2(b) = 0, \quad (3.15b)$$

dengan

$$M_1(b) = 3p^2(b) + 2p(b)\varphi_1(b) - 3q^2(b) + \varphi_2(b),$$

$$M_2(b) = 6p(b)q(b) + 2q(b)\varphi_1(b),$$

$$S_1(b) = p^2(b)\varphi_1'(b) - q^2(b)\varphi_1'(b) + p(b)\varphi_2'(b) + \varphi_3'(b),$$

$$S_2(b) = 2p(b)q(b)\varphi_1'(b) + q(b)\varphi_2'(b).$$

Persamaan (3.15a) dikalikan dengan $M_1(b)$ dan persamaan (3.15b) dengan $M_2(b)$. Kemudian kedua persamaan tersebut dijumlahkan sehingga diperoleh

$$M_1^2(b)p'(b) + M_2^2(b)p'(b) + M_1(b)S_1(b) + M_2(b)S_2(b) = 0. \quad (3.16)$$

Dari persamaan (3.16) dihasilkan

$$p'(b) = -\frac{M_1(b)S_1(b) + M_2(b)S_2(b)}{M_1^2(b) + M_2^2(b)}.$$

Dengan mengganti nilai b menjadi b_{cr} serta mensubstitusi $p(b_{cr}) = 0$ dan $q(b_{cr}) = \sqrt{\varphi_2(b_{cr})}$ pada persamaan $M_1(b)$, $M_2(b)$, $S_1(b)$, dan $S_2(b)$ didapat

$$M_1(b_{cr}) = -2\varphi_2(b_{cr}),$$

$$M_2(b_{cr}) = 2\sqrt{\varphi_2(b_{cr})}\varphi_1(b_{cr}),$$

$$S_1(b_{cr}) = -\varphi_2(b_{cr})\varphi_1'(b_{cr}) + \varphi_3'(b_{cr}),$$

$$S_2(b_{cr}) = \sqrt{\varphi_2(b_{cr})}\varphi_2'(b_{cr}),$$

sehingga

$$p'(b_{cr}) = \frac{\varphi_3'(b_{cr}) - (\varphi_1(b_{cr})\varphi_2'(b_{cr}) + \varphi_2(b_{cr})\varphi_1'(b_{cr}))}{2(\varphi_2(b_{cr}) + \varphi_1^2(b_{cr}))}.$$

Jika

$$\varphi_3'(b_{cr}) - (\varphi_1(b_{cr})\varphi_2'(b_{cr}) + \varphi_2(b_{cr})\varphi_1'(b_{cr})) \neq 0,$$

maka

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{db} \lambda_j(b) \right\} \Big|_{b=b_{cr}} = p'(b_{cr}) \neq 0.$$

Dengan demikian, kondisi (4) untuk nilai eigen $\lambda_{1,2}(b)$ terpenuhi.

3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini dibahas simulasi numerik yang dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Perilaku solusi dalam simulasi dibandingkan dengan hasil analisis pada subbab 3.3 dan 3.4 sebelumnya. Untuk melihat perubahan perilaku solusi, pada simulasi ini digunakan beberapa nilai tingkat pemangsaan *prey* oleh *predator* dewasa. Terdapat dua kasus yang disimulasikan pada pembahasan tesis ini, yaitu simulasi numerik yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi numerik yang menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf.

3.5.1 Simulasi 1

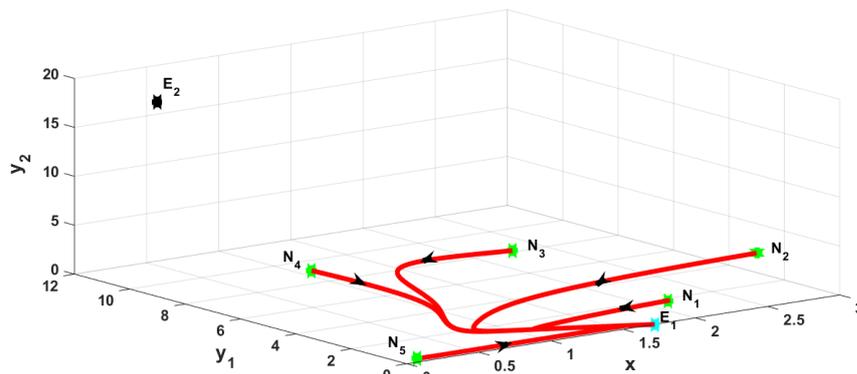
Pada simulasi ini digunakan nilai parameter seperti yang tercantum pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Nilai Parameter

Parameter	Nilai Parameter	Sumber
r	1.6	(Khajanchi, 2017)
k	1.72	(Khajanchi, 2017)
ϕ	1	(Khajanchi, 2014)
α	0.09	(Khajanchi, 2017)
δ_1	0.5	(Khajanchi, 2017)
δ_2	0.05	(Khajanchi, 2017)
b	1.4	(Khajanchi, 2017)
c	0.435	diasumsikan
η	0.3	(Mortoja, dkk., 2018)
σ	0.15	diasumsikan

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.1 terdapat satu titik interior yang eksis, yaitu $E_2(0.23386, 10.23752, 18.42754)$. Dari nilai parameter tersebut syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $E_1(1.72, 0, 0)$ terpenuhi, yaitu $\frac{c\alpha b}{\phi} = 0.05481 < (\alpha + \delta_1 + \eta k)\delta_2 = 0.05530$. Nilai parameter tersebut tidak memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_2(0.23386, 10.23752, 18.42754)$, sehingga titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.1 dalam bentuk potret fase sistem (3.4).

Terlihat pada Gambar 3.1 bahwa semua solusi dengan lima nilai awal yang berbeda, yaitu $N_1, N_2, N_3, N_4,$ dan N_5 konvergen ke titik kesetimbangan E_1 sehingga dapat diartikan bahwa titik kesetimbangan $E_1(1.72, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik.



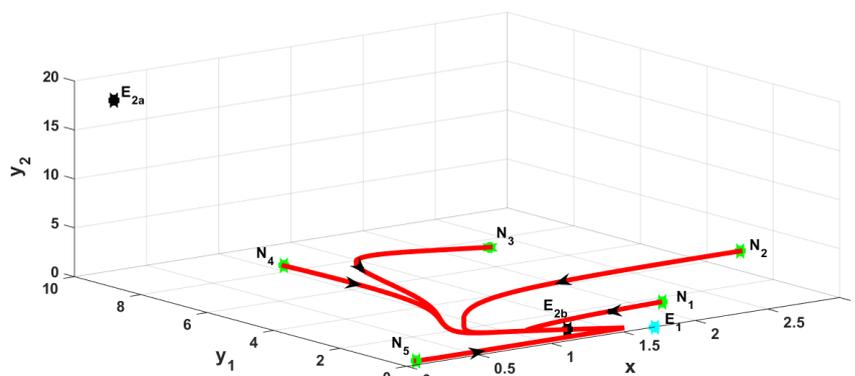
Gambar 3.1 Potret fase sistem (3.4) yang menunjukkan kestabilan titik E_1

Berdasarkan simulasi ini, dapat dilihat bahwa jika laju total pertumbuhan predator muda kurang dari laju total pengurangan predator muda maka sistem akan menuju ke titik kepunahan predator. Berkurangnya populasi predator muda akan mengakibatkan berkurangnya populasi predator dewasa. Seiring berjalannya waktu populasi predator muda dan populasi predator dewasa akan mengalami kepunahan. Akibatnya, ketiadaan predator menyebabkan

populasi prey tumbuh secara logistik mencapai nilai *carrying capacity*-nya, yaitu 1,72.

Untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_2 dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan nilai-nilai parameter seperti pada simulasi sebelumnya, kecuali nilai η diperkecil, yaitu $\eta = 0.2$. Dari nilai parameter tersebut terdapat dua titik kesetimbangan interior yang eksis, yaitu $E_{2a}(0.23471, 9.82413, 17.68343)$ dan $E_{2b}(1.19615, 0.35479, 0.63863)$. Persamaan karakteristik dari titik kesetimbangan $E_{2b}(1.19615, 0.35479, 0.63863)$ adalah $\lambda^3 + 1.55965\lambda^2 + 0.59872\lambda + 0.00730$, yang memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan E_{2b} , yaitu

1. $\varphi_1 = 1.55965 > 0$,
2. $\varphi_3 = 0.00730 > 0$,
3. $\varphi_1\varphi_2 - \varphi_3 = 0.92650 > 0$.



Gambar 3.2 Potret fase sistem (3.4) yang menunjukkan kestabilan titik E_{2b}

Nilai parameter tersebut tidak memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_1(1.72, 0, 0)$ dan $E_{2a}(0.23471, 9.82413, 17.68343)$, sehingga kedua titik kesetimbangan tersebut bersifat tidak stabil.

Pada Gambar 3.2, dapat dilihat bahwa semua solusi dengan lima nilai awal yang berbeda konvergen ke titik kesetimbangan E_{2b} sehingga dapat diartikan bahwa titik kesetimbangan $E_{2b}(1.19615, 0.35479, 0.63863)$ bersifat stabil asimtotik.

Ketika laju *anti-predator* η diperkecil dari 0.3 ke 0.2, laju pertumbuhan populasi *predator* muda meningkat sehingga populasi *predator* dewasa bertambah. Pada waktu yang cukup lama, semua populasi dapat hidup berdampingan.

3.5.2 Simulasi 2

Simulasi 2 dilakukan untuk memperlihatkan terjadinya bifurkasi Hopf dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.1, kecuali $c = 1.5$ yang diasumsikan. Penentuan nilai b_{cr} dilakukan dengan mensubstitusi nilai parameter ke dalam persamaan $\varphi_1(b_{cr})\varphi_2(b_{cr}) - \varphi_3(b_{cr}) = 0$, sehingga diperoleh nilai $b_{cr} = 1.64287$. Berdasarkan Teorema 3.1, bifurkasi Hopf terjadi di titik kesetimbangan interior dengan nilai kritis b_{cr} dikarenakan sudah memenuhi syarat berikut:

- (1) $\varphi_1(b_{cr}) = 0.65119 > 0$,
- (2) $\varphi_2(b_{cr}) = 0.00715 > 0$,
- (3) $\varphi_3'(b_{cr}) - (\varphi_1(b_{cr})\varphi_2'(b_{cr}) + \varphi_2(b_{cr})\varphi_1'(b_{cr})) \neq 0$.

Kondisi (3) terpenuhi karena $\varphi_3'(b_{cr}) - (\varphi_1(b_{cr})\varphi_2'(b_{cr}) + \varphi_2(b_{cr})\varphi_1'(b_{cr})) = 0.06103$.

Perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan E_2 disajikan dalam Gambar 3.3 dan Gambar 3.4. Jika diambil nilai $b = 1.62287 < b_{cr}$, maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu $E_1(1.72, 0, 0)$ dan $E_2(0.21882, 0.74974, 1.34953)$.

Berdasarkan nilai parameter yang digunakan, syarat kestabilan titik kesetimbangan E_2 berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, yaitu

- (1) $\varphi_1 = 0.67006 > 0$,

$$(2) \quad \varphi_3 = 0.00512 > 0,$$

$$(3) \quad \varphi_1\varphi_2 - \varphi_3 = 0.00835 > 0.$$

Dengan demikian titik kesetimbangan $E_2(0.21882, 0.74974, 1.34953)$ bersifat stabil asimtotik. Perilaku solusi sistem (3.4) dengan nilai-nilai parameter tersebut secara grafis dapat dilihat pada Gambar 3.3.

Titik kesetimbangan $E_1(1.72, 0, 0)$ bersifat tidak stabil, sedangkan titik $E_2(0.21882, 0.74974, 1.34953)$ bersifat stabil asimtotik. Dari hasil simulasi ini dapat diartikan bahwa tingkat pemangsa yang tinggi menyebabkan *predator* memiliki persediaan makanan yang banyak dan berkurangnya populasi *prey*. Dengan meningkatnya laju pertumbuhan *predator* muda, populasi *predator* dewasa akan bertambah. Untuk jangka waktu yang relatif lama ketiga populasi dapat hidup berdampingan sampai ke nilai $(0.21882, 0.74974, 1.34953)$.

Jika diambil nilai $b = 1.66287 > b_{cr}$ maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu $E_1(1.72, 0, 0)$ dan $E_2(0.17664, 0.62014, 1.11625)$. Berdasarkan syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_2(0.17664, 0.62014, 1.11625)$ ditunjukkan hasil numerik sebagai berikut.

$$(1) \quad \varphi_1 = 0.63158 > 0,$$

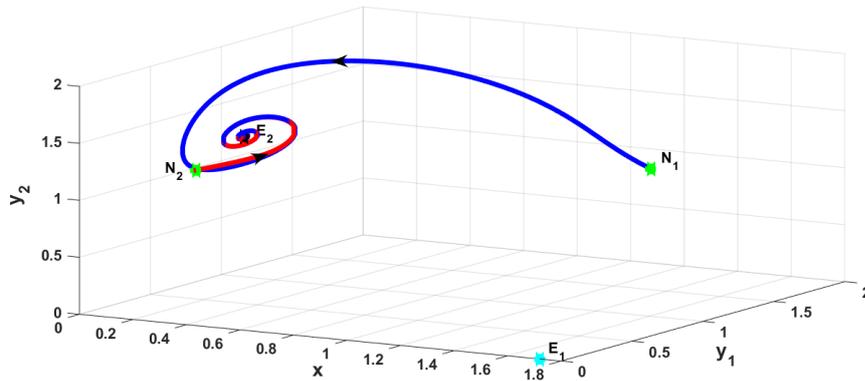
$$(2) \quad \varphi_3 = 0.00416 > 0,$$

$$(3) \quad \varphi_1\varphi_2 - \varphi_3 = -0.00791 < 0.$$

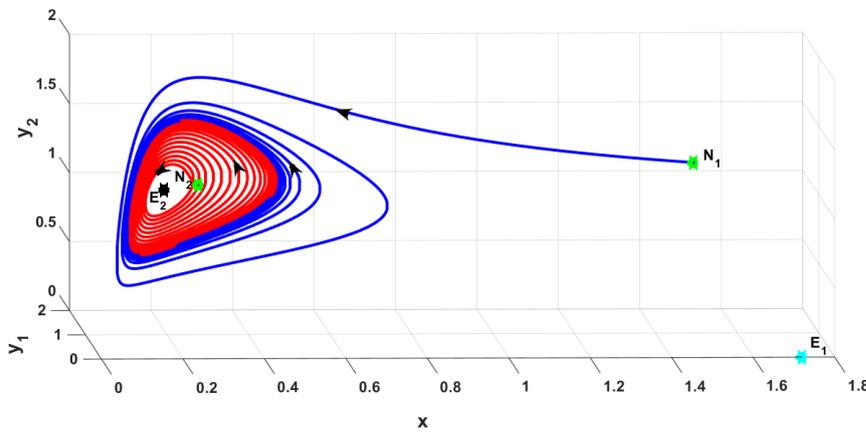
Terlihat bahwa syarat (3) dari kriteria Routh-Hurwitz untuk kestabilan titik kesetimbangan $E_2(0.17664, 0.62014, 1.11625)$ tidak terpenuhi karena $\varphi_1\varphi_2 - \varphi_3 < 0$. Hal ini mengakibatkan titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil asimtotik. Gambar 3.4 menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_2(0.16675, 0.64940, 1.16893)$ bersifat tidak stabil karena dijaui oleh trayektori di sekitarnya dan muncul *limit cycle* yang stabil di sekitar titik kesetimbangan.

Kemunculan *limit cycle* yang stabil setelah parameter bifurkasi melewati nilai

kritis b_{cr} menandakan terjadinya bifurkasi Hopf *supercritical*. Ketika $b = 1.66287 > b_{cr}$ populasi ketiga spesies berubah secara periodik. Seiring berjalannya waktu, ketiga spesies dapat hidup berdampingan dengan populasi yang selalu berubah.



Gambar 3.3 Potret fase sistem (3.4) untuk $b = 1.62287 < b_{cr}$.



Gambar 3.4 Potret fase sistem (3.4) untuk $b = 1.66287 > b_{cr}$.



BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Telah dibentuk model *predator-prey* dengan *stage structure* yang terdiri dari tiga populasi, yaitu *prey*, *predator* muda, dan *predator* dewasa berupa sistem persamaan diferensial nonlinear.
2. Model *predator-prey* tersebut memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kepunahan *predator* $E_1 = (k_1, 0, 0)$ dan titik interior $E_2 = (x^*, y_1^*, y_2^*)$. Titik kesetimbangan E_1 selalu eksis dan E_2 eksis dengan syarat tertentu. Kedua titik kesetimbangan tersebut stabil asimtotik lokal dengan syarat tertentu.
3. Bifurkasi Hopf terjadi di sekitar titik interior E_2 ketika tingkat pemangsaan melewati suatu nilai kritis. Bifurkasi Hopf ditandai dengan kemunculan *limit cycle* di sekitar titik interior mengakibatkan terjadinya keseimbangan ekosistem. Ketiga populasi hidup berdampingan dengan kepadatan populasi yang berubah-ubah yang bergantung terhadap waktu.
4. Hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil analisis yang telah diperoleh.

4.2 Saran

Pada penelitian ini, model yang dikaji menggunakan fungsi respon *ratio-dependent*. Pada fungsi respon tersebut belum dipertimbangkan adanya proteksi lingkungan pada populasi *prey*. Untuk itu pada penelitian selanjutnya disarankan untuk mengubah fungsi respon *ratio-dependent* menjadi fungsi respon Beddington-DeAngelis.



DAFTAR PUSTAKA

- Akcakaya, H.R., R. Arditi, dan L.R. Ginzburg. 1995. Ratio-Dependent Predation: An Abstraction that Works. *Ecology*, **76**(3): 995-1004.
- Alligood, K.T., T.D. Sauer, dan J.A. Yorke. 2000. *An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Boyce, W.E. dan R.C. Diprima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth edition. John Willey & Sons. New York.
- Cai, Y., C. Zhao, W. Wang, dan J. Wang. 2015. Dynamics of a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Additive Allee Effect. *Applied Mathematical Modelling*, **39**: 2092-2106.
- Elletreby, M.F. dan H. El-Metwally. 2007. Multi-team Prey-Predator Model. *International Journal of Modern Physics C*, **18**(10): 1609-1617.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi kedua. Diterjemahkan oleh Santoso, W. Erlangga. Jakarta.
- Georgescu, P. dan Y. Hsieh. 2007. Global Dynamics of a Predator-Prey Model with Stage Structure of the Predator. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **67**(5): 1379-1395.
- Kant, S. dan V. Kumar. 2016. Dynamical Behaviour of a Stage Structure Prey-Predator Model. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **7**(1): 231-241.
- Khajanchi, S. 2014. Dynamic Behaviour of a Beddington-Deangelis Type Stage Structured Predator-Prey Model. *Applied Mathematics and Computation*, **244**: 344-360.
- Khajanchi, S. 2017. Modeling the Dynamics of Stage Structure Predator-Prey System with Monod-Haldane Type Response Function. *Applied Mathematics and Computation*, **302**: 122-143.
- Kuznetsov, Y.A. 1998. *Element of Applied Bifurcation Theory*. Second edition. Springer-Verlag. New York.
- Mader, S.S. 2010. *Biology*. Tenth edition, McGraw-Hill. New York.
- Mattheij, R. dan J. Molenaar. 2002. *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia.
- McNaughton, S.J. dan L.L. Wolf, 1992. *Ekologi Umum*. Edisi kedua. Diterjemahkan oleh Pringgoseputro, S. dan B. Srigundono, Gajah Mada University Press. Yogyakarta.
- Meng, X., H. Huo, H. Xiang, dan Q.-Y. Yin. 2014. Stability in a Predator-Prey Model with Crowley-Martin Function and Stage Structure for Prey. *Applied Mathematics and Computation*, **232**: 810-819.

Mortoja, S.G., P. Panja, dan S.K. Mondal. 2018. Dynamics of a Predator-Prey Model with Stage Structured on both Species and Anti-Predator Behaviour. *Informatics in Medicine Unlocked*. **10**: 50-57.

Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology I: an Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York.

Panja, P., S.K. Mondal, dan J. Chattopadhyay. 2017. Dynamical Effect of Anti-predator Behaviour of Adult Prey in a Predator-Prey Model with Ratio-dependent Functional Response. *Asian Journal of Mathematics and Physics*. **1**(1): 19-32.

Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. Pearson Education. New Jersey.

Ruan, S. dan D. Xiao. 2001. Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. **61**(4): 1445-1472.

Tang, B. dan Y. Xiao. 2015. Bifurcation Analysis of a Predator-Prey Model with Anti-Predator Behaviour. *Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*. **70**: 58-68.

Xiao, D. dan S. Ruan. 2001. Global Dynamics of a Ratio-Dependent Predator-Prey System. *J. Mathematical Biology*. **43**: 268-290.

Xu, R., M.A.J. Chaplain, dan F.A. Davidson. 2004. Persistence and Global Stability of a Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Stage Structure. *Applied Mathematics and Computation*. **158**: 729-744.



LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan titik kesetimbangan E_2

Kasus 2b. Kombinasi (3.6b), (3.7), dan (3.8b).

$$y_1^* = \frac{d_2 y_2^*}{\alpha},$$

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{b y_2}{y_2 + \phi x} = 0,$$

$$\Leftrightarrow b y_2 = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) (y_2 + \phi x)$$

$$\Leftrightarrow b y_2 = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) (y_2 + \phi x)$$

$$\Leftrightarrow b y_2 - r \left(1 - \frac{x}{k}\right) y_2 = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \phi x$$

$$\Leftrightarrow y_2 = \frac{r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \phi x}{b - r \left(1 - \frac{x}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow y_2 = x \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right).$$

Persamaan $y_2 = x \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right)$ disubstitusikan ke (3.8b)

$$\frac{c b x}{x \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) + \phi x} - (\alpha + \delta_1) \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) - \left(\eta - \sigma x \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) \right) x \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c b x}{x \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) + \phi x} - \left(\eta - \sigma x \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) \right) x \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) = (\alpha + \delta_1) \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c b x}{x \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) + \phi x} + \left(\sigma x^2 \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) \right) \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right) = (\alpha + \delta_1 + \eta x) \left(\frac{\delta_2}{\alpha} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c b \alpha}{\left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) + \phi} + \sigma \delta_2 x^2 \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) = (\alpha + \delta_1 + \eta x) \delta_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{c b \alpha}{\left(\frac{r \phi k - r \phi x + \phi b k - r \phi k + r \phi x}{b k - r k + r x} \right)} + \sigma \delta_2 x^2 \left(\frac{r \phi k - r \phi x}{b k - r k + r x} \right) = (\alpha + \delta_1 + \eta x) \delta_2$$

$$\Leftrightarrow c\alpha \frac{bk-rk+rx}{\phi k} + \sigma\delta_2 x^2 \left(\frac{r\phi k-r\phi x}{bk-rk+rx} \right) = (\alpha + \delta_1 + \eta x)\delta_2$$

$$\Leftrightarrow c\alpha \frac{bk-rk+rx}{\phi k} + \sigma\delta_2 r\phi x^2 \left(\frac{k-x}{bk-rk+rx} \right) = (\alpha + \delta_1 + \eta x)\delta_2$$

$$\Leftrightarrow c\alpha \frac{(bk-rk+rx)^2 + \sigma\delta_2 r\phi^2 x^2 (k-x)}{\phi k(bk-rk+rx)} = (\alpha + \delta_1 + \eta x)\delta_2$$

$$\Leftrightarrow c\alpha(bk-rk+rx)^2 + \sigma\delta_2 r\phi^2 x^2 (k-x) = \phi k\delta_2 (bk-rk+rx)(\alpha + \delta_1 + \eta x)$$

$$\Leftrightarrow c\alpha(bk-rk+rx)(bk-rk+rx) + \sigma\delta_2 r\phi^2 x^2 (k-x) = \phi k\delta_2 (bk-rk+rx)(\alpha + \delta_1 + \eta x)$$

$$\Leftrightarrow c\alpha(b^2k^2 - rbk^2 + rbkx - rbk^2 + r^2k^2 - r^2kx + rbkx - r^2kx + r^2x^2) + \sigma\delta_2 rk^2\phi^2 x^2 - \sigma\delta_2 rk\phi^2 x^3 = \delta_2 k\phi(\alpha bk - ark + arx + bk\delta_1 - rk\delta_1 + r\delta_1 x + bk\eta x - rk\eta x + r\eta x^2)$$

$$\Leftrightarrow cab^2k^2 - carbk^2 + carbkx - carbk^2 + car^2k^2 - car^2kx + carbkx - car^2kx + car^2x^2 + \sigma\delta_2 rk^2\phi^2 x^2 - \sigma\delta_2 rk\phi^2 x^3 = ab\delta_2 k^2\phi - \alpha\delta_2 rk^2\phi + \alpha\delta_2 rk\phi x + b\delta_1\delta_2 k^2\phi - \delta_1\delta_2 rk^2\phi + \delta_1\delta_2 rk\phi x + b\delta_2 k^2\phi\eta x - \delta_2 rk^2\phi\eta x + \delta_2 rk\phi\eta x^2$$

$$\Leftrightarrow -\sigma\delta_2 rk\phi^2 x^3 + (car^2 + \sigma\delta_2 rk^2\phi^2 - \delta_2 rk\phi\eta)x^2 + (2carbk - 2car^2k - \alpha\delta_2 rk\phi - \delta_1\delta_2 rk\phi - b\delta_2 k^2\phi\eta + \delta_2 rk^2\phi\eta)x + ab\delta_2 k^2\phi + \alpha\delta_2 rk^2\phi - b\delta_1\delta_2 k^2\phi + \delta_1\delta_2 rk^2\phi = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 \frac{(car + \sigma\delta_2 k^2\phi^2 - \delta_2 k\phi\eta)}{\sigma\delta_2 k\phi^2} x^2 - \frac{(2carb - 2car^2 - \alpha\delta_2 r\phi - \delta_1\delta_2 r\phi - b\delta_2 k\phi\eta + \delta_2 rk\phi\eta)}{\sigma\delta_2 r\phi^2} x - \frac{(cab^2k - 2carbk + car^2k - ab\delta_2 k\phi + \alpha\delta_2 rk\phi - b\delta_1\delta_2 k\phi + \delta_1\delta_2 rk\phi)}{\sigma\delta_2 r\phi^2} = 0.$$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh titik kesetimbangan pada kasus

ini, yaitu titik kesetimbangan $E_2 = (x^*, y_1^*, y_2^*)$, dengan $y_1^* = \frac{a_2 y_2^*}{\alpha}$,

$y_2^* = x^* r\phi \left(\frac{k-x^*}{bk-rk+rx^*} \right)$, dan x^* diperoleh dari persamaan

Lampiran 2. Listing program

```

function dx=model(x,parameter)
r=parameter(1);
k=parameter(2);
b=parameter(3);
c=parameter(4);
phi=parameter(5);
alpha=parameter(6);
delta1=parameter(7);
delta2=parameter(8);
sigma=parameter(9);
eta=parameter(10);
X=x(1);
Y1=x(2);
Y2=x(3);
dX=r*X*(1-X/k)-((b*X*Y2)/(Y2+phi*X));
dY1=((c*b*X*Y2)/(Y2+phi*X)-(alpha+delta1)*Y1-
(eta*X*Y1)+(sigma*X*Y1*Y2));
dY2=(alpha*Y1)-(delta2*Y2);
dx=[dX dY1 dY2];
end

clear all;
clc;
h=0.05;
t=0:h:3000;
N=length(t)-1;

%variasi nilai awal
x(1,:)=[0.1 0.15 0.2]; %N5
%x(1,:)=[3 3 2]; %N2
%x(1,:)=[2 1 1]; %N1
%x(1,:)=[1.5 4 5]; %N3
%x(1,:)=[0.3 5 5]; %N4

%nilai parameter
r=1.6;
k=1.72;
c=0.435;
phi=1;
alpha=0.09;
delta1=0.5;
delta2=0.05;
sigma=0.15;
eta=0.2;
b=1.4;

par=[r k b c phi alpha delta1 delta2 sigma eta];

for n=1:N
k1=h*model(x(n,:),par);
k2=h*model(x(n,.)+0.5*k1,par);
k3=h*model(x(n,.)+0.5*k2,par);
k4=h*model(x(n,.)+k3,par);
x(n+1,:)=x(n,.)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

```

```
end
```

```
[x(:,1) x(:,2) x(:,3)] %menampilkan hasil hitungan
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),'r','LineWidth',5);%plot potret fase
hold on
plot3(x(1,1),x(1,2),x(1,3),'*g','LineWidth',5);%nilai awal
plot3(k,0,0,'*k','LineWidth',5); %titik kesetimbangan E1
plot3(0.2347143757,9.824130764,17.68343537,'*k','LineWidth',5);
%titik kesetimbangan E2a
plot3(1.196152741,0.3547988384,0.6386379092,'*k','LineWidth',5);
%titik kesetimbangan E2b
```

```
dteks = 0.005;
text(x(1,1)+0.1,x(1,2),x(1,3)+dteks,'N_5');%nilai awal
text(k+dteks,0+dteks,0+dteks,'E_1');
text(0.2347143757+dteks,9.824130764+dteks,17.68343537+dteks,'E_2_a');
text(1.196152741+dteks,0.3547988384+dteks,0.6386379092+dteks,'E_2_b');
```

```
xlabel('x');ylabel('y_1');zlabel('y_2');
grid on
hold on
```

```
figure(2)
plot(t,x(:,1),'b',t,x(:,2),'r',t,x(:,3),'k','LineWidth',3);%plot
time series solution
legend('x','y_1','y_2');
xlabel('t');
```

