

**ESTIMASI CADANGAN KLAIM IBNR MENGGUNAKAN  
PENDEKATAN DISTRIBUSI KELUARGA TWEEDIE**

**TESIS**



Oleh  
**MEDIA RAHMAWATI**  
**NIM 166090400011009**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA**  
**BIDANG MINAT MATEMATIKA INDUSTRI**

**PROGRAM PASCASARJANA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**  
**M A L A N G**  
**2019**



**ESTIMASI CADANGAN KLAIM IBNR MENGGUNAKAN  
PENDEKATAN DISTRIBUSI KELUARGA TWEEDIE**

**TESIS**

**Untuk Memenuhi Persyaratan  
Memperoleh Gelar Magister dalam Bidang Matematika**



Oleh  
**MEDIA RAHMAWATI**  
**NIM 166090400011009**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
BIDANG MINAT MATEMATIKA INDUSTRI**

**PROGRAM PASCASARJANA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
M A L A N G**

**2019**





**LEMBAR PERSETUJUAN TESIS**

**TESIS**

**ESTIMASI CADANGAN KLAIM IBNR MENGGUNAKAN PENDEKATAN  
DISTRIBUSI KELUARGA TWEEDIE**

Oleh:

**MEDIA RAHMAWATI**

**166090400011009**

Telah dipertahankan di depan Komisi Penguji  
pada tanggal .....  
dan dinyatakan **LULUS/TIDAK LULUS**

Menyetujui

**Komisi Pembimbing**

**Ketua**

**Anggota**

**Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.**

197312162002122001

**Prof. Dr. Marjono, M.Phil**

196211161988031004

Mengetahui,

**Ketua Program Studi Magister Matematika**

**Dr. Noor Hidayat, M.Si.**

NIP. 196112041988021001

**IDENTITAS TIM PENGUJI**

Judul Proposal Tesis : **Estimasi Cadangan Klaim IBNR Menggunakan Pendekatan Distribusi Keluarga Tweedie**

Nama : Media Rahmawati

NIM : 166090400011009

Program Studi : Magister Matematika

Bidang Minat : Matematika Industri

**KOMISI PEMBIMBING**

Ketua : Dr. Isnani Darti, S.Si.,M.Si.

Anggota : Prof. Dr. Marjono, M.Phil

**TIM DOSEN PEGUJI**

Dosen Penguji 1 : Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes

Dosen Penguji 2 : Mila Kurniawaty, S.Si.,M.Si.,Ph.D

Tanggal Ujian : .....

SK. Penguji :

**PERNYATAAN ORISINILITAS**

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya di dalam tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur ijiplakan, saya bersedia diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan tesis dibatalkan.

Malang, 19 Juni 2019

Media Rahmawati  
NIM. 16690400011009





## RIWAYAT HIDUP

Penulis, Media Rahmawati lahir di Kota Malang, Jawa Timur, pada tanggal 26 Mei 1989. Penulis merupakan anak tunggal dari bapak Sujito dan ibu Dwi Nuryaningsih. Penulis menyelesaikan pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) di TK Margo Basuki dan menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di Sekolah Dasar Negeri Lowokwaru 7 (sekarang SDN Lowokwaru 3) di Kota Malang pada tahun 2001. Tahun 2004 penulis lulus dari Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 5 Malang Jawa Timur. Tahun 2007 lulus dari Sekolah Menengah Atas Negeri 3, Malang Jawa Timur. Penulis menyelesaikan pendidikan tingkat sarjana (S1) di Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Malang pada tahun 2015. Pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikan tingkat Magister (S2) pada Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.



## RINGKASAN

MEDIA RAHMAWATI, Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya, 22 Mei 2019. Estimasi Cadangan Klaim IBNR Menggunakan Pendekatan Distribusi Keluarga Tweedie.

Ketua Komisi Pembimbing: Isnani Darti, Anggota: Marjono.

Total klaim yang harus ditanggung oleh pihak perusahaan asuransi terdiri dari klaim yang telah dilaporkan oleh pihak tertanggung dan klaim yang telah terjadi namun belum dilaporkan (*Incurred But Not Reported / IBNR*), sehingga IBNR dapat diartikan sebagai hutang atau liabilitas. Besar nominal IBNR harus diprediksi karena belum diketahui secara pasti. Kegiatan dalam memprediksi cadangan klaim IBNR disebut sebagai pencadangan klaim. Keakuratan hasil pencadangan klaim IBNR mempengaruhi tiga aspek penting dalam perusahaan asuransi, yaitu: manajemen internal, investor, dan regulator, dengan kata lain metode yang digunakan dalam pencadangan klaim IBNR harus memiliki performa yang baik.

Penelitian ini membahas tentang estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan tiga metode yang berbeda, yaitu: metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman *curve-fitting*, metode Mack's *Chain-Ladder* (MCL), dan metode *Generalized Linear Model* (GLM). Metode GLM menggunakan tiga pendekatan distribusi keluarga Tweedie, yaitu: distribusi *Over-Dispersed Poisson* (ODP), distribusi Gamma, dan distribusi majemuk Poisson-Gamma. Metode Sherman *curve-fitting* digunakan sebagai alat dalam memprediksi *tail-factor* pada metode *Chain-Ladder*.

Adapun hasil penelitian pada 4 *Line of Business* (LoB) menyatakan bahwa estimasi cadangan klaim IBNR untuk metode MCL dan metode GLM model ODP menghasilkan nilai yang relatif sama yaitu untuk LoB 1 sebesar 289.570, LoB 2 adalah sebesar 406.282, LoB 3 adalah 523.818, dan untuk LoB 4 adalah 564.027 (dalam 1.000). Hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan metode *Chain-Ladder* dipengaruhi oleh *tail-factor*, pada metode MCL dipengaruhi oleh *standard error* (s.e.) dari faktor perkembangan individu, s.e. faktor perkembangan pada *accident period ke-i development period ke-k* dan  $\widehat{mse}$ , sedangkan pada metode GLM dipengaruhi oleh  $\phi$  yang merupakan parameter dispersi. Hasil pencadangan terbaik pada metode GLM adalah dengan menggunakan model ODP untuk LoB 1 yaitu sebesar 289.570, LoB 2 sebesar 406.401 dengan model majemuk Poisson-Gamma, untuk LoB 3 adalah sebesar 523.818 yang diperoleh dengan menggunakan model ODP, sedangkan untuk LoB 4 yaitu sebesar 564.027 yang diperoleh dengan menggunakan metode GLM model ODP.



## SUMMARY

MEDIA RAHMAWATI, Postgraduate Program Mathematics Department Faculty of Mathematics and Science Brawijaya University, May 22 2019. The Estimation of Claims Reserve IBNR Approached By Using The Tweedie Distribution Family.

Supervisor: Isnani Darti, Co-supervisor: Marjono

The total claim that must be covered by the insurance company consists of claims that have been reported by the insured and claims that have occurred but have not been reported yet (IBNR), so that IBNR can be interpreted as a debt or liability. The precise nominal of IBNR must be predicted because it is not certainly known. Activities in predicting claim reserves IBNR are referred as claim reserves. The accuracy of forecasted IBNR claims affects three important aspects in insurance companies, they are: internal management, investors, and regulators. In other words, the method used in forecasting up the IBNR claim must have a good performance.

This study discusses the comparison of estimated claims reserve IBNR using three different methods, namely: the Chain-Ladder method approached by Sherman curve-fitting method, the Mack's Chain-Ladder method (MCL), and the GLM method. The Generalized Linear Model method (GLM) approached by Tweedie distribution family i.e. Over-Dispersed Poisson (ODP) distribution, Gamma distribution, and Compound Poisson-Gamma distribution. The Sherman curve-fitting method is used in predicting tail-factors for the Chain-Ladder method.

The results of the study for four line of business stated that the estimated claims reserve IBNR for MCL method given by LoB 1 289,570, LoB 2 406,282, LoB 3 523,818, and LoB 4 564,027 (in 1,000) produced relatively equal values as given by the GLM ODP method. In addition, result given by the Chain-Ladder method were influenced by the tail-factor, the MCL affected by standard error of individual development value, factor development in accident period- $i$  and development period- $k$ , and  $\widehat{mse}$ , while the GLM method affected by dispersion parameter ( $\phi$ ). The best forecasted results on the GLM method is given by ODP model for LoB 1 that is equal to 289,570, LoB 2 of 406,401 with the Compound Poisson-Gamma model, for LoB 3 523,818 obtained using the ODP model, while for LoB 4 which is 564,027 obtained by the GLM ODP model.





## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal tesis ini yang berjudul Estimasi Cadangan Klaim IBNR Menggunakan Pendekatan Distribusi Keluarga Tweedie sebagai salah satu syarat untuk melakukan penelitian tesis dalam bidang Matematika.

Keberhasilan dalam menyelesaikan proposal tesis ini tidak lepas dari kerjasama dan dukungan berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Komisi Pembimbing dan Prof. Dr. Marjono, M.Phil. selaku Anggota Komisi Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, saran, dan motivasi kepada penulis selama pengerjaan dan penyusunan tesis ini.
2. Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes selaku dosen penguji I dan Mila Kurniawaty, S.Si.,M.Si.,Ph.D selaku dosen penguji II yang telah memberikan kritik dan saran selama pengerjaan dan penyusunan tesis ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Noor Hidayat, M.Si., selaku Ketua program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta seluruh staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ibunda Dwi Nuryaningsih, Ayahanda Sujito, Suami Rizky Satria Dilaga, dan Ananda Danadyaksa Satria Hestama tercinta serta keluarga besar penulis yang tiada henti mendoakan dan memberikan dukungan kepada penulis.
6. Keluarga besar S2 Matematika 2016 Genap atas kerjasama, dukungan, kebersamaan, dan semangat selama ini.



7. Teman-teman mahasiswa S2 Statistika atas bantuan dan dukungan selama ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Malang, 19 Juni 2019

Media Rahmawati  
NIM. 16690400011009



## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PERSETUJUAN TESIS</b>	<b>iii</b>
<b>IDENTITAS TIM PENGUJI</b>	<b>iv</b>
<b>PERNYATAAN ORISINILITAS</b>	<b>v</b>
<b>RIWAYAT HIDUP</b>	<b>vi</b>
<b>RINGKASAN</b>	<b>vii</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>viii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	<b>xviii</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b>	<b>xix</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	5
1.3 Batasan Masalah . . . . .	5
1.4 Asumsi . . . . .	6
1.5 Tujuan . . . . .	6
1.6 Manfaat Penelitian . . . . .	6
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>7</b>
2.1 Cadangan Klaim . . . . .	7
2.2 Klaim IBNR ( <i>Incurred But Not Reported</i> ) . . . . .	8
2.3 Segitiga <i>Run-Off</i> . . . . .	10
2.3.1 Segitiga <i>Run-Off</i> Klaim <i>Incremental</i> . . . . .	12
2.3.2 Segitiga <i>Run-Off</i> Klaim Komulatif . . . . .	13
2.4 Peluang dan Ekspektasi . . . . .	14
2.4.1 Ekspektasi Satu Peubah Acak . . . . .	14
2.4.2 Ekspektasi Dua Peubah Acak . . . . .	18
2.4.3 Kebebasan Stokastik . . . . .	23
2.5 Metode <i>Chain-Ladder</i> . . . . .	24
2.6 Metode Mack's <i>Chain-Ladder</i> . . . . .	26
2.7 Mack's <i>Chain-Ladder</i> Standard Error (Perhitungan Rekursif dengan Melibatkan Faktor Ekor) . . . . .	37



2.8	Model Keluarga Eksponensial Dispersi (EDF)	40
2.8.1	Keluarga Eksponensial Dispersi Secara Umum	41
2.8.2	Distribusi Keluarga Tweedie	43
2.9	Model Regresi Linear dan Model Regresi Non-Linear	46
2.10	Metode <i>Generalized Linear Model</i> (GLM)	48
2.10.1	Definisi	48
2.10.2	<i>Goodness-of-fit</i> dan Deviasi	51
2.10.3	Peramalan	52
2.10.4	Menduga Parameter Dispersi	52
2.10.5	Prediksi Error	53
2.10.6	Deskripsi Visual Model Regresi Pada Segitiga <i>Run-Off</i>	55
2.11	Metode <i>Chain-Ladder</i> Sebagai <i>Generalized Linear Model</i> (GLM)	57
2.12	GLM dan Distribusi Keluarga Tweedie	58
2.13	Pengujian Parameter	60
2.14	MSE ( <i>Mean Squared Error</i> )	61
2.15	Multikolinieritas	62
<b>3</b>	<b>KERANGKA KONSEP PENELITIAN</b>	<b>63</b>
<b>4</b>	<b>METODE PENELITIAN</b>	<b>65</b>
4.1	Sumber Data	65
4.2	Variabel Penelitian	65
4.3	Langkah Analisis	66
4.3.1	Menentukan Karakteristik Data	66
4.3.2	Menentukan Cadangan Klaim IBNR	66
4.4	Diagram Alir	70
<b>5</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>71</b>
5.1	Karakteristik Data	71
5.1.1	Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif	71
5.1.2	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i>	73
5.2	Estimasi Cadangan Klaim IBNR Dengan Metode <i>Chain-Ladder</i> Yang Didekati Dengan Metode Sherman	76
5.2.1	<i>Line of Business</i> (LoB) 1	76
5.2.2	<i>Line of Business</i> (LoB) 2 sampai dengan <i>Line of Business</i> (LoB) 4	83
5.3	Estimasi Cadangan Klaim IBNR dengan Metode Mack's <i>Chain-Ladder</i>	88
5.3.1	<i>Line of Business</i> (LoB) 2 sampai dengan <i>Line of Business</i> (LoB) 4	104
5.4	Estimasi Cadangan Klaim IBNR Dengan Metode <i>Generalized Linear Models</i> (GLM) Dengan Pendekatan Distribusi Tweedie	105
5.4.1	Model <i>Over-Dispersed Poisson</i> (ODP)	105
5.4.2	Distribusi Gamma	117
5.4.3	Distribusi Majemuk Poisson-Gamma	117
5.5	Analisis Hasil Pencadangan Klaim IBNR	118
<b>6</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>129</b>
6.1	Kesimpulan	129
6.2	Saran	131





## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
Gambar 2.1 Klaim IBNR . . . . .	9
Gambar 2.2 Proses Klaim Individu pada Asuransi <i>Non-Life</i> . . . . .	9
Gambar 3.1 Kerangka Penelitian . . . . .	63
Gambar 4.1 Diagram Alir Metode Penelitian . . . . .	70
Gambar 5.1 Visualisai Besar Klaim Kumulatif pada LoB 1 (a) Dalam satu grafik, (b) Setiap <i>Accident Period</i> . . . . .	73
Gambar 5.2 Visualisasi Besar Klaim <i>Incremental</i> LoB1 (a) Dalam satu grafik, (b) Setiap <i>Accident Period</i> . . . . .	75
Gambar 5.3 Ekstrapolasi Log-Linear dari Faktor Perkembangan LoB 1 . . . . .	78
Gambar 5.4 Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR LoB 1 . . . . .	80
Gambar 5.5 Ekstrapolasi Log-Linear dari Faktor Perkembangan . . . . .	84
Gambar 5.6 Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR . . . . .	87
Gambar 5.7 Grafik $C_{i,1}$ vs $C_{i,2}$ pada $1 \leq i \leq I$ . . . . .	100
Gambar 5.8 Grafik $F_{i,k}$ . . . . .	101
Gambar 5.9 Grafik $f_i$ pada $1 \leq i \leq I$ . . . . .	101
Gambar 5.10 Grafik Residual vs Klaim Kumulatif DY 1 . . . . .	102
Gambar 5.11 Grafik Trendline Klaim Kumulatif DY 1 vs DY 2 . . . . .	102
Gambar 5.12 Grafik <i>Standardized Residual vs k (Development Period)</i> . . . . .	103
Gambar 5.13 Grafik <i>Standardized Residual vs Acc. Period</i> pada D.Y 1 . . . . .	103
Gambar 5.14 Grafik <i>Standardized Residual vs Acc. Period</i> pada D.Y 1 . . . . .	104
Gambar 5.15 Perkembangan Cadangan Klaim IBNR untuk setiap $i$ . . . . .	123
Gambar 5.16 <i>Standardized Residual VS Fitted Value</i> pada LoB 1 . . . . .	124
Gambar 5.17 <i>Standardized Residual VS Fitted Value</i> pada LoB 2 . . . . .	126
Gambar 5.18 CV dalam % dari Estimasi Cadangan Klaim IBNR . . . . .	127
Gambar 5.19 Visualisasi <i>standardized residual</i> pada Metode MCL LoB 1 . . . . .	128
Gambar 6.1 Visualisai Besar Klaim Kumulatif pada LoB 2 . . . . .	142
Gambar 6.2 Visualisai Besar Klaim Kumulatif pada LoB 3 . . . . .	142
Gambar 6.3 Visualisai Besar Klaim Kumulatif pada LoB 4 . . . . .	143
Gambar 6.4 Visualisasi Besar Klaim <i>Incremental</i> LoB2 . . . . .	144
Gambar 6.5 Visualisasi Besar Klaim <i>Incremental</i> LoB 3 . . . . .	144
Gambar 6.6 Visualisasi Besar Klaim <i>Incremental</i> LoB 4 . . . . .	145
Gambar 6.7 Visualisasi $\hat{R}^{Mack,s}$ , $C_{i,I+1-i}$ , dan $\hat{C}_{i,I}$ LoB 2 . . . . .	148
Gambar 6.8 Visualisasi $\hat{R}^{Mack,s}$ , $C_{i,I+1-i}$ , dan $\hat{C}_{i,I}$ LoB 3 . . . . .	149
Gambar 6.9 Visualisasi $\hat{R}^{Mack,s}$ , $C_{i,I+1-i}$ , dan $\hat{C}_{i,I}$ LoB 4 . . . . .	150
Gambar 6.10 <i>Standardized Residual VS Fitted Value</i> pada LoB 3 . . . . .	176
Gambar 6.11 <i>Standardized Residual VS Fitted Value</i> pada LoB 4 . . . . .	177
Gambar 6.12 Visualisasi <i>standardized residual</i> pada Metode MCL LoB 2 . . . . .	178
Gambar 6.13 Visualisasi <i>standardized residual</i> pada Metode MCL LoB 3 . . . . .	179
Gambar 6.14 Visualisasi <i>standardized residual</i> pada Metode MCL LoB 4 . . . . .	180



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Perhitungan Akhir Tahun Klaim yang Dibayar	11
Tabel 2.2	Perhitungan Klaim yang Dibayar Ditinjau dari Durasi Kohort	11
Tabel 2.3	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i>	12
Tabel 2.4	Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif	13
Tabel 2.5	Distribusi Anggota EDF	42
Tabel 2.6	$E[Y]$ dan $V(\mu)$ EDF	43
Tabel 2.7	Anggota Distribusi Keluarga Tweedie	44
Tabel 2.8	Contoh Model Linear dan Model Non-Linear	47
Tabel 2.9	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> 5x5	56
Tabel 2.10	Matriks Model	56
Tabel 2.11	Struktur GLM pada Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> 5 x 5	57
Tabel 4.1	Variabel Penelitian	66
Tabel 5.1	Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif pada LoB1 (dalam 1.000)	72
Tabel 5.2	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> pada LoB 1 (dalam 1.000)	74
Tabel 5.3	Estimasi $\hat{f}_k$ pada LoB 1	77
Tabel 5.4	$\hat{f}_k^* = \ln(\hat{f}_k - 1)$ pada LoB 1	77
Tabel 5.5	$\hat{f}_k^*$ untuk $k \geq 12$ pada LoB 1	78
Tabel 5.6	Hasil $\hat{f}_k^{\text{exp}}$ dengan $n = 100$ pada LoB 1	79
Tabel 5.7	Hasil $\hat{f}_k^{\text{CL}}$ LoB 1	80
Tabel 5.8	Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif LoB1 (dalam 1.000) - Metode <i>Chain-Ladder</i>	81
Tabel 5.9	Cadangan Klaim IBNR pada LoB 1 (dalam 1.000)	82
Tabel 5.10	Estimasi $\hat{f}_k$ pada LoB 2	83
Tabel 5.11	$\hat{f}_k^* = \ln(\hat{f}_k - 1)$ pada LoB 2	83
Tabel 5.12	$\hat{f}_k^*$ untuk $k \geq 12$ pada LoB 2	85
Tabel 5.13	Hasil $\hat{f}_k^{\text{exp}}$ dengan $n = 100$	85
Tabel 5.14	Hasil $\hat{f}_k^{\text{CL}}$	86
Tabel 5.15	Cadangan Klaim IBNR Metode <i>Chain-Ladder</i> (dalam 1.000)	88
Tabel 5.16	Nlai $w_{i,k}$	89
Tabel 5.17	Estimasi $\hat{f}_k^{(w)}$ pada LoB 1	89
Tabel 5.18	Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif LoB1 (dalam 1.000)-Metode MCL	90
Tabel 5.19	Cadangan Klaim IBNR pada LoB 1 (dalam 1.000) untuk Metode MCL	91
Tabel 5.20	Faktor Perkembangan Individu $F_{i,k}$ pada LoB 1	92
Tabel 5.21	Nilai $w_{i,k} C_{i,k}^\alpha (F_{i,k} - \hat{f}_k^{(w)})^2$ pada LoB 1	93
Tabel 5.22	Nilai $\hat{\sigma}_k^{2(w)}$ pada LoB 1	94
Tabel 5.23	Nilai $s.e.(\hat{f}_k^{(w)})$ untuk $1 \leq k \leq I - 1$	94
Tabel 5.24	Nilai $\hat{\sigma}_k^{(w)}$ pada LoB 1	95
Tabel 5.25	Nilai $s.e.(F_{i,k})$ dan $s.e.(\hat{F}_{i,k})$ pada LoB 1	95
Tabel 5.26	Lanjutan Tabel 5.40	96
Tabel 5.27	Nilai <i>Process Risk</i> $_{i,k}$ pada LoB 1	97
Tabel 5.28	Nilai <i>Parameter Risk</i> $_{i,k}$ pada LoB 1	98



Tabel 5.29 Nilai $s.e\hat{R}_{i,k}^{Mack's}$ pada LoB 1 . . . . .	99
Tabel 5.30 <i>Coefisien Variation</i> CV dari IBNR LoB1 - Metode Mack's CL . . . . .	100
Tabel 5.31 Total <i>Coefisien of Variation</i> CV Metode MCL (dalam 1.000) . . . . .	104
Tabel 5.32 Transformasi Segitiga <i>Run-off</i> ke dalam Bentuk Matrix . . . . .	106
Tabel 5.33 Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 1 . . . . .	110
Tabel 5.34 $\hat{Y}_t - Y_t$ vs $Y_t - \hat{Y}'_t$ . . . . .	113
Tabel 5.35 Transformasi Segitiga <i>Run-off</i> ke dalam Bentuk Matrix . . . . .	114
Tabel 5.36 Segitiga <i>Run-Off</i> Incremental LoB 1 (dalam 1.000)-Metode GLM ODP . . . . .	115
Tabel 5.37 <i>Coefisien Variation</i> CV dari IBNR LoB1 - Metode GLM ODP . . . . .	116
Tabel 5.38 Total <i>Coefisien Variation</i> CV IBNR- Metode GLM model ODP . . . . .	116
Tabel 5.39 Total <i>Coefisien Variation</i> CV IBNR- Metode Gamma . . . . .	117
Tabel 5.40 Total CV IBNR- GLM Majemuk Poisson-Gamma . . . . .	117
Tabel 5.41 Estimasi Parameter Metode GLM LoB 1 dan LoB 2 . . . . .	120
Tabel 5.42 Estimasi Parameter Metode GLM LoB 3 dan LoB 4 . . . . .	121
Tabel 5.43 Hasil Total Estimasi Cadangan Klaim IBNR dalam (1.000) . . . . .	122
Tabel 6.1 Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif pada LoB1 (dalam 1.000) . . . . .	138
Tabel 6.2 Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif pada LoB2 (dalam 1.000) . . . . .	138
Tabel 6.3 Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif pada LoB3 (dalam 1.000) . . . . .	139
Tabel 6.4 Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif pada LoB4 (dalam 1.000) . . . . .	139
Tabel 6.5 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> pada LoB 2 (dalam 1.000) . . . . .	140
Tabel 6.6 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> pada LoB 3 (dalam 1.000) . . . . .	140
Tabel 6.7 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> pada LoB 4 (dalam 1.000) . . . . .	141
Tabel 6.8 Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif LoB2 (dalam 1.000) -Metode <i>Chain-Ladder</i> . . . . .	146
Tabel 6.9 Cadangan Klaim IBNR pada LoB 2 (dalam 1.000) . . . . .	146
Tabel 6.10 Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif LoB 3 (dalam 1.000)-Metode <i>Chain-Ladder</i> . . . . .	146
Tabel 6.11 Cadangan Klaim IBNR pada LoB 3 (dalam 1.000) . . . . .	147
Tabel 6.12 Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif LoB 4 (dalam 1.000)-Metode <i>Chain-Ladder</i> . . . . .	147
Tabel 6.13 Cadangan Klaim IBNR pada LoB 4 (dalam 1.000) . . . . .	147
Tabel 6.14 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 2 (dalam 1.000)-Metode Mack148	
Tabel 6.15 <i>Coefisien Variation</i> CV dari IBNR LoB 2 - Metode Mack's CL . . . . .	148
Tabel 6.16 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 3 (dalam 1.000)-Metode Mack149	
Tabel 6.17 <i>Coefisien Variation</i> CV dari IBNR LoB 3 - Metode Mack's CL . . . . .	149
Tabel 6.18 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 4 (dalam 1.000)-Metode Mack150	
Tabel 6.19 <i>Coefisien Variation</i> CV dari IBNR LoB4 - Metode Mack's CL . . . . .	150
Tabel 6.20 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 2 (dalam 1.000)-Metode GLM-ODP . . . . .	151
Tabel 6.21 Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 2 Metode GLM ODP . . . . .	151
Tabel 6.22 <i>Coefisien Variation</i> CV dari IBNR LoB 2 - Metode GLM ODP . . . . .	153
Tabel 6.23 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 3 (dalam 1.000) Metode GLM ODP . . . . .	153
Tabel 6.24 Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 3 Metode GLM ODP . . . . .	153
Tabel 6.25 <i>Coefisien Variation</i> CV dari IBNR LoB 3 - Metode GLM ODP . . . . .	155
Tabel 6.26 Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 4 (dalam 1.000) Metode GLM ODP . . . . .	155
Tabel 6.27 Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 4 Metode GLM ODP . . . . .	156





Tabel 6.28	<i>Coefisien Variation CV</i> dari IBNR LoB 4 - Metode GLM ODP	157
Tabel 6.29	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 1 (dalam 1.000)-Metode GLM Gamma	158
Tabel 6.30	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 1 Pendekatan Distribusi Gamma	158
Tabel 6.31	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 2 (dalam 1.000)-Metode Gamma	160
Tabel 6.32	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 2 Pendekatan Distribusi Gamma	160
Tabel 6.33	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 3 (dalam 1.000) Metode Gamma	161
Tabel 6.34	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 3 Pendekatan Distribusi Gamma	162
Tabel 6.35	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 4 (dalam 1.000) Metode Gamma	163
Tabel 6.36	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 4 Pendekatan Distribusi Gamma	164
Tabel 6.37	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 1 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma	165
Tabel 6.38	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 2 (dalam 1.000)-Metode Majemuk Poisson Gamma	166
Tabel 6.39	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 2 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma	167
Tabel 6.40	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 3 (dalam 1.000) Metode GLM Majemuk Poisson Gamma	168
Tabel 6.41	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 3 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma	169
Tabel 6.42	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i> LoB 4 (dalam 1.000) Metode GLM ODP	170
Tabel 6.43	Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 4 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma	171



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Distribusi Anggota EDF	135
Lampiran 2	Data (Segitiga <i>Run-Off</i> Kumulatif	138
Lampiran 3	Segitiga <i>Run-Off Incremental</i>	140
Lampiran 4	Visualisasi Klaim Kumulatif	142
Lampiran 5	Visualisasi Klaim <i>Incremental</i>	144
Lampiran 6	Hasil Segitiga <i>Run-Off</i> Metode <i>Chain-Ladder</i>	146
Lampiran 7	Hasil Segitiga <i>Run-Off</i> Metode Mack's <i>Chain-Ladder</i>	148
Lampiran 8	Hasil Segitiga <i>Run-Off</i> Metode GLM-ODP	151
Lampiran 9	Hasil Segitiga <i>Run-Off</i> Metode GLM Gamma	158
Lampiran 10	Hasil Segitiga <i>Run-Off</i> Metode GLM Majemuk Poisson Gamma	165
Lampiran 11	<i>Pseudocode</i>	173
Lampiran 12	Visualisasi MCL dan metode	176
Lampiran 13	Visualisasi <i>standardized residual</i> pada metode MCL	178



## DAFTAR SIMBOL

Simbol	Pengertian
$C_{i,k}$	Besarnya klaim ( <i>claim ammount</i> ) kumulatif pada <i>accident period</i> $i$ dan dibayarkan <i>maximal</i> pada <i>development period</i> $k$ dengan $1 \leq i \leq I$ dan $1 \leq k \leq I$
$C_{i,I}$	Klaim kumulatif sampai <i>development period</i> $I$ (klaim <i>ultimate</i> pada metode Mack's <i>chai-ladder</i> )
$C_{i,I+1-i}$	Klaim kumulatif pada baris ke- $i$ dan kolom ke $I + 1 - i$ (diagonal)
$\hat{C}_i^{ult}$	Klaim <i>ultimate</i> setiap <i>accident period</i> pada metode <i>Chain-Ladder</i>
$\hat{C}_{i,I}$	Estimasi klaim kumulatif pada <i>development period</i> ke $I$
$f_{i,k}$	Faktor perkembangan pada <i>accident period</i> ke- $i$ dan <i>development period</i> ke- $k$
$F_{i,k}$	Faktor perkembangan individu pada metode Mack's.
$D$	Himpunan data yang telah diobservasi di dalam segitiga <i>run-off</i> (segitiga atas)
$e_{i,k}$	Residual dalam metode GLM
$\hat{f}_k^{CL}$	Faktor perkembangan pada metode <i>Chain-Ladder</i>
$\hat{f}_k^{(w)}$	Faktor perkembangan yang telah diberi bobot
$\hat{f}_k^{tail}$	Perkalian dari $\hat{f}_k^{exp}$ dengan $k = 12, 13, \dots, 112$
$\hat{f}_{i,k}$	Estimasi faktor perkembangan
$R_i$	Cadangan klaim setiap <i>accident period</i> $i$
$\hat{R}_i^{cl}$	Estimasi cadangan klaim untuk setiap <i>accident period</i> pada metode <i>Chain-Ladder</i>
$\hat{R}^{cl}$	Estimasi cadangan klaim total pada metode <i>Chain-Ladder</i>
$\hat{R}^{Mack's}$	Estimasi cadangan klaim total pada metode Mack's <i>Chain-Ladder</i>
$\hat{R}^{GLM-ODP}$	Estimasi cadangan klaim total pada metode GLM dengan model ODP
$\hat{R}^{GLM-Gamma}$	Estimasi cadangan klaim total pada metode GLM dengan model Gamma
$\hat{R}^{GLM-Com-Pois}$	Estimasi cadangan klaim total pada metode GLM dengan model majemuk Poisson-Gamma
$\hat{R}_i$	Estimasi cadangan klaim setiap <i>accident period</i> $i$ pada metode Mack's <i>Chain-Ladder</i>
$R_i^p$	<i>Residual Pearson</i>
$S_{i,k}$	Besarnya klaim ( <i>claim ammount</i> ) <i>incremental</i> pada <i>accident period</i> $i$ dan dibayarkan pada <i>development period</i> $k$ dimana $1 \leq i \leq I$ dan $1 \leq k \leq I$
$\hat{S}_{i,k}$	Estimasi klaim <i>incremental</i> untuk <i>accident period</i> dengan $i = 2, \dots, I$ dan <i>development period</i> dengan $k = I - i + 2, \dots, I$
$\hat{Y}$	Matrix model GLM segitiga atas
$\hat{Y}^*$	Matrix model GLM segitiga bawah



## BAB 1

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari segala keputusan yang diambil oleh individu selalu mengandung risiko. Risiko dapat diartikan sebagai konsekuensi dari tindakan yang memuat ketidakpastian. Ketidakpastian merupakan suatu kejadian yang tidak dapat diprediksi, dan tidak dapat dikendalikan (Antunes dan Gonzalez, 2015). Risiko bisa berupa kerugian secara materi yang dialami secara tiba-tiba dengan jumlah nominal yang tidak dapat diprediksi. beberapa cara yang mampu dilakukan oleh individu untuk meminimalkan kerugian yang akan ditanggung, salah satunya adalah memindahkan tanggung jawab individu yang akan terkena risiko kepada perusahaan asuransi yaitu dengan cara membayar sejumlah premi asuransi sehingga semua kerugian ditanggung oleh pihak perusahaan asuransi.

Asuransi atau pertanggungan menurut ketentuan Pasal 1 angka 1 UU No 2 Tahun 1992 Tentang Usaha Perasuransian berisi tentang perjanjian antara dua pihak maupun lebih, dimana pihak penanggung (insurer) mengikatkan diri terhadap pihak tertanggung (insured), dengan memperoleh premi asuransi untuk memberikan kompensasi kepada tertanggung yang disebabkan oleh kerugian, kerusakan atau kehilangan yang tidak diharapkan, atau tanggung jawab hukum kepada pihak ketiga yang mungkin akan diderita tertanggung, yang timbul dari suatu peristiwa yang tidak pasti, atau untuk memberikan suatu pembayaran yang didasarkan atas meninggal atau hidupnya seseorang yang dipertanggungkan. Saat perusahaan asuransi menjual kontrak kepada kliennya, berarti bahwa perusahaan tersebut bertanggung jawab atas segala bentuk klaim yang muncul di kemudian hari selama masa kontrak berlangsung. Untuk beberapa kejadian yang diasuransikan, perusahaan asuransi dapat menghitung biaya ganti rugi yang tepat secara cepat dengan tingkat ketelitian yang tinggi. Di lain sisi, perusahaan asuransi mungkin tidak me-



ngetahui biaya ganti rugi selama bertahun-tahun, dan mungkin beberapa dekade. Namun demikian, perusahaan asuransi harus melaporkan hasil keuangannya secara teratur, sehingga perusahaan asuransi memperhitungkan estimasi cadangan klaim.

Terdapat dua kegiatan mendasar dalam asuransi, yaitu: kegiatan dalam penentuan besarnya nominal premi (*pricing*) dan kegiatan dalam penentuan nominal cadangan klaim (*claims reserve estimating*). Pencadangan klaim merupakan suatu proses dalam memperkirakan besar dana yang disiapkan oleh perusahaan asuransi untuk memenuhi liabilitas (*liability*). Dalam asuransi, klaim yang terjadi tetapi belum dilaporkan atau IBNR (*Incured But Not Reported*) adalah jumlah hutang perusahaan asuransi kepada semua pengadu yang sah (*valid claimants*) yang memiliki kerugian tertutup namun belum dilaporkan. Klaim IBNR merupakan suatu nilai yang diperkirakan, dimana perusahaan asuransi tidak mengetahui berapa banyak kerugian yang telah terjadi, atau tingkat keparahan setiap kerugian. Klaim IBNR dapat dituliskan sebagai selisih dari kerugian total (*ultimate loss*) dengan kerugian yang terjadi dan telah dilaporkan (*incurred loss*). Selanjutnya, klaim IBNR terdiri dari dua komponen, yaitu IBNR murni dan perkembangan klaim dari IBNER (*Incurred But Not Enough Reported*) atau RBNS (*Reported But Not Settled Yet*). IBNER maupun RBNS bisa diartikan sebagai klaim yang telah terjadi dan telah dilaporkan namun belum terjadi pembayaran dari perusahaan asuransi *insurer* ke pihak *insured*.

Menurut Friedland (2010), pentingnya pencadangan klaim yang akurat dapat ditinjau dari tiga sudut pandang yang berbeda, yaitu: manajemen internal, investor, dan regulator. Dari segi manajemen internal, keakuratan perkiraan cadangan klaim berpengaruh terhadap kebijakan yang akan diambil dalam penentuan *pricing*, *underwriting*, strategi pemasaran dan keputusan keuangan lainnya. Ditinjau dari segi investor, cadangan klaim yang tidak tepat mengakibatkan *key financial metrics* dan catatan pemasukan yang digunakan investor sebagai bahan pertimbangan dalam mengambil keputusan tidak optimal. Selain investor, regulator asuransi juga bergantung pada laporan keuangan dalam mengambil keputusan dan dalam melakukan pengawasan kepada perusahaan asuransi baik milik pemerintah mau-



pun swasta. Jika kondisi kesehatan perusahaan asuransi yang sebenarnya tidak dapat dinilai oleh regulator, maka berakibat regulator terlambat atau bahkan tidak terlibat dalam memberikan bantuan.

Mack (1993), menganalisis besar cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode *Chain-Ladder*. Liu dan Verral (2009) menggunakan teknik bootstrap dengan metode Schnieper (1991) sebagai acuan untuk menentukan estimasi klaim *Reported But Not Settled* (RBNS) dan klaim IBNR, sedangkan Verrall dkk., (2010) memanfaatkan segitiga *run-off* serta model stokastik dengan pendekatan Poisson majemuk untuk mengestimasi jumlah klaim IBNR dan RBNS.

Tipe data yang digunakan dalam memperkirakan cadangan klaim khususnya IBNR pada asuransi *non-life* adalah data agregat. Selanjutnya, data agregat disusun menjadi segitiga *run-off*. Teknik segitiga pada data klaim agregat yang paling sering digunakan oleh aktuaris adalah metode *Chain-Ladder* (Mack, 1993) dan teknik Bornhuetter dan Ferguson (1972). Kelemahan dari Teknik Bornhuetter dan Ferguson adalah hanya bekerja secara optimal ketika digunakan pada data dengan tingkat frekuensi klaim yang rendah dengan masing-masing besar klaim yang dilaporkan bernilai tinggi. Metode *Chain-Ladder* dari tahun ke tahun mengalami perkembangan yang signifikan. Ashab dkk.,(2017) dalam *CAS Tail Factor Working Party* mengulas tentang metode yang dapat digunakan dalam memanipulasi faktor perkembangan. Faktor perkembangan digunakan sebagai pembobot nilai estimasi cadangan klaim IBNR pada segitiga *run-off* bagian bawah. Terdapat berbagai macam metode yang digunakan untuk menentukan *loss development tail factor* (LDTF), diantaranya adalah metode *Bondy-Type*, metode *algebraic*, metode *Benchmark-Based*, metode *Curve-Fitting* dan sebagainya. Terdapat delapan metode yang termasuk kedalam metode *Curve-Fitting*, namun dalam penelitian ini hanya digunakan metode Sherman (Sherman dan Diss, 2016). Metode Sherman dipilih karena fleksibilitasnya dan mudah diterapkan dibandingkan dengan metode lainnya dalam *Curve-Fitting*. Kurva yang akan digunakan sebagai pendekatan terhadap regresi sederhana adalah bentuk log-linear.

Seiring berkembangnya teknologi dan perangkat lunak komputer yang dapat digunakan sebagai alat dalam perhitungan cadangan klaim, maka banyak dikem-



bangkan teknik pencadangan yang bersifat stokastik salah satunya adalah *Generalized Linear Model* (GLM). Model stokastik GLM untuk pencadangan klaim IBNR dikembangkan oleh England dan Verrall (2002). Hartl (2010) memanfaatkan metode GLM untuk menentukan besar estimasi klaim pada segitiga *run-off* yang rumpang atau data yang tidak lengkap. Pendekatan yang digunakan dalam penyelesaian permasalahan tersebut adalah model regresi non linear dan teori graph. Selanjutnya, Björkwall dkk.,(2011) menggunakan model GLM dengan menambahkan efek *smoothing* dalam pencadangan klaim. Dalam perhitungan cadangan klaim IBNR, model GLM sering dipengaruhi oleh distribusi model keluarga eksponensial dispersi atau *Exponential Dispersion Family* (EDF) (McCullagh dan Nelder, 1989). Model EDF sangat sesuai dengan distribusi pada klaim IBNR.

Jørgensen (1997) menyatakan bahwa model EDF dicirikan oleh fungsi variansnya  $V(\mu)$ . Fungsi varians menggambarkan hubungan antara distribusi mean dan varians ketika parameter dispersi  $\phi$  dipertahankan konstan. Taylor dan McGuire (2016) merumuskan jika  $Y$  memiliki distribusi EDF dengan mean  $\mu$  dan fungsi varians  $V(\mu)$ , maka  $Var[Y] = \alpha(\phi)V(\mu)$  dimana  $\phi$  adalah parameter dispersi, dan  $\alpha$  adalah suatu fungsi. Model EDF yang berdampak signifikan adalah yang mean-variannya memiliki hubungan,  $V(\mu) = \mu^p$  untuk suatu nilai  $p$ , yang disebut sebagai model keluarga distribusi Tweedie (Jørgensen, 1997). Model keluarga distribusi Tweedie adalah satu-satunya model eksponensial dispersi yang sifatnya sesuai untuk pemodelan data kontinu tak negatif dengan skala pengukuran yang acak. Keluarga distribusi ini terdiri dari beberapa distribusi seperti distribusi *Over Dispersed Poisson* (ODP), distribusi Gamma, dan distribusi majemuk Poisson-Gamma. Hasil survey dalam Dunn dan Smyth (2005) menunjukkan bahwa model distribusi Tweedie telah digunakan dalam berbagai bidang termasuk meteorologi, aktuaria, studi tentang hasil konsumsi suatu barang, dan sebagainya. Pada tahun 2016, Wüthrich memanfaatkan distribusi majemuk Poisson-Gamma untuk menentukan cadangan klaim dengan menggunakan metode GLM. Perhitungan menggunakan beberapa distribusi diharapkan mampu menjadi gambaran bagi aktuaris dalam menentukan metode yang paling sesuai untuk pencadangan suatu kelompok data pada asuransi *non-life*.



Keunggulan metode Mack's *Chain-Ladder* (MCL) dan metode GLM adalah dapat digunakan sebagai sarana dalam menganalisis performa hasil pencadangan klaim IBNR, karena *output* dari metode tersebut menyajikan informasi tentang *Mean Squared Error* (MSE). Berdasarkan uraian sebelumnya, pada penelitian ini akan dilakukan estimasi cadangan klaim IBNR menggunakan beberapa metode berbeda, diantaranya adalah metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman *curve-fitting*, metode MCL, dan metode *Generalized Linear Models* (GLM) dengan pendekatan distribusi keluarga Tweedie. Selanjutnya, hasil yang didapat akan dianalisis berdasarkan informasi yang tersedia.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimanakah estimasi cadangan klaim IBNR menggunakan metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman *curve-fitting* ?
2. Bagaimanakah estimasi cadangan klaim IBNR menggunakan metode MCL?
3. Bagaimanakah estimasi cadangan klaim IBNR menggunakan metode GLM dengan pendekatan distribusi keluarga Tweedie?
4. Bagaimanakah analisis performa pencadangan klaim IBNR yang diestimasi dengan menggunakan metode Mack's dan metode GLM?

## 1.3 Batasan Masalah

Dalam perhitungan cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM, distribusi yang digunakan yaitu: distribusi ODP (*Over Dispersed*) Poisson, distribusi Gamma, dan distribusi *majemuk Poisson-Gamma*.





#### 1.4 Asumsi

Terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi dalam perhitungan cadangan klaim IBNR, di antaranya adalah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan dalam estimasi cadangan klaim IBNR adalah bentuk segitiga.
2. Klaim untuk setiap *accident period* dan *development period* saling independen.
3. Klaim *Incremental* bernilai tak negatif.

#### 1.5 Tujuan

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah:

1. Mengestimasi cadangan klaim IBNR menggunakan metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman *curve-fitting*.
2. Mengestimasi cadangan klaim IBNR menggunakan metode MCL.
3. Mengestimasi cadangan klaim IBNR menggunakan metode GLM dengan pendekatan distribusi keluarga Tweedie.
4. Menganalisis performa pencadangan klaim IBNR yang diestimasi dengan menggunakan metode Mack's dan metode GLM?

#### 1.6 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat:

1. Sebagai masukan kepada pihak yang bertanggung jawab pada perusahaan asuransi *non-life* dalam melakukan perhitungan cadangan klaim.
2. Menambah wawasan mengenai aplikasi statistika dalam penerapan metode *Chain-Ladder*, metode MCL metode GLM di bidang aktuaria dan asuransi.



## BAB 2

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Cadangan Klaim

Pencadangan klaim merupakan suatu proses dalam memperkirakan besar dana yang disiapkan oleh perusahaan asuransi untuk memenuhi liabilitas (*liability*). Dalam asuransi, liabilitas diartikan sebagai hutang yang harus dilunasi atau pelayanan yang harus dilakukan di masa yang akan datang pada pihak lain. Akurasi dalam perkiraan klaim yang belum dibayar sangat penting bagi perusahaan asuransi. Terdapat beberapa kemungkinan yang terjadi untuk beberapa kejadian yang diasuransikan, perusahaan asuransi dapat menghitung biaya ganti rugi yang tepat secara cepat dengan tingkat akurasi yang tinggi, atau perusahaan asuransi mungkin tidak mengetahui biaya ganti rugi selama bertahun-tahun bahkan hingga beberapa dekade akan tetapi perusahaan asuransi harus melaporkan hasil keuangannya secara teratur. Hal tersebut mengakibatkan perusahaan asuransi harus memperhitungkan estimasi cadangan klaim. Pentingnya estimasi cadangan klaim dapat ditinjau dari tiga sisi yang berbeda, yaitu:

- Manajemen Internal (*Internal management*)

Dari segi internal manajemen, keakuratan perkiraan cadangan klaim berpengaruh terhadap kebijakan yang akan diambil dalam penentuan *pricing*, *underwriting*, strategi pemasaran dan keputusan keuangan. Perkiraan cadangan klaim yang tidak akurat mempengaruhi kondisi finansial perusahaan asuransi. Contohnya, jika perkiraan cadangan klaim terlalu rendah maka harga produk yang ditawarkan kepada klien lebih rendah dibandingkan dengan harga produk dari perusahaan asuransi lain, sehingga mengakibatkan nilai jual produk tersebut meningkat. Jika kondisi ini berlangsung secara terus-menerus berakibat perusahaan asuransi tidak dapat membayar klaim yang masuk di masa mendatang, pada akhirnya kondisi ini mengarah pada situasi



solvabilitas dari perusahaan asuransi berada dalam kondisi risiko. Berlaku sebaliknya, jika cadangan klaim yang terlalu tinggi berakibat pada naiknya harga produk asuransi, sehingga menurunkan pangsa pasar yang mengakibatkan pendapatan premi perusahaan asuransi menurun.

- Investor (*Investors*)

Ditinjau dari segi investor, cadangan klaim yang tidak tepat mengakibatkan *key financial metrics* dan catatan pemasukan yang digunakan investor sebagai bahan pertimbangan dalam mengambil keputusan tidak optimal. Kondisi keuangan dari perusahaan asuransi atau penanggung (*insurer*) dilihat dari jumlah cadangan klaimnya. Jika jumlah cadangan klaim kecil berarti kondisi *insurer* berada dalam keadaan stabil. Oleh karena cadangan klaim yang tidak akurat ada kemungkinan kondisi ini sebenarnya tidak seperti yang gambarkan dari laporan keuangan.

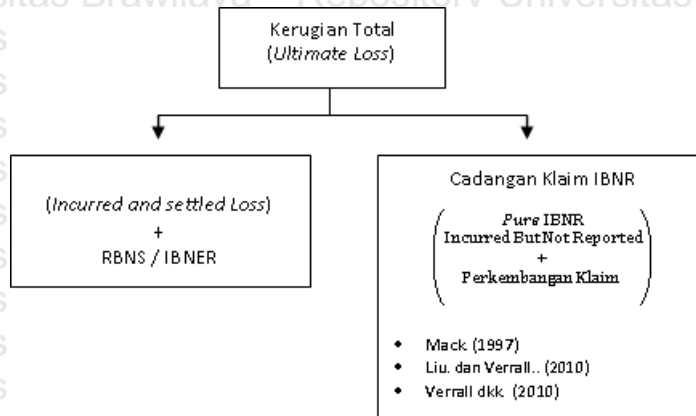
- Regulator / pengawas industri asuransi (*Regulators*)

Regulator asuransi juga bergantung pada laporan keuangan dalam mengambil keputusan dan melakukan pengawasan kepada perusahaan asuransi baik milik pemerintah maupun swasta. Jika kondisi kesehatan perusahaan asuransi yang sebenarnya tidak dapat dinilai oleh regulator mengakibatkan regulator terlambat atau bahkan tidak terlibat dalam memberikan bantuan.

(Friedland, 2010)

## 2.2 Klaim IBNR (*Incurred But Not Reported*)

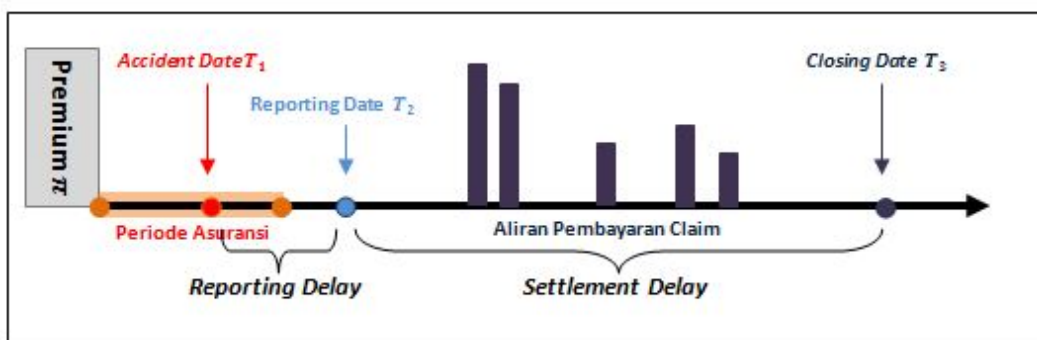
Dalam asuransi, klaim yang terjadi tetapi belum dilaporkan atau IBNR (*Incurred But Not Reported*) adalah jumlah hutang perusahaan asuransi kepada semua pengadu yang sah (*valid claimants*) yang memiliki kerugian tertutup namun belum dilaporkan (Casualty Actuarial Society, 2017). Klaim IBNR merupakan suatu nilai yang diperkirakan karena perusahaan asuransi tidak mengetahui berapa banyak kerugian yang telah terjadi, atau tingkat keparahan setiap kerugian.



Gambar 2.1: Klaim IBNR

Gambar 2.1 menjelaskan bahwa klaim IBNR merupakan selisih dari kerugian total (*ultimate loss*) dengan jumlah dari kerugian yang terjadi serta telah dilaporkan (*incurred and settled loss*) dan klaim IBNER (*Incurred But Not Enough Reported*) atau RBNS (*Reported But Not Settled Yet*). IBNER maupun RBNS bisa diartikan sebagai klaim yang telah terjadi dan telah dilaporkan namun belum terjadi pembayaran dari *insurer* (perusahaan asuransi) ke pihak *insured*. Selanjutnya klaim IBNR terdiri dari dua komponen, yaitu IBNR murni dan perkembangan klaim dari IBNER atau RBNS.

Pihak yang bertanggung jawab dalam penentuan nominal premi dan penentuan nominal cadangan klaim adalah aktuaris.



Gambar 2.2: Proses Klaim Individu pada Asuransi *Non-Life*

Gambar 2.2 adalah proses perkembangan klaim individu asuransi *non-life*. Premi asuransi dibayarkan oleh pemegang polis selama periode asuransi. Sebagian besar tanggal terjadinya kecelakaan (*accident date*) pada asuransi *non-life* tidak

bertepatan dengan tanggal pelaporannya (*reporting date*).

Jika  $T_1$  merupakan *accident date* dan  $T_2$  adalah *reporting date* dengan  $T_2 > T_1$ , maka perbedaan waktu antara  $T_1$  dan  $T_2$  disebut dengan *reporting delay*  $[T_1, T_2]$ . *Reporting delay* dapat terjadi karena pihak *insured* terlambat dalam melaporkan kejadian kecelakaan, selain itu *insurer* membutuhkan waktu untuk menaksir jumlah kerugian sebenarnya dari klaim yang dilaporkan. Setelah proses pelaporan klaim, proses selanjutnya yaitu pembayaran klaim. Pembayaran klaim dianggap selesai pada waktu  $T_3$  (*closing date*) jika seluruh tanggungan klaim telah dibayarkan dengan  $T_3 > T_2$ . Perbedaan waktu antara  $T_3$  dan  $T_2$  disebut *settlement delay*. Selama periode  $[T_2, T_3]$  terdapat kemungkinan perusahaan asuransi mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan klaim, sehingga proses pembayaran klaim dalam kurun waktu  $[T_2, T_3]$  merupakan proses kontinu (*continuous time process*). RBNS (*Reported But Not Settled*) adalah klaim yang dilaporkan pemegang polis atau pihak *insured* kepada *insurer* namun proses pembayaran belum terselesaikan  $[T_2, T_3]$ , sedangkan IBNR (*Incurred But Not Reported*) adalah klaim yang belum dilaporkan  $[T_1, T_2]$ .

Contoh klaim IBNR adalah pada asuransi kendaraan bermotor. Perusahaan asuransi kendaraan bermotor membutuhkan waktu lama untuk menentukan jumlah dana yang akan dibayarkan ke pihak *insured*, bahkan pembayaran dapat dilakukan beberapa tahun setelah kontrak berakhir. Perusahaan asuransi wajib memiliki perkiraan cadangan klaim agar dapat memenuhi liabilitas yang belum diketahui jumlahnya secara pasti.

(Tee (2017), Wüthrich (2016))

### 2.3 Segitiga *Run-Off*

Segitiga *Run-Off* atau sering juga disebut sebagai *development triangle* adalah tabel yang menunjukkan perubahan nilai berbagai kohort dari waktu ke waktu. Misalnya, tabel yang merangkum bagaimana jumlah kumulatif yang dibayar oleh asuransi perusahaan (nilai) untuk klaim yang timbul dari kecelakaan mobil yang terjadi selama tahun 2006, 2007, dan 2008.



Tabel 2.1: Perhitungan Akhir Tahun Klaim yang Dibayar

Accident Period	Klaim yang Dibayar (\$ US Billions)		
	Akhir th. 2006	Akhir th. 2007	Akhir th. 2008
2006	100	150	170
2007		110	161
2008			115

Pada Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa klaim yang dibayarkan oleh perusahaan asuransi pada tahun kecelakaan 2006 sampai akhir tahun 2006 adalah \$100 miliar, dan meningkat sampai akhir tahun 2007 menjadi \$ 150 miliar; perubahan dari \$100 miliar menjadi \$ 150 miliar adalah pengembangan. Namun akan lebih mudah bagi aktuaris untuk memberikan penilaian dengan melihat lama periode dari kohort dibandingkan dari tanggal perhitungan kohort. Tabel 2.1 dimodifikasi untuk menggambarkan perkembangan kohort jika ditinjau dari lama periode.

Tabel 2.2: Perhitungan Klaim yang Dibayar Ditinjau dari Durasi Kohort

Accident Period	Klaim yang Dibayar (\$ US Billions)		
	12 bulan	24 bulan	36 bulan
2006	100	150	170
2007	110	161	
2008	115		

Kedua pendekatan di atas menghasilkan data dalam bentuk segitiga. Namun pada Tabel 2.2 dapat dengan mudah dilihat perubahan volume (atau skala) kohort dari suatu *accident period* ke *accident period* selanjutnya, serta perubahan nilai dari pembayaran kumulatif pada suatu *accident period* dari waktu ke waktu.

Dengan menggunakan segitiga *run-off*, aktuaris dapat mengetahui nilai klaim yang telah dibayarkan ke pihak insured, nilai klaim yang telah dilaporkan namun belum dibayarkan, cadangan klaim, dan jumlah klaim yang telah dilaporkan. Segitiga *Run-Off* adalah alat yang paling sering digunakan oleh aktuaris untuk mengorgani-



sasikan data dengan tujuan untuk menganalisis pola data, selain itu juga digunakan untuk mengukur perkembangan data.

Segitiga *Run-off* memuat gambaran klaim keseluruhan (*aggregate*) berdasarkan *accident period* dan *development period*, serta merupakan ringkasan dari suatu dataset klaim-klaim individu. Periode yang digunakan dalam segitiga *run-off* bervariasi tergantung kebutuhan perusahaan, seperti periode tahunan, kuartalan, ataupun bulanan. Data yang ada dalam segitiga *run-off* sering kali merupakan salah satu dari dua kemungkinan berikut, yaitu besarnya klaim (*claims amount*) atau banyaknya klaim (*number of claim*). Dalam penelitian ini, data yang digunakan menggambarkan besarnya klaim (*claims amount*).

### 2.3.1 Segitiga *Run-Off* Klaim *Incremental*

Misalkan  $S_{i,k}(i,k) \in 1,2,\dots,I$ , merupakan variabel acak yang menyatakan besarnya klaim (*claim ammount*) pada *accident period*  $i$  dan dibayarkan pada *development period*  $k$  di mana  $1 \leq i \leq I$  dan  $1 \leq k \leq I$ . Diasumsikan bahwa klaim *incremental*  $S_{i,k}$  adalah klaim yang dapat diobservasi untuk *calender period*  $i+k \leq I+1$  dan untuk klaim yang tidak dapat diobservasi untuk *calender period*  $i+k \geq I$ .

Tabel 2.3: Segitiga *Run-Off Incremental*

<b>Accident Period</b>	<b>Development Period</b>						
	1	2	...	$k$	...	$I-1$	$I$
1	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,I-1}$	$S_{1,I}$
2	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$	...	$S_{2,k}$	...	$S_{2,I-1}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$i$	$S_{i,1}$	$S_{i,2}$	...	$S_{i,k}$			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
$I-1$	$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$					
$I$	$S_{I-1,1}$						

Sebagai contoh  $S_{1,7}$  adalah peubah acak yang menyatakan besar klaim yang terjadi pada *accident period* 1 dan dibayarkan pada *development period* ke-7.



### 2.3.2 Segitiga *Run-Off* Klaim Kumulatif

Segitiga *Run-Off* dalam bentuk kumulatif, dapat disusun berdasarkan *incremental*. Misalkan  $C_{i,k}$   $i, k \in 1, 2, \dots, I$  adalah variabel acak yang menyatakan besarnya klaim kumulatif pada *accident period*  $i$  dan dibayarkan *maximal* pada *development period*  $k$  dengan  $1 \leq i \leq I$  dan  $1 \leq k \leq I$ .  $C_{i,I}$  adalah klaim kumulatif *ultimate*.

Diasumsikan bahwa klaim kumulatif  $C_{i,k}$  adalah klaim yang dapat diobservasi untuk *calender period*  $i + k \leq I + 1$  dan untuk klaim yang tidak dapat diobservasi untuk *calender period*  $i + k \geq I$ .

Tabel 2.4: Segitiga *Run-Off* Kumulatif

<b>Accident Period</b>	<b>Development Period</b>						
	1	2	...	$k$	...	$I-1$	$I$
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,k}$	...	$C_{1,I-1}$	$C_{1,I}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,k}$	...	$C_{2,I-1}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$i$	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	...	$C_{i,k}$	...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$I-1$	$C_{I-1,1}$	$C_{I-1,2}$					
$I$	$C_{I-1,1}$						

Hubungan antara klaim *incremental*  $S_{i,k}$  dan klaim kumulatif  $C_{i,k}$  adalah sebagai berikut

$$C_{1,1} = S_{1,1}$$

$$C_{1,2} = S_{1,1} + S_{1,2}$$

$$C_{1,k} = S_{1,1} + S_{1,2} + S_{1,3} + \dots + S_{1,k}$$

$$C_{i,k} = \sum_{n=1}^k S_{i,n} \tag{2.1}$$

(Friedland, 2010)





## 2.4 Peluang dan Ekspektasi

Pembahasan pada sub-bab 2.4 disarikan dari DeGroot dan Schervish (2012).

### 2.4.1 Ekspektasi Satu Pebah Acak

#### Definisi 2.1: Nilai Ekspektasi Diskrit

Jika  $X$  adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi kepadatan peluangnya FKP di  $x$  adalah  $p_X(x)$  dan  $u(X)$  adalah fungsi dari  $X$ , maka nilai ekspektasi dari  $u(X)$  dinotasikan dengan  $E[u(X)]$ , didefinisikan sebagai:

$$E[u(X)] = \sum_x u(x) \cdot p_X(x)$$

#### Sifat-Sifat Nilai Ekspektasi Satu Pebah Acak

1. Jika  $c$  adalah suatu konstanta, maka  $E(c) = c$

*Bukti*

$$E(c) = \sum_x c \cdot p_X(x)$$

$$= c \cdot \sum_x p_X(x)$$

$$= c \cdot (1)$$

$$E(c) = c$$

2. Jika  $c$  adalah suatu konstanta dan  $u(X)$  adalah fungsi dari  $X$ , maka:

$$E[c \cdot u(X)] = c \cdot E[u(X)]$$

*Bukti*

$$E[c \cdot u(X)] = \sum_x c \cdot p_X(x) \cdot u(x)$$

$$= c \sum_x p_X(x) \cdot u(x)$$

$$E[c \cdot u(X)] = c \cdot E[u(X)].$$

3. Jika  $c_1$  dan  $c_2$  adalah dua buah konstanta dan  $u_1(X)$  dan  $u_2(X)$  adalah dua buah fungsi dari  $X$  serta  $p_X(x)$  adalah fungsi kepadatan peluangnya di  $x$ , ma-



ka:

$$E[c_1 \cdot u_1(X) + c_2 \cdot u_2(X)] = c_1 \cdot E[u_1(X)] + c_2 \cdot E[u_2(X)]$$

**Bukti**

$$\begin{aligned} E[c_1 \cdot u_1(X) + c_2 \cdot u_2(X)] &= \sum_x [c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x)] \cdot p_X(x) \\ &= \sum_x c_1 \cdot u_1(x) \cdot p_X(x) + \sum_x c_2 \cdot u_2(x) \cdot p_X(x) \\ &= c_1 \sum_x u_1(x) \cdot p_X(x) + c_2 \sum_x u_2(x) \cdot p_X(x) \\ E[c_1 \cdot u_1(X) + c_2 \cdot u_2(X)] &= c_1 \cdot E[u_1(X)] + c_2 \cdot E[u_2(X)] \end{aligned}$$

### Definisi 2.2: Rataan Diskrit

Jika  $X$  adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluang dari  $X$  di  $x$  adalah  $p_X(x)$ , maka rata-rata dari peubah acak  $X$  didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \sum_x x \cdot p_X(x)$$

$$E(X) = \mu.$$

Rataan dari suatu peubah acak, baik diskrit maupun kontinu biasanya dinotasikan dengan  $\mu$ .  $E(X) = \mu$ ,  $\mu$  adalah rata-rata dari peubah acak  $X$ . Nilai rata-rata dari suatu peubah acak tidak selalu ada, artinya nilai rata-rata tersebut bisa mempunyai nilai dan bisa juga tidak mempunyai nilai. Nilai rata-rata dari peubah acak itu ada, jika hasil penjumlahan atau pengintegralannya ada. Sebaliknya, nilai rata-rata dari suatu peubah acak itu tidak ada, jika hasil penjumlahannya atau pengintegralannya tidak ada. Ekspektasi suatu peubah acak adalah nilai rata-rata (*long-run average value*) dari percobaan bebas yang berulang.

### Varians

#### Definisi 2.3: Varians

Misalnya  $X$  adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Varians dari  $X$  dide-



finisikan sebagai:

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2$$

atau

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2.$$

Varians dari peubah acak  $X$  sering dinotasikan dengan  $\sigma_x^2$ . Akar pangkat dua yang positif dari varians disebut simpangan baku dari peubah acak  $X$  dan dinotasikan dengan  $\sigma_x$ . Secara umum varians dan simpangan baku dinotasikan sebagai  $\sigma^2$  dan  $\sigma$ .

#### Definisi 2.4: Varians Diskrit

Jika  $X$  adalah peubah acak diskrit dan  $p_X(x)$  adalah nilai fungsi kepadatan peluang dari  $X$  di  $x$ , maka varians dari  $X$  didefinisikan sebagai:

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot p_X(x).$$

#### Sifat-sifat Varians Satu Peubah Acak

1. Jika  $c$  adalah suatu konstanta, maka

$$\text{Var}(c) = 0.$$

*Bukti*

Berdasarkan definisi varians, maka:

$$\begin{aligned} \text{Var}(c) &= E[c - E(c)]^2 \\ &= E(c - c)^2 \\ &= E(0) \end{aligned}$$

$$\text{Var}(c) = 0$$

2. Jika  $X$  adalah peubah acak dan  $c$  adalah suatu konstanta, maka:

$$\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$$



*Bukti*

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+c) &= E[(X+c) - E(C+c)]^2 \\ &= E[X+c - E(X) - E(c)]^2 \\ &= E[X+c - E(X) - c]^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X+c) = \text{Var}(X).$$

3. Jika  $a$  dan  $b$  adalah dua buah konstanta dan  $X$  adalah peubah acak, maka:

$$\text{Var}(aX+b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

*Bukti*

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX+b) &= E[(aX+b) - E(aX+b)]^2 \\ &= E[aX+b - E(aX) - E(b)]^2 \\ &= E[aX+b - a \cdot E(X) - b]^2 \\ &= E[aX - a \cdot E(X)]^2 \\ &= a^2 \cdot E[X - E(X)]^2 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(aX+b) = a^2 \cdot \text{Var}(X).$$

4. Jika  $X$  adalah peubah acak, maka:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

*Bukti*

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2XE(E) + (E(X))^2] \\ &= E(X)^2 - 2E(X)E(E) + (E(X))^2 \\ &= E(X)^2 - (E(X))^2. \end{aligned}$$

5. Jika  $a$  adalah suatu konstanta dan  $X$  adalah peubah acak, maka:

$$\text{Var}(X) = E[((X-a) - E(X-a))]^2.$$



Dengan memanfaatkan sifat keempat pada point sifat-sifat varians satu peubah acak serta mensubstitusi variabel acak  $X$  dengan  $X - a$ , bukti dari sisi kanan ke sisi kiri adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 E[((X - a) - E(X - a))^2] &= E[(X - a)^2 - (E(X - a))^2] \\
 &= E[(X - a)(X - a) - [(E(X - a))(E(X - a))]] \\
 &= E(X^2 - 2aX + a^2) - [(E(X) - a)(E(X) - a)] \\
 &= E(X^2 - 2aX + a^2) - [(E(X)^2) - 2a(E(X)) + a^2] \\
 &= E(X)^2 - 2a(E(X)) + a^2 - (E(X))^2 + 2a(E(X)) - a^2 \\
 &= E(X)^2 - (E(X))^2 \\
 &= \text{Var}(X)
 \end{aligned}$$

6. Jika  $a, b$  adalah suatu konstanta sebarang dan  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak diskrit, maka berlaku  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ .

#### 2.4.2 Ekspektasi Dua Peubah Acak

Pembahasan pada sub bab ini, disarikan dari DeGroot dan Schervish (2012).

##### Definisi 2.5: Nilai Ekspektasi Gabungan Diskrit

Jika  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak diskrit,  $p(x, y)$  adalah nilai fungsi peluang gabungan dari  $(X, Y)$  di  $(x, y)$ , dan  $v(X, Y)$  adalah fungsi dari peubah acak  $X$  dan  $Y$ ; maka nilai ekspektasi gabungan dari  $v(X, Y)$  yang dinotasikan dengan  $E[v(X, Y)]$  dirumuskan sebagai:

$$E[v(X, Y)] = \sum_x \sum_y v(x, y) \cdot p(x, y)$$

##### Definisi 2.6: Ekspektasi Bersyarat Diskrit

Jika  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak diskrit,  $p_{X|Y=y}(x|y)$  adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari  $X$  diberikan  $Y = y$  di  $x$ , dan  $p_{Y|X=x}(y|x)$  adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X = x$  di  $y$ , maka ekspektasi bersyarat dari  $u(X)$  diberikan  $Y = y$  dirumuskan sebagai berikut.

$$E[u(X)|y] = \sum_x u(x) \cdot p_{X|Y=y}(x|y),$$



dan ekspektasi bersyarat dari  $v(Y)$  diberikan oleh  $X = x$  dirumuskan sebagai berikut.

$$E[v(Y)|x] = \sum_y v(y) \cdot p_{Y|X=x}(y|x).$$

### Definisi 2.7: Rataan Bersyarat Diskrit

Jika  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak diskrit,  $p_{X|Y=y}(x|y)$  adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari  $X$  diberikan  $Y = y$  di  $x$ , dan  $p_{Y|X=x}(y|x)$  adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X = x$  di  $y$ , maka ekspektasi bersyarat dari  $X$  diberikan  $Y = y$  dirumuskan sebagai berikut.

$$E(X|y) = \sum_x x \cdot p_{X|Y=y}(x|y),$$

dan ekspektasi bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X = x$  dirumuskan sebagai berikut.

$$E(Y|x) = \sum_y y \cdot p_{Y|X=x}(y|x).$$

### Proposisi 2.1

Fungsi peluang bersama  $p_{X,Y}$  memenuhi sifat-sifat berikut:

1.  $p_{X,Y}(x,y) \geq 0, \forall (x,y).$
2.  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p_{X,Y}(x,y) \neq 0$  terhitung.
3.  $\sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) = 1.$

### Proposisi 2.2

Misalkan  $X$  dan  $Y$  peubah acak diskrit yang didefinisikan pada ruang sampel yang sama, maka

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y), x \in \mathbb{R}$$

dan

$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y), y \in \mathbb{R}$$

adalah fungsi peluang marginal dari  $X$  dan fungsi peluang marginal dari  $Y$ .

### Proposisi 2.3

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:



$$1. E(X|Y = y) = E(X).$$

*Bukti*

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= \sum_x x \cdot p_{X|Y=y}(x|y) \\ &= \sum_x x \cdot \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \\ &= \sum_x x \cdot \frac{p_X(x) \cdot p_Y(y)}{p_Y(y)}, \text{ (karena } X \text{ dan } Y \text{ saling bebas)} \\ &= \sum_x x \cdot p_X(x) \\ E(X|Y = y) &= E(X) \end{aligned}$$

$$2. E(Y|X = x) = E(Y).$$

*Bukti*

$$\begin{aligned} E(Y|X = x) &= \sum_y y \cdot p_{Y|X=x}(y|x) \\ &= \sum_y y \cdot \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \\ &= \sum_y y \cdot \frac{p_X(x) \cdot p_Y(y)}{p_X(x)}, \text{ karena } X \text{ dan } Y \text{ saling bebas} \\ &= \sum_y y \cdot p_Y(y) \\ E(Y|X = x) &= E(Y). \end{aligned}$$

#### Proposisi 2.4

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak diskrit dengan fungsi peluang bersama  $p_{X,Y}(x,y)$  maka  $E[E(X|Y)] = E(X)$ .

*Bukti* dari kiri ke kanan LHS



$$\begin{aligned}
 E[E(X|Y)] &= \sum_{y \in \mathbb{R}_y} E(X|Y=y)p_Y(y) \\
 &= \sum_{y \in \mathbb{R}_y} \sum_{x \in \mathbb{R}_x} xp_{X|Y=y}(x|y)p_Y(y) \\
 &= \sum_{y \in \mathbb{R}_y} \sum_{x \in \mathbb{R}_x} xp_{X,Y}(x,y) \\
 &= \sum_{y \in \mathbb{R}_y} \sum_{x \in \mathbb{R}_x} xp_{X,Y}(x,y) \\
 &= \sum_{x \in \mathbb{R}_x} x \sum_{y \in \mathbb{R}_y} p_{X,Y}(x,y) \\
 &= \sum_{x \in \mathbb{R}_x} xp_X(x) \\
 &= E(X).
 \end{aligned}$$

### Definisi 2.8: Varians Bersyarat Umum

Jika  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak (kontinu atau diskrit) dengan fungsi peluang bersama  $f_{X,Y}(x,y)$ . Jika  $f_Y(y) > 0$  maka varians  $X$  dengan syarat  $Y=y$  adalah

$$Var(X|Y=y) = E[(X - E(X|Y=y))^2|Y=y]$$

atau

$$Var(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - [E(X|Y=y)]^2$$

dan varians bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X=x$  didefinisikan sebagai:

$$Var(Y|X=x) = E[(Y - E(Y|X=x))^2|X=x]$$

atau

$$Var(Y|X=x) = E(Y^2|X=x) - [E(Y|X=x)]^2.$$

### Definisi 2.9: Varians Bersyarat Diskrit

Jika  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak diskrit,  $p_X(x|y)$  adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari  $X$  diberikan  $Y=y$  di  $x$ , dan  $p_Y(y|x)$  adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X=x$  di  $y$ , maka varians bersyarat dari  $X$  diberikan  $Y=y$





dirumuskan sebagai:

$$\text{Var}(X|Y=y) = \sum_x [x - E(X|y)]^2 \cdot p_X(x|y)$$

dan varians bersyarat dari  $Y = x$  dirumuskan sebagai:

$$\text{Var}(Y|x) = \sum_y [y - E(Y|x)]^2 \cdot p_Y(y|x).$$

### Proposisi 2.5

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak (kontinu atau diskrit) maka varians bersyarat dari  $X$  diberikan  $Y = y$  didefinisikan sebagai:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(E[X|Y=y]) + E[\text{Var}(X|Y=y)] \quad (2.2)$$

*Bukti*

Dengan menggunakan persamaan (2.2) dan  $E[E[X^2|Y]] = E[X^2]$ , maka bukti dari kanan ke kiri dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Leftarrow \text{Var}(E[X|Y]) + E[\text{Var}(X|Y)] &= E[E[X|Y]] - E[E[X|Y]]^2 + E[E[X^2|Y]] - [E[X|Y]]^2 \\ &= E[E[X|Y]]^2 - [E[E[X|Y]]]^2 + E[E[X^2|Y]] - [E[X|Y]]^2 \\ &= E[E[X|Y]]^2 - [E[E[X|Y]]]^2 + E[E[X^2|Y]] - E[E[X|Y]]^2 \\ &= E[E[X^2|Y]] - [E[E[X|Y]]]^2 \\ &= E[X^2] - [E[X]]^2 \\ &= \text{Var}(X), \end{aligned}$$

selanjutnya, dengan menggunakan teknik yang serupa didapatkan pembuktian dari kiri ke kanan sehingga dapat dibuktikan bahwa

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(E[X|Y=y]) + E[\text{Var}(X|Y=y)].$$



### 2.4.3 Kebebasan Stokastik

#### Definisi 2.10: Kebebasan Stokastik Diskrit

Misalnya dua peubah acak diskrit  $X$  dan  $Y$  mempunyai nilai fungsi peluang gabungan di  $(x, y)$ , yaitu  $p_{X,Y}(x, y)$  serta masing-masing mempunyai nilai fungsi peluang marginal dari  $X$  di  $x$ , yaitu  $p_X(x)$  dan nilai fungsi peluang marginal dari  $Y$  di  $y$ , yaitu  $p_Y(y)$ . Kedua peubah acak  $X$  dan  $Y$  dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika:

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

untuk semua pasangan nilai  $(x, y)$ .

Dua peubah acak dikatakan bebas, jika distribusi gabungannya sama dengan perkalian dari distribusi marginal masing-masing peubah acaknya.

#### Proposisi 2.6

Jika  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak yang saling bebas, maka:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

#### Bukti

Pembuktian berdasarkan peubah acak diskrit dengan nilai fungsi kepadatan peluang gabungannya dari  $X$  dan  $Y$  di  $(x, y)$  adalah  $p_{X,Y} = E(X) \cdot E(Y)$ . Berdasarkan definisi nilai ekspektasi gabungan diskrit, maka:

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot p_{X,Y}(x, y).$$

Karena  $X$  dan  $Y$  saling bebas, maka  $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ , yang mengakibatkan:

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$= \sum_x x \cdot p_X(x) \sum_y y \cdot p_Y(y)$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y).$$



## 2.5 Metode Chain-Ladder

Metode *Chain-Ladder* adalah metode dasar yang digunakan aktuaris dalam menentukan cadangan klaim IBNR. Dasar dari metode *Chain-Ladder* adalah klaim kumulatif dalam suatu periode tertentu sebanding dengan klaim pada periode sebelumnya. Berikut ini akan disajikan langkah-langkah estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode *Chain-Ladder*.

1. Tahap awal dalam metode ini adalah menentukan faktor perkembangan yang sering disebut sebagai *link-ratios*. Faktor perkembangan dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}, 1 \leq k \leq I-1. \quad (2.3)$$

2. Langkah selanjutnya yaitu menentukan *loss development tail factors* (LDTF)  $\hat{f}_{tail}$ . *Tail factors* digunakan oleh aktuaris untuk mengestimasi perkembangan klaim IBNR yang terjadi setelah *development period* terakhir pada data yang telah diobservasi dalam segitiga *run-off*. Penentuan LDTF adalah bagian penting dalam teknik pencadangan klaim karena nilai LDTF berdampak terhadap perkembangan klaim pada masing-masing *accident period*. Dalam penelitian ini akan digunakan metode *curve-fitting* dengan pendekatan metode Sherman untuk menentukan LDTF. *Development Period* dianggap sepenuhnya dikembangkan jika nilai  $\hat{f}_k = 1$

Metode *curve-fitting* adalah metode yang digunakan untuk mengembangkan *tail factor* dengan memanfaatkan hubungan antara beberapa faktor perkembangan pada *development period* yang berbeda. Selanjutnya, hasil tersebut digunakan sebagai asumsi regresi dasar untuk menyesuaikan kurva yang telah dipilih sebagai pendekatan, sehingga dapat dibangun suatu proyeksi dari faktor perkembangan pada *development period* yang termuat dalam *tail factor*. Semua estimasi faktor perkembangan yang diproyeksikan kemudian dikalikan untuk mendapatkan perkiraan estimasi *tail factor*. Metode Sherman adalah salah satu metode yang termasuk ke dalam metode



*curve-fitting*. Berikut ini akan disajikan langkah-langkah estimasi *tail factor* berdasarkan metode Sherman.

- (a) Dasar dari metode Sherman adalah menyesuaikan kurva "*inverse power*" dengan bentuk  $1 + ak^b$  di mana  $k$  mempresentasikan *development period* terhadap faktor perkembangan  $\hat{f}_k$  dengan menggunakan persamaan di bawah ini

$$\hat{f}_k = 1 + ak^b$$

$$\hat{f}_k - 1 = 1 + ak^b - 1$$

$$\hat{f}_k - 1 = ak^b$$

$$\ln(\hat{f}_k - 1) = \ln(ak^b)$$

$$\ln(\hat{f}_k - 1) = \ln(a) + b[\ln(k)]$$

$$\ln(\hat{f}_k - 1) = \ln(a) + b[\ln(k)] = \hat{f}_k^* \quad (2.4)$$

dengan,  $1 \leq k \leq I - 1$

$b$  = gradien (*slope*) dari persamaan regresi yang didapat dari hasil ekstrapolasi log-linear,

$a = \exp(\text{intercept})$ .

- (b) Langkah selanjutnya yaitu menentukan *tail factor* dengan menggunakan persamaan sebagai berikut

$$\hat{f}_k^{\text{exp}} = \exp \hat{f}_k^* + 1, \quad (2.5)$$

$$\hat{f}^{\text{tail}} = \prod_{k=I}^{n+I} \hat{f}_k^{\text{exp}}, \quad (2.6)$$

dengan

$I \leq k \leq I + n$ , dan

$1 \leq n \leq 100$ .

$n$  adalah jumlah ekstrapolasi yang diinginkan. Misal ingin mengetahui faktor perkembangan hingga  $k = 56$  maka nilai  $n$  yang diperlukan adalah sebanyak  $k - I + 1$  yaitu  $n = k - I + 1 = 45$ .



(c) Setelah faktor perkembangan dari *development period*  $I$  sampai dengan  $I + n$  diperoleh, langkah berikutnya adalah menentukan batas faktor perkembangan yang diinginkan. Dalam penelitian ini dipilih 1,0001.

(d) Menentukan besar estimasi klaim pada segitiga bawah untuk  $I - i + 1 \leq k \leq I$ .

3. Menentukan besar estimasi klaim *ultimate*  $\hat{C}_i^{ult}$  dengan menggunakan persamaan

$$\hat{C}_i^{ult} = C_{i,I+1-i} \times \hat{f}_{I+1-i} \times \dots \times \hat{f}_{I-i} \times \hat{f}^{tail}. \quad (2.7)$$

4. Total estimasi cadangan klaim untuk setiap *accident period* diberikan oleh persamaan

$$\hat{R}_i^{cl} = \hat{C}_i^{ult} - C_{i,I+1-i}, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (2.8)$$

5. Langkah terakhir yaitu estimasi cadangan klaim total. Cadangan klaim total diberikan oleh persamaan

$$\hat{R}^{cl} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i^{cl}. \quad (2.9)$$

(Ashab (2017), Carrato dkk., (2017), Sherman dan Diss (2013))

## 2.6 Metode Mack's *Chain-Ladder*

Perbedaan mendasar antara metode *Chain-Ladder* dan metode Mack's *Chain-Ladder* adalah aktuaris dapat mengetahui performa hasil pencadangannya karena *standard error* hasil pencadangan dapat diketahui.

Untuk menghitung tingkat kerugian dari klaim disusun suatu model yang merupakan kombinasi dari metode *Chain-Ladder* dan teknik Bornhuetter-Ferguson (1972) disebut sebagai model Schnieper. Selanjutnya, untuk menentukan *standard error* dari cadangan klaim, Schnieper menggunakan pendekatan deret Taylor. Metode Mack's *Chain-Ladder* adalah perluasan dari metode yang dibangun oleh Schnieper (1991), namun terdapat beberapa poin yang ditambahkan yaitu:

1. Model yang dibangun khusus untuk kasus *Chain-Ladder*, sehingga pendekatan dengan deret Taylor dapat digantikan dengan menggunakan pendekatan



yang lebih sesuai dengan kasus pencadangan klaim.

2. Estimasi dari varians proses (*process variance*) termuat dalam *standard error* dari cadangan klaim. Cadangan klaim adalah variabel acak dan bukan suatu parameter.
3. Faktor perkembangan dalam *Chain-Ladder* adalah saling bebas antara satu dengan lainnya dan tidak bias.
4. Disamping *standard error* untuk setiap *accident period*, dengan memanfaatkan hubungan antara estimasi-estimasi pada *development period* disusun suatu formula *standard error* untuk estimasi seluruh cadangan klaim.

Misal  $C_{i,k}$  adalah akumulasi total klaim dari *accident period*  $i$ ,  $1 \leq i \leq I$ , baik yang telah dibayarkan ataupun yang terjadi namun belum dibayarkan hingga *development period*  $k$  dengan  $1 \leq k \leq I$ . Sesuai dengan bentuk segitiga *run-off*,  $C_{i,k}$  dengan  $i+k \leq I+1$  adalah variabel acak yang telah diobservasi. Langkah awal dalam metode Mack's adalah menghitung  $\hat{C}_{i,I}$  dan cadangan klaim.

$$R_i = C_{i,I} - C_{i,I+1-i}$$

untuk *accident period*  $i = 2, \dots, I$ .

Estimasi klaim *ultimate* dalam metode *Chain-Ladder* yang dilambangkan dengan  $\hat{C}_i^{ult}$  dan estimasi klaim *ultimate* dalam metode Mack's *Chain-Ladder* yang dilambangkan dengan  $s\hat{C}_{i,I}$  adalah berbeda.

Asumsi dasar dari metode *Chain-Ladder* adalah terdapat faktor perkembangan (*link ratios*)  $f_1, f_2, \dots, f_{I-1} > 0$  dengan

### 1. Asumsi pertama (1)

$$E(C_{i,k+1} | C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} f_k, 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1.$$

Estimasi faktor perkembangan  $f_k$  pada metode *Chain-Ladder* adalah

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}, 1 \leq k \leq I-1,$$



sedangkan estimasi dari nilai *ultimate*  $C_{i,I}$  dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{C}_{i,I} = C_{i,I+1-i} \times \hat{f}_{I+1-i} \times \dots \times \hat{f}_{I-1}, \quad (2.10)$$

sehingga berakibat  $R_i$  diestimasi dengan menggunakan

$$\hat{R}_i = (C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \times \dots \times \hat{f}_{I-1}) - C_{i,I+1-i} \quad (2.11)$$

$$\hat{R}^{Mack's} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.12)$$

Dikarenakan klaim antar *accident period* pada algoritma *Chain-Ladder* adalah saling bebas, diberikan asumsi tambahan untuk  $C_{i,k}$  pada *accident period* yang berbeda.

## 2. Asumsi kedua (2)

$$\{C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,I}\}, \{C_{j,1}, C_{j,2}, \dots, C_{j,I}\}, i \neq j$$

adalah saling bebas. Asumsi pertama dan asumsi kedua merupakan asumsi tersirat dari metode *Chain-Ladder*, namun terdapat kemungkinan asumsi-asumsi tersebut tidak sesuai jika terdapat *calendar period effect*, sehingga terjadi perubahan besar atau inflasi pada cadangan klaim.

### Teorema 1:

Misal  $D = \{C_{i,k} | i + k \leq I + 1\}$  adalah himpunan dari seluruh data yang telah diobservasi hingga *development period*  $k$  di bawah asumsi (1) dan (2), diperoleh  $E(C_{i,I} | D) = C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1}$ .

### Bukti

Dengan memanfaatkan Proposisi (2.3), Proposisi (2.4), asumsi kedua (2) dan perulangan penggunaan dari asumsi pertama (1) maka diperoleh

$$\begin{aligned} E(C_{i,I} | D) &= E_i(C_{i,I}) \\ &= E_i(E(C_{i,I} | C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,I-i})) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= E_i(C_{i,I-1}f_{I-1}) \\
 &= E_i(C_{i,I-1})f_{I-1} \\
 &= E_i(E(C_{i,I-1}|C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,I-i}))f_{I-1} \\
 &= E_i(C_{i,I-2}f_{I-2})f_{I-1} \\
 &= E_i(C_{i,I-2})f_{I-2} \cdot f_{I-1}
 \end{aligned}$$

dan seterusnya, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &= E_i(C_{i,I+1-i})f_{I+1-i} \cdots f_{I-2} \cdot f_{I-1} \\
 &= C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdots f_{I-2} \cdot f_{I-1}.
 \end{aligned}$$

Dari Teorema 1, dapat disusun suatu lemma untuk  $C_{i,k+j}$  dengan  $i \neq j$  yaitu sebagai berikut.

#### Lemma 1

$$E(C_{i,k+j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} \cdot f_{k+1} \cdot f_{k+2} \cdots f_{k+j-1}.$$

#### Bukti

Dengan menggunakan proposisi (2.4) dan asumsi pertama (1)

$$\begin{aligned}
 E(C_{i,k+j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) &= E(E(C_{i,k+j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k+j-1})|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) \\
 &= E(C_{i,k+j-1} \cdot f_{k+j-1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k+j-1}) \\
 &= E(C_{i,k+j-1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k+j-1}) \cdot f_{k+j-1} \\
 &= E(E(C_{i,k+j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k+j-2})|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) \cdot f_{k+j-1} \\
 &= E(C_{i,k+j-2} \cdot f_{k+j-2}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) \\
 &= E(C_{i,k+j-2}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) \cdot f_{k+j-2} \cdot f_{k+j-1} \\
 &\vdots \\
 &= C_{i,k} \cdot f_{k+1} \cdot f_{k+2} \cdots f_{k+j-1}.
 \end{aligned}$$

Teorema 1 menunjukkan bahwa penduga  $\hat{C}_{i,I}$  memiliki bentuk yang sama dengan  $E(C_{i,I}|D)$  dan merupakan ramalan/dugaan terbaik dari  $C_{i,I}$  (berdasarkan observasi  $D$ ). Teorema selanjutnya menunjukkan bahwa kegiatan estimasi  $f_{I+1-i} \cdots f_{I-1}$  oleh  $\hat{f}_{I-1} = f_{I+1-i} \cdots f_{I-1}$  adalah prosedur yang te-





lah sesuai.

Untuk menunjukkan hal tersebut maka perlu teorema tambahan yang menunjukkan

$$E(\hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdots f_{I-1}$$

### Teorema 2:

Di bawah asumsi (1) dan (2) penduga-penduga  $\hat{f}_k, 1 \leq k \leq I-1$  merupakan penduga tidak bias dan tidak berhubungan (*uncorrelated*) satu dengan yang lainnya.

*Bukti*

Misal

$$B_k = \{C_{i,j} | j \leq k, i+j \leq I+1\}, 1 \leq k \leq I.$$

Dari (2) dan (1) diperoleh,

$$\begin{aligned} E(C_{i,k+1} | B_k) &= E(C_{i,k+1}) \\ &= E(C_{i,k+1} | C_{i,I}, \dots, C_{i,k}) \\ &= E_i(C_{i,k} f_k) \\ E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} | B_k\right) &= f_k. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} E(\hat{f}_k | B_k) &= \frac{\sum_{j=1}^{I-k} E(C_{j,k+1})}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} = f_k, \\ E(\hat{f}_k) &= E(E(\hat{f}_k | B_k)) = f_k, \quad 1 \leq k \leq I-1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dari persamaan (2.14) dapat dilihat bahwa  $\hat{f}_k$  adalah penduga tak bias dari



$f_k$ ,  $\hat{f}_k$  tidak saling berhubungan karena untuk  $j < k$

$$\begin{aligned} E(\hat{f}_j \hat{f}_k) &= E(E(\hat{f}_j \hat{f}_k | B_k)) \\ &= E(\hat{f}_j E(\hat{f}_k | B_k)) \\ &= E(\hat{f}_j) f_k \\ &= E(\hat{f}_j) E(\hat{f}_k). \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa antar penduga  $\hat{f}_k$  tidak saling terkait meskipun  $\hat{f}_{k-1}$  dan  $\hat{f}_k$  bergantung pada data yang sama, yaitu  $C_{1,k} + \dots + C_{I-k,k}$ . Selanjutnya ketidakterkaitan antar penduga dapat dibuktikan dengan menggunakan perkalian dari pasangan penduga  $\hat{f}_k$  acak, sehingga diperoleh

$$E(\hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \dots f_{I-1},$$

dan dapat ditunjukkan bahwa  $\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1}$  adalah penduga tak bias dari  $E(C_{iI} | D) = C_{i,I+1-i} \cdot f_{I+1-i} \dots f_{I-1}$ . Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa  $\hat{R}_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$  adalah penduga tak bias dari besar cadangan sebenarnya  $R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ .

### Perhitungan Mean Squared Error (MSE) dan Standard Error (SE)

Mean squared error atau MSE dari penduga  $C_{iI}$  yang dilambangkan oleh  $mse(\hat{C}_{iI})$  didefinisikan sebagai berikut.

$$mse(\hat{C}_{iI}) = E((\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2 | D)$$

di mana  $D = \{C_{i,k} | i+k \leq I+1\}$  adalah himpunan dari semua data yang telah diobservasi (data yang berada pada segitiga bagian atas di dalam segitiga run-off). Dalam penelitian ini tidak dipergunakan *unconditional mse*

$$E((\hat{C}_{iI})^2) = E(E((\hat{C}_{iI} - C_{iI})^2 | D)),$$

sebagai rata-rata dari semua kemungkinan data  $D$  untuk distribusi yang termuat didalamnya. Bentuk *mse* yang digunakan adalah *conditional mean squ-*



ared error dari nilai estimasi  $\hat{C}_{i,I}$  tertentu yang merupakan anggota dari himpunan di  $D$ . Hal tersebut mengakibatkan  $mse$  yang digunakan berbentuk  $E((\hat{C}_{i,I} - C_{i,I})^2 | D)$  yang akan menghasilkan deviasi rata-rata antara  $\hat{C}_{i,I}$  dan  $C_{i,I}$ .

Pertama, diperoleh

$$mse(\hat{R}_i) = E((\hat{R}_i - R_i)^2 | D) = E((\hat{C}_{i,I} - C_{i,I})^2 | D) = mse(\hat{C}_{i,I}). \quad (2.15)$$

Selanjutnya, dengan memanfaatkan sifat-sifat ekspektasi yang telah dijabarkan pada subbab sebelumnya didapat

$$E(X - a)^2 = Var(X) + (E(X) - a)^2.$$

Substitusi variabel acak  $X$  dengan  $C_{i,I} | D$  dan  $a$  dengan  $\hat{C}_{i,I}$ , maka diperoleh

$$mse(\hat{C}_{i,I}) = Var(C_{i,I} | D) + (E(C_{i,I} | D) - \hat{C}_{i,I})^2. \quad (2.16)$$

persamaan (2.16) menunjukkan bahwa *mean squared error* adalah jumlah dari error stokastik atau sering disebut sebagai varians proses (*process variance*) dan estimasi *error*.

Dalam perhitungan MSE (*Mean Squared Error*), dibutuhkan formula varians dari  $C_{i,k}$ . Diketahui bahwa  $\hat{f}_k$  adalah rata-rata  $C_{i,k}$  - *weighted* dari faktor perkembangan individual  $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$ ,  $1 \leq i \leq I - k$ , sehingga  $Var(C_{i,k+1}/C_{i,k} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k})$  harus berbanding terbalik terhadap  $C_{i,k}$  atau sama dengan

### 3. Asumsi ketiga (3)

$$Var(C_{i,k+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} \sigma_k^2, 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I - 1$$

parameter  $\sigma_k^2$  merupakan asumsi varians yang secara tersirat mendasari metode *Chain-Ladder*.



Seperti halnya  $\hat{f}_{i,k}$ , diperlukan penduga untuk  $\sigma_k^2$ .

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k} \left( \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2, 1 \leq k \leq I-2 \quad (2.17)$$

adalah penduga tak bias dari  $\sigma_k^2$ . Jika  $\hat{f}_{I-1} = 1$  dan jika perkembangan klaim diperkirakan akan berakhir setelah tahun ke  $I-1$ , maka dapat dituliskan sebagai  $\hat{\sigma}_{I-1} = 0$ . Jika tidak, maka berlaku deret eksponensial menurun  $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{I-1}, \hat{\sigma}_{I-2}$  diekstrapolasi dengan menambahkan satu anggota tambahan, sebagai contohnya dengan menggunakan regresi loglinear atau agar lebih sederhana yaitu dengan menggunakan

$$\frac{\hat{\sigma}_{I-3}}{\hat{\sigma}_{I-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{I-2}}{\hat{\sigma}_{I-1}}$$

terpenuhi selama  $\hat{\sigma}_{I-3} > \hat{\sigma}_{I-2}$ .

Kemungkinan terakhir ini mengarah pada

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min \left( \frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \min \left( \hat{\sigma}_{I-3}^2, \hat{\sigma}_{I-2}^2 \right) \right)$$

### Teorema 3

Di bawah asumsi (1), (2) dan (3),  $mse(\hat{R}_i)$  dapat diestimasi dengan menggunakan

$$\widehat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,I}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \right) \quad (2.18)$$

di mana  $\hat{C}_{i,k} = C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{k-1}$ ,  $k > I+1-i$  adalah nilai penduga untuk  $C_{i,k}$

dan  $\hat{C}_{i,I+1-i} = C_{i,I+1-i}$ .

**Bukti**

Dengan memanfaatkan

$$E_i(X) = E(X|C_{i,I}, \dots, C_{i,I+1-i})$$

$$Var_i(X) = Var(X|C_{i,I}, \dots, C_{i,I+1-i})$$



serta diawali dari,

$$mse(\hat{R}_i) = Var_i(C_{i,I}|D) + (E(C_{i,I}|D) - \hat{C}_{i,I})^2.$$

Selanjutnya, dengan memanfaatkan asumsi *Chain-Ladder* pertama (1) dan asumsi ketiga (3) tentang varians di atas diperoleh bentuk pertama dari  $mse(\hat{R}_i)$

$$\begin{aligned} Var(C_{i,I}|D) &= Var_i(C_{i,I}) \\ &= E_i(Var(C_{i,I}|C_{i,I}, \dots, C_{i,I-1})) \\ &\quad + Var_i(E(C_{i,I}|C_{i,I}, \dots, C_{i,I-1})) \\ &= E_i(C_{i,I-1}\sigma_{I-1}^2 + Var_i(C_{i,I-1})f_{I-1}^2) \\ &= E_i(C_{i,I-2})f_{I-2}\sigma_{I-1}^2 + E_i(C_{i,I-2})\sigma_{I-2}^2f_{I-1}^2 \\ &\quad + Var_i(C_{i,I-2})f_{I-2}^2f_{I-1}^2 \\ &\quad \vdots \\ &= C_{i,I+i} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} f_{I+1-i} \dots f_{k-1} \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \dots f_{I-1}^2 \end{aligned}$$

karena  $Var_i(C_{i,I+1-i}) = 0$ .

Dengan menggunakan Teorema 1, akan didapatkan bentuk kedua dari  $mse(\hat{R}_i)$

$$(*) (E(C_{i,I}|D) - \hat{C}_{i,I})^2 = C_{i,I+1-i}^2 ((f_{I+1-i} \dots f_{I-1}) - (\hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1}))^2.$$

Dalam prakteknya, penduga untuk seluruh bentuk dari  $mse(\hat{R}_i)$  harus ditentukan. Untuk bentuk pertama dari  $mse(\hat{R}_i)$  dapat diselesaikan dengan cara substitusi parameter  $f_k$  dengan  $\hat{f}_k$  dan  $\sigma_k^2$  dengan  $\hat{\sigma}_k^2$ , sehingga berakibat  $Var(C_{i,I}|D)$  diestimasi dengan menggunakan

$$\begin{aligned} &C_{i,I+i} \left( \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{k-1} \hat{\sigma}_k^2 \hat{f}_{k+1}^2 \dots \hat{f}_{I-1}^2 \right) \\ &= \hat{C}_{i,I}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\hat{C}_{i,k}}. \end{aligned}$$

Namun untuk bentuk kedua (\*) dari  $mse(\hat{R}_i)$ , cara substitusi parameter  $f_k$  dengan  $\hat{f}_k$  dan  $\sigma_k^2$  dengan  $\hat{\sigma}_k^2$  tidak dapat digunakan karena dapat mengakibatkan



an (\*) bernilai 0. Diperlukan pendekatan lainnya, yaitu

$$\begin{aligned} F &= (f_{I+1-i} \cdots f_{I-1}) - (\hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1}) \\ &= f_{I+1-i} \cdots f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1} \\ &= S_{I+1-i} + \dots + S_{I-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

dengan

$$S_k = \hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{k-1} (f_k - \hat{f}_k) f_{k+1} \cdots f_{I-1}. \quad (2.20)$$

Dari persamaan (2.19) dan persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned} F^2 &= (S_{I+1-i} + \dots + S_{I-1})^2 \\ &= \sum_{k=I+1-i}^{I-1} S_k^2 + 2 \sum_{j < k} S_j S_k. \end{aligned}$$

Selanjutnya bentuk  $S_k^2$  disubstitusi dengan  $E(S_k^2|B_k)$  dan  $S_j S_k$  disubstitusi dengan  $E(S_j S_k|B_k)$ . Karena  $E(f_k - \hat{f}_k|B) = 0$  diperoleh  $E(S_j S_k|B) = 0$  untuk  $j < k$ .

Karena

$$\begin{aligned} E((f_k - \hat{f}_k)^2|B_k) &= \text{Var}(\hat{f}_k|B_k) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{I-k} \text{Var}(C_{j,k+1}|B_k)}{\left(\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}\right)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \end{aligned}$$

diperoleh

$$E(S_k^2|B_k) = \frac{\hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{k-1}^2 \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \cdots f_{I-1}^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}}.$$

Substitusi  $F^2 = (\sum S_k)^2$  dengan  $\sum_k E(S_k^2|B_k)$ . Dikarenakan semua bentuk dari penjumlahan ini adalah positif, maka untuk seluruh parameter  $f_k \sigma_k^2$  yang tidak diketahui

disubstitusi dengan penduga tak-biasnya  $\hat{f}_k, \hat{\sigma}_k^2$ . Selanjutnya,  $F^2 = (f_{I+1-i} \cdots f_{I-1} -$

$\hat{f}_{I+1-i} \cdots \hat{f}_{I-1})^2$  diestimasi oleh

$$\sum_{k=I+1-i}^{I-1} \left( \frac{\hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{k-1}^2 \cdot \hat{\sigma}_k^2 \cdot \hat{f}_{I-1}^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \right)$$



$$= \hat{f}_{I+1-i}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}}.$$

Akar kuadrat *standard error* ( $\hat{R}_i$ ) dari penduga *mse* didefinisikan sebagai *standard error* dari ( $\hat{R}_i$ ). Seringkali *standard error* dari keseluruhan cadangan mengestimasi  $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I$  namun dalam pembahasan ini nilai  $(s.e.\hat{R}_i)^2$  pada  $2 \leq i \leq I$  tidak dapat dijumlahkan begitu saja karena nilai-nilai  $(s.e.\hat{R}_i)^2$  berhubungan langsung dengan penduga  $\hat{f}_k$  dan  $\hat{\sigma}_k$ .

**Lemma:**

Dengan asumsi dan notasi dari Teorema 3, rata-rata dari *squared error*

$\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I$  dapat diestimasi dengan menggunakan

$$\widehat{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^I \left\{ (s.e.\hat{R}_i)^2 + \hat{C}_{i,I} \left( \sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{j,I} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{n,k}} \right\}.$$

**Bukti**

$$\begin{aligned} mse \left( \sum_{i=2}^I \hat{R}_i \right) &= E \left( \left( \sum_{i=2}^I \hat{R}_i - \sum_{i=2}^I R_i \right)^2 \middle| D \right) \\ &= E \left( \left( \sum_{i=2}^I \hat{C}_{i,I} - \sum_{i=2}^I C_{i,I} \right)^2 \middle| D \right) \\ &= Var \left( \sum_{i=2}^I C_{i,I} \middle| D \right) + \left( E \left( \sum_{i=2}^I C_{i,I} \middle| D \right) - \sum_{i=2}^I \hat{C}_{i,I} \right)^2. \end{aligned}$$

Hasil yang didapat akibat dari kebebasan antar *accident period* adalah

$$Var \left( \sum_{i=2}^I C_{i,I} \middle| D \right) = \sum_{i=2}^I Var(C_{i,I} \middle| D),$$

dengan memanfaatkan hasil pembuktian dari Teorema 3, selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} \left( E \left( \sum_{i=2}^I C_{i,I} \middle| D \right) - \sum_{i=2}^I \hat{C}_{i,I} \right)^2 &= \left( \sum_{i=2}^I (E(C_{i,I} \middle| D) - \hat{C}_{i,I}) \right)^2 \\ &= \sum_{i,j} (E(C_{i,I} \middle| D) - \hat{C}_{i,I}) \cdot (E(C_{j,I} \middle| D) - \hat{C}_{j,I}) \\ &= \sum_{i,j} C_{i,I+1-i} C_{j,I+1-j} F_i F_j. \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$F_i = (f_{I+1-i} \dots f_{I-1}) - (\hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1}),$$

karena

$$mse(\hat{R}_i) = Var(C_{i,I}|D) + (C_{i,I+1-i}F_i)^2$$

dari Teorema 3, dapat diperoleh

$$mse\left(\sum_{i=2}^I \hat{R}_i\right) = \sum_{i=2}^I mse(\hat{R}_i) + \sum_{2 \leq i < j \leq I} 2 \cdot C_{i,I+1-i} C_{j,I+1-j} F_i F_j.$$

Dengan prosedur yang serupa untuk  $F^2$ , pembuktian di atas menghasilkan  $F_i F_j$ ,  $i < j$ , penduganya adalah

$$\frac{\sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{f}_{I+1-j} \dots \hat{f}_{I-1} \hat{f}_{k-1}^2 \hat{\sigma}_{k+1}^2 \dots \hat{f}_{I-1}^2}{\sum_{n=1}^{I-k} C_{n,k}}$$

(Mack (1993), Dahl (2003))

## 2.7 Mack's Chain-Ladder Standard Error (Perhitungan Rekursif dengan Melibatkan Faktor Ekor)

Algoritma pada metode *Chain-Ladder* terdiri dari aturan prediksi yang teratur

$$\hat{C}_{i,k+1} = \hat{C}_{i,k} \hat{f}_k$$

diawali dari  $\hat{C}_{i,I+1-i} = C_{i,I+1-i}$ . Faktor perkembangan  $\hat{f}_k$  yang telah diberi bobot dinotasikan oleh  $\hat{f}_k^{(w)}$  adalah

$$\hat{f}_k^{(w)} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} w_{i,k} C_{i,k}^\alpha F_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I-k} w_{i,k} C_{i,k}^\alpha}, \quad (2.21)$$

untuk  $\alpha \in \{0; 1; 2\}$ ,

dimana





$$F_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}, \quad 1 \leq k \leq I-1. \quad (2.22)$$

$F_{i,k}$  adalah faktor perkembangan individu, dengan  $w_{i,k} \in [0; 1]$  adalah suatu bobot sebarang yang diberikan serta bisa digunakan untuk seorang aktuary dalam menu-runkan nilai pencilan  $F_{i,k}$ . Secara umum nilai  $w_{i,k} = 0$  untuk semua  $i, k$ . Selanjutnya, untuk masing-masing nilai  $\alpha$  yang diberikan mepresentasikan hal yang berbeda. Untuk  $\alpha = 1$  menghasilkan faktor perkembangan *Chain-Ladder*, untuk  $\alpha = 0$  meng-hasilkan nilai rata-rata faktor perkembangan pada klaim yang telah diobservasi, dan untuk  $\alpha = 2$  menghasilkan bentuk regresi dari  $C_{i,k+1}$  terhadap  $C_{i,k}$  dengan *intercept* 0.

Sama halnya dengan persamaan (2.17), terdapat penduga tak bias untuk bentuk  $\sigma_k^{2(w)}$  yaitu  $\hat{\sigma}_k^{2(w)}$  dengan formula sebagai berikut

$$\hat{\sigma}_k^{2(w)} = \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} w_{i,k} C_{i,k}^\alpha (F_{i,k} - \hat{f}_k^{(w)})^2. \quad (2.23)$$

Berdasarkan persamaan (2.15) dan persamaan (2.18) pada sub-bab 2.6, *standard error* untuk  $C_{i,I}$  diperoleh

$$s.e.(\hat{C}_{i,I}) = \hat{C}_{i,I} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^{2(w)}}{\hat{f}_k^{2(w)}} \left( \frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k}} \right). \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dapat ditulis ulang sebagai

$$s.e.(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,I} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{((s.e.(F_{i,k}))^2 + (s.e.(\hat{f}_k^{(w)}))^2)}{\hat{f}_k^{2(w)}}, \quad (2.25)$$

dimana  $(s.e.(F_{i,k}))^2$  adalah penduga dari  $Var(F_{i,k}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k})$  dan  $(s.e.(\hat{f}_k^{(w)}))^2$  adal- lah penduga dari

$$Var(\hat{f}_k^{(w)}) = \frac{\hat{\sigma}_k^{2(w)}}{\sum_{j=1}^{I-k} w_{j,k} C_{j,k}^\alpha}$$



Nilai  $s.e.(\hat{f}_k^{(w)})$  diperoleh dengan

$$s.e.(\hat{f}_k^{(w)}) = \frac{\hat{\sigma}_k}{\sqrt{\sum_{j=1}^{I-k} C_{i,k}}}, \quad (2.26)$$

sedangkan  $s.e.(F_{i,k})$  diperoleh dengan

$$s.e.(F_{i,k}) = \frac{\hat{\sigma}_k^{(w)}}{\sqrt{C_{i,k}}} \quad (2.27)$$

untuk  $k \leq I+1-i$ . Sedangkan untuk  $k > I+1-i$

$$s.e.(F_{i,k}) = \frac{\hat{\sigma}_k^{(w)}}{\sqrt{\hat{C}_{i,k}}}. \quad (2.28)$$

Formula rekursif untuk menentukan  $s.e.(\hat{C}_{i,k+1})^2$  adalah sebagai berikut

$$s.e.(\hat{C}_{i,k+1})^2 = \hat{C}_{i,k}^2 (s.e.(F_{i,k})^2 + s.e.(\hat{f}_k^{(w)})^2) + s.e.(\hat{C}_{i,k})^2 \hat{f}_k^{2(w)} \quad (2.29)$$

dengan nilai awal  $s.e.(\hat{C}_{i,I+1-i}) = 0$ . Persamaan (2.29) mengarah pada persamaan (2.24).

Penduga untuk *process risk* dapat diperoleh dengan persamaan

$$\hat{Var}(\hat{C}_{i,l}) = \hat{C}_{i,l}^2 \sum_{k=I+1-i}^{l-1} \frac{\hat{\sigma}_k^{2(w)} / \hat{f}_k^{2(w)}}{\hat{C}_{i,k}}. \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) dapat dirubah menjadi persamaan rekursif, yaitu

$$Process Risk_{i,k} = \begin{cases} \hat{f}_{k-1}^{2(w)} \cdot Process Risk_{i,k-1} + \hat{C}_{i,k-1} \hat{\sigma}_{k-1}^{2(w)} & \text{untuk } k \geq I+2-i \\ C_{i,I+1-i} \hat{\sigma}_{k-1}^{2(w)} & \text{untuk } k=I+2-i \end{cases} \quad (2.31)$$

Penduga untuk *parameter risk* dapat diperoleh dengan menggunakan formu-

la

$$Parameter Risk_{i,k} = \hat{C}_{i,k}^2 \sum_{j=I+1-i}^{k-1} \frac{\hat{\sigma}_j^{2(w)}}{\hat{f}_j^{2(w)} \cdot \sum_{r=1}^{I-j} C_{r,j}}. \quad (2.32)$$



Persamaan (2.32) dapat dirubah menjadi persamaan rekursif

$$\begin{aligned}
 \text{Parameter Risk}_{i,k} &= \hat{C}_{i,k}^{2(w)} \sum_{j=I+1-k}^{k-1} \frac{\hat{\sigma}_j^{2(w)}}{\hat{f}_j^{2(w)} \cdot \sum_{r=1}^{I-j} C_{i,j}} \\
 &= \hat{f}_{k-1}^{2(w)} \hat{C}_{i,k-1}^2 \left( \sum_{j=I+1-i}^{k-2} \frac{\hat{\sigma}_j^{2(w)}}{\hat{f}_j^{2(w)} \cdot \sum_{r=1}^{I-j} C_{i,j}} + \frac{\hat{\sigma}_{k-1}^{2(w)}}{\hat{f}_{k-1}^{2(w)} \cdot \sum_{r=1}^{I-k-1} C_{r,k-1}} \right) \\
 &= \hat{f}_{k-1}^{2(w)} \hat{C}_{i,k-1}^2 \sum_{j=I+1-i}^{k-2} \frac{\hat{\sigma}_j^{2(w)}}{\hat{f}_j^{2(w)} \cdot \sum_{r=1}^{I-j} C_{i,j}} + \hat{C}_{i,k-1}^2 \frac{\hat{\sigma}_{k-1}^{2(w)}}{\sum_{r=1}^{I-k-1} C_{r,k-1}} \\
 &= \hat{f}_{k-1}^{2(w)} \cdot \text{Parameter Risk}_{i,k-1} + \hat{C}_{i,k-1}^2 \hat{\text{Var}}(\hat{f}_{k-1}^w). \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Untuk  $k$  yang sama dengan diagonal pertama dalam pencadangan, parameter risk bernilai nol. Dari persamaan (2.32) dan persamaan (2.33) dapat disimpulkan sebagai berikut

$$\text{Parameter Risk}_{i,k} = \begin{cases} \hat{f}_{k-1}^{2(w)} \cdot P.R_{i,k-1} + \hat{C}_{i,k-1}^2 \hat{\text{Var}}(\hat{f}_{k-1}^w) + \\ \hat{\text{Var}}(\hat{f}_{k-1}^w) \cdot P.R_{i,k-1} & \text{for } k > I + 2 - i \\ \hat{C}_{I+1-i}^2 \hat{\text{Var}}(\hat{f}_{k-1}^w) & \text{for } k = I + 2 - i. \end{cases} \quad (2.34)$$

$$s.e.(\hat{C}_{i,k+1})^2 = \hat{C}_{i,k}^2 (s.e.(F_{i,k})^2 + s.e.(\hat{f}_k^{(w)})^2) + s.e.(\hat{C}_{i,k})^2 \hat{f}_k^{2(w)},$$

Formula rekursif untuk  $s.e.$  dari total klaim untuk masing-masing *accident period* adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \left( s.e. \left( \sum_{i=I+1-k}^I \hat{C}_{i,k+1} \right) \right)^2 &= \left( s.e. \left( \sum_{i=I+2-k}^I \hat{C}_{i,k} \right) \right)^2 \cdot \hat{f}_k^{2(w)} + \sum_{i=I+1-k}^I \hat{C}_{i,k}^2 \cdot \left( s.e.(F_{i,k}) \right)^2 \\
 &+ \left( \sum_{i=I+1-k}^I \hat{C}_{i,k} \right)^2 \cdot \left( s.e.(\hat{f}_k^{(w)}) \right)^2 \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

(Mack (1999))

## 2.8 Model Keluarga Eksponensial Dispersi (EDF)

Keluarga eksponensial dispersi atau *exponential dispersion family* (EDF) merupakan himpunan dari distribusi-distribusi peluang yang sering digunakan sebagai



dasar GLM. Selanjutnya, pada sub bab ini dikonstruksi distribusi keluarga Tweedie dengan memanfaatkan generalisasi dari keluarga eksponensial dispersi. Pembahasan pada sub-bab ini dikutip dari Jørgansen (1987), McCullagh (1984) dan Taylor dan McGuire (2016).

### 2.8.1 Keluarga Eksponensial Dispersi Secara Umum

EDF adalah keluarga distribusi eksponensial. FKP dari EDF  $\pi(y; \theta, \phi)$  berbentuk

$$\pi(y; \theta, \phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \theta)\right), \quad (2.36)$$

atau,

$$\ln \pi(y; \theta, \phi) = \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \theta)\right), \quad (2.37)$$

dengan

$y$  = nilai dari  $Y_i$ ,

$\theta$  = lokasi parameter yang disebut sebagai parameter kanonik,

$\phi$  = parameter dispersi atau *scale parameter*,

$b(\cdot)$  = fungsi kumulant yang menentukan bentuk dari distribusi,

$\exp(c(y, \theta))$  = *normalizing factor* yang memproduksi total *mass* untuk distribusi.

Diasumsikan bahwa fungsi  $a, b, c$  adalah kontinu dan  $b$  adalah fungsi satu-satu, dapat diturunkan sebanyak dua kali dengan turunan pertama juga merupakan fungsi satu-satu. Keluarga dari distribusi bergantung pada pemilihan  $a, b, c, \dots$

Selanjutnya anggota dari keluarga distribusi ini akan dinyatakan dengan parameter  $\theta$  dan  $\phi$ . Anggota khusus dari EDF dinotasikan dengan  $EDF(\theta, \phi; a, b, c)$ . Berikut ini disajikan dalam bentuk tabel, distribusi-distribusi yang merupakan anggota dari

EDF



Tabel 2.5: Distribusi Anggota EDF

Distribusi	$b(\theta)$	$a(\phi)$	$c(y, \phi)$
Normal	$\frac{1}{2}\theta^2$	$\phi$	$-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\phi} + \ln(2\pi\phi)\right]$
Poisson	$\exp \theta$	1	$-\ln y!$
Binomial	$\ln(1+e^\theta)$	$n^{-1}$	$\ln\left(\frac{n!}{n!(n-y)!}\right)$
Gamma	$\ln(\theta)$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{\ln \phi}{\phi} + \left(\frac{1}{\phi} - 1\right) \ln y - \ln \Gamma \frac{1}{\phi}$
Inverse Gaussian	$-(-2\theta)^{-1/2}$	$\phi$	$-\frac{1}{2}[\ln(2\pi\phi y^3 + \frac{1}{\phi}y)]$

(Sumber: Taylor dan McGuire (2016))

Pemilihan model distribusi EDF dari tabel diasumsikan bergantung pada subjek model dan propertinya. Misalnya, distribusi Poisson pada sampel acak untuk kasus matematika diskrit dan binomial dimanfaatkan pada sample acak untuk kasus pada variabel biner berulang.

Dapat ditunjukkan bahwa, ketika  $Y$  memiliki distribusi yang sesuai dengan persamaan (2.37), berlaku

$$E[Y] = \frac{db}{d\theta} \quad (2.38)$$

$$Var[Y] = a(\phi) \frac{d^2b}{d\theta^2}. \quad (2.39)$$

Jika  $E[Y]$  dinotasikan dengan  $\mu$ , dapat dibangun hubungan antara  $\mu$  dan  $\theta$  dengan menggunakan persamaan (2.38)

$$\theta = \left(\frac{db}{d\theta}\right)^{-1} \Big|_{\theta=\mu}$$

yang sesuai dengan deskripsi bahwa  $\theta$  adalah suatu lokasi dari parameter. Serta dapat diketahui bahwa hubungan antara  $\theta$  dan  $\mu$  adalah fungsi satu-satu. PDF dari  $y$  dapat dinyatakan ke dalam  $p(y; \mu, \phi)$  sebagai bentuk alternatif dari  $p(y; \theta, \phi)$ .

Melalui persamaan (2.38) dan persamaan (2.39) diperoleh bentuk sebagai berikut

$$Var[Y] = \alpha(\phi)V(\mu), \quad (2.40)$$



di mana

$$V(\mu) = \frac{d^2b}{d\theta^2} \left( \left( \frac{db}{d\theta} \right)^{-1} \Big|_{\theta=\mu} \right),$$

$V(\mu)$  disebut sebagai fungsi varians.

Tabel 2.6:  $E[Y]$  dan  $V(\mu)$  EDF

Distribusi	$b(\theta)$	$a(\phi)$	$E[Y] = b'(\theta)$	$V[\mu]$
Normal	$\frac{1}{2}\theta^2$	$\phi$	$\mu = \theta$	$1 = \mu^0$
Poisson	$\exp \theta$	1	$\mu = \exp \theta$	$\exp \theta = \mu^1$
Binomial	$\ln(1 + e^\theta)$	$n^{-1}$	$\mu = \frac{ne^\theta}{(1+e^\theta)}$	$\frac{ne^\theta}{1+e^\theta}$
Gamma	$\ln(\theta)$	$\alpha^{-1}$	$\mu = \frac{1}{-\theta}$	$\frac{1}{\theta^2} = \mu^2$
Inverse Gaussian	$-(-2\theta)^{-1/2}$	$\theta$	$\mu = -(2\theta)^{-1/2}$	$[(-2\theta)^{-1/2}]^3 = \mu^3$

(Sumber: Taylor dan McGuire (2016), Jørgensen (1997))

Tabel 2.6 menyajikan  $E[Y]$  dan  $V(\mu)$  pada masing-masing distribusi anggota EDF. Penjabaran dari Tabel 2.6 dapat dilihat pada Lampiran 1. Fungsi varians dan varians adalah dua hal yang berbeda. Persamaan (2.40) merubah varians menjadi faktor-faktor yang bergantung terhadap mean dan parameter dispersi. Fungsi varians adalah faktor yang hanya bergantung terhadap mean.

Agar sesuai dengan GLM, persamaan (2.37) dibatasi terhadap kasus khusus

$$a(\phi) = \frac{\phi}{w}, \tag{2.41}$$

untuk suatu konstanta  $w$ . Pembatasan ini akan berlaku seterusnya. Keragaman  $w$  dari suatu observasi ke observasi lainnya berpengaruh terhadap  $a(\phi)$ . Jika besar nilai  $w$  tidak disebutkan, maka  $w$  diasumsikan bernilai 1.

### 2.8.2 Distribusi Keluarga Tweedie

Distribusi keluarga Tweedie merupakan sub-family dari EDF dan dibangun dari EDF dengan pembatasan pada fungsi varians sebagai berikut

$$V(\mu) = \mu^p, p \leq 0 \text{ atau } p \geq 1. \tag{2.42}$$



Dari persamaan (2.40) dan persamaan (2.41) diperoleh  $Var[Y] = \phi\mu^p$  dan varians berbanding lurus terhadap pangkat dari mean. Bentuk dari fungsi varians menunjukkan bahwa fungsi kumulatif berbentuk

$$b(\theta) = (2-p)^{-1}[(1-p)\theta]^{\frac{2-p}{1-p}} \quad (2.43)$$

$$\mu = [(1-p)\theta]^{\frac{1}{1-p}}$$

$$\ln \pi(y; \mu, \theta) = \frac{\left[ \frac{y\mu^{1-p}}{(1-p)} - \frac{\mu^{2-p}}{2-p} \right]}{\phi + c(y, \phi)} \quad (2.44)$$

Beberapa contoh distribusi pada Tabel 2.5 memiliki karakter yang bergantung terhadap fungsi kumulatif yang sesuai dengan persamaan (2.43).

Distribusi Tweedie, dinotasikan dengan  $Tw(\mu, \phi; p)$ , memuat beberapa distribusi yang akan disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel 2.7: Anggota Distribusi Keluarga Tweedie

Distribusi	$p$	$b(\theta)$	$\mu$	$\ln \pi(y; \mu, \phi)$
Normal	0	$\frac{1}{2}\theta^2$	$\phi$	$\frac{[y\mu - \frac{1}{2}\mu^2]}{\phi}$
<i>Over-dispersed</i> Poisson	1	$\exp \theta$	$\exp \theta$	$\frac{[y \ln \mu - \mu]}{\phi}$
Gamma	2	$\ln(-\theta)$	$-\frac{1}{\theta}$	$\frac{[-\frac{y}{\mu} - \ln \mu]}{\phi}$
Inverse Gaussian	3	$-(-2\theta)^{\frac{1}{2}}$	$(-2\theta)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{[-(\frac{y}{2}\mu^2) + \frac{1}{\mu}]}{\phi}$

(Sumber: Taylor dan McGuire (2016))

Sesuai dengan persamaan (2.42), bobot *tail* dari distribusi Tweedie akan meningkat seiring dengan peningkatan terhadap nilai  $p$ . Pemilihan anggota distribusi Tweedie bergantung terhadap indeks  $p$ .

Terdapat versi lain tentang anggota dari distribusi Tweedie. Menurut Jørgensen (1987), untuk nilai  $1 < p < 2$  diidentifikasi sebagai distribusi majemuk Poisson-Gamma atau sering disebut sebagai *Tweedie Compound Poisson* atau majemuk Poisson-Gamma.

Sebagaimana yang telah disajikan dalam Tabel 2.7, suatu variabel acak memiliki distribusi *over-dispersed* Poisson saat nilai  $p = 1$  atau  $Tw(\mu, \phi; 1)$  yang selanjutnya



jutnya akan ditulis sebagai  $ODP(\mu, \phi)$ .

PDF dari ODP dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\pi(y; \mu, \phi) = \mu^{y/\phi} \exp \left[ -\frac{\mu}{\phi} + c(y, \phi) \right], y = 0, \phi, 2\phi, \dots, \quad (2.45)$$

dengan  $\mu = e^\theta$ . Peluang total mass diperoleh

$$\exp c(y, \phi) = \left[ \left( \frac{y}{\phi} \right)! \right]^{-1}. \quad (2.46)$$

Substitusi persamaan (2.46) ke dalam persamaan (2.45), sehingga menghasilkan

$$\pi(y; \mu, \phi) = \frac{\mu^{y/\phi} \exp(-\frac{\mu}{\phi})}{\frac{y}{\phi}!}, y = 0, \phi, 2\phi, \dots \quad (2.47)$$

Bentuk persamaan (2.47) merupakan bentuk dari FKP distribusi Poisson

$$Y/\phi \text{ Poiss}(\mu/\phi), \quad (2.48)$$

sehingga diperoleh

$$E[Y] = \phi E[Y/\phi] = \mu \quad (2.49)$$

$$\text{Var}[Y] = \phi^2 \text{Var}[Y/\phi] = \phi \mu. \quad (2.50)$$

Persamaan (2.49) sesuai dengan definisi dari  $\mu$ , dan persamaan (2.50) merujuk pada persamaan (2.39), persamaan (2.40) dan persamaan (2.42). Untuk  $\phi = 1$ , persamaan (2.48) dirubah ke dalam bentuk Poisson yang lebih sederhana, yaitu

$$Y \sim \text{Poiss}(\mu).$$

Dari persamaan (2.48) sampai dengan persamaan (2.50), distribusi ODP berbeda dengan distribusi Poisson. Varians pada distribusi ODP, bernilai tidak sama dengan nilai rata-rata hitung  $\mu$  namun berbanding lurus terhadap  $\mu$  karena nilai varians dipengaruhi oleh parameter dispersi  $\phi$ . Jika dihubungkan dengan  $E(S_{i,k}) = \mu_{i,k} = x_i y_k$  dan  $\text{Var}(S_{i,k}) = \phi \mu_{i,k} = \phi x_i y_k$  dengan  $x_i$  adalah ekspektasi nilai klaim pada *deve-*





velopment period yang terakhir dan  $y_k$  adalah bobot yang muncul pada setiap development period dengan  $\sum_{k=1}^I y_k = 1$  sehingga mengakibatkan  $\sum_{i=1}^I x_i \geq 0$ . Nilai  $S_{i,k}$  diperbolehkan bernilai negatif asalkan total klaim incremental setiap accident period lebih dari atau sama dengan nol.

## 2.9 Model Regresi Linear dan Model Regresi Non-Linear

Salah satu bentuk dari model linear adalah model regresi linear sederhana. Model ini menampilkan hubungan antara dua variabel. Contohnya adalah tinggi dan berat badan seseorang, lebar dan tinggi sebuah amplop, temperatur dan hasil dari proses industri, dan sebagainya. Bentuk umum model regresi linear adalah

$$Y_i = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{b}) + \varepsilon_i, \quad (2.51)$$

dengan  $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{b})$  adalah fungsi respon linear dan  $\varepsilon_i$  adalah error yang sering kali diasumsikan sebagai variabel acak yang saling bebas dan normal dengan varians konstan, dengan

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ \vdots \\ x_{i,p-1} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$\mathbf{x}_i$  = Vektor dari variabel prediktor atau variabel kovariat

$\mathbf{b}$  = Vektor dari koefisien regresi

$$f(\mathbf{x}_i, \mathbf{b}) = \mathbf{x}_i' \mathbf{b}.$$

Bentuk umum model regresi non-linear adalah

$$Y_i = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) + \varepsilon_i,$$

$Y_i$  adalah jumlah dari mean response  $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{g})$  yang diberikan oleh fungsi respon non-linear  $f(\mathbf{X}, \mathbf{g})$  dan bentuk error  $\varepsilon_i$ . Error tidak diartikan sebagai kesalahan, te-



tapi pada statistika menggambarkan adanya efek dari faktor di luar kontrol. Bentuk *error* sering kali diasumsikan sebagai variabel acak yang berdistribusi normal dan saling bebas dengan varians konstan.

Vektor parameter pada fungsi respon  $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{g})$  dinotasikan dengan  $\mathbf{g}$  yang berarti bahwa fungsi responnya adalah non-linear di parameter.

$$\mathbf{x}_{i(q \times 1)} = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iq} \end{bmatrix}, \mathbf{g}_{q \times 1} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{bmatrix}$$

dengan vektor  $\mathbf{x}_{i,q}$  adalah vektor yang mempresentasikan data yang telah diobservasi.

Berikut ini adalah contoh beberapa model pada regresi linear dan pada model regresi non linear.

Tabel 2.8: Contoh Model Linear dan Model Non-Linear

Model Regresi Linear	Model Regresi Non Linear
Model regresi linear umum (Linear di parameter & Linear di Variabel) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_{p-1} x_{i,p-1} + \epsilon_i$	Model regresi eksponensial ( <b>Tidak</b> linear di parameter $\gamma_0 \gamma_1$ ) $Y_i = \gamma_0 \exp(\gamma_1 x_i) + \epsilon_i$
Model regresi polinomial dengan satu variabel atau lebih (Linear di parameter & <b>tidak</b> linear di variabel) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i1}^2 + \beta_3 x_{i2}^2 + \beta_5 x_{i1} x_{i2} + \epsilon_i$	Model Regresi Logistik ( <b>Tidak</b> linear di parameter) $Y_i = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1 \exp(\gamma_2 x_i) + \epsilon_i}$
Model dengan variabel yang ditransformasi (Linear di parameter & <b>tidak</b> linear di variabel) $\log_{10} Y_i = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x_{i1}} + \beta_2 \exp(x_{i2}) \epsilon_i$	

(Neter dkk., 1996)



## 2.10 Metode *Generalized Linear Model* (GLM)

### 2.10.1 Definisi

Analisis regresi linear adalah salah satu analisis yang mengukur hubungan antara variabel prediktor dengan variabel responnya. Asumsi yang harus dipenuhi dalam regresi linear adalah *error* berdistribusi normal dan memiliki varians yang konstan (homoskedastik) (Neter dkk., 1996). Namun pada kenyataannya, asumsi tersebut seringkali tidak terpenuhi, misalnya *error* tidak berdistribusi normal dan variansnya tidak konstan (heteroskedastik), sehingga untuk menyempurnakan model tersebut, Nelder dan Baker pada tahun 1972 menciptakan suatu model bernama *Generalized Linear Model* (GLM). Dalam GLM variabel respon yang digunakan tidak berdistribusi normal saja akan tetapi seluruh distribusi yang termasuk ke dalam distribusi keluarga eksponensial.

Misalkan  $\pi(\cdot; \mu, \phi)$  menotasikan anggota dari distribusi EDF. Sesuai dengan persamaan (2.51) untuk bentuk  $Y_i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ . Anggap bahwa untuk setiap  $Y_i$  berhubungan dengan suatu vektor- $\mathbf{x}'_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$  yang disebut sebagai kovariat atau prediktor, sesuai dengan persamaan (2.52) vektor prediktor dinotasikan dengan  $\mathbf{x}_i$ . Variabel prediktor dalam GLM disebut sebagai komponen sistematis. Berikut ini merupakan beberapa kondisi yang harus terpenuhi:

1.  $Y_i \sim \pi(\cdot; \mu_i, \phi_i)$  dengan  $\mu_i$  adalah parameter yang belum diketahui.  $Y_i$  disebut sebagai komponen acak (*random component*). Komponen acak dari GLM merupakan suatu variabel respon yang disusun menjadi vektor ( $\mathbf{Y}$ ) yang memiliki distribusi probabilitas. Distribusi dari  $Y_i$  merupakan anggota dari keluarga eksponensial seperti distribusi normal, binomial, Poisson, gamma, dan *inverse gaussian*. Pada beberapa contoh kasus, pengamatan  $Y_i$  berbentuk biner, seperti "sukses" atau "gagal", sehingga secara umum  $\mathbf{Y}$  diasumsikan berdistribusi binomial. Untuk beberapa contoh kasus lainnya, nilai  $Y_i$  dapat berupa *count*, yang selanjutnya diasumsikan  $\mathbf{Y}$  berdistribusi Poisson, *non-negative integers*, atau *negative binomial*.
2.  $g(\mu_i) = \mathbf{x}'_i \mathbf{b}$ , di mana  $g(\cdot)$  disebut sebagai *link function*.



Tanda petik satu atas ( $'$ ) menotasikan transpose pada matriks. *Link function* adalah fungsi satu-satu dengan domain  $(-\infty, \infty)$  yang mengubah  $\mu$  ke *linear predictor* seperti yang ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_{p-1} x_{i,p-1} \quad (2.53)$$

karena *link function* bersifat *invertible*, maka persamaan (2.53) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_{p-1} x_{i,p-1}) \quad (2.54)$$

*Link Function* menunjukkan ekspektasi dari  $Y$  dan rata-rata dari distribusi probabilitasnya dengan  $\mu = E(\mathbf{Y})$ . GLM dapat dianggap sebagai suatu transformasi dari model linear pada ekspektasi  $Y$  atau sebagai model regresi non-linear untuk respon. *Inverse link*  $g^{-1}(\cdot)$  juga disebut sebagai *mean function*.

*Identity link* merupakan salah satu *link function* yang paling sederhana.

$$\eta_i = g(\mu_i) \quad \text{dan} \quad \mu_i = g^{-1}(\eta_i) = \eta_i$$

*Link function* yang lainnya yaitu

$$g(\mu_i) = \ln(\mu_i) \quad (2.55)$$

yang merupakan model log dari *mean*. Fungsi log diaplikasikan untuk hasil yang positif, sehingga fungsi *link* sesuai ketika  $\mu$  merupakan suatu hasil yang bernilai tak negatif, seperti data *count* (Agresti, 1996). GLM yang menggunakan *log link* disebut dengan model *loglinear*.

### 3. Observasi-observasi $Y_i$ adalah bebas stokastik.

Terdapat kemungkinan bahwa parameter dispersi  $\phi$  telah diketahui, namun secara umum dapat diasumsikan sebagai

$$\phi_i = \frac{\phi}{w_i}$$



dengan  $w$  disebut sebagai *weight*.

GLM adalah model regresi. Jika  $\pi(\cdot; \mu_i, \phi_i) = n(\cdot; \mu_i, \phi_i)$  kondisi (1) dan (2) dapat dinyatakan sebagai

$$Y_i = \mathbf{x}_i' \mathbf{b} + \varepsilon_i, \text{ dengan } \varepsilon_i \sim N(0, \phi_i),$$

yang sering disebut sebagai *weighted linear regression*.

Dimisalkan  $\mathbf{Y}$  menotasikan vektor yang memiliki anggota sebanyak  $i$  adalah  $Y_i$ , dan  $\mathbf{X}$  adalah matriks model dari regresi, maka kondisi (2) dapat dituliskan sebagai

$$\mu = g^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{b}).$$

Vektor parameter  $\mathbf{b}$  berhubungan dengan parameter kanonik  $\theta$ . Melalui GLM, akan terdapat suatu vektor- $p$  ( $\theta_1, \dots, \theta_p$ ) dari parameter kanonik yang masing-masing berhubungan dengan data yang diobservasi.

$$b'(\theta_i) = E[Y_i] = \mu_i = g^{-1}(\mathbf{x}_i' \mathbf{b}). \quad (2.56)$$

Dari persamaan (2.42), persamaan (2.56) dan pembahasan pada Tabel 2.6, pemilihan GLM terdiri dari:

1. Pemilihan index  $p$  akan mempengaruhi atau mengontrol hubungan antara model mean dan varians.
2. Pemilihan kovariat  $\mathbf{x}_i'$  berpengaruh terhadap mean  $\mu_i$ .
3. Pemilihan *link function* berpengaruh terhadap hubungan antara mean  $\mu$  dan kovariat yang bersesuaian.

Salah satu cara yang dapat digunakan dalam estimasi parameter adalah dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Biasanya solusi dari MLE tidak menggambarkan hasil yang optimal, sehingga diperlukan analisis secara numerik. Solusi numerik adalah non-trivial, sehingga diperlukan bantuan suatu perangkat lunak khusus untuk mengestimasi MLE. Beberapa paket perangkat lunak

untuk GLM diantaranya adalah SAR, dan R. MLE dalam penelitian ini diestimasi menggunakan program R dengan memanfaatkan *package* GLM dan Chain-Ladder.

### 2.10.2 Goodness-of-fit dan Deviasi

Misal  $\hat{\mathbf{b}}$  adalah MLE dari  $\mathbf{b}$ . Vektor

$$\hat{\mathbf{Y}} = g^{-1}(\mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$$

adalah MLE dari  $\mu$  dan disebut sebagai vektor *fitted value*. Prinsip dari *goodness-of-fit* dari GLM merupakan nilai dari skala deviasinya, yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} D(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}) &= 2 [\ln \pi(\mathbf{Y}; \hat{\theta}^{(s)}, \phi) - \ln \pi(\mathbf{Y}; \hat{\theta}, \phi)] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [\ln \pi(Y_i; \hat{\theta}^{(s)}, \phi) - \ln \pi(Y_i; \hat{\theta}, \phi)], \end{aligned} \quad (2.57)$$

di mana  $\theta$  adalah vektor dari parameter kanonik,  $\hat{\theta}$  adalah MLE dari  $\theta$ , dan  $\hat{\theta}^{(s)}$  adalah estimasi dari  $\hat{\theta}$  pada *saturated model*. *Saturated model* adalah model di mana untuk setiap observasi berlaku  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}$ . Dari persamaan (2.57) dan persamaan (2.44) dapat dilihat bahwa memaksimalkan *likelihood* ekuivalen dengan meminimalkan deviasi. Skala deviasi yang lebih kecil menggambarkan bahwa *goodness-of-fit* bernilai lebih baik. Nilai deviasi terkecil yang mungkin terjadi yaitu nol, hal tersebut terjadi pada saat  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}$ . Perhitungan skala deviasi pada persamaan (2.57) memerlukan nilai  $\phi$ . Namun,  $\phi$  akan keluar dari setiap minimalisasi skala deviasi dan nilai tersebut tidak relevan dengan parameter MLE, sehingga diperoleh

$$D^*(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}) = 2 \sum_{i=1}^n [\ln \pi(Y_i; \hat{\theta}^{(s)}, 1) - \ln \pi(Y_i; \hat{\theta}, 1)].$$

Selanjutnya, untuk mencari MLE yaitu dengan cara meminimalkan  $D^*(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}})$  terhadap  $\hat{\theta}$  dan menghasilkan  $\hat{\mathbf{b}}$ , dengan  $n - p$  adalah derajat kebebasan. Estimasi  $\hat{\phi}$  biasanya diperoleh dari

$$\hat{\phi} = \frac{D^*(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}})}{n - p}.$$



### 2.10.3 Peramalan

Metode GLM digunakan untuk meramalkan cadangan klaim yang akan dilaporkan oleh pihak tertanggung, sering kali vektor kovariat  $\mathbf{x}_i$  memuat informasi tentang *accident period*, dan informasi tambahan seperti *line of business* (LoB). LoB dalam asuransi menurut kamus Bahasa Inggris Collins merupakan klasifikasi umum dalam suatu area bisnis yang digunakan oleh perusahaan asuransi, misalnya seperti asuransi kebakaran, komersial, personal, auto, atau tempat tinggal. Oleh karena itu dalam meramalkan cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM, penting untuk menyusun suatu matriks desain baru sebagai alat bantu. Jika dinotasikan  $Y_i$  sebagai data yang telah diobservasi, maka  $Y_i^*$  didefinisikan sebagai cadangan klaim yang akan diprediksi.

$$\mu^* = g^{-1}(\mathbf{X}^* \mathbf{b}),$$

di mana  $\mathbf{X}^*$  adalah matriks model yang vektor barisnya  $(x_i^*)'$  sebagaimana yang telah dijabarkan di atas atau disebut sebagai matriks model peramalan. Selanjutnya  $\mathbf{Y}^*$  diperoleh dengan menggunakan persamaan

$$\hat{\mathbf{Y}}^* = \hat{\mu}^* = g^{-1}(\mathbf{X}^* \hat{\mathbf{b}}),$$

namun dalam penelitian ini untuk menduga parameter dispersi menggunakan pendekatan lain yaitu dengan *Pearson Residual*.

### 2.10.4 Menduga Parameter Dispersi

#### a. *Pearson Residual*

*Standardized Pearson residual* yang berhubungan dengan data  $Y_i$  yang telah diobservasi dirumuskan sebagai berikut

$$R_i^p = \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)}{\hat{\sigma}_i}, \quad (2.58)$$



di mana  $\hat{\sigma}_i^2$  adalah penduga  $\sigma_i^2 = \text{Var}[Y_i]$ .

Jika diasumsikan bahwa  $\hat{Y}_i$  merupakan estimator yang mendekati tak-bias dari  $\mu_i$ , dan  $\text{Var}[Y_i - \hat{Y}_i]$  berbeda sedikit dari  $\text{Var}[Y_i]$ , sehingga diperoleh

$$E[R_i^p] = 0, \quad \text{dan} \quad \text{Var}[R_i^p] = 1.$$

Plot dari  $Y_i$  terhadap  $i$  akan menghasilkan *scatter* dari residual yang berada di persekitaran nilai nol (tak-bias) dan dengan dispersi yang seragam dari kiri ke kanan atau disebut sebagai kondisi yang homoskedastik.

### b. Parameter Dispersi

Dengan menggunakan persamaan (2.40) dan persamaan (2.58) diperoleh persamaan

$$\hat{\phi} = \frac{\sum ((R_i^p)^2)}{n(D) - p}, \quad (2.59)$$

dimana  $n(D)$  adalah jumlah data yang berada pada segitiga atas, dan  $p$  adalah banyaknya parameter yang diestimasi.

### 2.10.5 Prediksi Error

Sub-bab ini dirangkum dari Taylor dan McGuire (2016) dan Tee (2017). Pada sub-bab ini akan dibahas permasalahan yang berhubungan dengan error yang termuat dalam cadangan klaim IBNR jika diestimasi dengan menggunakan metode GLM. Nilai error terdiri tiga yaitu: parameter error, proses error, dan model error.

*Mean Squared Error* (MSE) dari prediktor dimanfaatkan sebagai ukuran perkiraan error.

### a. Parameter Error dan Proses Error

#### 1. Observasi Individu (segitiga atas).

Untuk semua klaim  $Y_{i,k} \in D$ , dengan  $D$  adalah semua klaim yang telah diob-





servasi (segitiga atas), berlaku

$$Y_i = u(i; \theta) + \varepsilon_i, \text{ untuk } Y_i \in D, \quad (2.60)$$

untuk suatu fungsi  $u$  yang bergantung pada suatu vektor parameter  $\theta$ , dan pusat error statistik  $\varepsilon_i$  sedemikian hingga

$$E[\varepsilon_i] = 0. \quad (2.61)$$

Model dalam persamaan (2.60) dan persamaan (2.61) diasumsikan telah disesuaikan terhadap seluruh data di  $D$ , sehingga menghasilkan  $\hat{\theta}$ . Selanjutnya didefinisikan

$$\hat{Y}_i = u(i; \hat{\theta}), \text{ untuk } Y_i \in D. \quad (2.62)$$

Selanjutnya, nilai  $\hat{Y}_i$  adalah perkiraan dari  $Y_i \in D$  (*fitted value*), sebagaimana  $Y_i$  telah dinyatakan dalam persamaan (2.56). Prediksi error yang berhubungan dengan  $\hat{Y}_i$  adalah

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = [u(i; \theta) - u(i; \hat{\theta})] + \varepsilon_i, \quad (2.63)$$

di mana persamaan bagian kedua didapatkan dari persamaan (2.60) dan persamaan (2.62).

Dari persamaan (2.60) dan persamaan (2.61) diperoleh

$$E[Y_i] = u(i; \theta),$$

sehingga persamaan (2.63) dapat dinyatakan ulang sebagai

$$e_i = [\mu_i - \hat{Y}_i] + \varepsilon_i, \quad (2.64)$$

di mana  $\mu_i = E[Y_{i,k}]$ .

Bentuk yang berada di dalam kurung siku pada persamaan (2.64) atau persamaan (2.63) adalah beda antara mean sebenarnya (namun belum diketahui) pada klaim-klaim dimasa yang akan datang dan perkiraannya. Bentuk tersebut disebut



sebagai parameter error yang berhubungan dengan  $(\hat{Y})_i$ . Bentuk  $\varepsilon_i$  adalah *noise* atau sering disebut sebagai proses error. Dari pernyataan tersebut, dapat diketahui bahwa meskipun model telah dikalibrasi secara sempurna (parameter error bernilai nol), prediksi error akan tetap muncul dari klaim yang diestimasi pada segitiga bawah.

Sering kali parameter error dan proses error ditunjukkan sebagai bebas stokastik. Parameter error bergantung pada  $Y_i$  yang merupakan fungsi dari data di  $D$ , sedangkan  $\varepsilon_i$  adalah komponen dari data masa depan  $D^c$ . Jika formulasi model disusun berdasarkan komponen  $Y_i$  yang berasal dari data  $D$  (masa lalu) dan  $\varepsilon_i$  berasal dari data masa depan adalah saling bebas, maka parameter error dan proses error juga saling bebas. Dalam pencadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM tidak melibatkan model error dalam perhitungannya.

## 2. Cadangan Klaim GLM (segitiga bawah)

Untuk mempermudah perhitungan, prediksi error dipresentasikan ke dalam bentuk vektor. Misal  $\mathbf{Y}$  merupakan suatu vektor dengan anggota  $Y_i \in D$ , sehingga untuk  $\mathbf{Y}^*$  dengan anggota  $Y_i \in D^c$  juga merupakan suatu vektor. Ditambahkan lambang bintang ke simbol jika data mengacu pada masa depan. Jadi terdapat  $\mathbf{Y}^*$  dan  $\hat{\mathbf{Y}}^*$ .

Untuk menyesuaikan kondisi ini, persamaan (2.64) dirubah menjadi

$$e^* = [\mu^* - \hat{\mathbf{Y}}^*] + \varepsilon^*$$

selanjutnya, jika terdapat kombinasi linear dari komponen-komponen  $\mathbf{Y}^*$  yang dinotasikan sebagai  $r'\mathbf{Y}^*$  di mana  $r$  merupakan vektor dan tanda petik ' adalah transposisi dari vektor maka model akan dikalibrasi dan disesuaikan.

(Dobson dan Barnett (2008), Taylor dan McGuire (2016))

### 2.10.6 Deskripsi Visual Model Regresi Pada Segitiga *Run-Off*

Secara formal disusun suatu bentuk matriks model untuk menggambarkan hubungan antara data yang ingin dimodelkan (besar klaim *incremental* untuk setiap sel dalam segitiga *run-off*) dan variabel yang mempengaruhinya (*accident*

*period* dan *development period*). Berikut ini adalah representasi segitiga *run-off* dengan *accident period* selama 5 periode dan *development period* selama 5 periode perkembangan beserta matriks model yang bersesuaian.

Tabel 2.9: Segitiga *Run-Off Incremental* 5x5

<i>Accident Period</i>	<i>Development Period</i>				
	1	2	3	4	5
1	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	$S_{1,3}$	$S_{1,4}$	$S_{1,5}$
2	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$	$S_{2,3}$	$S_{2,4}$	
3	$S_{3,1}$	$S_{3,2}$	$S_{3,3}$		
4	$S_{4,1}$	$S_{4,2}$			
5	$S_{5,1}$				

Selanjutnya, nilai klaim *incremental* pada segitiga *run-off* dirubah ke dalam struktur GLM. Variabel  $S_{i,k}$  digunakan sebagai respon. Struktur GLM yang digunakan adalah bentuk klasifikasi dua arah berdasarkan dua kategori, yaitu *accident period* dan *development period*. Masing-masing kategori diklasifikasikan kedalam 5 kelas, yaitu  $\alpha_i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, 5$  untuk kategori *accident period* dan  $\beta_k$  dengan  $k = 1, 2, \dots, 5$  untuk kategori *development period*. Setelah struktur GLM ditentukan, langkah selanjutnya yaitu membangun matriks model. Berikut ini adalah matriks model yang bersesuaian dengan segitiga *run-off*  $5 \times 5$ .

Tabel 2.10: Matriks Model

Parameter	$\gamma$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$\beta_4$	$\alpha_4$	$\beta_5$	$\alpha_5$
<b>Data</b>	<b>Matrik Model</b>								
<b>Y</b>	<b>X</b>								
inc(1,1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0
inc(1,2)	1	1	0	0	0	0	0	0	0
inc(2,1)	1	0	1	0	0	0	0	0	0
inc(2,2)	1	1	1	0	0	0	0	0	0
inc(1,3)	1	0	0	1	0	0	0	0	0
inc(3,1)	1	0	0	0	1	0	0	0	0
inc(2,3)	1	0	1	1	0	0	0	0	0
inc(3,2)	1	1	0	0	1	0	0	0	0
inc(1,4)	1	0	0	0	0	1	0	0	0
inc(4,1)	1	0	0	0	0	0	1	0	0
inc(3,3)	1	0	0	1	1	0	0	1	0
inc(2,4)	1	0	1	0	0	1	0	0	0
inc(4,2)	1	1	0	0	0	0	1	0	0
inc(1,5)	1	0	0	0	0	0	0	1	0
inc(5,1)	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	<b>Nilai</b>								
	<b>Exp(X.b)</b>								
	$\exp(\gamma)$								
	$\exp(\beta_2 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_2 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma)$								
	$\exp(\beta_3 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_3 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_2 + \beta_3 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_3 + \beta_4 + \gamma)$								
	$\exp(\beta_4 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_4 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_2 + \beta_4 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_4 + \beta_2 + \gamma)$								
	$\exp(\beta_5 + \gamma)$								
	$\exp(\alpha_5 + \gamma)$								



Masing-masing kolom pada matriks model X mempresentasikan variabel yang berpengaruh terhadap kolom vektor  $y$  yang bersesuaian dan masing-masing baris pada matriks model X merupakan representasi dari setiap sel yang ada pada segitiga *run-off*. Semua entri pada matriks X berisi 0 dan 1. Nilai 1 berarti bahwa terdapat hubungan antara parameter dengan kolom serta baris yang membangun *fitted value*. Nilai 0 untuk sebaliknya. Vektor  $Y$  mempresentasikan data yang telah diobservasi (klaim *incremental*).  $inc(i, k)$  adalah besarnya klaim increment pada *accident period* ke  $i$  dan *development period* ke- $k$ .

Tabel 2.11: Struktur GLM pada Segitiga *Run-Off Incremental* 5 x 5

Accident Period	Development Period				
	1	2	3	4	5
1	$\gamma$	$\beta_2 + \gamma$	$\beta_3 + c$	$\beta_4 + \gamma$	$\beta_5 + \gamma$
2	$\alpha_2 + \gamma$	$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma$	$\alpha_2 + \beta_3 + \gamma$	$\alpha_2 + \beta_4 + \gamma$	
3	$\alpha_3 + \gamma$	$\alpha_3 + \beta_2 + \gamma$	$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma$		
4	$\alpha_4 + \gamma$	$\alpha_4 + \beta_2 + \gamma$			
5	$\alpha_5 + \gamma$				

Tabel 2.11 merupakan struktur GLM pada segitiga *Run-Off Incremental* 5x5 yang bersesuaian dengan matriks model.

(Hartl, 2010)

### 2.11 Metode *Chain-Ladder* Sebagai *Generalized Linear Model* (GLM)

Pada sub-bab ini, pembahasan tentang GLM dirangkum berdasarkan McCullagh dan Nelder (1989), Nelder dan Baker (1972). Segitiga *run-off* yang digunakan sebagai dasar GLM adalah bentuk *incremental* tinjau kembali Tabel 2.3. Diasumsikan bahwa data yang telah diobservasi untuk  $i = 1, \dots, I$ , dan  $k = 1, \dots, I$  adalah  $S_{i,k} : i = 1, \dots, I; k = 1, \dots, I - i + 1$ . Jumlah klaim kumulatif pada *accident period*  $i$



yang telah dilaporkan sampai dengan *development period*  $k$  didefinisikan oleh persamaan (2.1). Faktor perkembangan dari teknik *Chain-Ladder* didefinisikan oleh persamaan (2.3).

Menurut England dan Verrall (1999) serta Neter dkk., (1996) terdapat asumsi dasar untuk model GLM dalam konteks pencadangan klaim, yaitu:

1. Tidak terdapat *tail development*. GLM digunakan hanya untuk memproyeksikan klaim terakhir pada data yang telah diobservasi ( $C_{i,I+1-i}$ ).
2. Setiap klaim *incremental* adalah bebas stokastik.
3. Model cenderung *over-parameterized*, sehingga dapat menyebabkan kinerja prediktor tidak maksimal.

Mengacu pada Renshaw dan Verrall (1998) serta Tee (2017) dan indeks yang telah disesuaikan, struktur dari model stokastik untuk cadangan klaim dalam konteks

GLM adalah:

1. Klaim *incremental*  $S_{i,k}$  adalah anggota dari keluarga eksponensial.
2.  $E(S_{i,k}) = \mu_{i,k}$ .
3.  $\eta_{i,k} = g(\mu_{i,k})$ , di mana  $g(\cdot)$  adalah fungsi penghubung atau sering disebut sebagai *link function*.
4. Prediktor linear  $\eta_{i,k} = \gamma + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_k$ , dengan  $\gamma$  sebagai intercept dan  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_k$  merupakan faktor efek. Untuk menghindari *overparameterized* dan mengatasi permasalahan multikolinieritas yang muncul adalah dengan metode *reference cell* di mana salah satu  $\alpha$  dan  $\beta$  dibuat menjadi sama dengan nol,  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1 = 0$ .

## 2.12 GLM dan Distribusi Keluarga Tweedie

Berikut ini disajikan contoh penerapan GLM dengan menggunakan pendekatan distribusi ODP. Regresi Poisson adalah model regresi non-linear dengan nilai respon berupa diskrit. Regresi Poisson sangat berguna saat nilai ( $Y_i = 0, 1, 2, \dots$ ).

GLM untuk *count data* diasumsikan berdistribusi Poisson pada *random component*.

Nilai peluang untuk distribusi Poisson dihitung dengan menggunakan persamaan

$$Pr[Y = y] = f(Y) = \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!}, \quad Y = 1, 2, \dots$$

dengan  $E(Y) = \mu$  dan  $\sigma^2 = \mu$ , sedangkan FKP untuk distribusi Poisson telah dijabarkan pada sub-bab sebelumnya. Model log linear Poisson ditunjukkan oleh persamaan sebagai berikut

$$\ln(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \dots + \beta_{p-1} x_{i,p-1};$$

$$\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i' \mathbf{b}) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \dots + \beta_{p-1} x_{i,p-1})$$

dengan

$$\mathbf{x}_i' = \begin{bmatrix} 1 & X_{i,1} & x_{i,2} & \dots & x_{i,p-1} \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix}$$

di mana  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah unit observasi dan  $p$  adalah banyak koefisien regresi.

Pada regresi Poisson, nilai  $\hat{Y}$  dapat ditaksir dengan menggunakan  $\mu$ ,

$$\hat{Y} = E(Y|X)$$

karena  $E(Y|X) = \mu$ , maka  $\hat{Y} = \mu = \exp(\mathbf{Xb})$

Penaksiran parameter model regresi Poisson dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yaitu dengan cara memaksimalkan fungsi *likelihood*. Pada regresi Poisson, bentuk dari fungsi *likelihood* adalah sebagai berikut

$$\ln L(\mathbf{b}) = \ln \left( \prod_{i=1}^n f_i \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{\exp(-\mu_i) \mu_i^{Y_i}}{Y_i!} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\exp(-\mu_i) \mu_i^{Y_i}}{Y_i!} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( \ln(e^{-\mu_i}) + \ln(\mu_i^{Y_i}) - \ln(Y_i!) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( -\mu_i + Y_i \ln \mu_i - \ln(Y_i!) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( -\exp(\mathbf{X}_i' \mathbf{b}) + Y_i \ln(\exp(\mathbf{X}_i' \mathbf{b})) - \ln(Y_i!) \right) \\
 &= - \sum_{i=1}^n \exp(\mathbf{X}_i' \mathbf{b}) + \sum_{i=1}^n Y_i \mathbf{X}_i' \mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \ln(Y_i!).
 \end{aligned}$$

Setelah fungsi  $\ln$  *likelihood* diperoleh, untuk mendapatkan nilai maksimum dari  $\ln L(\mathbf{b})$  maka fungsi  $\ln L(\mathbf{b})$  diturunkan terhadap parameter yang akan dicari dan disamadengankan 0. Estimasi parameter  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}_i$ , dan  $\hat{\beta}_k$  didapatkan dengan analisis numerik.

(England dan Verrall (2002), Tee (2017))

### 2.13 Pengujian Parameter

Pengujian hipotesis untuk mengetahui parameter-parameter pada *accident period* dan *development period* mana saja yang berpengaruh signifikan terhadap model regresi. Hipotesis untuk pengujian parameter *accident period* pada persamaan regresi adalah sebagai berikut.

- Hipotesis

$$H_0 : \alpha_i = 0$$

(Pengaruh variabel *accident period* ke- $i$  terhadap estimasi cadangan klaim tidak signifikan).

$$H_0 : \alpha_i \neq 0$$

Pengaruh variabel *accident period* ke- $i$  terhadap estimasi cadangan klaim signifikan).

dengan  $i = 2, 3, \dots, I$



- Tingkat Signifikansi

$$\alpha = 5\% = 0,05.$$

- Daerah penolakan

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika } |T - \text{hitung}| > t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-p\right)}(t_{0,025, n-p}) = 2,03 \text{ atau } p\text{-value} < \alpha.$$

Hipotesis untuk pengujian parameter *development period* pada persamaan regresi adalah sebagai berikut.

- Hipotesis

$$H_0 : \beta_k = 0$$

(Pengaruh variabel *development period* ke-k terhadap estimasi cadangan klatim tidak signifikan).

$$H_0 : \beta_k \neq 0$$

(Pengaruh variabel *development period* ke-k terhadap estimasi cadangan klatim signifikan).

dengan  $k = 2, 3, \dots, I$

- Tingkat Signifikansi

$$\alpha = 5\% = 0,05$$

- Daerah penolakan

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika } |T - \text{hitung}| > t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-p\right)}(t_{0,025, n-p}) = 2,03 \text{ atau } p\text{-value} < \alpha.$$

(Netter dkk., (1996), Tee (2017), England dan Verrall (2002))

## 2.14 MSE (Mean Squared Error)

Mean Squared Error (MSE) untuk Metode GLM dengan pendekatan distribusi ODP adalah

$$\widehat{mse}(S_{i,k}) \approx \sum_{k \in D} \phi \hat{\mu}_{i,k} + \sum_{k \in D} \hat{\mu}_{i,k}^2 \text{Var}(\hat{\eta}_{i,k}) + 2 \sum_{k_1, k_2 \in D} \hat{\mu}_{i,k_1} \hat{\mu}_{i,k_2} \text{Cov}(\hat{\eta}_{i,k_1}, \hat{\eta}_{i,k_2}). \quad (2.65)$$





Untuk model Gamma dengan  $E(S_{i,k}) = \mu_{i,k}$  dan  $Var(S_{i,k}) = \phi \mu_{i,k}^2$ , diperoleh nilai  $\widehat{mse}(S_{i,k})$  adalah

$$\widehat{mse}(S_{i,k}) \approx \sum_{k \in D} \phi \hat{\mu}_{i,k}^2 + \sum_{k \in D} \hat{\mu}_{i,k}^2 Var(\hat{\eta}_{i,k}) + 2 \sum_{k_1, k_2 \in D} \hat{\mu}_{i,k_1} \hat{\mu}_{i,k_2} Cov(\hat{\eta}_{i,k_1}, \hat{\eta}_{i,k_2}). \quad (2.66)$$

Untuk model majemuk Poisson-Gamma dengan  $E(S_{i,k}) = \mu_{i,k}$  dan  $Var(S_{i,k}) = \phi \mu_{i,k}^p$  dan  $p \in (1, 2)$ , diperoleh nilai  $\widehat{mse}(S_{i,k})$  adalah

$$\widehat{mse}(S_{i,k}) \approx \sum_{k \in D} \phi \hat{\mu}_{i,k}^p + \sum_{k \in D} \hat{\mu}_{i,k}^2 Var(\hat{\eta}_{i,k}) + 2 \sum_{k_1, k_2 \in D} \hat{\mu}_{i,k_1} \hat{\mu}_{i,k_2} Cov(\hat{\eta}_{i,k_1}, \hat{\eta}_{i,k_2}). \quad (2.67)$$

(Wüthrich (2016), England dan Verrall (2002))

## 2.15 Multikolinieritas

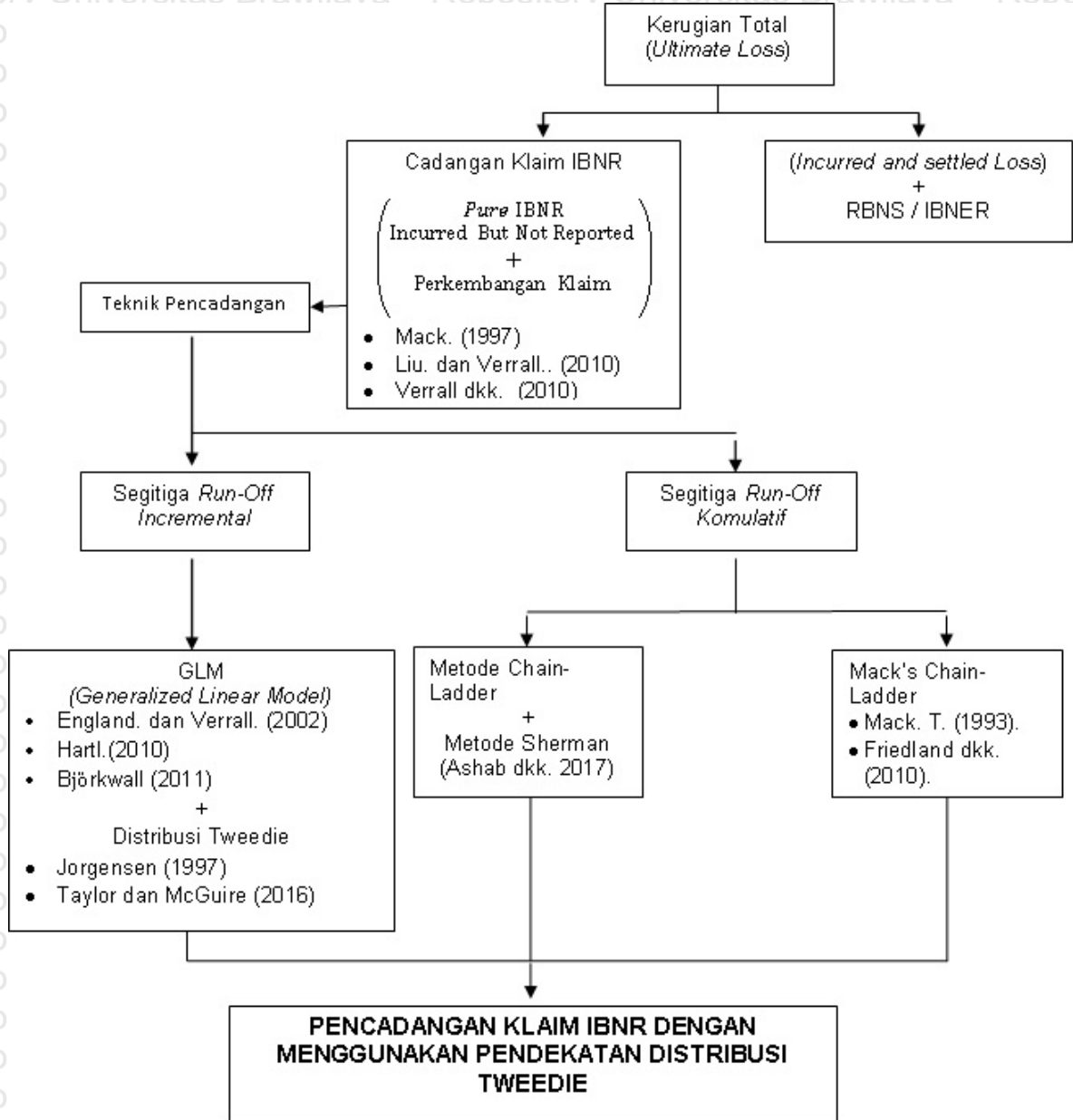
Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam pembentukan model regresi dengan beberapa variabel adalah tidak adanya kasus multikolinieritas. Multikolinieritas adalah kondisi terdapatnya hubungan linier atau korelasi yang tinggi antar satu variabel prediktor dengan variabel prediktor yang lain. Dalam model regresi, adanya korelasi antar variabel prediktor menyebabkan estimasi parameter regresi yang dihasilkan akan memiliki *error* yang sangat besar. Salah satu cara pendeteksian kasus multikolinieritas adalah dengan melihat nilai koefisien *residual* Pearson ( $R_i^p$ ) antar variabel prediktor. Jika  $R_i^p$  lebih dari 0,95 maka terdapat korelasi antar variabel tersebut.

(Hocking dan Smith, 1968)



BAB 3

KERANGKA KONSEP PENELITIAN



Gambar 3.1: Kerangka Penelitian

Gambar 3.1 merupakan kerangka konsep penelitian dalam penulisan tesis ini. Kerugian total atau *ultimate loss* dalam asuransi *non-life* adalah jumlah dari



cadangan klaim IBNR dan total dari kerugian yang telah terjadi serta telah dilaporkan (*incurred and settled loss*) dan klaim IBNER atau klaim RBNS. Penelitian ini akan mengestimasi hasil pencadangan klaim IBNR yang diperoleh dari beberapa metode pencadangan klaim IBNR, yaitu metode *chain-ladder* dengan pendekatan metode Sherman, metode MCL dan metode GLM. Data yang digunakan pada metode GLM adalah berbentuk segitiga *Run-Off Incremental*, sedangkan data yang digunakan pada metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman dan metode MCL adalah berbentuk segitiga *Run-Off* kumulatif. Distribusi yang digunakan pada metode GLM adalah distribusi ODP, distribusi Gamma, dan distribusi majemuk Poisson-Gamma.



## BAB 4

### METODE PENELITIAN

#### 4.1 Sumber Data

Data yang dipergunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder.

Data diperoleh dari [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2966126](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2966126) yang diakses pada tanggal 31 Januari 2018. Data terdiri dari 9.919.679 klaim individu dari asuransi kecelakaan. Data tidak memuat simbol mata uang dari negara tertentu. Terdapat 5 informasi tambahan (*additional features*) terkait data, yaitu meliputi:

- AQ *Accident Quarter* dengan  $AQ \in \{1, 2, 3, 4\}$   
AQ di dalam asuransi *non-life* merupakan pengelompokkan klaim-klaim menjadi empat kelompok berdasarkan waktu terjadinya kejadian dalam satu tahun.
- LoB *Line of Bussines* dengan  $LoB \in \{1, 2, 3, 4\}$
- cc *claim code* dengan  $cc \in \{1, 2, \dots, 51\}$   
cc menotasikan *labor sector* individu yang mengalami kecelakaan
- umur individu yang mengalami kecelakaan dengan  $age \in \{15, 20, \dots, 70\}$
- inj-part  $\in \{1, 2, \dots, 46\}$

#### 4.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri atas variabel respon dan variabel prediktor. Variabel respon adalah variabel terikat yang menjadi objek penjelasan suatu model sedangkan variabel prediktor adalah variabel tak terikat yang menjelaskan suatu model. Dalam penelitian ini variabel respon yaitu besar estimasi cadangan klaim kumulatif IBNR ( $\hat{C}_{i,k}$ ) dan besar estimasi cadangan klaim

*incremental* IBNR ( $\hat{S}_{i,k}$ ) pada *development period*  $I - i + 1 < k < I$ , sedangkan variabel prediktor dalam penelitian ini adalah besar cadangan klaim kumulatif IBNR ( $C_{i,k}$ ) dan besar cadangan klaim *incremental* IBNR ( $S_{i,k}$ ) pada *development period*  $1 < k < I - i + 1$ . Terdapat dua faktor yang mempengaruhi variabel prediktor yaitu *accident period* dan *development period*. Variabel penelitian dalam penulisan tesis ini disajikan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1: Variabel Penelitian

No	Variabel	Simbol	Skala
1	Besar estimasi cadangan klaim kumulatif dan besar estimasi cadangan klaim <i>incremental</i> dengan $1 < i < I$ dan $I - i + 1 < k < I$	$\hat{C}_{i,k}$ dan $\hat{S}_{i,k}$	Rasio
2	Besar cadangan klaim kumulatif dan besar cadangan klaim <i>incremental</i> dengan $1 < i < I$ dan $1 < k < I - i + 1$	$C_{i,k}$ dan $S_{i,k}$	Rasio

#### 4.3 Langkah Analisis

Langkah analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

##### 4.3.1 Menentukan Karakteristik Data

Langkah awal dalam penelitian ini adalah menentukan karakteristik data

1. Mengelompokkan data menjadi bentuk segitiga *run-off* kumulatif (Tabel 2.4) dan segitiga *run-off incremental* (Tabel 2.3) untuk masing-masing LoB.
2. Visualisasi data untuk segitiga *run-off* kumulatif dan *incremental* pada masing-masing LoB.

##### 4.3.2 Menentukan Cadangan Klaim IBNR

Langkah kedua adalah menentukan cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode *Chain-Ladder*, metode MCL, dan metode GLM.



### Metode Chain-Ladder

- Menentukan cadangan klaim IBNR dengan menggunakan teknik dasar Chain-Ladder pada masing-masing LoB
  - Menentukan estimasi faktor perkembangan ( $\hat{f}_k$ ).
  - Menentukan hasil ekstrapolasi log-linear pada  $\hat{f}_k^*$
  - Menentukan eksponen dari hasil ekstrapolasi log-linear  $\hat{f}_k^{exp}$  sampai dengan  $k = 100$ .
  - Menentukan  $\hat{f}_k^{tail}$ .
  - Menentukan  $\hat{f}_k^{CL}$ .
  - Menentukan  $\hat{C}_{i,k}$ .
  - Menentukan  $\hat{C}_i^{ult}$ .
  - Menentukan  $\hat{R}_i^{cl}$ .
  - Menentukan estimasi cadangan klaim IBNR total  $\hat{R}^{cl}$ .
- Mengulang perhitungan untuk LoB 2, LoB 3, dan LoB 4.

### Metode Mack's Chain-Ladder (MCL)

- Menentukan cadangan klaim.
  - Menentukan  $\hat{f}_k^{(w)}$ .
  - Menentukan  $\hat{C}_{i,k}$ .
  - Menentukan  $\hat{C}_{i,l}$ .
  - Menyusun segitiga run-off bagian bawah.
  - Menentukan  $\hat{R}_i$  dan  $\hat{R}^{Mack's}$ .
- Menentukan Coefficient of Variation (CV) dari  $s.e.\hat{R}^{Mack's}$ .
  - Menentukan  $F_{i,k}$ .
  - Menentukan  $\hat{\sigma}_k^{2w}$ .
  - Menentukan  $s.e.\hat{f}_k^{(w)}$ .



(d) Menentukan  $\hat{\sigma}_k^{(w)}$ .

(e) Menentukan  $s.e.(\hat{F}_{i,k})$ .

(f) Menentukan  $Process Risk_{i,k}^2$ .

(g) Menentukan  $Parameter Risk_{i,k}$ .

(h) Menentukan  $s.e.\hat{R}_{i,k}$ .

(i) Menentukan CV.

(j) Mempresentasikan *Standardized Residual* dalam bentuk grafik.

3. Mengulang perhitungan untuk LoB 2, LoB 3, dan LoB 4.

### Metode GLM

Pencadangan klaim dengan menggunakan metode GLM melibatkan tiga model distribusi yaitu: distribusi ODP, distribusi Gamma dan distribusi majemuk Poisson-Gamma.

1. Mentransformasi data pada segitiga *run-off* dalam struktur GLM tabel (2.11), yaitu dengan cara menyusun:

- Vektor  $\mathbf{Y}$ .
- Matrix model  $\mathbf{X}$ .
- Vektor  $\mathbf{b}$ .

2. Menentukan *Link Function*.

3. Menentukan estimasi parameter menggunakan perangkat lunak R package GLM.

4. Melakukan Uji Signifikansi.

5. Menyusun model regresi.

6. Menyusun Matrix model yang bersesuaian dengan segitiga *run-off* bagian bawah  $\hat{Y}^*$ .

7. Menentukan  $S_{i,k}$  dengan  $1 \leq i \leq I$  dan  $I+1-i \leq k \leq I$ .



8. Menentukan  $R_i^p$ .

9. Menentukan prediksi error.

(a) Menentukan parameter error

(b) Menentukan proses error

10. Mengulang perhitungan untuk masing-masing distribusi pada LoB 1, LoB 2, LoB 3, dan LoB 4.

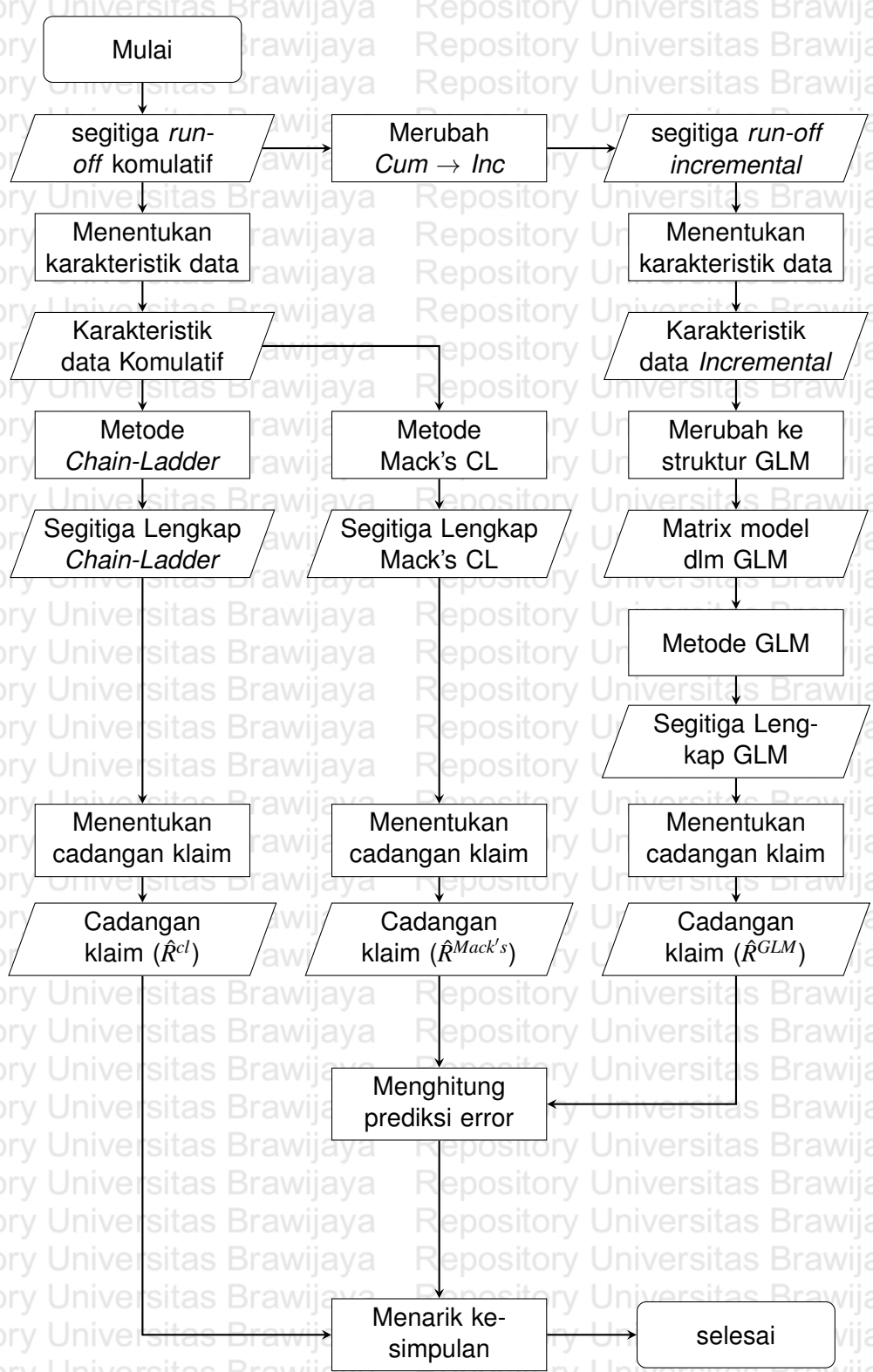
11. Mengulang proses untuk distribusi Gamma dan distribusi majemuk Poisson-Gamma

Setelah hasil estimasi cadangan klaim IBNR diperoleh dengan menggunakan metode MCL dan metode GLM yang melibatkan tiga distribusi keluarga Tweedie, langkah selanjutnya yaitu menganalisis hasil estimasi cadangan klaim IBNR.





#### 4.4 Diagram Alir



Gambar 4.1: Diagram Alir Metode Penelitian



## BAB 5

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini diuraikan hasil analisis perhitungan cadangan klaim IBNR berdasarkan pada data yang diperoleh dari Wüthrich (2017). Sebagaimana dipaparkan dalam bab sebelumnya bahwa data terdiri dari empat *line of business*, yaitu: LoB 1, LoB 2, LoB 3, dan LoB 4. Analisis yang digunakan adalah analisis deskriptif. Estimasi cadangan klaim IBNR diperoleh dengan menggunakan metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman *curve-fitting*, metode MCL dan *Generalized Linear Model* (GLM) dengan pendekatan distribusi keluarga Tweedie.

Secara garis besar, langkah dalam penelitian ini yaitu menentukan karakteristik data yang sesuai dengan metode yang digunakan selanjutnya menentukan cadangan klaim dengan menggunakan berbagai metode yang telah diusulkan. Perangkat lunak R dipergunakan sebagai alat bantu untuk mempermudah perhitungan pencadangan serta mengestimasi parameter dalam metode GLM.

#### 5.1 Karakteristik Data

Struktur data dalam penelitian ini dibagi menjadi dua, yaitu segitiga *run-off* kumulatif dan segitiga *run-off incremental*. Segitiga *run-off* kumulatif digunakan sebagai input data pada metode *Chain-Ladder* dan metode MCL, sedangkan segitiga *run-off incremental* digunakan pada metode GLM.

##### 5.1.1 Segitiga *Run-Off* Kumulatif

Berikut ini disajikan segitiga *run-off* kumulatif untuk LoB 1. Selanjutnya, untuk LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 dapat dilihat pada Lampiran 2.

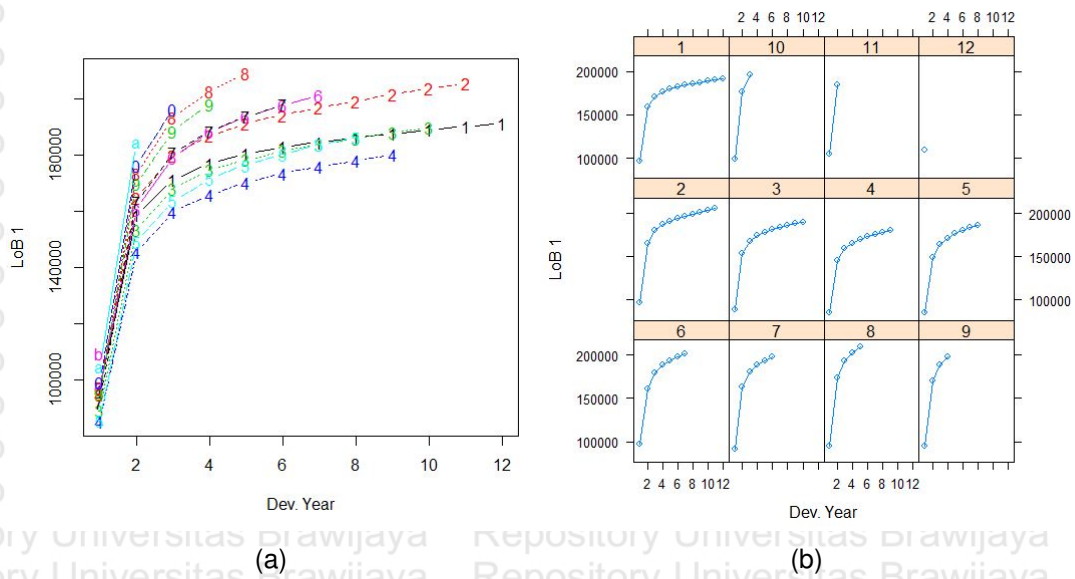
Tabel 5.1: Segitiga *Run-Off* Kumulatif pada LoB1 (dalam 1.000)

Acc. Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	96.118	158.801	171.240	177.068	180.396	182.848	184.616	186.221	187.606	189.001	190.196	191.335
2	97.350	164.884	179.798	186.834	191.205	194.134	196.783	199.158	201.558	203.654	205.478	
3	89.018	153.536	167.939	174.670	178.250	181.468	183.819	185.946	188.019	189.919		
4	85.127	145.480	159.816	165.758	170.319	173.500	175.953	178.173	180.230			
5	85.516	149.098	163.633	171.514	176.388	180.106	183.556	186.212				
6	96.833	160.676	179.112	188.277	193.684	197.668	201.198					
7	91.886	163.360	180.811	188.524	193.635	197.865						
8	94.711	173.229	193.322	202.775	209.208							
9	95.071	169.761	188.511	198.164								
10	98.998	176.217	196.305									
11	104.434	184.382										
12	109.294											

Tabel 5.1 memuat total klaim yang telah dilunasi oleh pihak perusahaan secara kumulatif. Pada *accident period* pertama terdapat dua belas periode perkembangan. Hal ini berarti terdapat kemungkinan klaim-klaim yang terjadi pada *accident period* pertama dapat diselesaikan secara tuntas pada periode perkembangan ke-12. Sebagai contohnya, pada *accident period* ke-6 dan *development period* ke-1 klaim yang telah dibayarkan adalah sebanyak 96.833 (dalam 1.000). Selanjutnya, pada periode perkembangan berikutnya, total klaim yang telah dibayarkan meningkat menjadi 163.360 (dalam 1.000). Jumlah diagonal (kiri bawah sampai kanan atas) mempresentasikan total klaim yang dibayarkan oleh pihak perusahaan hingga *accident period* ke-*i*. Misalnya, total klaim yang telah dilunasi oleh perusahaan hingga *accident period* ke-6 adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 C_{6,1} + C_{5,2} + C_{4,3} + C_{3,4} + C_{2,5} + C_{1,6} &= 96.833 + 149.098 + 159.816 + 174.670 \\
 &\quad + 191.205 + 182.848 \\
 &= 954.468.
 \end{aligned}$$

Untuk mempermudah melihat *trend* yang terjadi pada perkembangan klaim, disajikan visualisasi data yang bersesuaian dengan Tabel 5.1.



Gambar 5.1: Visualisasi Besar Klaim Kumulatif pada LoB 1 (a) Dalam satu grafik, (b) Setiap *Accident Period*.

Gambar 5.1 (a) merupakan visualisasi besar klaim kumulatif dalam satu grafik, sedangkan Gambar 5.1 (b) adalah visualisasi besar klaim kumulatif untuk setiap *accident period*. Angka yang ditunjukkan pada Gambar 5.1 (a) menyatakan *accident period*. Sebagai contohnya adalah angka satu dengan garis berwarna hitam merupakan visualisasi *development period* 1 sampai dengan 12 untuk *accident period* pertama. Selanjutnya, visualisasi karakteristik data pada LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 yang bersesuaian dengan segitiga *run-off* kumulatif disajikan di Lampiran 4.

Secara garis besar, trend yang terjadi pada besar klaim kumulatif yang telah dilaporkan maupun telah dilunasi oleh pihak perusahaan untuk masing-masing LoB mengikuti distribusi eksponensial. Dapat dilihat dari setiap grafik pada seluruh LoB, perbedaan yang mencolok terlihat pada LoB 2 pada saat *accident period* ke-6 dan *development period* ke-6. Jumlah klaim yang dilaporkan maupun telah dilunasi mengalami peningkatan yang besar.

### 5.1.2 Segitiga *Run-Off Incremental*

Berikut ini akan disajikan segitiga *run-off incremental* untuk LoB 1. Selanjutnya, untuk LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 dapat dilihat pada Lampiran 3.

Tabel 5.2: Segitiga *Run-Off* Incremental pada LoB 1 (dalam 1.000)

Acc. Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	96.118	62.683	12.439	5.828	3.328	2.452	1.768	1.605	1.385	1.395	1.195	1.139
2	97.350	67.534	14.914	7.036	4.371	2.929	2.649	2.375	2.400	2.096	1.824	
3	89.018	64.518	14.403	6.731	3.580	3.218	2.351	2.127	2.073	1.900		
4	85.127	60.353	14.336	5.942	4.561	3.181	2.453	2.220	2.057			
5	85.516	63.582	14.535	7.881	4.874	3.718	3.450	2.656				
6	96.833	63.843	18.436	9.165	5.407	3.984	3.530					
7	91.886	71.474	17.451	7.713	5.111	4.230						
8	94.711	78.518	20.093	9.453	6.433							
9	95.071	74.690	18.750	9.653								
10	98.998	77.219	20.088									
11	104.434	79.948										
12	109.294											

Tabel 5.2 memuat klaim yang telah terjadi dan dilaporkan pada pihak perusahaan asuransi dalam bentuk *incremental*. Dapat diartikan bahwa klaim yang masuk pada *accident period* ke-1 sebagian diselesaikan pada tahun yang sama dan sisanya diselesaikan pada tahun-tahun berikutnya. Sebagai contohnya, pada *accident period* ke-6 dan *development period* ke-1 sebanyak 96.833 (dalam 1.000) klaim telah dilunasi oleh perusahaan. Selanjutnya pada tahun ketujuh atau *accident period* ke-6 dan *development period* ke-2 perusahaan melunasi hutang klaim sebesar 63.843. Hutang klaim yang dilunasi perusahaan cenderung menurun seiring dengan bertambahnya *development period*. Hal tersebut dapat terjadi karena pihak perusahaan cenderung melunasi hutang klaim pada tahun awal pelaporan. Terdapat berbagai kemungkinan klaim-klaim yang telah dilaporkan mengalami penundaan pelunasan hingga bertahun-tahun. Beberapa penyebabnya adalah klaim yang diajukan oleh pemegang polis ditolak oleh pihak asuransi karena kurang lengkapnya dokumen pendukung, dan adanya keterlibatan pihak pengadilan tinggi. Proses yang terjadi di pengadilan tinggi inilah yang menyebabkan waktu pelunasan klaim tertunda lama.

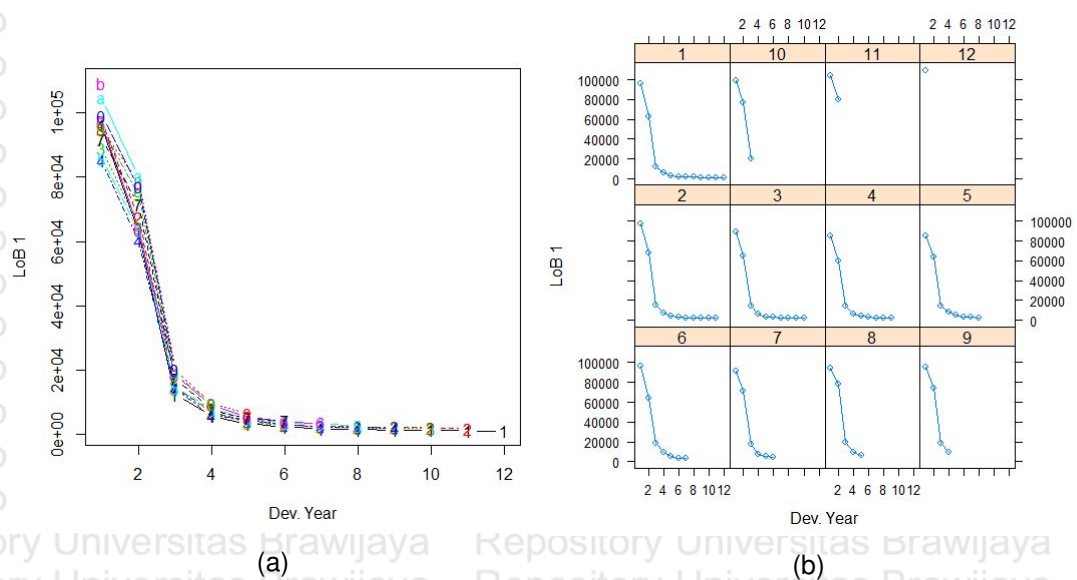
Jumlah diagonal (kiri bawah sampai kanan atas) pada segitiga *run-off incremental* mempresentasikan total klaim yang telah dilunasi oleh pihak perusahaan pada *accident period* ke-*i*. Hal ini berbeda dengan representasi jumlah diagonal



pada segitiga *run-off* kumulatif. Sebagai contohnya, total klaim yang telah dibayar oleh pihak perusahaan pada accident period ke-6 adalah sebesar

$$\begin{aligned}
 S_{6,1} + S_{5,2} + S_{4,3} + S_{3,4} + S_{2,5} + S_{1,6} &= 96.833 + 63.582 + 14.336 + 6.731 \\
 &\quad + 4.371 + 2.452 \\
 &= 188.305.
 \end{aligned}$$

Untuk mempermudah melihat trend yang terjadi pada perkembangan klaim yang telah dilunasi oleh pihak perusahaan secara *incremental*, disajikan visualisasi data yang bersesuaian dengan Tabel 5.2.



Gambar 5.2: Visualisasi Besar Klaim *Incremental* LoB1 (a) Dalam satu grafik, (b) Setiap *Accident Period*

Gambar 5.5 (a) adalah visualisasi besar klaim yang telah dilunasi oleh pihak perusahaan asuransi untuk seluruh *accident period*, sedangkan Gambar 5.5 (b) untuk masing-masing *accident period*. Selanjutnya, visualisasi karakteristik data untuk LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 dapat dilihat pada Lampiran 5.

Secara garis besar, trend yang terjadi pada besar klaim *incremental* yang telah dilaporkan maupun telah dilunasi oleh pihak perusahaan untuk masing-masing LoB mengikuti distribusi eksponensial-*decay*.



## 5.2 Estimasi Cadangan Klaim IBNR Dengan Metode *Chain-Ladder* Yang Didekati Dengan Metode Sherman

Struktur data yang digunakan pada metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman dalam pencadangan klaim IBNR adalah segitiga *run-off* kumulatif. *Pseudocode* dapat dilihat pada Lampiran 6. Pada sub-bab 5.2.1 disajikan perhitungan lengkap setiap tahapan beserta visualisasi yang bersesuaian dari hasil estimasi cadangan klaim IBNR. Pada sub-bab 5.2.2 disajikan analisis hasil pencadangan klaim dengan menggunakan metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman.

### 5.2.1 *Line of Business* (LoB) 1

Perhitungan beserta hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman pada LoB 1 adalah sebagai berikut:

1. Mengestimasi faktor perkembangan ( $\hat{f}_k$  dengan  $k = 1, 2, \dots, I-1$ ).

Faktor perkembangan  $\hat{f}_k$  diestimasi dengan menggunakan persamaan (2.3) untuk setiap *development period*. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}, 1 \leq k \leq I-1$$

dengan  $I = 12$  merupakan total *development period*.

Untuk  $k = 1$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \frac{\sum_{j=1}^{11} C_{j,2}}{\sum_{j=1}^{11} C_{j,1}} \\ &= \frac{C_{1,2} + C_{2,2} + \dots + C_{11,2}}{C_{1,1} + C_{2,1} + \dots + C_{11,1}} \\ &= \frac{158.801 + 164.884 + 153.536 + \dots + 184.382}{96.118 + 97.350 + \dots + 104.434} \\ &= \frac{1.799.424}{1.035.062} \\ &= 1,738469773 \approx 1.738 \text{ (pembulatan tiga angka dibelakang koma)} \end{aligned}$$



$\hat{f}_k$  untuk  $k = 1, 2, \dots, I - 1$  pada LoB 1 secara lengkap disajikan pada Tabel

5.3 berikut ini

Tabel 5.3: Estimasi  $\hat{f}_k$  pada LoB 1

Development Period $k$ pada LoB 1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 5	5 → 6	6 → 7	7 → 8	8 → 9	9 → 10	10 → 11	11 → 12
$\hat{f}_k$	1,738	1,102	1,044	1,026	1,018	1,015	1,012	1,011	1,009	1,008	1,006

2. Menentukan ekstrapolasi log-linear pada  $\hat{f}_k$ .

$\hat{f}_k^*$  adalah hasil ekstrapolasi dari  $\hat{f}_k$ . Sesuai dengan pembahasan di sub-bab 2.5, *development period* dikatakan telah sepenuhnya dikembangkan jika  $\hat{f}_k = 1$  sehingga, sering kali tidak tepat untuk mengasumsikan bahwa  $\hat{f}_k$  pada *accident period* ke-1 dan *development period* ke-12 telah dikembangkan secara penuh. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu pendekatan untuk mendapatkan perkiraan klaim secara utuh pada setiap *accident period* ke-1. Pendekatan yang dipilih adalah dengan menggunakan metode Sherman *curve-fitting*. Kurva yang digunakan untuk ekstrapolasi adalah model "inverse power" yang berbentuk  $1 + ak^b$ .

Tabel 5.4:  $\hat{f}_k^* = \ln(\hat{f}_k - 1)$  pada LoB 1

Development Period $k$ pada LoB 1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 5	5 → 6	6 → 7	7 → 8	8 → 9	9 → 10	10 → 11	11 → 12
$\hat{f}_k$	1,738	1,102	1,044	1,026	1,018	1,015	1,012	1,011	1,009	1,008	1,006
$\hat{f}_k - 1$	0,738	0,102	0,044	0,026	0,018	0,015	0,012	0,011	0,009	0,008	0,006
$\hat{f}_k^*$	-	-	-	-	-	-	-	-	-4,673	-4,868	-5,118
	0,303	2,278	3,128	3,654	3,992	4,227	4,433	4,551			

Tabel 5.4 menyajikan hasil ekstrapolasi  $\hat{f}_k$  yang dinotasikan sebagai  $\hat{f}_k^*$  dengan menggunakan persamaan (2.4). misal  $\hat{f}_k^* = \beta_0 + \beta_1 x_k$  dengan  $\hat{f}_k^*$  adalah variabel terikat atau respon,  $x_k$  adalah variabel bebas dimana  $x_k = 1, 2, \dots, 11; x_k \in \text{development period}$ , parameter  $\beta_0$  adalah intercept dan para-





meter  $\beta_1$  adalah koefisien dari  $x_k$ . Dengan menggunakan teknik OLS dan dari persamaan 2.4, diperoleh

$$\hat{f}_k^* = \beta_0 + \beta_1 x_k = \ln a + b \ln k,$$

$$\beta_0 = \ln a = -1,4949077,$$

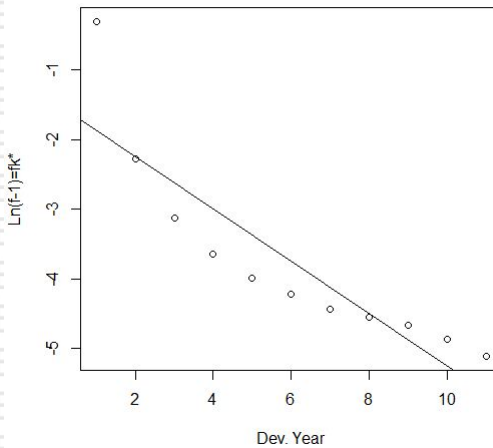
$$\beta_1 = \ln k = -0,3754769,$$

maka diperoleh model regresi linear sederhana, yaitu

$$\hat{f}_k^* = -1,4949 - 0,3755x_k. \tag{5.1}$$

Visualisasi dari ekstrapolasi log-linear dari faktor perkembangan pada *development period* satu sampai dengan dua belas disajikan oleh Gambar 5.3.

Ekstrapolasi Log-linear pada FaktorPerkembangan



Gambar 5.3: Ekstrapolasi Log-Linear dari Faktor Perkembangan LoB 1

Tabel 5.5:  $\hat{f}_k^*$  untuk  $k \geq 12$  pada LoB 1

Development Period k pada LoB 1										
k	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	12 → 13	13 → 14	14 → 15	15 → 16	16 → 17	17 → 18	18 → 19	19 → 20	20 → 21	21 → 22
$\hat{f}_k^*$	-6,0009	-6,3764	-6,7519	-7,1274	-7,5029	-7,8784	-8,2539	-8,6294	-9,0049	-9,3804

Tabel 5.5 menyajikan data  $\hat{f}_k^*$  pada *development period* ke-13 dan seterusnya yang diperoleh dengan menggunakan persamaan (5.1).



3. Mengestimasi  $\hat{f}_k^{\text{exp}}$ .

Memanfaatkan informasi yang diperoleh dari Tabel 5.5, serta persamaan (2.5), maka diperoleh  $\hat{f}_k^{\text{exp}}$  sebagai berikut.

Tabel 5.6: Hasil  $\hat{f}_k^{\text{exp}}$  dengan  $n = 100$  pada LoB 1

	$\hat{f}_k^{\text{exp}}$							
$(n = 1; k = 12)$	1,002477	1,001702	1,001169	1,000803	1,000552	1,000379	1,000260	1,000179
$(n = 9; k = 20)$	1,000123	1,000084	1,000058	1,000040	1,000027	1,000019	1,000013	1,000009
$(n = 17; k = 28)$	1,000006	1,000004	1,000003	1,000002	1,000001	1,000001	1,000001	1,000000
	...	...	...	...	...	...	$(n = 100; k = 112)$	1,000000

Dari Tabel 5.6 dapat diketahui  $\hat{f}_{12}^{\text{exp}} = 1,002477$ . Ingat bahwa  $n = k - I + 1$ , sehingga untuk menentukan  $n = 1$ , maka nilai  $k = 12$ .

4. Menentukan  $\hat{f}^{\text{tail}}$ .

Langkah selanjutnya yaitu mengestimasi  $\hat{f}^{\text{tail}}$  dengan menggunakan persamaan (2.6).  $\hat{f}^{\text{tail}}$  yang diperoleh adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{f}^{\text{tail}} &= \prod_{k=12}^{112} \hat{f}_k^{\text{exp}} \\ &= \hat{f}_{12}^{\text{exp}} \times \hat{f}_{13}^{\text{exp}} \times \dots \times \hat{f}_{112}^{\text{exp}} \\ &= 1,002477 \times 1,00170 \times \dots \times 1,000000 \\ &= 1,007939. \end{aligned}$$

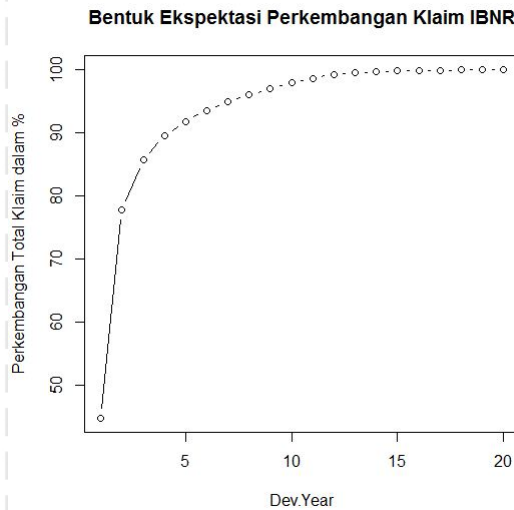
5. Menentukan  $\hat{f}_k^{\text{CL}}$ .

$\hat{f}_k^{\text{CL}}$  digunakan oleh aktuaris sebagai bahan pertimbangan dalam menentukan estimasi cadangan klaim pada periode perkembangan lebih dari  $k = I$ . Menurut Carrato dkk. (2017), sering kali batas yang dipilih oleh aktuaris sebagai ekor dari faktor perkembangan dalam metode *Chain-Ladder* adalah sebesar 1,0001. Dikarenakan 1,0001 dinilai telah sangat mendekati nilai 1,0000. Berikut ini disajikan Tabel  $\hat{f}_k^{\text{CL}}$

Tabel 5.7: Hasil  $\hat{f}_k^{CL}$  LoB 1

$k$	$\hat{f}_k^{CL}$	$k$	$\hat{f}_k^{CL}$
1	1,738470	11	1,005989
2	1,102440	12	1,002477
3	1,043809	13	1,001702
4	1,025879	14	1,001169
5	1,018469	15	1,000803
6	1,014599	16	1,000552
7	1,011877	17	1,000379
8	1,010560	18	1,000260
9	1,009340	19	1,000179
10	1,007689	20	1,000123

Untuk mempermudah dalam melihat perubahan ekspektasi klaim IBNR hingga *development period* ke-20. Berikut ini ditampilkan visualisasinya.



Gambar 5.4: Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR LoB 1

6. Menentukan  $\hat{C}_{i,k}$  dan  $\hat{C}_i^{ult}$ .

(a) Mengestimasi klaim IBNR  $\hat{C}_{i,k}$ .

Sebagai contoh perhitungan akan diprediksi besar klaim IBNR untuk

accident period 2 dan development period 12.

$$\begin{aligned}\hat{C}_{i,k} &= C_{i,I+1-i} \times \hat{f}_k \\ \hat{C}_{2,11} &= C_{2,11} \times \hat{f}_{11} \\ &= 205.478 \times 1,006 \\ &= 206.709.\end{aligned}$$

(b) Mengestimasikan Nilai Klaim *Ultimate* ( $\hat{C}_i^{ult}$ ) untuk setiap *accident period*.

Nilai *ultimate* pada metode *Chain-Ladder* ( $C_i^{ult}$ ) untuk  $i = 1, 2, \dots, I$  diperoleh menggunakan persamaan (2.7). Sebagai contoh perhitungan, akan ditentukan  $\hat{C}_4^{ult}$ .  $\hat{C}_4^{ult}$  adalah nilai klaim *Ultimate* pada *accident period* ke-4.

$$\begin{aligned}\hat{C}_i^{ult} &= C_{i,I+1-i} \times \hat{f}_{I+1-i} \times \dots \times \hat{f}_{I-1} \times \hat{f}^{tail} \\ C_4^{ult} &= C_{4,9} \times \hat{f}_9 \times \hat{f}_{10} \times \hat{f}_{11} \times \hat{f}^{tail} \\ &= 180.230 \times 1,009340 \times 1,007689 \times 1,005989 \times 1.007939 \\ &= 185.874.\end{aligned}$$

Berikut ini disajikan secara lengkap  $\hat{C}_{i,k}$  dan  $\hat{C}_i^{ult}$  pada setiap *accident period*

Tabel 5.8: Segitiga *Run-Off* Kumulatif LoB1 (dalam 1.000) - Metode *Chain-Ladder*

Acc. Per.	Development Period												ULT
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	96.118	158.801	171.240	177.068	180.396	182.848	184.616	186.221	187.606	189.001	190.196	191.335	192.854
2	97.350	164.884	179.798	186.834	191.205	194.134	196.783	199.158	201.558	203.654	205.478	206.709	208.350
3	89.018	153.536	167.939	174.670	178.250	181.468	183.819	185.946	188.019	189.919	191.379	192.525	194.054
4	85.127	145.480	159.816	165.758	170.319	173.500	175.953	178.173	180.230	181.913	183.312	184.410	185.874
5	85.516	149.098	163.633	171.514	176.388	180.106	183.556	186.212	188.178	189.936	191.396	192.543	194.071
6	96.833	160.676	179.112	188.277	193.684	197.668	201.198	203.588	205.738	207.659	209.256	210.509	212.180
7	91.886	163.360	180.811	188.524	193.635	197.865	200.754	203.138	205.283	207.201	208.794	210.044	221.536
8	94.711	173.229	193.322	202.775	209.208	213.072	216.183	218.750	221.060	223.125	224.841	226.187	227.983
9	95.071	169.761	188.511	198.164	203.292	207.047	210.070	212.565	214.809	216.816	218.483	219.791	221.536
10	98.998	176.217	196.305	204.905	210.208	214.090	217.216	219.796	222.117	224.191	225.915	227.268	229.072
11	104.434	184.382	203.270	212.175	217.666	221.686	224.923	227.594	229.998	232.146	233.931	235.332	237.200
12	109.294	190.004	209.468	218.645	224.303	228.446	231.781	234.534	237.011	239.225	241.064	242.507	244.433

Tabel 5.8 adalah segitiga *run-off* kumulatif lengkap untuk LoB 1. Nilai-nilai yang berada di daerah yang diarsir kuning merupakan estimasi klaim IBNR

$\hat{C}_{i,k}$  dengan  $2 \leq i \leq I$  dan  $I+2-i \leq k \leq I$ , sedangkan nilai-nilai yang berada di daerah yang diarsir merah merupakan  $\hat{C}_i^{ult}$  untuk  $1 \leq i \leq I$ .

7. Menentukan Estimasi Cadangan Klaim IBNR.

Estimasi cadangan klaim untuk setiap *accident period* LoB 1 pada metode *Chain-Ladder* diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.8)

$$\hat{R}_i^{cl} = C_i^{ult} - C_{i,I+1-i}, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Contoh

$$\begin{aligned} \hat{R}_5^{cl} &= C_5^{ult} - C_{5,12+1-5} \\ &= C_5^{ult} - C_{5,8} \\ &= 194.071 - 186.212 \\ &= 7.859. \end{aligned}$$

Estimasi total cadangan klaim diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.9) adalah sebagai berikut

$$\hat{R}^{cl} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i^{cl}$$

Tabel 5.9: Cadangan Klaim IBNR pada LoB 1 (dalam 1.000)

$i$	$C_{i,I+1-i}$	$C_i^{ult}$	$\hat{R}_i^{cl}$
1	191.335	192.854,0	1.519,009
2	205.478	208.349,6	2.872,576
3	189.919	194.053,8	4.135,771
4	180.230	185.873,9	5.644,862
5	186.212	194.071,2	7.859,240
6	201.198	212.180,2	10.982,226
7	197.865	211.711,6	13.847,628
8	209.208	227.982,7	18.775,683
9	198.164	221.536,1	23.372,110
10	196.305	229.072,2	32.767,162
11	184.382	237.199,9	52.817,878
12	109.294	244.432,8	135.138,756
	$\approx 2.249.590$	$\approx 255.9317,9$	<b>309.727,902</b>

Jadi, diperoleh cadangan klaim IBNR pada LoB 1 dengan menggunakan metode *Chain-Ladder* adalah sebesar 309.727,902 (dalam 1.000).



**5.2.2 Line of Business (LoB) 2 sampai dengan Line of Business (LoB) 4**

Perhitungan beserta hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman pada LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 adalah sebagai berikut:

1. Mengestimasi faktor perkembangan ( $\hat{f}_k$  dengan  $k = 1, 2, \dots, I - 1$ ).  
 $\hat{f}_k$  untuk  $k = 1, 2, \dots, I - 1$  pada LoB 2 diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.3).  $\hat{f}_k$  secara lengkap disajikan pada Tabel berikut ini.

Tabel 5.10: Estimasi  $\hat{f}_k$  pada LoB 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 5	5 → 6	6 → 7	7 → 8	8 → 9	9 → 10	10 → 11	11 → 12
$\hat{f}_k(\text{LoB } 2)$	1,616	1,117	1,049	1,023	1,014	1,013	1,006	1,005	1,004	1,003	1,002
$\hat{f}_k(\text{LoB } 3)$	1,527	1,094	1,043	1,024	1,014	1,010	1,008	1,006	1,005	1,004	1,002
$\hat{f}_k(\text{LoB } 4)$	1,651	1,093	1,041	1,026	1,018	1,015	1,012	1,011	1,009	1,009	1,008

2. Menentukan esktrapolasi log-linear pada  $\hat{f}_k$ .

Hasil ekstrapolasi dari  $\hat{f}_k$  yang dinotasikan oleh  $\hat{f}_k^*$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.4). Berikut ini disajikan  $\hat{f}_k^*$  secara lengkap.

Tabel 5.11:  $\hat{f}_k^* = \ln(\hat{f}_k - 1)$  pada LoB 2

Development Period $k$ pada LoB 2											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 5	5 → 6	6 → 7	7 → 8	8 → 9	9 → 10	10 → 11	11 → 12
$\hat{f}_k$	1,616	1,117	1,049	1,023	1,014	1,013	1,006	1,005	1,004	1,003	1,002
$\hat{f}_k - 1$	0,616	0,117	0,049	0,023	0,014	0,013	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002
$\hat{f}_k^*$	-0,485	-2,145	-3,022	-3,785	-4,288	-4,365	-5,167	-5,373	-5,573	-5,718	-6,049
Development Period $k$ pada LoB 3											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{f}_k$	1,527	1,094	1,043	1,024	1,014	1,010	1,008	1,006	1,005	1,004	1,002
$\hat{f}_k - 1$	0,527	0,094	0,043	0,024	0,014	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,002
$\hat{f}_k^*$	-0,641	-2,360	-3,139	-3,747	-4,293	-4,618	-4,835	-5,043	-5,320	-5,535	-6,111
Development Period $k$ pada LoB 4											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{f}_k$	1,651	1,093	1,041	1,026	1,018	1,015	1,012	1,011	1,009	1,009	1,008
$\hat{f}_k - 1$	0,651	0,093	0,041	0,026	0,018	0,015	0,012	0,011	0,009	0,009	0,008
$\hat{f}_k^*$	-0,429	-2,375	-3,189	-3,662	-4,013	-4,172	-4,444	-4,515	-4,670	-4,675	-4,839



Selanjutnya, dengan menggunakan teknik OLS dan persamaan 2.4, diperoleh

$$\hat{f}_k^* = \beta_0 + \beta_1 x_k = \ln a + b \ln k$$

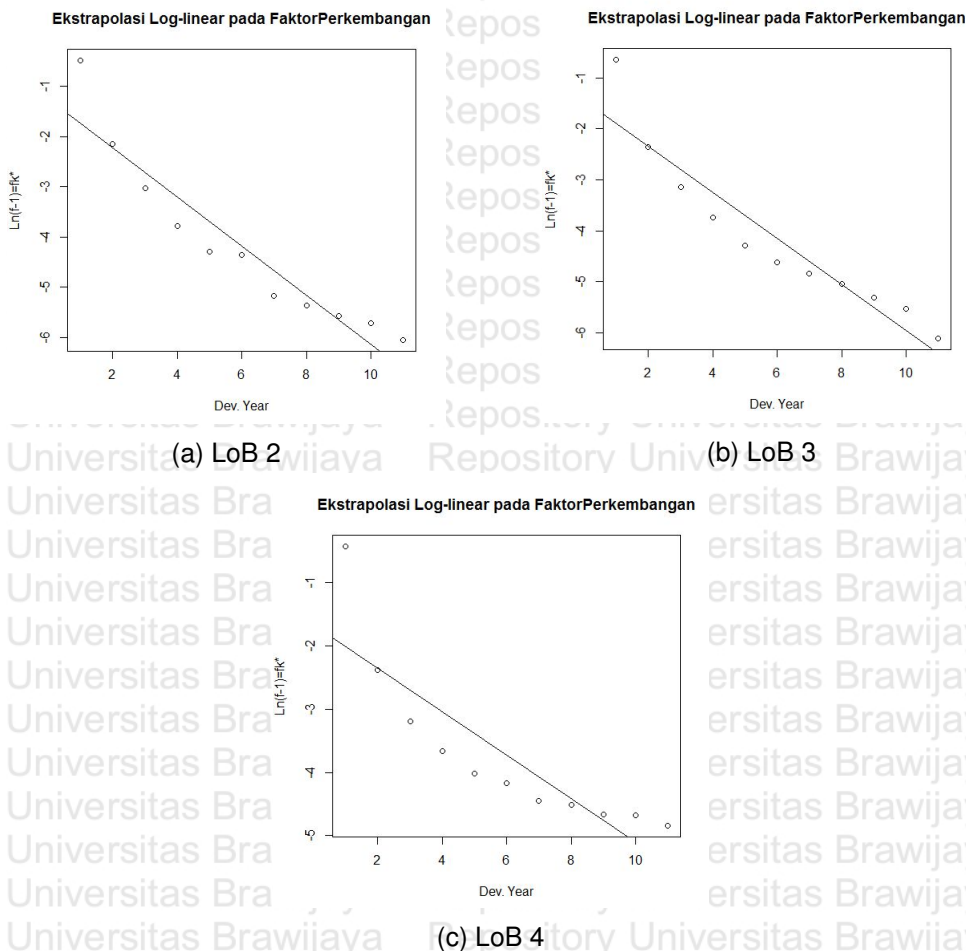
Model regresi linear sederhana yang dihasilkan adalah sebagai berikut

$$\hat{f}_k^*(LoB 2) = -1,2432417 - 0,4892907x_k,$$

$$\hat{f}_k^*(LoB 3) = -1,436892 - 0,4520541x_k,$$

$$\hat{f}_k^*(LoB 4) = -1,6623 - 0,3439x_k$$

Untuk mempermudah melihat hasil ekstrapolasi log-linear dari faktor perkembangan pada *development period* ke-1 sampai dengan ke-12, berikut ini disajikan visualisasi dalam bentuk grafik.



Gambar 5.5: Ekstrapolasi Log-Linear dari Faktor Perkembangan

Langkah selanjutnya yaitu menentukan  $\hat{f}_k^*$

Tabel 5.12:  $\hat{f}_k^*$  untuk  $k \geq 12$  pada LoB 2

$k$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
	12 → 13	13 → 14	14 → 15	15 → 16	16 → 17	17 → 18	18 → 19	19 → 20	20 → 21	21 → 22	...
$\hat{f}_k^*(LoB 2)$	-7,115	-7,604	-8,093	-8,583	-9,072	-9,561	-10,050	-10,540	-11,029	-11,519	...
$\hat{f}_k^*(LoB 3)$	-6,862	-7,314	-7,765	-8,218	-8,670	-9,122	-9,574	-10,026	-10,478	-10,930	...
$\hat{f}_k^*(LoB 4)$	-5,7891	-6,133	-6,4769	-6,8208	-7,1647	-7,5086	-7,8525	-8,1964	-8,5403	-8,8842	...

Tabel 5.12 menyajikan data  $\hat{f}_k^*$  pada *development period* ke-13 dan seterusnya yang diperoleh dengan menggunakan persamaan (5.2).

### 3. Mengestimasi $\hat{f}_k^{exp}$ .

Memanfaatkan informasi yang diperoleh dari Tabel 5.12, serta persamaan (2.5), maka diperoleh  $\hat{f}_k^{exp}$  sebagai berikut

Tabel 5.13: Hasil  $\hat{f}_k^{exp}$  dengan  $n = 100$

	$\hat{f}_k^{exp}$ LoB 2							
$(n = 1; k = 12)$	1,000813	1,000498	1,000306	1,000187	1,000115	1,000070	1,000043	1,000026
$(n = 9; k = 20)$	1,000016	1,000010	1,000006	1,000004	1,000002	1,000001	1,000001	1,000000
$(n = 17; k = 28)$	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
...	...	...	...	...	...	...	$(n = 100; k = 112)$	1,000000
	$\hat{f}_k^{exp}$ LoB 3							
$(n = 1; k = 12)$	1,001047	1,000666	1,000424	1,000270	1,000172	1,000109	1,000070	1,000044
$(n = 9; k = 20)$	1,000028	1,000018	1,000011	1,000007	1,000005	1,000003	1,000002	1,000001
$(n = 17; k = 28)$	1,000001	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
...	...	...	...	...	...	...	$(n = 100; k = 112)$	1,000000
	$\hat{f}_k^{exp}$							
$(n = 1; k = 12)$	1,003060	1,002170	1,001538	1,001091	1,000773	1,000548	1,000389	1,000276
$(n = 9; k = 20)$	1,000195	1,000139	1,000098	1,000070	1,000049	1,000035	1,000025	1,000018
$(n = 17; k = 28)$	1,000012	1,000009	1,000006	1,000004	1,000003	1,000002	1,000002	1,000001
$(n = 25; k = 36)$	1,000001	1,000001	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
...	...	...	...	...	...	...	$(n = 100; k = 112)$	1,000000

Dari Tabel 5.14 dapat diketahui bahwa nilai  $\hat{f}_{12}^{exp}$  pada setiap LoB adalah

$$\hat{f}_{12}^{exp}(LoB 2) = 1,000813,$$

$$\hat{f}_{12}^{exp}(LoB 3) = 1,001047,$$





$$\hat{f}_{12}^{\text{exp}}(\text{LoB } 4) = 1.003060.$$

4. Menentukan  $\hat{f}^{\text{tail}}$ .

Nilai  $\hat{f}^{\text{tail}}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.6).

$$\hat{f}^{\text{tail}}(\text{LoB } 2) = 1.002103$$

$$\hat{f}^{\text{tail}}(\text{LoB } 3) = 1.002883$$

$$\hat{f}^{\text{tail}}(\text{LoB } 4) = 1.010563$$

5. Menentukan  $\hat{f}_k^{\text{CL}}$ .

Berikut ini disajikan Tabel  $\hat{f}_k^{\text{CL}}$

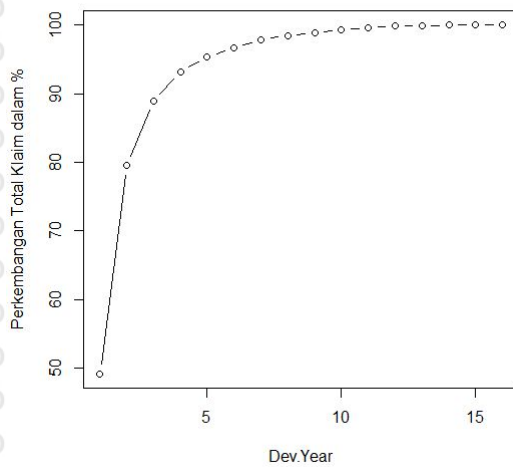
Tabel 5.14: Hasil  $\hat{f}_k^{\text{CL}}$

LoB 2				LoB 3				LoB 4			
k	$\hat{f}_k^{\text{CL}}$	k	$\hat{f}_k^{\text{CL}}$	k	$\hat{f}_k^{\text{CL}}$	k	$\hat{f}_k^{\text{CL}}$	k	$\hat{f}_k^{\text{CL}}$	k	$\hat{f}_k^{\text{CL}}$
1	1,615913	9	1,003800	1	1,526564	10	1,003946	1	1,651104	11	1,007917
2	1,117118	10	1,003287	2	1,094447	11	1,002219	2	1,092996	12	1,003060
3	1,048702	11	1,002360	3	1,043332	12	1,001047	3	1,041220	13	1,002170
4	1,022703	12	1,000813	4	1,023594	13	1,000666	4	1,025690	14	1,001538
5	1,013736	13	1,000498	5	1,013661	14	1,000424	5	1,018082	15	1,001091
6	1,012712	14	1,000306	6	1,009874	15	1,000270	6	1,015419	16	1,000773
7	1,005703	15	1,000187	7	1,007946	16	1,000172	7	1,011745	17	1,000548
8	1,004641	16	1,000115	8	1,006456	17	1,000109	8	1,010942	18	1,000389
				9	1,004894			9	1,009371	19	1,000276
								10	1,009326	20	1,000195
										21	1,000139

Untuk mempermudah dalam melihat perubahan ekspektasi klaim IBNR, berikut ini disajikan hasil visualisasinya.

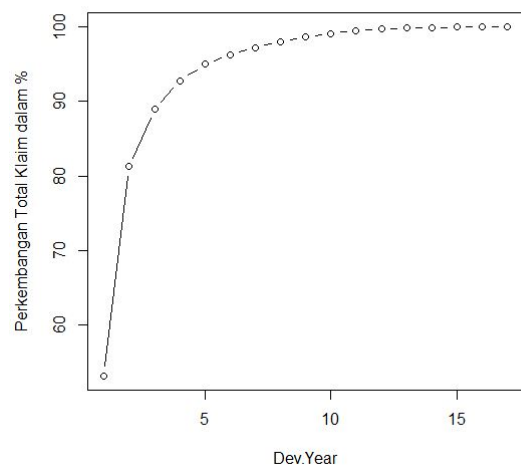


Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR LOB2



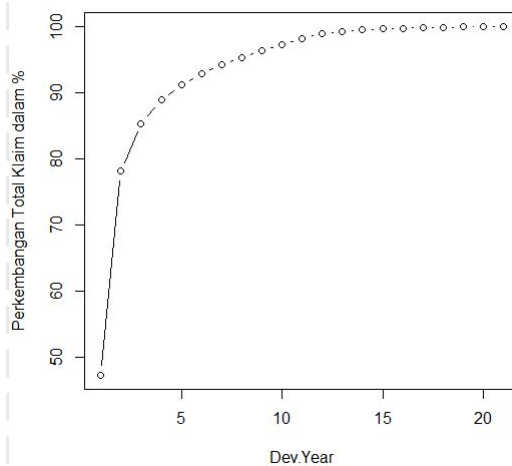
(a) LoB 2

Bentuk Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR



(b) LoB 3

Bentuk Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR



(c) LoB 4

Gambar 5.6: Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR

Dapat dilihat pada Gambar 5.6 (a), (b), dan (c) bahwa pada LoB 4 waktu yang dibutuhkan untuk faktor perkembangan telah sepenuhnya dikembangkan lebih lama jika dibandingkan dengan LoB 2 dan LoB 3.

6. Menentukan  $\hat{C}_{i,k}$  dan  $\hat{C}_i^{ult}$ . Langkah selanjutnya yaitu:

(a) Mengestimasi klaim IBNR untuk setiap *accident period*.

Dengan menggunakan persamaan (2.10), diperoleh nilai estimasi  $\hat{C}_{i,k}$  dengan  $2 \leq i \leq I$  dan  $I+2-i \leq k \leq I$ .



(b) Mengestimasi nilai klaim *ultimate* ( $C_i^{ult}$ ) untuk setiap *accident period* dengan menggunakan persamaan (2.7), sehingga diperoleh nilai  $\hat{C}_i^{ult}$ .

Hasil dari  $\hat{C}_{i,k}$  dan  $\hat{C}_i^{ult}$  secara lengkap ditampilkan pada Lampiran 6.

#### 7. Menentukan Estimasi Cadangan Klaim IBNR.

Estimasi cadangan klaim untuk setiap *accident period*  $\hat{R}_i^{cl}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.8), sedangkan estimasi total cadangan klaim  $\hat{R}^{cl}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.9). Hasil cadangan klaim IBNR untuk setiap *accident period* pada masing-masing LoB secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 6.

Tabel 5.15: Cadangan Klaim IBNR Metode *Chain-Ladder* (dalam 1.000)

LoB	$\sum_{i=1}^{12} C_{i,I+1-i}$	$\sum_{i=1}^{12} C_i^{ult}$	$\hat{R}^{cl}$
LoB 1	2.249.590	2.539.160,9	309.727,902
LoB 2	4.284.285	4.727.805,2	443.520,213
LoB 3	5.686.714	6.259.837,2	573.123,196
LoB 4	4.272.657	4.875.082,5	602.425,476

Jadi, diperoleh total estimasi cadangan klaim IBNR pada LoB 2 adalah sebesar 416.146,065, LoB 3 adalah sebesar 541.723,196 dan pada LoB 4 adalah sebesar 615.115,935 (dalam 1.000).

#### 5.3 Estimasi Cadangan Klaim IBNR dengan Metode Mack's *Chain-Ladder*

Struktur data yang digunakan pada metode MCL adalah segitiga *run-off* kumulatif. *Pseudocode* dapat dilihat pada Lampiran 11. Berikut ini disajikan cara perhitungan cadangan klaim IBNR beserta nilai *Coefficient of Variation* CV dengan menggunakan metode MCL  $\hat{R}^{Mack's}$  pada LoB 1.

1. Mengestimasi  $\hat{f}_k^{(w)}$  dengan  $k = 1, 2, \dots, I - 1$ .

Pada metode MCL,  $\hat{f}_k^{(w)}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.21) dengan nilai  $\alpha$  dan  $w_{i,k}$  adalah sebagai berikut.  $\alpha = 1$



Tabel 5.16: Nilai  $w_{i,k}$

Acc. Per.	Development Period										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2		1									
3			1								
4				1							
5					1						
6						1					
7							1				
8								1			
9									1		
10										1	
11											1

Langkah selanjutnya yaitu menentukan  $\hat{f}_k^{(w)}$ .

Tabel 5.17: Estimasi  $\hat{f}_k^{(w)}$  pada LoB 1

	Development Period $k$ pada LoB 1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 5	5 → 6	6 → 7	7 → 8	8 → 9	9 → 10	10 → 11	11 → 12	ult
$\hat{f}_k^{(w)}$	1,738	1,102	1,044	1,026	1,018	1,015	1,012	1,011	1,009	1,008	1,006	1,000

2. Menentukan  $\hat{C}_{i,k}$  dengan  $I + 1 - i \leq k \leq I$ .

Nilai estimasi cadangan klaim IBNR  $\hat{C}_{i,k}$  dengan  $I + 1 - i \leq k \leq I$  diperoleh dengan menggunakan persamaan

$$\hat{C}_{i,k} = C_{i,I+1-i} \times \hat{f}_{I+1-i}^{(w)} \times \hat{f}_{I+2-i}^{(w)} \times \dots \times \hat{f}_{k-1}^{(w)},$$

sebagai contohnya

$$\begin{aligned} \hat{C}_{6,11} &= C_{6,7} \times \hat{f}_7^{(w)} \times \hat{f}_8^{(w)} \times \hat{f}_9^{(w)} \times \hat{f}_{10}^{(w)} \\ &= 201.198 \times 1,012 \times 1,011 \times 1,008 \\ &= 209.256. \end{aligned}$$



3. Menentukan  $\hat{C}_{i,I}$

Nilai *ultimate* pada metode MCL yang dinotasikan dengan  $\hat{C}_{i,I}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.10). Sebagai contohnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,I} &= C_{i,I+1-i} \times \hat{f}_{I+1-i}^{(w)} \times \dots \times \hat{f}_{I-1}^{(w)} \\ \hat{C}_{4,12} &= C_{3,9} \times \hat{f}_9^{(w)} \times \hat{f}_{10}^{(w)} \times \hat{f}_{11}^{(w)} \\ &= 180.230 \times 1,009 \times 1,008 \times 1,006 \\ &= 184.410 \end{aligned}$$

Berikut ini disajikan segitiga *run-off* kumulatif lengkap pada LoB 1 untuk metode MCL

Tabel 5.18: Segitiga *Run-Off* Kumulatif LoB1 (dalam 1.000)-Metode MCL

Acc. Per.	Development Period											ULT
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	96.118	158.801	171.240	177.068	180.396	182.848	184.616	186.221	187.606	189.001	190.196	191.335
2	97.350	164.884	179.798	186.834	191.205	194.134	196.783	199.158	201.558	203.654	205.478	206.709
3	89.018	153.536	167.939	174.670	178.250	181.468	183.819	185.946	188.019	189.919	191.379	192.525
4	85.127	145.480	159.816	165.758	170.319	173.500	175.953	178.173	180.230	181.913	183.312	184.410
5	85.516	149.098	163.633	171.514	176.388	180.106	183.556	186.212	188.178	189.936	191.396	192.543
6	96.833	160.676	179.112	188.277	193.684	197.668	201.198	203.588	205.738	207.659	209.256	210.509
7	91.886	163.360	180.811	188.524	193.635	197.865	200.754	203.138	205.283	207.201	208.794	210.044
8	94.711	173.229	193.322	202.775	209.208	213.072	216.183	218.750	221.060	223.125	224.841	226.187
9	95.071	169.761	188.511	198.164	203.292	207.047	210.070	212.565	214.809	216.816	218.483	219.791
10	98.998	176.217	196.305	204.905	210.208	214.090	217.216	219.796	222.117	224.191	225.915	227.268
11	104.434	184.382	203.270	212.175	217.666	221.686	224.923	227.594	229.998	232.146	233.931	235.332
12	109.294	190.004	209.468	218.645	224.303	228.446	231.781	234.534	237.011	239.225	241.064	242.507

Dari Tabel 5.34 dapat diketahui bahwa nilai-nilai yang berada pada daerah yang diarsir kuning merupakan estimasi klaim kumulatif pada masa yang akan datang  $\hat{C}_{i,k}$  dengan  $2 \leq i \leq I$  dan  $I+2-i \leq k \leq I$ . Nilai-nilai yang berada pada daerah yang diarsir warna biru merupakan nilai klaim kumulatif yang diketahui oleh perusahaan pada masa sekarang. Sedangkan, nilai-nilai yang berada pada daerah merah adalah nilai *ultimate*  $\hat{C}_{i,I}$ . Nilai *ultimate* pada metode *Chain-Ladder* dan nilai *ultimate* pada metode MCL adalah berbeda.

4. Menentukan  $\hat{R}_i$  dan  $\hat{R}^{Mack's}$ .

$\hat{R}_i$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.11).

Contoh:

$$\begin{aligned}\hat{R}_5 &= \hat{C}_{5,12} - C_{5,8} \\ &= 192.542,6 - 186.212 \\ &= 6.331.\end{aligned}$$

Selanjutnya, total estimasi cadangan klaim IBNR yang dinotasikan oleh  $\hat{R}^{Mack's}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.12).

$$\begin{aligned}\hat{R}^{Mack's} &= \sum_{i=1}^J \hat{R}_i \quad i = 1, 2, \dots, J \\ &= \sum_{i=1}^{12} \hat{R}_i \\ &= \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{R}_3 + \dots + \hat{R}_{11} + \hat{R}_{12} \\ &= 0,00 + 1.230,52 + 2.606,31 + \dots + 50.949,58 + 133.213,49 \\ &= 289.570,00.\end{aligned}$$

Berikut ini akan disajikan secara lengkap estimasi cadangan klaim untuk setiap *accident period*.

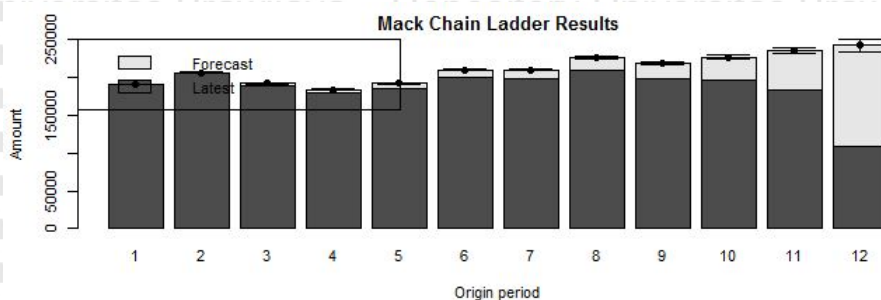
Tabel 5.19: Cadangan Klaim IBNR pada LoB 1 (dalam 1.000) untuk Metode MCL

$i$	$C_{i,I+1-i}$	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i$
1	191.335,00	191.335,00	0,00
2	205.478,00	206.708,52	1.230,52
3	189.919,00	192.525,31	2.606,31
4	180.230,00	184.409,83	4.179,83
5	186.212,00	192.542,64	6.330,64
6	201.198,00	210.509,00	9.311,00
7	197.865,00	210.044,09	12.179,09
8	209.208,00	226.186,98	16.978,98
9	198.164,00	219.791,19	21.627,19
10	196.305,00	227.267,88	30.962,88
11	184.382,00	235.331,58	50.949,58
12	109.294,00	242.507,49	133.213,49
Total	2.249.590,00	2.539.160,00	289.570,00

Dari Tabel 5.35 dapat diketahui bahwa cadangan klaim akan meningkat seiring dengan bertambahnya *development period*. Hal tersebut terjadi karena



nilai klaim yang diestimasi semakin besar nominalnya. Untuk mempermudah dalam melihat besar klaim kumulatif yang telah diobservasi (diagonal) terhadap klaim *ultimate* ( $\hat{C}_{i,t}$ ) dan hasil estimasi cadangan klaim IBNR ( $\hat{R}_i$ ), maka disajikan dalam bentuk diagram batang.



Setelah memperoleh  $\hat{R}^{Mack's}$ , langkah selanjutnya yaitu menentukan *Coefficient of Variation* (CV). Nilai CV sangat penting dikarenakan dapat digunakan sebagai alat untuk menilai ketepatan suatu metode yang dipergunakan dalam mengestimasi cadangan klaim IBNR. Jika nilai CV bernilai kecil, hal tersebut menandakan bahwa simpangan dari nilai cadangan yang diprediksi tidak berbeda jauh dengan nilai yang sebenarnya di masa yang akan datang (Neter dkk., 1996). Berikut ini disajikan perhitungan dalam menentukan CV dari  $\hat{R}^{Mack's}$  pada LoB 1 yaitu sebagai berikut:

1. Menentukan faktor perkembangan individu  $F_{i,k}$ .

Faktor perkembangan individu  $F_{i,k}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.22).

Tabel 5.20: Faktor Perkembangan Individu  $F_{i,k}$  pada LoB 1

Acc. Per. $i$	Development Period $k$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,6521	1,0783	1,0340	1,0188	1,0136	1,0097	1,0087	1,0074	1,0074	1,0063	1,0060
2	1,6937	1,0905	1,0391	1,0234	1,0153	1,0136	1,0121	1,0121	1,0104	1,0090	
3	1,7248	1,0938	1,0401	1,0205	1,0181	1,0130	1,0116	1,0111	1,0101		
4	1,7090	1,0985	1,0372	1,0275	1,0187	1,0141	1,0126	1,0115			
5	1,7435	1,0975	1,0482	1,0284	1,0211	1,0192	1,0145				
6	1,6593	1,1147	1,0512	1,0287	1,0206	1,0179					
7	1,7779	1,1068	1,0427	1,0271	1,0218						
8	1,8290	1,1160	1,0489	1,0317							
9	1,7856	1,1104	1,0512								
10	1,7800	1,1140									
11	1,7655										



2. Menentukan  $\hat{\sigma}_k^{2w}$ .

$\hat{\sigma}_k^{2w}$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.23). Contoh perhitungan untuk  $\hat{\sigma}_8^{2w}$ .

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_8^{2(w)} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 w_{i,8} C_{i,8}^\alpha (F_{i,8} - \hat{f}_8^{(w)})^2 \\ &= \frac{1}{3} \left( \left( w_{1,8} C_{1,8}^\alpha (F_{1,8} - \hat{f}_8^{(w)})^2 \right) + \left( w_{2,8} C_{2,8}^\alpha (F_{2,8} - \hat{f}_8^{(w)})^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( w_{3,8} C_{3,8}^\alpha (F_{3,8} - \hat{f}_8^{(w)})^2 \right) + \left( w_{4,8} C_{4,8}^\alpha (F_{4,8} - \hat{f}_8^{(w)})^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \left( (186.221)(1,0074374 - 1,010545373)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( (199.158)(1,012050734 - 1,010545373)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( (185.946)(1,011148398 - 1,010545373)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( (178.173)(1,011544959 - 1,010545373)^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} (1,816239894 + 0,442347634 + 0,064288874 + 0,172712564) \\ &= 0,831862988. \end{aligned}$$

Untuk mempermudah perhitungan maka langkah awal yaitu menyusun tabel yang menggambarkan  $w_{i,k} C_{i,k}^\alpha (F_{i,k} - \hat{f}_k^{(w)})^2$ .

Tabel 5.21: Nilai  $w_{i,k} C_{i,k}^\alpha (F_{i,k} - \hat{f}_k^{(w)})^2$  pada LoB 1

i	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	716,246	92,305	16,363	8,886	4,290	4,444	1,871	1,816	0,680	0,353	0,508
2	194,915	23,698	3,932	1,153	1,898	0,177	0,007	0,442	0,226	0,327	
3	16,696	11,439	2,336	5,062	0,031	0,490	0,017	0,064	0,110		
4	74,050	2,210	7,023	0,444	0,007	0,037	0,096	0,173			
5	2,172	3,659	3,101	1,105	1,201	3,739	1,234				
6	606,776	24,309	9,702	1,518	0,855	2,100					
7	142,534	3,142	0,240	0,286	2,207						
8	776,692	31,810	5,005	6,929							
9	211,387	10,890	10,315								
10	170,794	23,531									
11	76,507										
Total	2988,771	226,992	58,017	25,383	10,489	10,987	3,226	2,496	1,016	0,680	0,508

Selanjutnya, untuk menentukan  $\hat{\sigma}_k^{2(w)}$  masing-masing nilai total pada Tabel 5.36 dikalikan dengan  $\frac{1}{I-k-1}$  sehingga menghasilkan nilai yang berada pada





Tabel di bawah ini.

Tabel 5.22: Nilai  $\hat{\sigma}_k^{2(w)}$  pada LoB 1

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{\sigma}_k^{2(w)}$	298,877	25,221	7,252	3,626	1,748	2,197	0,806	0,832	0,508	0,680	0,508

3. Menentukan  $s.e.\hat{f}_k^{(w)}$  Persamaan (2.26) digunakan untuk menentukan  $s.e.\hat{f}_k^{(w)}$ .

Contoh perhitungan pada  $s.e.\hat{f}_8^{(w)}$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 s.e.(\hat{f}_k^{(w)}) &= \frac{\hat{\sigma}_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}}, \\
 s.e.(\hat{f}_8^{(w)}) &= \frac{\hat{\sigma}_8}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 C_{i,8}}}, \\
 &= \frac{\hat{\sigma}_8}{\sqrt{C_{1,8} + C_{2,8} + C_{3,8} + C_{4,8}}}, \\
 &= \frac{0,912065232}{\sqrt{186.221 + 199.158 + 185.946 + 178.173}} \\
 &= 0,001053515.
 \end{aligned}$$

Nilai  $s.e.(\hat{f}_k^{(w)})$  untuk  $1 \leq k \leq I-1$  secara lengkap akan disajikan pada Tabel berikut ini

Tabel 5.23: Nilai  $s.e.(\hat{f}_k^{(w)})$  untuk  $1 \leq k \leq I-1$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s.e.(\hat{f}_k^{(w)})$	0,01699	0,00395	0,00214	0,00158	0,00117	0,00141	0,00093	0,00105	0,00094	0,00132	0,00163

4. Menentukan  $\hat{\sigma}_k^{(w)}$ .

Nilai  $\hat{\sigma}_k^{(w)}$  diperoleh dengan

$$\hat{\sigma}_k^{(w)} = \sqrt{\hat{\sigma}_k^{2(w)}}$$



Tabel 5.24: Nilai  $\hat{\sigma}_k^{(w)}$  pada LoB 1

$k$	1	2	3	4	5	6
$\hat{\sigma}_k^{(w)}$	17,2880633	5,0220830	2,6929744	1,9042428	1,3221820	1,4823060
$k$	7	8	9	10	11	
$\hat{\sigma}_k^{(w)}$	0,8979773	0,9120652	0,7128938	0,8245764	0,7128938	

5. Menentukan  $s.e.(\hat{F}_{i,k})$  dan  $s.e.(F_{i,k})$

Nilai  $s.e.(\hat{F}_{i,k})$  dengan menggunakan persamaan (2.27) untuk  $k \leq I + 1 - i$  dan persamaan (2.28) untuk  $k > I + 1 - i$ . Diberikan contoh perhitungan untuk  $s.e.(\hat{F}_{7,8})$ . Karena nilai  $k = 8, 8 > 5$  maka persamaan yang digunakan adalah persamaan (2.28).

$$s.e.(F_{i,k}) = \frac{\hat{\sigma}_k^{(w)}}{\sqrt{\hat{C}_{i,k}}}$$

$$s.e.(F_{7,8}) = \frac{\hat{\sigma}_8^{(w)}}{\sqrt{\hat{C}_{7,8}}}$$

$$= \frac{0,912065232}{\sqrt{203,138}}$$

$$= 0,002023626.$$

Untuk nilai  $s.e.(F_{i,k})$  dan  $s.e.(\hat{F}_{i,k})$  disajikan pada Tabel 5.25

Tabel 5.25: Nilai  $s.e.(F_{i,k})$  dan  $s.e.(\hat{F}_{i,k})$  pada LoB 1

$i$	$k$					
	1	2	3	4	5	6
1	0,05576272	0,01260252	0,006507731	0,004525351	0,003112990	0,003466512
2	0,05540875	0,01236786	0,006350966	0,004405491	0,003023720	0,003364241
3	0,05794386	0,01281678	0,006571378	0,004556309	0,003131673	0,003479668
4	0,05925332	0,01316686	0,006736310	0,004677191	0,003203758	0,003558673
5	0,05911840	0,01300613	0,006657279	0,004598038	0,003148159	0,003492801
6	0,05555647	0,01252877	0,006363117	0,004388577	0,003004307	0,003334031
7	0,05703240	0,01242542	0,006333150	0,004385701	0,003004688	0,003332371
8	0,05617539	0,01206629	0,006124795	0,004228780	0,002890694	0,003211255
9	0,05606894	0,01218891	0,006202459	0,004277696	0,002932451	0,003257643
10	0,05494563	0,01196355	0,006078082	0,004206744	0,002883811	0,003203610
11	0,05349650	0,01169566	0,005973041	0,004134043	0,002833974	0,003148245
12	0,05229356	0,01152132	0,005884005	0,004072419	0,002791729	0,003101316

Tabel 5.26: Lanjutan Tabel 5.40

$i$	$k$				
	7	8	9	10	11
1	0,002089925	0,002113545	0,001645893	0,001896701	0,001634648
2	0,002024285	0,002043746	0,001587906	0,001827193	0,001572687
3	0,002094451	0,002115108	0,001644084	0,001892111	0,001629587
4	0,002140755	0,002160752	0,001679234	0,001933297	0,001665058
5	0,002095951	0,002113596	0,001643387	0,001892026	0,001629513
6	0,002001951	0,002021390	0,001571694	0,001809486	0,001558426
7	0,002004166	0,002023626	0,001573433	0,001811488	0,001560149
8	0,001931324	0,001950077	0,001516246	0,001745649	0,001503445
9	0,001959222	0,001978246	0,001538148	0,001770865	0,001525163
10	0,001926725	0,001945434	0,001512636	0,001741492	0,001499866
11	0,001893428	0,001911813	0,001486494	0,001711396	0,001473945
12	0,001865204	0,001883315	0,001464336	0,001685885	0,001451974

6. Menentukan  $s.e.\hat{R}^{Mack's}$ .

Formula dasar untuk  $s.e.\hat{R}_{i,k}^{(Mack's)2}$  adalah

$$s.e.\hat{R}_{i,k}^{(Mack's)2} = Process Risk_{i,k}^2 + Parameter Risk_{i,k}^2$$

Nilai  $\hat{C}_{i,I+1-i}$  yang bernilai 0 adalah  $\hat{C}_{1,12}, \hat{C}_{2,11}, \hat{C}_{3,10}, \hat{C}_{4,9}, \hat{C}_{5,8}, \hat{C}_{6,7}, \hat{C}_{7,6}, \hat{C}_{8,5}, \hat{C}_{9,4}, \hat{C}_{10,3}, \hat{C}_{11,2}$  dan  $\hat{C}_{12,1}$ . Hasil rekursif untuk  $Process Risk_{i,k}$  dengan menggunakan persamaan (2.31) disajikan pada Tabel 5.27.

Tabel 5.27: Nilai  $Process Risk_{i,k}$  pada LoB 1

Acc. Per. $i$	Development Period $k$					
	1	2	3	4	5	6
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	604,7563
9	0,000	0,000	0,000	0,000	847,6854	1.049,1648
10	0,000	0,000	0,000	1.193,158	1.497,0898	1.640,8256
11	0,000	0,000	2.156,469	2.557,514	2.766,4382	2.884,2679
12	0,000	5.715,372	6.670,302	7.070,773	7.308,2041	7.469,4742
Total	0,000	5.715,372	7.010,228	7.613,168	8.001,430	8.262,617

Acc. Per. $i$	Development Period $k$					
	7	8	9	10	11	12
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	323,1525
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	359,3479	477,4353
4	0,0000	0,0000	0,0000	302,6484	465,5080	558,9841
5	0,0000	0,0000	393,5770	503,4339	621,6916	698,8666
6	0,0000	402,7886	578,8267	667,7483	770,6904	841,0984
7	659,3596	779,1175	888,1979	952,9060	1030,9839	1087,1105
8	919,0511	1.019,3918	1.114,9859	1.174,2539	1.245,7390	1.297,9892
9	1.260,1791	1.339,9218	1.417,8629	1.468,7527	1.529,0367	1.573,8729
10	1.800,5274	1.869,3633	1.936,8933	1.983,6448	2.036,6690	2.076,6956
11	3.008,4499	3.073,8264	3.136,6141	3.184,3177	3.233,3025	3.270,8897
12	7.611,5665	7.714,0929	7.808,0603	7.888,6274	7.959,5048	8.014,8173
Total	8.549,624	8.720,893	8.893,148	9.029,963	9.177,964	9.296,937

Dapat dilihat pada Tabel 5.42, nilai total  $Process Risk$  pada  $development period$  ke-3 diperoleh dengan menggunakan formula

$$7.010,228 = \sqrt{2.156,469^2 + 6.670,302^2}$$

Selanjutnya, hasil rekursif untuk  $Parameter Risk_{i,k}$  dengan menggunakan persamaan (2.34) disajikan dalam Tabel 5.28,

Tabel 5.28: Nilai  $Parameter Risk_{i,k}$  pada LoB 1

Acc. Per. $i$	Development Period $k$					
	1	2	3	4	5	6
1	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	244,1225
9	0,000	0,000	0,0000	0,0000	312,7900	397,1877
10	0,000	0,000	0,0000	420,0114	538,7629	601,0434
11	0,000	0,000	728,6358	876,1260	959,1675	1.009,3618
12	0,000	1.857,203	2.180,7924	2.320,0316	2.404,9634	2.463,3256
total	0,000	1.857,203	2.526,057	2.941,152	3.291,868	3.575,448

Acc. Per. $i$	Development Period $k$					
	7	8	9	10	11	12
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	335,8841
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	249,9158	401,3422
4	0,0000	0,0000	0,0000	169,1201	293,8477	420,9207
5	0,0000	0,0000	196,1771	265,3069	365,9828	483,1537
6	0,0000	187,8807	286,4462	347,6517	444,2956	562,8274
7	278,4193	338,3977	403,4157	450,4492	529,5076	632,6413
8	388,8945	442,2733	502,8609	548,3096	625,6934	728,8876
9	497,2691	540,0611	589,9219	628,6245	694,7448	784,8690
10	680,1688	717,5148	761,1685	796,0477	854,6974	935,7667
11	1.070,5520	1.103,4410	1.140,5813	1.171,2895	1.219,1867	1.284,7170
12	2.519,8752	2.558,9735	2.597,7746	2.631,4534	2.670,3062	2.715,0457
Total	4.051,544	4.332,991	4.733,327	5.100,817	5.843,360	7.007,811

Untuk menentukan  $s.e\hat{R}_{i,k}^{Mack's}$ , maka digunakan formula

$$s.e\hat{R}_{i,k}^{Mack's} = \sqrt{Process Risk_{i,k}^2 + Parameter Risk_{i,k}^2}$$

Hasil  $s.e\hat{R}_{i,k}^{Mack's}$  untuk masing-masing *development period* dan *accident period* disajikan pada Tabel 5.29,

Tabel 5.29: Nilai  $s.e.\hat{R}_{i,k}^{Mack's}$  pada LoB 1

Acc. Per. <i>i</i>	Development Period <i>k</i>					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000
2	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000
3	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000
4	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000
5	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000
6	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000
7	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000
8	0	0,000	0,000	0,000	0,0000	652,1702
9	0	0,000	0,000	0,000	903,5531	1.121,8310
10	0	0,000	0,000	1.264,925	1.591,0824	1.747,4444
11	0	0,000	2.276,240	2.703,419	2.927,9998	3.055,7835
12	0	6.009,549	7.017,748	7.441,665	7.693,7440	7.865,1775

Acc Per. <i>i</i>	Development Period <i>k</i>					
	7	8	9	10	11	12
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	466,0962
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	437,7086	623,7147
4	0,0000	0,0000	0,0000	346,6954	550,4944	699,7410
5	0,0000	0,0000	439,7594	569,0636	721,4180	849,6188
6	0,0000	444,4523	645,8265	752,8277	889,5855	1.012,0381
7	715,7321	849,4334	975,5203	1.054,0087	1.159,0108	1.257,7934
8	997,9448	1.111,2000	1.223,1364	1.295,9613	1.394,0437	1.488,6414
9	1.354,7427	1.444,6648	1.535,6898	1.597,6243	1.679,4712	1.758,7198
10	1.924,7151	2.002,3353	2.081,0894	2.137,4140	2.208,7391	2.277,7893
11	3.193,2510	3.265,8829	3.337,5550	3.392,9041	3.455,5262	3.514,1453
12	8.017,8373	8.127,4581	8.228,8662	8.315,9479	8.395,4900	8.462,1965

### 7. Coefficient of Variation (CV)

Besar nilai CV diperoleh dengan formula

$$CV_i = \frac{s.e.\hat{R}_{i,I}^{Mack's}}{\hat{R}_i^{Mack's}} \times 100\%, \quad \text{dengan } 2 \leq i \leq I$$

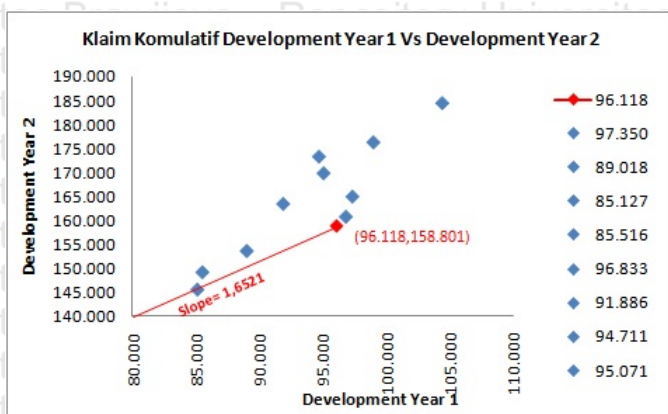
Tabel 5.30: *Coefisien Variation CV* dari IBNR LoB1 - Metode Mack's CL

$i$	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i$	Process Risk $_{i,I}$	Parameter Risk $_{i,I}$	$s.e.\hat{R}^{Mack's}$	CV
1	191.335,000	0,000				
2	206.708,517	1.230,517	323,153	335,884	466,096	37,88%
3	192.525,313	2.606,313	477,435	401,342	623,715	23,93%
4	184.409,832	4.179,832	558,984	420,921	699,741	16,74%
5	192.542,644	6.330,644	698,867	483,154	849,619	13,42%
6	210.508,995	9.310,995	841,098	562,827	1.012,038	10,87%
7	210.044,088	12.179,088	1.087,111	632,641	1.257,793	10,33%
8	226.186,984	16.978,984	1.297,989	728,888	1.488,641	8,77%
9	219.791,188	21.627,188	1.573,873	784,869	1.758,720	8,13%
10	227.267,882	30.962,882	2.076,696	935,767	2.277,789	7,36%
11	235.331,580	50.949,580	3.270,890	1.284,717	3.514,145	6,90%
12	242.507,489	133.213,489	8.014,817	2.715,046	8.462,197	6,35%
Total	2.539.159,514	289.569,514	9.296,937	7.007,811	11.642,270	4,021%

Dapat dilihat pada Tabel 5.30, besar CV dari total cadangan klaim yang diperoleh adalah sebesar 4,021%.  $s.e.\hat{R}^{Mack's}$  dipergunakan untuk mengetahui penyebaran data dari nilai rata-rata klaim IBNR pada segitiga bawah  $\hat{C}_{i,k}$  dengan  $1 \leq I$  dan  $I + 1 - i \leq k \leq I$ . Semakin kecil nilai  $s.e.\hat{R}^{Mack's}$  berarti bahwa sebaran klaim IBNR yang diprediksi mendekati nilai rata-rata klaim IBNR pada segitiga bawah.

8. Grafik *Standardized Residual* pada LoB 1.

Dimisalkan nilai  $C_{i,k+1}$  adalah sebagai nilai y dan  $C_{i,k}$  adalah nilai x dalam suatu grafik.



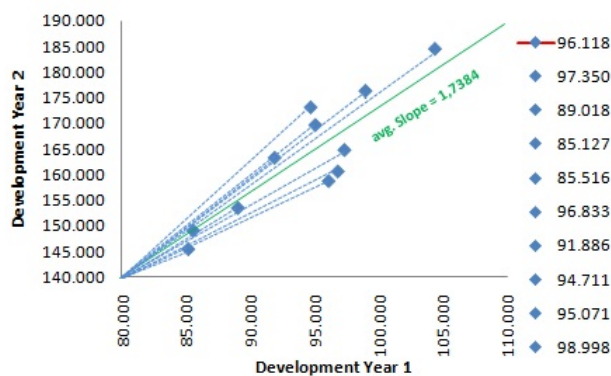
Gambar 5.7: Grafik  $C_{i,1}$  vs  $C_{i,2}$  pada  $1 \leq i \leq I$



Dari Gambar 5.7, dapat dilihat bahwa nilai rasio yang diperoleh dari  $\frac{x}{y} = 1.6521$ . Nilai rasio tersebut merupakan gradien dari persamaan garis yang melalui titik pusat (0,0) dan titik (158.801,96.118). Selain itu, 1.6521 merupakan nilai  $F_{1,1}$ . Setiap  $F_{i,k}$  mempresentasikan gradien dari persamaan garis yang melewati titik (0,0) dan melewati pasangan titik  $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$  yang berse-suaian.

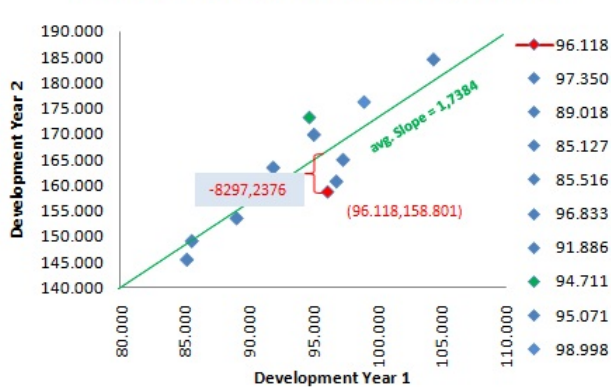
Penelitian ini menggunakan *sample* rasio dalam memprediksi  $F_{i,k}$  untuk  $I+2-i \leq i \leq I$  dan  $1 \leq k \leq I-1$  karena terdapat gangguan pada nilai-nilai rasio yang telah diketahui atau bersifat *noisy*. Dapat dikatakan bahwa nilai  $F_{i,k}$  merupakan gradien dari persamaan garis yang melalui titik pusat dan me-lalui pasangan titik  $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$ . Untuk memprediksi nilai selanjutnya maka digunakan nilai rata-rata dari  $F_{i,k}$ .

Klaim Kumulatif DY 1 Vs DY 2



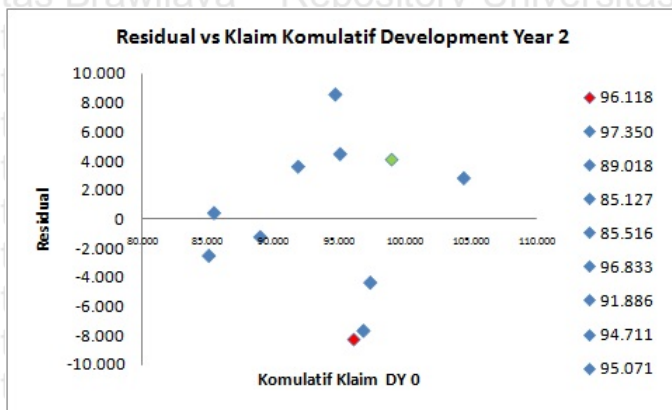
Gambar 5.8: Grafik  $F_{i,k}$

Klaim Kumulatif Development Year 1 Vs Development Year 2



Gambar 5.9: Grafik  $f_i$  pada  $1 \leq i \leq I$





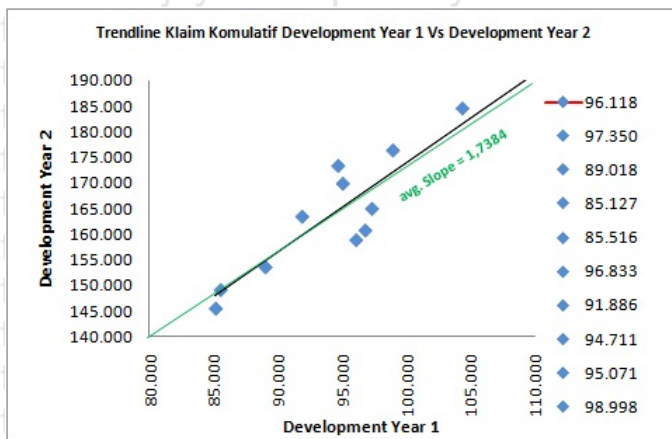
Gambar 5.10: Grafik Residual vs Klaim Kumulatif DY 1

Plot hijau menunjukkan nilai klaim kumulatif yang memiliki residual paling besar. pasangan  $(C_{8,1}, C_{8,2})$  yaitu sebesar 8.576,789. Residual diperoleh dengan formula

$$\hat{C}_{i,2} = C_{i,1} \times 1,7384$$

$$Residual = C_{i,2} - \hat{C}_{i,2}$$

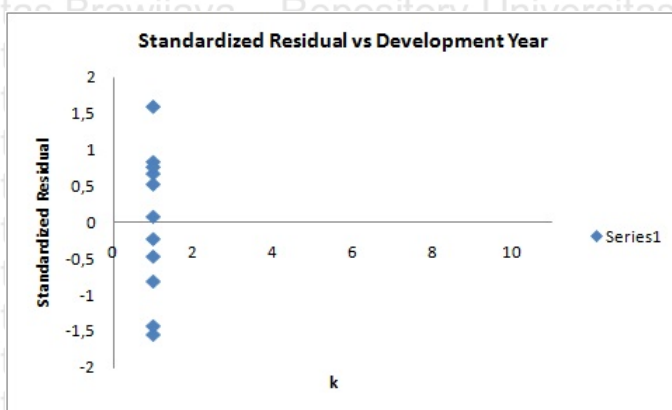
dengan nilai  $1 \leq i \leq I - 1$ .



Gambar 5.11: Grafik Trendline Klaim Kumulatif DY 1 vs DY 2

*Trendline* (garis hitam) diperoleh dari pendekatan regresi linear biasa, sedangkan garis hijau adalah rata-rata aritmetik dari masing masing  $F_{i,k}$ . Terdapat sedikit perbedaan antara garis trend dan rata-rata aritmetik, sehingga untuk menentukan faktor perkembangan *ultimate* selanjutnya bisa menggu-

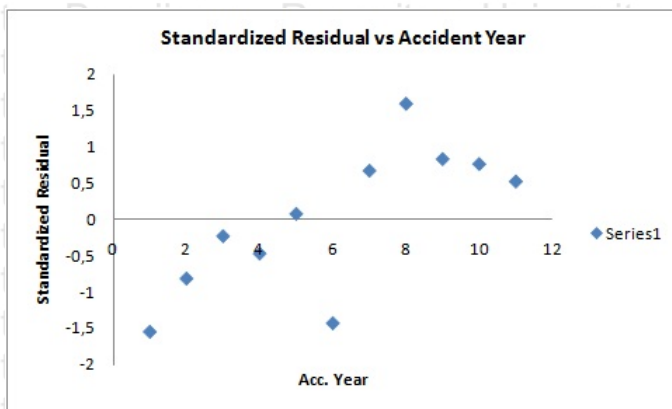
nakan rata-rata aritmetik dari masing masing  $F_{i,k}$ .



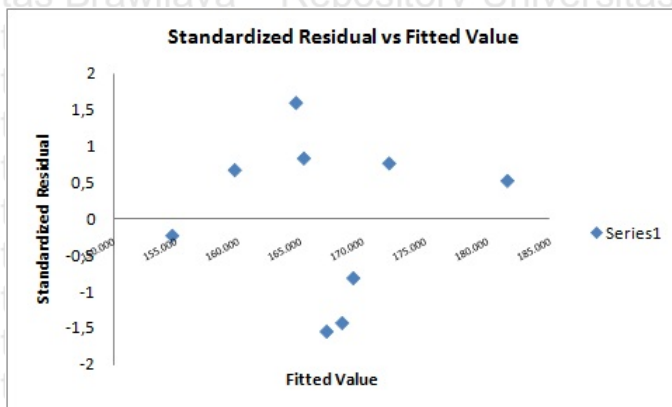
Gambar 5.12: Grafik *Standardized Residual vs k (Development Period)*

Gambar 5.12 mempresentasikan sebaran nilai *standardized residual* (SR) terhadap *development period* ke 1. SR diperoleh dengan menggunakan formula

$$SR = \frac{\text{residual}}{\sqrt{\frac{\text{residual}^2}{10}}}$$



Gambar 5.13: Grafik *Standardized Residual vs Acc. Period pada D.Y 1*



Gambar 5.14: Grafik *Standardized Residual vs Acc. Period* pada D.Y 1

Selanjutnya, dengan menggunakan langkah yang serupa, hasil cadangan klaim IBNR pada LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 beserta visualisasi yang bersesuaian adalah sebagai berikut.

Tabel 5.31: Total *Coeffisien of Variation CV* Metode MCL (dalam 1.000)

LoB	$\sum_{i=1}^{12} \hat{C}_{i,12}$	$\sum_{i=1}^{12} \hat{R}_i$	<i>Pro. Risk</i>	<i>Par. Risk</i>	$s.e\hat{R}^{Mack's}$	<i>CV</i>
LoB 1	2.539.159	289.569	9.296	7.007	11.642	4,02%
LoB 2	4.690.566	406.281	18.033	12.781	22.103	5,44%
LoB 3	6.210.531	523.817	20.168	10.231	22.615	4,32%
LoB 4	4.836.684	564.027	15.073	9.453	17.792	3,15%

Tabel 5.31 menyajikan total hasil estimasi cadangan klaim IBNR pada LoB1, LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 yang diestimasi dengan menggunakan metode MCL. Sedangkan untuk hasil estimasi secara lengkap pada setiap *accident period* beserta visualisasinya disajikan pada Lampiran 7.

### 5.3.1 *Line of Business (LoB) 2* sampai dengan *Line of Business (LoB) 4*

Berikut ini disajikan hasil cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode MCL pada LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 beserta visualisasi besar klaim kumulatif yang telah diobservasi (diagonal atas) terhadap klaim *ultimate* ( $\hat{C}_{i,t}$ ) dan hasil estimasi cadangan klaim IBNR ( $\hat{R}_i$ ) dalam bentuk diagram batang.



## 5.4 Estimasi Cadangan Klaim IBNR Dengan Metode *Generalized Linear Models* (GLM) Dengan Pendekatan Distribusi Tweedie

Metode *Generalized Linear Models* (GLM) merupakan metode estimasi cadangan klaim yang bersifat stokastik karena nilai-nilai dari  $S_{i,k}$  yang berada pada segitiga bagian atas (*observed values*) memiliki distribusi atau pola probabilitas acak yang dipengaruhi oleh parameter-parameter tertentu serta dapat dianalisis secara statistik. Parameter dalam penelitian ini diperoleh dengan menggunakan maximum likelihood serta bantuan software R. Metode GLM juga dapat disebut sebagai Metode Chain Ladder Stokastik. Data yang dipergunakan dalam estimasi cadangan klaim IBNR dengan metode GLM adalah berbentuk segitiga *run-off* seperti pada Tabel 5.2. Terdapat asumsi mendasar dalam GLM yaitu, klaim yang telah diobservasi berdistribusi *Exponential Dispersion Family* (EDF). Perhitungan cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM dibagi menjadi 3 model berdasarkan distribusi anggota Tweedie yang digunakan, yaitu: model *Over-Dispersed Poisson* (ODP), model Gamma, dan model majemuk Poisson-Gamma.

### 5.4.1 Model *Over-Dispersed Poisson* (ODP)

#### *Line of Business* (LoB) 1

Perhitungan beserta hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM pada LoB 1 dengan model ODP adalah sebagai berikut.

1. Merubah segitiga *run-off* ke dalam struktur GLM.

Sesuai dengan pembahasan pada sub-bab 2.10, langkah dalam merubah struktur segitiga *run-off* ke dalam struktur GLM adalah menentukan variabel prediktor dan respon. Dalam permasalahan pencadangan klaim IBNR, variabel respon  $y_t$  dengan  $t = 1, 2, \dots, 76$  adalah data klaim *incremental*  $S_{i,k}$  pada segitiga bagian atas atau anggota dari himpunan  $D = \{S_{i,k} | i + k \leq I + 1\}$ . Variabel-variabel respon tersebut kemudian disusun menjadi vektor  $\mathbf{Y}$  dengan ketentuan sebagai berikut.

Tabel 5.32: Transformasi Segitiga *Run-off* ke dalam Bentuk Matrix

Acc. Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$Y_1$	$Y_{13}$	$Y_{24}$	$Y_{34}$	$Y_{43}$	$Y_{51}$	$Y_{58}$	$Y_{64}$	$Y_{69}$	$Y_{73}$	$Y_{76}$	$Y_{78}$
2	$Y_2$	$Y_{14}$	$Y_{25}$	$Y_{35}$	$Y_{44}$	$Y_{52}$	$Y_{59}$	$Y_{65}$	$Y_{70}$	$Y_{74}$	$Y_{77}$	
3	$Y_3$	$Y_{15}$	$Y_{26}$	$Y_{36}$	$Y_{45}$	$Y_{53}$	$Y_{60}$	$Y_{66}$	$Y_{71}$	$Y_{75}$		
4	$Y_4$	$Y_{16}$	$Y_{27}$	$Y_{37}$	$Y_{46}$	$Y_{54}$	$Y_{61}$	$Y_{67}$	$Y_{72}$			
5	$Y_5$	$Y_{17}$	$Y_{28}$	$Y_{38}$	$Y_{47}$	$Y_{55}$	$Y_{62}$	$Y_{68}$				
6	$Y_6$	$Y_{18}$	$Y_{29}$	$Y_{39}$	$Y_{48}$	$Y_{56}$	$Y_{63}$					
7	$Y_7$	$Y_{19}$	$Y_{30}$	$Y_{40}$	$Y_{49}$	$Y_{57}$						
8	$Y_8$	$Y_{20}$	$Y_{31}$	$Y_{41}$	$Y_{50}$							
9	$Y_9$	$Y_{21}$	$Y_{32}$	$Y_{42}$								
10	$Y_{10}$	$Y_{22}$	$Y_{33}$									
11	$Y_{11}$	$Y_{23}$										
12	$Y_{12}$											

Dalam bentuk matrix dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_{1 \times 78} &= \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{2,1} & S_{3,1} & S_{4,1} & S_{5,1} & \dots & S_{2,11} & S_{12,1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 96.118 & 97.350 & 89.018 & 85.127 & 85.516 & \dots & 1.824 & 1.139 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Terdapat 78 variabel bebas, sehingga matrix  $\mathbf{Y}$  berukuran  $78 \times 1$ . Sesuai dengan pembahasan 5.1.2, dapat diketahui bahwa klaim *incremental* pada LoB 1 berdistribusi eksponensial. Prediktor linear yang yang digunakan adalah  $\eta_{i,k} = \gamma + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_k$ . Langkah selanjutnya yaitu menentukan matrix model dan *link function*. Distribusi yang digunakan sebagai pendekatan adalah bentuk ODP, sehingga sesuai persamaan (2.55) *link function* yang digunakan adalah  $\ln$ . Berikut ini diberikan contoh penerapan untuk  $S_{4,5}$ .

$$\begin{aligned}
 E[S_{4,5}] &= \mu_{4,5} \\
 \ln(\mu_{4,5}) &= \eta_{4,5} = \gamma + \hat{\alpha}_4 + \hat{\beta}_5 \quad (5.2)
 \end{aligned}$$



$S_{4,5}$  merupakan data ke 46 ( $y_{46}$ ) pada matrix  $\mathbf{Y}$ , sehingga dapat ditulis sebagai

$$\ln(\mu_{46}) = \eta_{46} = x'_{46} \mathbf{b}.$$

Model persamaan yang digunakan dengan efek *accident period* dan *development period* adalah

$$Y_t = \gamma + \alpha_1 x_{t1} + \alpha_2 x_{t2} + \dots + \alpha_{12} x_{t12} + \beta_1 x_{t13} + \beta_2 x_{t14} + \dots + \beta_{12} x_{t24}$$

dimana,

$$x_{t1} = \begin{cases} 1 & \text{jika dipengaruhi oleh } \textit{accident period} 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$x_{t24} = \begin{cases} 1 & \text{jika dipengaruhi oleh } \textit{development period} 12 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

dan sebagainya. Untuk menghindari *overparameterized* dan mengatasi permasalahan multikolinieritas yang muncul, maka nilai  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  (*reference cell*) yang mengakibatkan model persamaan menjadi

$$Y_t = \gamma + \alpha_2 x_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \dots + \alpha_{12} x_{t11} + \beta_2 x_{t12} + \beta_3 x_{t13} + \dots + \beta_{12} x_{t22}.$$

Matrix model yang dipergunakan adalah berukuran  $78 \times 23$ .



$$\mathbf{Y}_{78 \times 1} = \mathbf{X}_{78 \times 23} \cdot \mathbf{b}_{23 \times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{78 \times 1}$$

$$\mathbf{Y}_{78 \times 1} = \begin{bmatrix} 96.118 \\ 97.350 \\ \vdots \\ 1.824 \\ 1.139 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_{78 \times 23} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}'_{77} \\ \mathbf{X}'_{78} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}'_{1 \times 23} = [\gamma \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \dots \quad \beta_{11} \quad \beta_{12}]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{1 \times 23} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \dots \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{14} \quad \varepsilon_{15} \quad \dots \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{23}]$$

dengan,  $\mathbf{Y}$  adalah vektor respon,

$\mathbf{b}$  adalah vektor parameter,

$\mathbf{X}$  adalah matrix,

$\boldsymbol{\varepsilon}$  adalah vektor *error* dengan  $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ .

## 2. Melakukan penaksiran parameter model regresi Poisson

Penaksiran parameter model *Poisson regression* dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Bentuk dari fungsi *In-likelihood* yang telah disesuaikan dengan permasalahan pencadangan klaim IBNR adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{b}) &= - \sum_{i=1}^n \exp(\mathbf{X}'_i \mathbf{b}) + \sum_{i=1}^n Y_i \mathbf{X}'_i \mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \ln(Y_i!) \\ &= - \left( (\exp(\mathbf{X}'_1 \mathbf{b}) + \dots + \exp(\mathbf{X}'_{78} \mathbf{b})) \right) + \left( Y_1 \mathbf{X}'_1 \mathbf{b} + \dots + Y_{78} \mathbf{X}'_{78} \mathbf{b} \right) \\ &\quad - \left( \ln(Y_1!) + \ln(Y_2!) + \dots + \ln(Y_{78}!) \right). \\ &= - \left( (\exp(x_{11} \gamma + x_{12} \alpha_2 + \dots + x_{1,23} \beta_{12})) + \dots + (\exp(x_{78,1} \gamma + x_{78,2} \alpha_2 \right. \\ &\quad \left. + \dots + x_{78,23} \beta_{12})) \right) + \left( S_{1,1}(x_{11} \gamma + x_{12} \alpha_2 + \dots + x_{1,23} \beta_{12}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + S_{1,12}(x_{78,1} \gamma + x_{78,2} \alpha_2 + \dots + x_{78,23} \beta_{12}) \right) - \left( \ln(S_{1,1}!) + \ln(S_{2,1} \dots S_{1,1}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \ln(S_{1,12} \dots \dots S_{1,1}) \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan taksiran MLE untuk  $\mathbf{b}$  maka persamaan (5.3) diturunkan satu kali terhadap masing-masing parameter kemudian disamakan dengan nol. Penentuan taksiran awal MLE menggunakan formula

OLS dalam bentuk matrix dengan parameter sejumlah 23 adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{b}_{23 \times 1} = (\mathbf{X}'_{23 \times 78} \mathbf{X}_{78 \times 23})^{-1} \mathbf{X}'_{23 \times 78} \mathbf{Y}_{78 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 78 & 11 & 10 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 11 & 11 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.249.590 \\ 205.478 \\ 189.919 \\ \vdots \\ 5.391 \\ 3.019 \\ 1.139 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,193 & -0,091 & -0,095 & \dots & -0,130 & -0,147 & -0,193 \\ -0,091 & 0,182 & 0,091 & \dots & 0,000 & 0,000 & 0,091 \\ -0,095 & 0,091 & 0,195 & \dots & 0,000 & 0,050 & 0,095 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -0,130 & 0,000 & 0,000 & \dots & 0,464 & 0,130 & 0,130 \\ -0,147 & 0,000 & 0,050 & \dots & 0,130 & 0,647 & 0,147 \\ -0,193 & 0,091 & 0,095 & \dots & 0,130 & 0,147 & 1,193 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.249.590 \\ 205.478 \\ 189.919 \\ \vdots \\ 5.391 \\ 3.019 \\ 1.139 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 90476,11683 \\ 1389,272727 \\ 53,78636364 \\ \vdots \\ -89160,13653 \\ -89661,25319 \\ -89337,11683 \end{bmatrix}$$

dengan hasil estimasi parameter

$$\begin{aligned} \gamma &= 90476; & \alpha_7 &= 2653; & \beta_2 &= -24609; & \beta_8 &= -88394 \\ \alpha_2 &= 1389; & \alpha_8 &= 5968; & \beta_3 &= -76512; & \beta_9 &= -88640 \\ \alpha_3 &= 54; & \alpha_9 &= 5512; & \beta_4 &= -84669; & \beta_{10} &= -89160 \\ \alpha_4 &= -871; & \alpha_{10} &= 8666; & \beta_5 &= -87221; & \beta_{11} &= -89661 \\ \alpha_5 &= -2; & \alpha_{11} &= 14019; & \beta_6 &= -87897; & \beta_{12} &= -89337 \\ \alpha_6 &= 2436; & \alpha_{12} &= 18818; & \beta_7 &= -88277; \end{aligned}$$

Setelah nilai taksiran awal diketahui, selanjutnya dilakukan perhitungan nilai



error dengan menggunakan persamaan

$$\epsilon = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}.$$

Error yang dihasilkan bernilai sangat besar. Oleh karena itu dapat dipastikan bahwa  $\mathbf{b}$  bukan merupakan MLE. Untuk mengestimasi MLE ( $\hat{\mathbf{b}}$ ) digunakan perangkat lunak R dengan *package Chain-Ladder* dan GLM. *Pseudocode* dapat dilihat di **Lampiran**.

$$\hat{\mathbf{b}}' = \left[ 11,364790 \quad 0,077284 \quad 0,006202 \quad \dots \quad -3,899364 \quad -4,084645 \quad -4,326884 \right].$$

### 3. Melakukan Uji Significant dan Menyusun Model Regresi.

Berikut ini disajikan hasil estimasi parameter, beserta *standard error* untuk masing-masing parameter.

Tabel 5.33: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 1

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	11,364790	0,030346	347,508	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	0,077284	0,039892	1,937	0,05785 .
$\hat{\alpha}_3$	0,006202	0,040707	0,152	0,87947
$\hat{\alpha}_4$	-0,036865	0,041281	-0,893	0,37573
$\hat{\alpha}_5$	0,006292	0,040967	0,154	0,87850
$\hat{\alpha}_6$	0,095503	0,040217	2,375	0,02108 *
$\hat{\alpha}_7$	0,093292	0,040405	2,309	0,02473 *
$\hat{\alpha}_8$	0,167336	0,039897	4,194	0,00010 ***
$\hat{\alpha}_9$	0,138652	0,040452	3,428	0,00116 **
$\hat{\alpha}_{10}$	0,172104	0,040596	4,239	$8,63e - 05$ ***
$\hat{\alpha}_{11}$	0,206970	0,041338	5,007	$6,05e - 06$ ***
$\hat{\alpha}_{12}$	0,237007	0,048570	4,880	$9,49e - 06$ ***
$\hat{\beta}_2$	-0,303175	0,018908	-16,035	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_3$	-1,725472	0,033345	-51,746	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_4$	-2,477377	0,049372	-50,178	$< 2e - 16$ ***



Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\hat{\beta}_5$	-2,960910	0,066022	-44,848	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_6$	-3,272700	0,082654	-39,595	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_7$	-3,489535	0,099631	-35,025	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_8$	-3,681398	0,120690	-30,503	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_9$	-3,787085	0,141969	-26,676	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{10}$	-3,899364	0,171806	-22,696	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{11}$	-4,084645	0,229250	-17,817	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{12}$	-4,326884	0,372720	-11,609	$< 2e - 16$ ***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 157,1814 dan diperoleh dengan menghitung nilai *Pearson Residual* yaitu menggunakan persamaan (2.58), dilanjutkan dengan persamaan (2.59). *Null deviance* 3.268.639,1 pada 77 derajat kebebasan adalah nilai deviasi yang diperoleh jika model regresi yang digunakan hanya melibatkan intercept atau nilai  $\gamma$  saja. Derajat kebebasan bernilai 77 diperoleh dari  $78 - 1$  dengan 78 merupakan jumlah total individu yang diobservasi dengan 1 parameter yang diprediksi yaitu  $\gamma$ . Berbeda dengan *null deviance*, *residual deviance* 8.747,6 pada 55 derajat kebebasan adalah nilai deviasi yang diperoleh jika model regresi yang digunakan melibatkan semua parameter  $\gamma, \alpha_i, \beta_k$ . Derajat kebebasan 55 diperoleh dari  $78 - 23$ ,  $n = 78$ ,  $p = 23$ . Dapat dilihat bahwa model dengan melibatkan seluruh parameter bekerja lebih baik. Hal tersebut ditandai dengan nilai deviasi yang lebih kecil.

Hipotesis yang digunakan sebagai alat pengujian parameter *accident period* pada persamaan regresi adalah sebagai berikut.

- Hipotesis

$$H_0 : \alpha_i = 0$$

Pengaruh variabel *accident period* ke-i terhadap estimasi cadangan kla-



im tidak signifikan

$$H_1 : \alpha_i \neq 0$$

Pengaruh variabel *accident period* ke-*i* terhadap estimasi cadangan klaim signifikan

$$i = 2, 3, \dots, 12.$$

- Tingkat Signifikansi.

$$\alpha = 5\% = 0,05.$$

- Daerah Penolakan

Tolak  $H_0$  jika  $|T - \text{hitung}| > t_{\frac{\alpha}{2}}(t_{0,025}, 78-23) = +/- 2,004$  atau  $p - \text{value} < 0,05$ .

Berdasarkan Tabel 5.50, dapat diketahui bahwa terdapat 3 parameter yang tidak signifikan yaitu  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Hal ini berarti bahwa klaim-klaim pada *accident period* ke-2, ke-3, dan ke-4 tidak berpengaruh besar terhadap hasil pencadangan. Dalam model regresi yang dibentuk, parameter yang tidak signifikan tidak dihapus karena jika dihapus mengakibatkan nilai error yang dihasilkan bernilai lebih besar.

Contoh:

Perhitungan dengan model regresi dengan melibatkan parameter non-signifikan pada *accident period* ke-4

$$\hat{Y}_4 = \mu_{34} = \exp(11,364790 - 0,036865) = 83.110,38974$$

$$\hat{Y}_{16} = \mu_{16} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 0,303175) = 61.374,52$$

$$\hat{Y}_{27} = \mu_{27} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 1,725472) = 14.801,04$$

$$\hat{Y}_{37} = \mu_{37} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 2,477377) = 6.978,212$$

$$\hat{Y}_{46} = \mu_{46} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 2,960910) = 4.302,773$$

$$\hat{Y}_{54} = \mu_{54} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 3,272700) = 3.150,212$$

$$\hat{Y}_{61} = \mu_{61} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 3,489535) = 2.536,118$$

$$\hat{Y}_{67} = \mu_{67} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 3,681398) = 2.093,363$$

$$\hat{Y}_{72} = \mu_{72} = \exp(11,364790 - 0,036865 - 3,787085) = 1.883,411$$

Perhitungan dengan model regresi tanpa melibatkan parameter non-signifikan pada *accident period* ke-4

$$\hat{Y}'_4 = \mu_{34} = \exp(11,364790) = 86.231,429$$

$$\hat{Y}'_{16} = \mu_{16} = \exp(11,364790 - 0,303175) = 63.679,311$$

$$\hat{Y}'_{27} = \mu_{27} = \exp(11,364790 - 1,725472) = 15.356,867$$

$$\hat{Y}'_{37} = \mu_{37} = \exp(11,364790 - 2,477377) = 7.240,264$$

$$\hat{Y}'_{46} = \mu_{46} = \exp(11,364790 - 2,960910) = 4.464,355$$

$$\hat{Y}'_{54} = \mu_{54} = \exp(11,364790 - 3,272700) = 3.268,512$$

$$\hat{Y}'_{61} = \mu_{61} = \exp(11,364790 - 3,489535) = 2.631,357$$

$$\hat{Y}'_{67} = \mu_{67} = \exp(11,364790 - 3,681398) = 2.171,975$$

$$\hat{Y}'_{72} = \mu_{72} = \exp(11,364790 - 3,787085) = 1.954,139$$

Selanjutnya nilai *Sum Squared Error* (SSE) yang dihasilkan adalah sebagai berikut

Tabel 5.34:  $\hat{Y}_t - Y_t$  vs  $Y_t - \hat{Y}'_t$

$t$	$Y_t$	$\hat{Y}_t - Y_t$	$Y_t - \hat{Y}'_t$
4	85.127	2.016,610	-1.104,429
16	60.353	-1.021,517	-3.326,311
27	14.336	-465,044	-1.020,867
37	5.942	-1.036,212	-1.298,264
46	4.561	258,227	96,645
54	3.181	30,788	-87,512
61	2.453	-83,118	-178,357
67	2.220	126,637	48,025
72	2.057	173,589	102,861
$\sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2$		6.520.923,423	15.073.464,757

SSE dapat digunakan sebagai alat untuk menilai besar variasi setiap *accident*

period sehingga model regresi yang terbentuk adalah sebagai berikut

$$\hat{Y}_t = \mu_t = \exp(11,364790 + 0,077284_2 \bullet + 0,006202_3 \bullet - 0,036865_4 \bullet + 0,006292_5 \bullet + 0,095503_6 \bullet + 0,093292_7 \bullet + 0,167336_8 \bullet + 0,138652_9 \bullet + 0,172104_{10} \bullet + 0,206970_{11} \bullet + 0,237007_{12} \bullet - 0,303175_{\bullet,2} - 1,725472_{\bullet,3} - 2,47737_{\bullet,4} - 2,960910_{\bullet,5} - 3,272700_{\bullet,6} - 3,489535_{\bullet,7} - 3,681398_{\bullet,8} - 3,787085_{\bullet,9} - 3,899364_{\bullet,10} - 4,084645_{\bullet,11} - 4,326884_{\bullet,12}) \quad (5.4)$$

Model regresi yang sudah didapatkan terdiri dari parameter konstanta (intercept), parameter *accident period*, dan parameter *development period*. Sebagai contoh, 0,006202 adalah parameter untuk variabel *accident period* ke-3 dan -4,326884 adalah parameter untuk variabel *development period* ke-12.

4. Menentukan  $\hat{S}_{i,k}, 1 \leq i \leq I$  dan  $1 \leq k \leq I$ .

Skema pencadangan yang sesuai dengan model regresi tersebut adalah sebagai berikut

Tabel 5.35: Transformasi Segitiga *Run-off* ke dalam Bentuk Matrix

Acc. Period	Development Period												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1													
2													$\hat{Y}_{57}^*$
3												$\hat{Y}_{47}^*$	$\hat{Y}_{58}^*$
4										$\hat{Y}_{38}^*$	$\hat{Y}_{48}^*$	$\hat{Y}_{59}^*$	
5									$\hat{Y}_{29}^*$	$\hat{Y}_{39}^*$	$\hat{Y}_{49}^*$	$\hat{Y}_{60}^*$	
6								$\hat{Y}_{22}^*$	$\hat{Y}_{30}^*$	$\hat{Y}_{40}^*$	$\hat{Y}_{50}^*$	$\hat{Y}_{61}^*$	
7							$\hat{Y}_{16}^*$	$\hat{Y}_{23}^*$	$\hat{Y}_{31}^*$	$\hat{Y}_{41}^*$	$\hat{Y}_{51}^*$	$\hat{Y}_{62}^*$	
8						$\hat{Y}_{11}^*$	$\hat{Y}_{17}^*$	$\hat{Y}_{24}^*$	$\hat{Y}_{32}^*$	$\hat{Y}_{42}^*$	$\hat{Y}_{52}^*$	$\hat{Y}_{63}^*$	
9					$\hat{Y}_7^*$	$\hat{Y}_{12}^*$	$\hat{Y}_{18}^*$	$\hat{Y}_{25}^*$	$\hat{Y}_{34}^*$	$\hat{Y}_{43}^*$	$\hat{Y}_{53}^*$	$\hat{Y}_{64}^*$	
10				$\hat{Y}_4^*$	$\hat{Y}_8^*$	$\hat{Y}_{13}^*$	$\hat{Y}_{19}^*$	$\hat{Y}_{26}^*$	$\hat{Y}_{35}^*$	$\hat{Y}_{44}^*$	$\hat{Y}_{54}^*$	$\hat{Y}_{65}^*$	
11			$\hat{Y}_2^*$	$\hat{Y}_5^*$	$\hat{Y}_9^*$	$\hat{Y}_{14}^*$	$\hat{Y}_{20}^*$	$\hat{Y}_{27}^*$	$\hat{Y}_{36}^*$	$\hat{Y}_{45}^*$	$\hat{Y}_{55}^*$	$\hat{Y}_{66}^*$	
12		$\hat{Y}_1^*$	$\hat{Y}_3^*$	$\hat{Y}_6^*$	$\hat{Y}_{10}^*$	$\hat{Y}_{15}^*$	$\hat{Y}_{21}^*$	$\hat{Y}_{28}^*$	$\hat{Y}_{37}^*$	$\hat{Y}_{46}^*$	$\hat{Y}_{56}^*$	$\hat{Y}_{67}^*$	

Selanjutnya, model regresi dalam persamaan (5.4) digunakan untuk meng-

estimasi jumlah klaim-klaim pada bagian bawah segitiga *run-off*. Sebagai contoh akan dihitung estimasi klaim untuk  $\hat{Y}_{28}^*$ .

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{28}^* &= \mu^* = \exp(\gamma + \alpha_{12} + \beta_5) \\ &= \exp(11,364790 + 0,237007 - 2,960910) \\ &= 5.658,346553 \end{aligned}$$

Secara lengkap hasil cadangan klaim IBNR adalah sebagai berikut

Tabel 5.36: Segitiga *Run-Off* Incremental LoB 1 (dalam 1.000)-Metode GLM ODP

Acc. Period	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	96.118	62.683	12.439	5.828	3.328	2.452	1.768	1.605	1.385	1.395	1.195	1.139
2	97.350	67.534	14.914	7.036	4.371	2.929	2.649	2.375	2.400	2.096	1.824	1.231
3	89.018	64.518	14.403	6.731	3.580	3.218	2.351	2.127	2.073	1.900	1.460	1.146
4	85.127	60.353	14.336	5.942	4.561	3.181	2.453	2.220	2.057	1.683	1.399	1.098
5	85.516	63.582	14.535	7.881	4.874	3.718	3.450	2.656	1.966	1.758	1.460	1.146
6	96.833	63.843	18.436	9.165	5.407	3.984	3.530	2.390	2.150	1.922	1.597	1.253
7	91.886	71.474	17.451	7.713	5.111	4.230	2.889	2.384	2.145	1.917	1.593	1.250
8	94.711	78.518	20.093	9.453	6.433	3.864	3.111	2.568	2.310	2.065	1.716	1.346
9	95.071	74.690	18.750	9.653	5.128	3.755	3.023	2.495	2.245	2.006	1.667	1.308
10	98.998	77.219	20.088	86.00	5.303	3.882	3.126	2.580	2.321	2.075	1.724	1.353
11	104.434	79.948	18.888	8.905	5.491	4.020	3.236	2.671	2.403	2.148	1.785	1.401
12	109.294	80.710	19.464	9.177	5.658	4.143	3.335	2.753	2.477	2.214	1.839	1.444

5. Menentukan  $\hat{R}_i^{GLM}$ ,  $\hat{R}^{GLM}$  dan  $s.e.\hat{R}^{GLM}$ .

Sama halnya dengan metode sebelumnya, nilai  $\hat{R}_i^{GLM}$  dapat diperoleh dengan menggunakan formula

$$\hat{R}_i^{GLM} = \hat{C}_{i,I} - C_{i,I+1-i} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

Contoh

$$\begin{aligned} \hat{R}_5^{GLM} &= \hat{C}_{5,12} - C_{5,8} \\ &= \sum_{k=9}^{12} \hat{S}_{5,k} \\ &= \hat{S}_{5,9} + \hat{S}_{5,10} + \hat{S}_{5,11} + \hat{S}_{5,12} \\ &= 1.966 + 1.758 + 1.460 + 1.146 \\ &= 6.331. \end{aligned}$$

Tabel 5.37: *Coefisien Variation* CV dari IBNR LoB1 - Metode GLM ODP

$i$	$C_{i,I+1-i}$	LDTF	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i^{GLM}$	$s.e\hat{R}_i^{GLM}$	CV	CV dalam %
2	205.478	0,9940448	206.709	1.231	636,2225	0,51683385	51,68%
3	189.919	0,9864641	192.525	2.606	843,1175	0,32352936	32,35%
4	180.230	0,9773331	184.410	4.180	1.014,4438	0,24268991	24,27%
5	186.212	0,9671190	192.543	6.331	1.224,4074	0,19339873	19,34%
6	201.198	0,9557691	210.509	9.311	1.477,0918	0,15863944	15,86%
7	197.865	0,9420169	210.044	12.179	1.664,2598	0,13664995	13,66%
8	209.208	0,9249338	226.187	16.979	1.963,2353	0,11562726	11,56%
9	198.164	0,9016020	219.791	21.627	2.194,7440	0,10148166	10,15%
10	196.305	0,8637600	227.268	30.963	2.639,7776	0,08525587	8,53%
11	184.382	0,7834974	235.332	50.950	3.486,0319	0,06842065	6,84%
12	109.294	0,4506839	242.507	133.213	7.232,1667	0,05429025	5,43%
Total	2.058.255	0,8766646	2.347.825	289.570	12.420,1588	0,04289173	4,29%

Dari Tabel 5.54 dapat diketahui bahwa total seluruh cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM  $\hat{R}_i^{GLM}$  adalah sebesar 12.420,1588 (dalam 1.000) dengan CV sebesar 4,29%. LDTF diperoleh dengan

$$\hat{f}_{i,k} = \frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}}, 1 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$

$$LDTF_i = \prod_{n=1}^{I-1} \hat{f}_{i,k}, 2 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$

Berikut ini disajikan hasil estimasi cadangan klaim IBNR menggunakan metode GLM dengan pendekatan distribusi ODP pada LoB 2, LoB 3, dan LoB 4.

Tabel 5.38: Total *Coefisien Variation* CV IBNR- Metode GLM model ODP

LoB	$C_{i,I+1-i}$	LDTF	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i^{GLM}$	$s.e\hat{R}_i^{GLM}$	CV	CV dalam %
LoB2	3.898.168	0,9056	4.304.450	406.282	24.091.138	0,0593	5,93%
LoB3	5.174.450	0,9080	5.698.268	523.818	25.640.702	0,049	4,89%
LoB4	3.919.988	0,8742	4.484.015	564.027	21.837.955	0,039	3,87%

Hasil pencadangan untuk setiap *accident period*, model regresi yang disesuaikan, beserta segitiga *Run-Off* secara lengkap untuk LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 disajikan di Lampiran 8.



### 5.4.2 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma merupakan anggota distribusi Tweedie dengan *link function* yang dipilih adalah *log – linear* dengan besar pemilihan nilai  $p = 2$ . Model Gamma dapat ditulis sebagai berikut  $E[S_{i,k}] = \mu_{i,k}$  dan  $Var[S_{i,k}] = \phi \mu_{i,k}^2$ . Nilai varians pada model Gamma berbanding lurus terhadap kuadrat dari  $\mu$ , berbeda dengan nilai varians yang berbanding lurus terhadap  $\mu$  pada Model ODP. Dengan langkah yang serupa dengan sub-bab 5.4.1, maka diperoleh hasil estimasi parameter, model regresi beserta visualisasi regresi vs *fitted value*, dan cadangan klaim IBNR pada masing-masing LOB adalah sebagai berikut.

Tabel 5.39: Total *Coefisien Variation* CV IBNR- Metode Gamma

LoB	$C_{i,I+1-i}$	LDTF	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i^{GLM}$	$s.e\hat{R}_i^{GLM}$	CV	CV dalam %
LoB1	2.058.255	0,8716	2.361.376	303.121	19.539,011	0,064	6,4%
LoB2	3.898.168	0,9036	4.314.212	416.044	57.825,709	0,138	13,8%
LoB3	5.174.450	0,9055	5.714.737	540.287	39.796,884	0,074	7,4%
LoB4	3.919.988	0,8691	4.510.149	590.161	28.812,773	0,049	4,9%

### 5.4.3 Distribusi Majemuk Poisson-Gamma

Distribusi majemuk Poisson-Gamma merupakan anggota distribusi keluarga Tweedie dengan *link function* yang dipilih adalah *log – linear*. Nilai p yang dipilih adalah  $1 < p < 2$ . Dengan menggunakan perangkat lunak R, berikut ini disajikan hasil perhitungan cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM-model majemuk Poisson-Gamma.

Tabel 5.40: Total CV IBNR- GLM Majemuk Poisson-Gamma

LoB	$C_{i,I+1-i}$	LDTF	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i^{GLM}$	$s.e\hat{R}_i^{GLM}$	CV	CV dalam %
LoB1	2.058.255	0,8716865	2.361.233	302.978	18.595,0289	0,06137419	6,14%
LoB2	3.898.168	0,9055885	4.304.569	406.401	22.215,1588	0,05466315	5,47%
LoB3	5.174.450	0,9054763	5.714.617	540.167	37.838,2300	0,07004913	7%
LoB4	3.919.988	0,8692028	4.509.866	589.878	27.611,7742	0,04680930	4,68%





## 5.5 Analisis Hasil Pencadangan Klaim IBNR

Pada sub-bab ini, disajikan analisis hasil cadangan klaim IBNR yang telah diperoleh pada sub-bab sebelumnya. Untuk metode *Chain-Ladder* dengan metode Sherman sebagai pendekatan, hasil estimasi sangat dipengaruhi oleh nilai  $\hat{f}^{tail}$ . Pemilihan batas pada langkah ke lima, bergantung pada keputusan masing-masing aktuaris. Hal tersebut hanya dipergunakan sebagai alat untuk melihat perkembangan estimasi klaim IBNR. Informasi yang dapat diambil dari Gambar 5.4 dan Gambar 5.6 adalah lama *development period* yang diperlukan oleh aktuaris untuk estimasi cadangan klaim yang telah sepenuhnya dikembangkan hingga mencapai 100%.

Metode selanjutnya yang digunakan sebagai sarana dalam mengestimasi cadangan klaim IBNR adalah metode MCL. Perbedaan mendasar antara kedua metode tersebut adalah pada nilai *ultimate*. Untuk metode *Chain-Ladder*, nilai *ultimate*  $\hat{C}_{i,k}^{ult}$  dengan  $k = I + 1$ . Sedangkan pada metode MCL, nilai *ultimate* merupakan  $\hat{C}_{i,I}$ . Hasil estimasi pencadangan pada metode MCL dipengaruhi oleh faktor perkembangan pada setiap *development period*, sedangkan untuk besar CV yang merupakan sarana bagi aktuaris dalam memberikan penilaian terhadap hasil estimasi dipengaruhi oleh pemilihan nilai  $w$ , sehingga berpengaruh terhadap nilai *standard error* pada faktor perkembangan  $s.e.(\hat{f}_k^{(w)})$ , dan *standard error* faktor perkembangan individu  $s.e.(F_{i,k})$  yang kemudian mempengaruhi  $\widehat{mse}$ .

Pada LoB 1 sampai dengan LoB 4 nilai CV memiliki pola yang sama, yaitu menurun seiring berkembangnya *accident period*, dan mencapai nilai paling kecil untuk  $\hat{R}^{Mack's}$ . Dari Tabel 5.30 dan Tabel 5.31 dapat diketahui bahwa nilai CV berada dibawah 6%. Menurut beberapa penelitian terdahulu seperti pada Friedland (2010) nilai CV yang kurang dari 4 berarti bahwa hasil estimasi tergolong akurat atau bagus.

Untuk estimasi dengan menggunakan metode GLM yang didekati oleh distribusi keluarga Tweedie, hasil pencadangan dipengaruhi oleh nilai pada estimasi parameter. Setiap model distribusi yang digunakan dalam menentukan estimasi parameter menghasilkan nilai yang berbeda, karena setiap model distribusi terse-



but juga memiliki formula *likelihood* yang berbeda. Hasil estimasi setiap parameter beserta nilai *standard error* disajikan pada Tabel 5.41 dan Tabel 5.42. Informasi yang diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Untuk LoB 1, LoB 3, dan LoB 4, hasil estimasi parameter pada metode GLM model majemuk Poisson-Gamma memiliki nilai yang mendekati dengan estimasi parameter pada metode GLM model Gamma. Sedangkan untuk LoB 2, hasil estimasi parameter pada metode GLM model majemuk Poisson-Gamma memiliki nilai yang mendekati dengan estimasi parameter pada metode GLM model ODP.
2. Untuk seluruh estimasi parameter pada faktor *development period*, yaitu  $\beta_k$  dengan  $k \in \{2, \dots, 12\}$  bernilai negatif.

Berikut ini disajikan nilai estimasi setiap parameter pada LoB 1 sampai dengan LoB 4 untuk setiap model distribusi.

**Tabel 5.41: Estimasi Parameter Metode GLM LoB 1 dan LoB 2**

Parameter	LoB 1						LoB 2					
	ODP		Gamma		Poi-Gam		ODP		Gamma		Poi-Gam	
	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e
$\gamma$	11,364790	0,030346	11,13898	0,04783	11,14117	0,04770	12,15722	0,03942	11,90052	0,09419	12,15553	0,03999
$\hat{\alpha}_2$	0,077284	0,039892	0,27062	0,04648	0,26859	0,04670	0,05540	0,05242	0,20681	0,09153	0,05616	0,05313
$\hat{\alpha}_3$	0,006202	0,040707	0,18321	0,04819	0,18140	0,04840	-0,03926	0,05373	0,19870	0,09490	-0,03803	0,05444
$\hat{\alpha}_4$	-0,036865	0,041281	0,18578	0,04998	0,18346	0,05018	-0,12828	0,05507	0,12519	0,09843	-0,12675	0,05577
$\hat{\alpha}_5$	0,006292	0,040967	0,32217	0,05201	0,31877	0,04886	0,05450	0,05454	0,26332	0,10241	-0,08439	0,05525
$\hat{\alpha}_6$	0,095503	0,040217	0,41219	0,05440	0,40886	0,05450	0,02286	0,05313	0,55570	0,10712	0,02602	0,05384
$\hat{\alpha}_7$	0,093292	0,040405	0,36507	0,05735	0,36215	0,05741	0,01163	0,05348	0,31792	0,11294	0,01369	0,05421
$\hat{\alpha}_8$	0,167336	0,039897	0,48343	0,06117	0,48000	0,06113	0,10375	0,05249	0,41436	0,12046	0,10598	0,05322
$\hat{\alpha}_9$	0,138652	0,040452	0,42638	0,06641	0,42638	0,06641	0,06627	0,05320	0,37409	0,13077	0,07569	0,05396
$\hat{\alpha}_{10}$	0,172104	0,040596	0,43651	0,07423	0,43371	0,07391	0,04350	0,05433	0,32015	0,14618	0,04533	0,05512
$\hat{\alpha}_{11}$	0,206970	0,041338	0,43940	0,08769	0,43712	0,08705	0,02764	0,05635	0,29200	0,17267	0,02939	0,05720
$\hat{\alpha}_{12}$	0,237007	0,048570	0,46281	0,11904	0,46063	0,11797	0,03903	0,06557	0,29572	0,23441	0,04072	0,06665
$\hat{\beta}_2$	-0,303175	0,018908	-0,31086	0,04648	-0,31073	0,04607	-0,48465	0,02597	0,29572	0,23441	-0,48469	0,02636
$\hat{\beta}_3$	-1,725472	0,033345	-1,74480	0,04819	-1,74446	0,04795	-1,66467	0,04207	-1,68338	0,09490	-1,66473	0,04240
$\hat{\beta}_4$	-2,477377	0,049372	-2,49664	0,04998	-2,49628	0,04985	-2,43138	0,06234	-2,44968	0,09843	-2,43137	0,06246
$\hat{\beta}_5$	-2,960910	0,066022	-2,97640	0,05201	-2,97606	0,05196	-3,14704	0,09306	-3,16471	0,10241	-3,14696	0,09276
$\hat{\beta}_6$	-3,272700	0,082654	-3,27155	0,05440	-3,27140	0,05442	-3,62709	0,12656	-3,63306	0,10712	-3,62684	0,12569
$\hat{\beta}_7$	-3,489553	0,099631	-3,48764	0,05735	-3,48742	0,05745	-3,69092	0,14136	-3,79060	0,11294	-3,69085	0,14033
$\hat{\beta}_8$	-3,681398	0,120690	-3,64835	0,06117	-3,64850	0,06136	-4,47991	0,22967	-4,43278	0,12046	-4,47925	0,22671
$\hat{\beta}_9$	-3,787085	0,141969	-3,72288	0,06641	-3,72334	0,06670	-4,68016	0,28188	-4,58569	0,13077	-4,67929	0,27788
$\hat{\beta}_{10}$	-3,899364	0,171806	-3,80902	0,07423	-3,80980	0,07465	-4,87557	0,35295	-4,75474	0,14618	-4,87449	0,34755
$\hat{\beta}_{11}$	-5,016720	0,458600	-3,97405	0,08769	-3,97405	0,08825	-4,08464	0,22925	-4,85087	0,17267	-5,01549	0,45123
$\hat{\beta}_{12}$	-4,326884	0,372720	-4,10108	0,11904	-4,10326	0,12025	-5,34487	0,77449	-5,08818	0,23441	-5,34318	0,76016

Tabel 5.42: Estimasi Parameter Metode GLM LoB 3 dan LoB 4

Parameter	LoB 1						LoB 2					
	ODP		Gamma		Poi-Gam		ODP		Gamma		Poi-Gam	
	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e	est.	s.e
$\gamma$	12,518806	0,031850	12,44206	0,05248	12,44231	0,05221	12,034883	0,027025	11,89421	0,03732	11,89547	0,03727
$\hat{\alpha}_2$	0,031117	0,042851	-0,04832	0,05100	-0,04710	0,05118	0,044541	0,036010	0,10976	0,03626	0,10916	0,03650
$\hat{\alpha}_3$	-0,073534	0,044065	-0,09005	0,05287	-0,08942	0,05304	-0,017040	0,036692	0,06295	0,03760	0,06222	0,03783
$\hat{\alpha}_4$	-0,12828	0,44602	-0,05181	0,05484	-0,05217	0,05497	-0,001187	0,036660	0,11762	0,03899	0,11654	0,03921
$\hat{\alpha}_5$	-0,088199	0,044400	0,04410	0,05706	0,04311	0,05714	0,044583	0,036367	0,19427	0,04057	0,19288	0,04077
$\hat{\alpha}_6$	-0,037415	0,043927	0,16100	0,05969	0,15954	0,05970	0,081989	0,036160	0,34265	0,04244	0,33995	0,04259
$\hat{\alpha}_7$	0,005696	0,043575	0,17646	0,06293	0,17530	0,06286	0,114449	0,036034	0,34099	0,04474	0,33860	0,04486
$\hat{\alpha}_8$	0,052632	0,043235	0,21428	0,06712	0,21308	0,06695	0,174117	0,035702	0,39308	0,04772	0,39077	0,04778
$\hat{\alpha}_9$	0,095885	0,043058	0,22753	0,07286	0,22659	0,07255	0,220256	0,035560	0,41872	0,05181	0,41661	0,05178
$\hat{\alpha}_{10}$	0,129009	0,043212	0,22210	0,08145	0,22155	0,08092	0,289893	0,035365	0,45645	0,05791	0,45474	0,05774
$\hat{\alpha}_{11}$	0,051089	0,045222	0,13313	0,09621	0,13280	0,09534	0,268219	0,036384	0,41001	0,06841	0,40873	0,06802
$\hat{\alpha}_{12}$	0,039988	0,051856	0,11673	0,13061	0,11649	0,12914	0,303248	0,041791	0,44392	0,09287	0,44266	0,09215
$\hat{\beta}_2$	-0,641383	0,021353	-0,64854	0,05100	-0,64842	0,05045	-0,429087	0,016802	-0,43344	0,03626	-0,43338	0,03601
$\hat{\beta}_3$	-1,936696	0,037058	-1,95603	0,05287	-1,95571	0,05249	-1,873756	0,030498	-1,89249	0,03760	-1,89220	0,03748
$\hat{\beta}_4$	-2,625591	0,053746	-2,64669	0,05484	-2,64631	0,05456	-2,598459	0,045085	-2,61880	0,03899	-2,61847	0,03896
$\hat{\beta}_5$	-3,191056	0,075073	-3,20331	0,05706	-3,20304	0,05688	-3,030895	0,059207	-3,04553	0,04057	-3,04526	0,04060
$\hat{\beta}_6$	-3,714192	0,104063	-3,70664	0,05969	-3,70654	0,05962	-3,356739	0,074685	-3,36002	0,04244	-3,35985	0,04253
$\hat{\beta}_7$	-4,025230	0,131404	-3,99675	0,06293	-3,99688	0,06296	-3,498090	0,086927	-3,48316	0,04474	-3,48320	0,04489
$\hat{\beta}_8$	-4,232676	0,159552	-4,17808	0,06712	-4,17836	0,06725	-3,754989	0,108566	-3,69852	0,04772	-3,69902	0,04795
$\hat{\beta}_9$	-4,432476	0,195906	-4,35020	0,07286	-4,35075	0,07313	-3,814083	0,125378	-3,79845	0,05181	-3,79914	0,05212
$\hat{\beta}_{10}$	-4,703006	0,255572	-4,59459	0,08145	-4,59545	0,08191	-3,958183	0,155164	-3,86778	0,05791	-3,86857	0,05835
$\hat{\beta}_{11}$	-4,913536	0,342523	-4,79851	0,09621	-4,79932	0,09695	-3,953756	0,188309	-3,84974	0,06841	-3,85065	0,06900
$\hat{\beta}_{12}$	-5,485300	0,649062	-5,40856	0,13061	-5,40880	0,13217	-4,108281	0,290607	-3,96761	0,09287	-3,96887	0,09387

Hasil estimasi cadangan klaim IBNR untuk seluruh metode adalah sebagai berikut

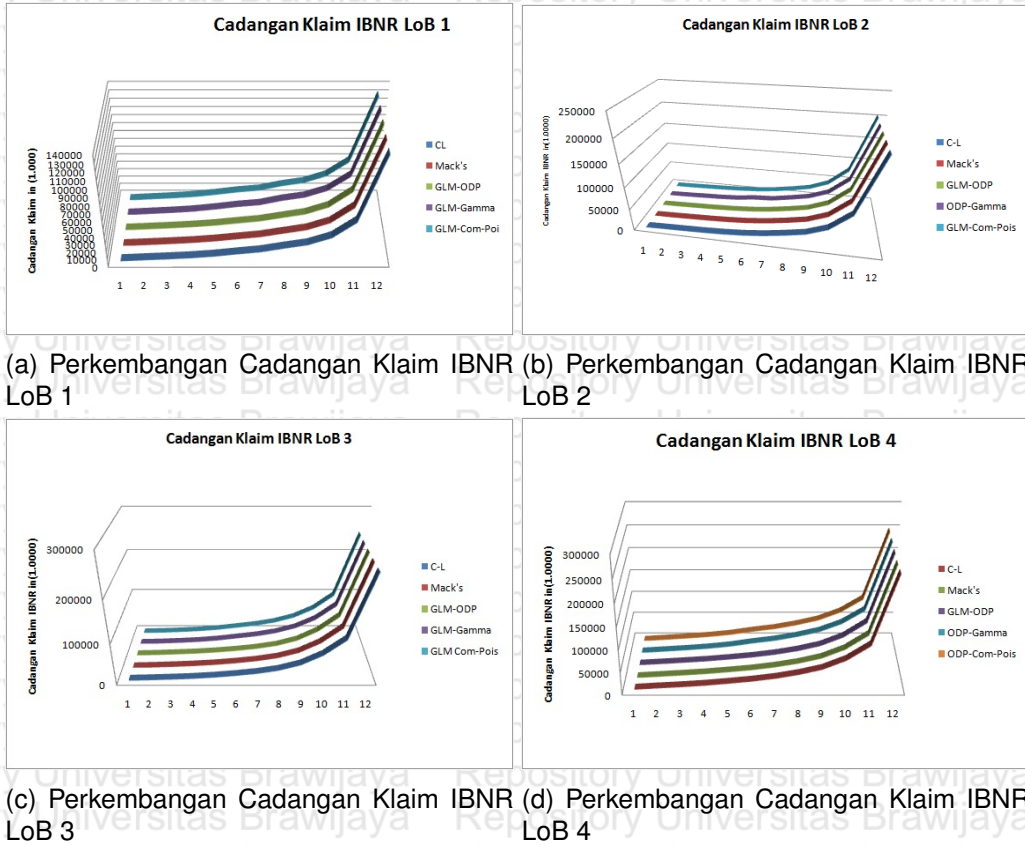
Tabel 5.43: Hasil Total Estimasi Cadangan Klaim IBNR dalam (1.000)

LoB	Metode				
	CL	MCL	GLM-ODP	GLM-Gamma	GLM-Pois-Gam
LoB 1	309.727	289.570	289.570	303.121	302.978
LoB 2	416.146	406.281	406.282	416.044	406.401
LoB 3	541.723	523.817	523.818	540.287	540.167
LoB 4	615.111	564.027	564.027	590.161	589.878

Dari Tabel 5.43, dapat diperoleh informasi secara khusus yaitu.

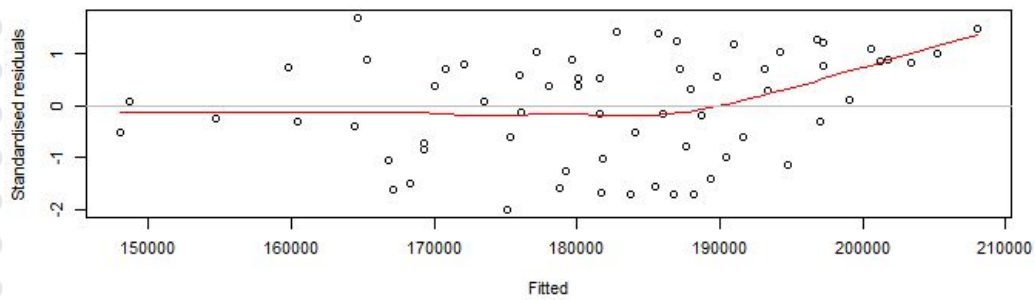
1. Hasil  $\hat{R}_i^{Mack's}$  dan  $\hat{R}_i^{GLM-ODP}$  bernilai relatif sama.
2. Hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan metode *Chain-Ladder* paling besar diantara hasil yang diperoleh dari seluruh metode.
3. Terdapat perbedaan yang relatif signifikan pada hasil pencadangan untuk LoB 4. Hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode *Chain-Ladder* berbeda sebesar 51.084 terhadap  $\hat{R}^{Mack's}$  dan  $\hat{R}^{GLM-ODP}$ , 24.950 terhadap  $\hat{R}^{GLM-Gamma}$ , dan 25.233 terhadap  $\hat{R}^{GLM-Poi-Gam}$ . Kemungkinan penyebabnya adalah nilai  $\hat{f}^{tail}$  yang besar yaitu 1,010563.
4. Rataan hitung (dalam 1.000) dari hasil total cadangan klaim IBNR untuk masing-masing LoB adalah 298.993 (LoB 1), 410.231 (LoB 2), 533.962 (LoB 3), dan 584.641 (LoB 4).

Untuk mempermudah melihat pola perkembangan cadangan klaim IBNR pada seluruh metode, berikut ini disajikan visualisasinya.

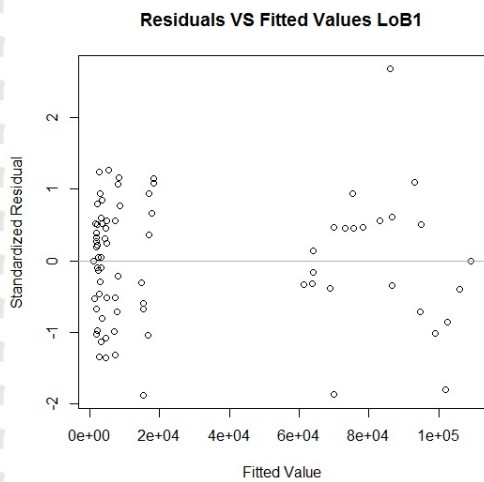


Gambar 5.15: Perkembangan Cadangan Klaim IBNR untuk setiap  $i$

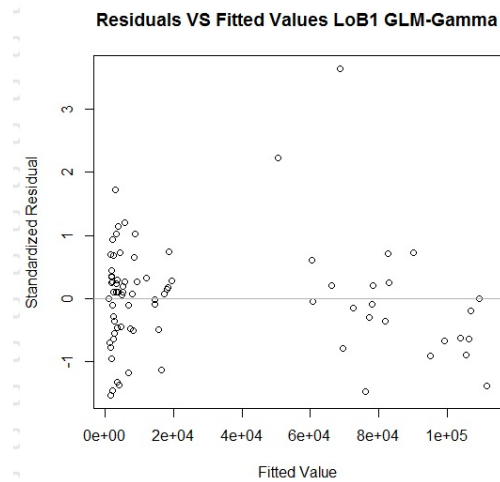
Gambar 5.15 menyajikan hasil cadangan klaim IBNR untuk masing-masing LoB pada setiap metode. Secara umum dari keempat gambar dapat diketahui bahwa  $\hat{R}_i$  mengikuti distribusi eksponensial (*growth*) dimana nilai cadangan akan meningkat seiring bertambahnya *accident period*. Tidak terdapat *outliers*, sehingga menandakan bahwa hasil cadangan klaim dengan menggunakan beberapa metode tidak berbeda secara signifikan. Selanjutnya, disajikan visualisasi grafik *standardized residual vs fitted value* yang diperoleh dari metode MCL dan Metode GLM.



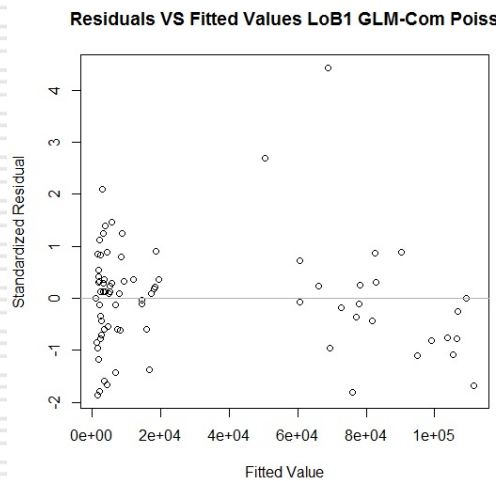
(a) Metode MCL



(b) Metode GLM Model ODP



(c) Metode GLM Model Gamma



(d) Metode GLM Model majemuk Poisson-Gamma

Gambar 5.16: *Standardized Residual VS Fitted Value* pada LoB 1

Gambar 5.16 menyajikan *plotting* sebaran *standardized residual* (SR) terhadap *fitted value* untuk  $1 < i < I$  dan  $1 < k < I$  pada LoB 1. Visualisasi sebaran SR vs *fitted values* pada kedua metode tersebut sangat berbeda karena perhitungan

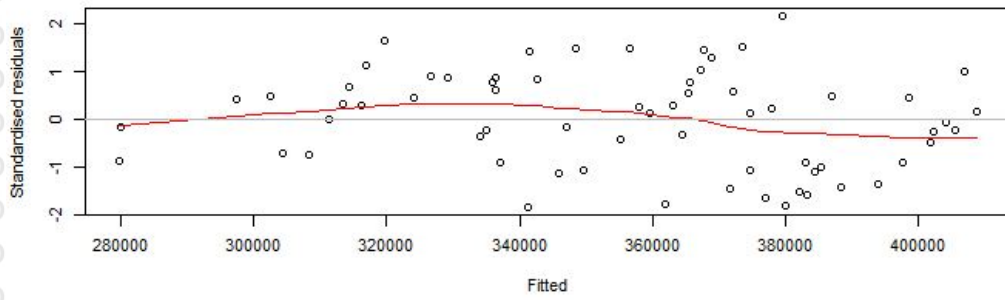


SR pada metode MCL dipengaruhi oleh rata-rata aritmetik dari  $F_{i,k}$  (sub-bab 5.3.1), sedangkan pada GLM perhitungan SR dipengaruhi oleh estimasi parameter yang mempengaruhi model regresi. Secara umum, sebaran SR pada keempat model tidak berada di persekitaran nol, sehingga mengindikasikan bahwa data tersebut memuat heterokedastisitas. Metode MCL tidak dapat menangkap *outliers*, padahal informasi *ouliers* sangat diperlukan bagi aktuaris karena hal tersebut bisa menjadi informasi yang bermakna. Sebagai contohnya adalah aktuaris mendapatkan informasi tentang penyebab nilai cadangan tersebut meningkat, faktor internal maupun eksternal yang mempengaruhinya dan lain-lain. Akan tetapi dengan metode MCL aktuaris dapat melihat garis trend yang terjadi. Trend yang muncul adalah berupa garis meningkat untuk  $\hat{C}_{i,k} > \approx 185.000$  yang berarti bahwa semakin besar nilai  $\hat{C}_{i,k}$  maka residual yang dihasilkan juga semakin besar. Pada Gambar 5.16(b), 5.16(c), dan 5.16(d) terlihat bahwa sebaran SR tidak seimbang sepanjang sumbu x. Hal ini berarti model regresi belum optimal sehingga dapat dikembangkan lebih lanjut. Sebaran SR untuk model Gamma dan model majemuk Poisson-Gamma memiliki pola yang sangat mirip namun pada majemuk Poisson-Gamma *outlier* bernilai sedikit lebih besar dibandingkan pada nilai *outlier* pada model Gamma. Hal ini dipengaruhi oleh nilai estimasi index parameter p pada model majemuk Poisson-Gamma bernilai 1,99 (mendekati  $p=2$ ).

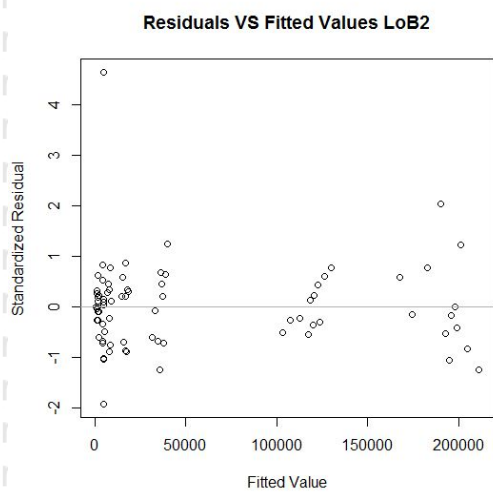
Hasil visualisasi SR pada LoB 2 tidak berbeda jauh dengan LoB 1. Data LoB 2 juga memuat heterokedastisitas. Dapat dilihat pada Gambar 5.17(a) trend yang terbentuk pada metode MCL LoB 2 cenderung sejajar dengan sumbu x namun bukan merupakan garis linear sehingga sulit untuk ditarik kesimpulan hubungan antara  $\hat{C}_{i,k}$  dengan SR. Terdapat masing-masing satu *outliers* pada metode GLM-ODP dan metode GLM majemuk Poisson-Gamma, namun *outlier* pada model majemuk Poisson-Gamma bernilai lebih tinggi. *Plotting* sebaran SR Untuk model majemuk Poisson-Gamma sangat dipengaruhi oleh besar nilai estimasi index parameter, karena pada LoB 2 estimasi index parameter sebesar 1.0134 (mendekati  $p=1$ ) maka sebaran SR model Poisson-Gamma memiliki pola yang serupa dengan model ODP. Untuk LoB 3 dan LoB 4, dikarenakan memiliki karakter sebaran SR yang serupa maka visualisasi dapat dilihat di Lampiran 12.



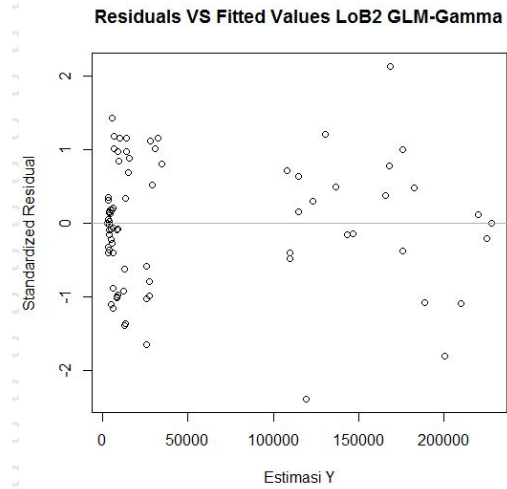
Untuk LoB 2, visualisasi SR adalah sebagai berikut



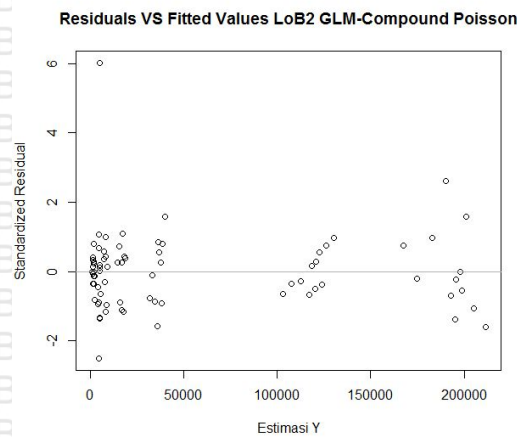
(a) Metode Mack's *Chain-Ladder*



(b) Metode GLM Model ODP

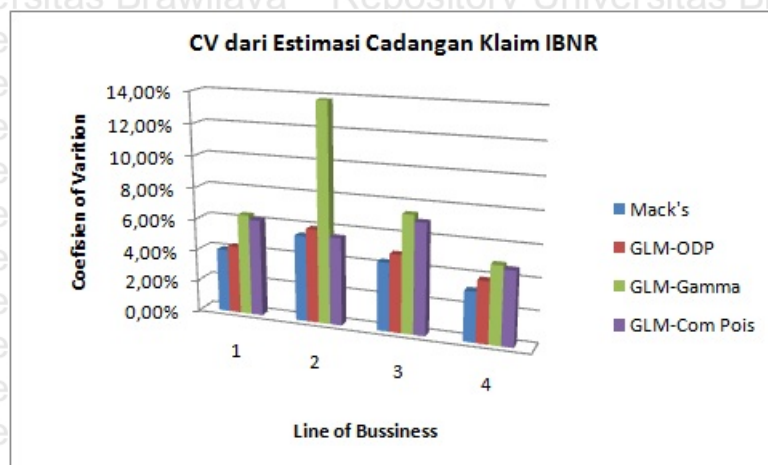


(c) Metode GLM Model Gamma



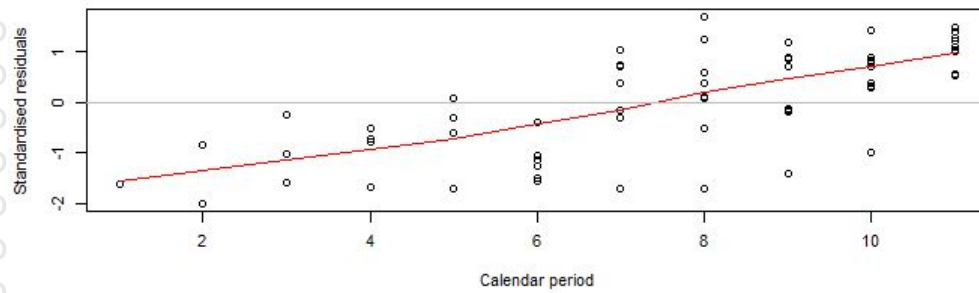
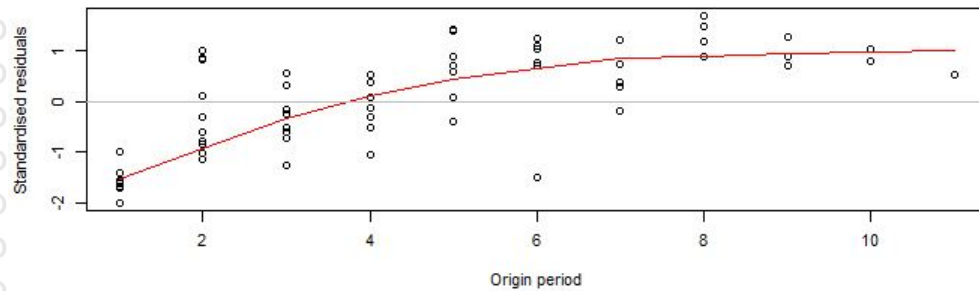
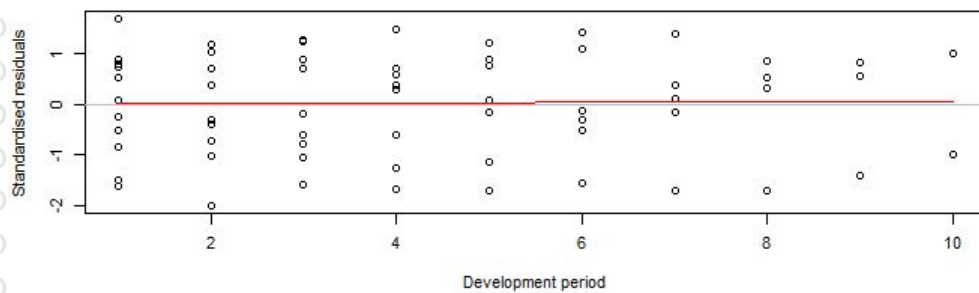
(d) Metode GLM Model majemuk Poisson-Gamma

Gambar 5.17: *Standardized Residual VS Fitted Value* pada LoB 2



Gambar 5.18: CV dalam % dari Estimasi Cadangan Klaim IBNR

Dari Gambar 5.18 dapat dilihat bahwa metode MCL menghasilkan CV yang paling kecil pada setiap LoB, sehingga aktuaris dapat menggunakan hasil perhitungan cadangan klaim IBNR oleh metode MCL yaitu sebesar 289.569,514 (LoB 1), 406.281,803 (LoB 2), 523.817,784 (LoB 3), dan 564.027,042 (LoB 4) sebagai keputusan akhir hasil pencadangan. Namun jika aktuaris ingin menggunakan hasil cadangan klaim IBNR yang mempertimbangkan distribusi sebagai pendekatannya, maka untuk LoB 1 hasil terbaik diperoleh dengan menggunakan metode GLM model ODP yaitu sebesar 289.570, LoB 2 dengan metode GLM model majemuk Poisson-Gamma dengan nilai cadangan klaim IBNR sebesar 406.401, untuk LoB 3 adalah sebesar 523.818 yang diperoleh dengan menggunakan metode GLM model ODP, sedangkan untuk LoB 4 yaitu sebesar 564.027 yang diperoleh dengan menggunakan metode GLM model ODP. Informasi tambahan yang didapatkan dari hasil cadangan klaim IBNR menggunakan metode MCL selain *plotting SR vs fitted value* yaitu *plotting sebaran SR vs accident period*, *SR vs development period*, dan *SR vs callender period*. Untuk LoB 1, LoB 2, LoB 3, dan LoB 5 adalah sebagai berikut

(a) *Standardized Residual vs Calendar Period* LoB 1(b) *Standardized Residual vs Accident Period* LoB 1(c) *Standardized Residual vs Development Period* LoB 1Gambar 5.19: Visualisasi *standardized residual* pada Metode MCL LoB 1

Visualisasi sebaran SR dapat dimanfaatkan oleh aktuaris untuk mengetahui performa hasil cadangan klaim IBNR jika dilihat dari beberapa faktor yang mempengaruhi. Gambar 5.19 (a) menyajikan visualisasi SR VS *Calendar Period* (CP). Untuk CP ke-3 berisi 3 titik yang merupakan SR dari nilai  $C_{3,1}$ ,  $C_{2,2}$ ,  $C_{1,3}$ , dan sebagainya. Trend yang terbentuk adalah naik sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar tahun CP maka semakin tinggi nilai SR. Manfaat yang bisa diperoleh adalah aktuaris dapat memodifikasi nilai  $\hat{f}_k$  untuk mengontrol besarnya SR terhadap CP, begitu juga terhadap faktor lain yang mempengaruhi pencadangan. Untuk LoB 2 dan seterusnya, hasil visualisasi dapat dilihat pada Lampiran 13.



## BAB 6

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 6.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, kesimpulan yang dapat ditarik adalah sebagai berikut.

1. Hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode *Chain-Ladder* dengan pendekatan metode Sherman *curve-fitting* adalah sebesar 309.727,902 (LoB 1), 443.520,213 (LoB 2), 573.123,196 (LoB 3), dan 606.425,476 (LoB 4). Hasil estimasi cadangan klaim IBNR oleh metode *Chain-Ladder* dipengaruhi oleh *tail-factor* yang diperoleh dari metode Sherman *curve-fitting*.
2. Hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode MCL adalah sebesar 289.569,514 (LoB 1), 406.281,803 (LoB 2), 523.817,784 (LoB 3), dan 564.027,042 (LoB 4). Hasil pencadangan pada metode MCL dipengaruhi oleh pemilihan nilai  $w$ , nilai *standard error* pada faktor perkembangan  $s.e.(\hat{f}_k^{(w)})$ , dan *standard error* faktor perkembangan individu  $s.e.(F_{i,k})$  yang secara langsung mempengaruhi  $\widehat{mse}$ .
3. Hasil estimasi cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode GLM adalah sebagai berikut:
  - (a) Metode GLM model ODP: 289.570 (LoB 1), 406.282 (LoB 2), 523.818 (LoB 3), dan 564.027 (LoB 4).
  - (b) Metode GLM model Gamma: 303.121 (LoB 1), 416.044 (LoB 2), 540.287 (LoB 3), dan 590.161 (LoB 4).
  - (c) Metode GLM model majemuk Poisson-Gamma: 302.978 (LoB 1), 406.401 (LoB 2), 540.167 (LoB 3), 589.878 (LoB 4).



Hasil pencadangan pada metode GLM dengan model ODP besar nilai  $\widehat{mse}$  dipengaruhi oleh parameter dispersi  $\phi$ , pada metode GLM model Gamma dipengaruhi oleh *shape parameter* yang dinotasikan oleh  $\phi$ , dan untuk metode GLM model majemuk Poisson-Gamma dipengaruhi oleh besar estimasi index parameter.

4. Performa hasil pencadangan klaim IBNR adalah sebagai berikut:
  - (a) Hasil  $\hat{R}_i^{Mack's}$  dan  $\hat{R}_i^{GLM-ODP}$  bernilai relatif sama.
  - (b) Keunggulan metode *Chain-Ladder* dalam proses perhitungan maupun komputasi untuk memprediksi cadangan klaim IBNR adalah lebih sederhana dibandingkan dengan dua metode lainnya. Adapun kelemahannya yaitu, aktuaris tidak dapat melihat performa hasil estimasi cadangan klaim IBNR karena informasi yang dipeoleh oleh aktuaris hanya sebatas pada besar nominal hasil estimasi cadangan klaim IBNR.
  - (c) Keunggulan metode MCL dan metode GLM adalah aktuaris dapat melihat performa hasil estimasi pencadangan dari berbagai informasi yang diperoleh, salah satunya adalah besar CV pada setiap *accident period*. Kelemahan metode MCL dan metode GLM adalah terdapat asumsi-asumsi dasar yang harus terpenuhi khususnya pada metode GLM total klaim yang telah diobservasi pada masing-masing *accident period* harus bernilai tak-negatif mengingat dalam perhitungan  $\widehat{mse}$  pada model GLM melibatkan nilai varians.
  - (d) Hasil cadangan terbaik pada masing-masing LoB untuk metode GLM adalah sebagai berikut. Untuk LoB 1 hasil terbaik diperoleh dengan menggunakan metode GLM model ODP yaitu sebesar 289.570, LoB 2 dengan metode GLM model majemuk Poisson-Gamma dengan nilai cadangan klaim IBNR sebesar 406.401, untuk LoB 3 adalah sebesar 523.818 yang diperoleh dengan menggunakan metode GLM model ODP, sedangkan untuk LoB 4 yaitu sebesar 564.027 yang diperoleh dengan menggunakan metode GLM model ODP.



## 6.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan penelitian, berikut saran-saran yang dapat dilakukan untuk penelitian selanjutnya:

1. Penambahan efek efek *smoothing* pada metode GLM untuk mengestimasi cadangan klaim IBNR.
2. Mengeksplorasi model regresi pada metode GLM-ODP, GLM-Gamma, dan GLM-majemuk Poisson-Gamma sehingga mendapatkan sebaran *standardized residual* yang lebih merata di sekitaran nilai nol.



## DAFTAR PUSTAKA

- Agresti, A. (1996). *An introduction to categorical data analysis*, volume 135. Wiley New York.
- Anonymous. (2017). *ASTIN Non-Life Reserving Practice Report*. Casualty Actuarial Society, [http://www.actuaries.org/ASTIN\\_WP\\_NL\\_Reserving\\_Report1.0\\_2017-06-15.pdf](http://www.actuaries.org/ASTIN_WP_NL_Reserving_Report1.0_2017-06-15.pdf), 24 edition. Diakses pada 12 Januari 2018.
- Antonio, K. and Plat, R. (2014). Micro-level stochastic loss reserving for general insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2014(7):649–669.
- Antunes, R. and Gonzalez, V. (2015). A production model for construction: A theoretical framework. *Buildings*, 5(1):209–228.
- Ashab and Working, C. T. F. (2017). The estimation of loss development tail factors: A summary report. In *Casualty Actuarial Society Forum*. Citeseer.
- Björkwall, S., Hössjer, O., Ohlsson, E., and Verrall, R. (2011). A generalized linear model with smoothing effects for claims reserving. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49(1):27–37.
- Bornhuetter, R. L. and Ferguson, R. E. (1972). The actuary and ibnr. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, volume 59, pages 181–195.
- Carrato, A., Concina, F., Gesmann, M., Murphy, D., Wüthrich, M., and Zhang, W. (2017). Claims reserving with r: Chainladder-0.2. 5 package vignette.
- Dahl, P. (2003). Introduction to reserving. *Stockholms Universitet Matematiska Institutionen*.
- DeGroot, M. H. and Schervish, M. J. (2012). *Probability and statistics*. Pearson Education.
- Dictionary, C. E. (2019). *line of bussines, n.* [dictionary entry]. <http://www.collinsdictionary.com/amp/english/lineof-business>, diakses pada 09 Mei 2019.
- Dobson, A. J. and Barnett, A. (2008). *An introduction to generalized linear models*. CRC press.
- Dunn, P. K. and Smyth, G. K. (2005). Series evaluation of tweedie exponential dispersion model densities. *Statistics and Computing*, 15(4):267–280.
- England, P. D. and Verrall, R. J. (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: mathematics and economics*, 25(3):281–293.
- England, P. D. and Verrall, R. J. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, 8(3):443–518.



Friedland, J. (2010). Estimating unpaid claims using basic techniques. In *Casualty Actuarial Society*, volume 201.

Hartl, T. (2010). Fitting a glm to incomplete development triangles. *cas e-forum*, fall 2010.

Hocking, R. and Smith, W. B. (19). Estimation of parameters in the multivariate normal distribution with missing observations. *Journal of the American Statistical Association*, 63(321):159–173.

Jorgensen, B. (1997). *The theory of dispersion models*. CRC Press.

Liu, H. and Verrall, R. (2009). Predictive distributions for reserves which separate true ibnr and ibner claims. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 39(1):35–60.

Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *Astin bulletin*, 23(2):213–225.

Mack, T. (1999). The standard error of chain ladder reserve estimates: Recursive calculation and inclusion of a tail factor. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 29(2):361–366.

McCullagh, P. (1984). Generalized linear models. *European Journal of Operational Research*, 16(3):285–292.

McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized linear models*, volume 37. CRC press.

Merz, M. and Wüthrich, M. V. (2013). Estimation of tail development factors in the paid-incurred chain reserving method. *Variance, Advancing the Science of Risk*, 7(1):61–73.

Nelder, J. A. and Baker, R. J. (1972). *Generalized linear models*. Wiley Online Library.

Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., and Wasserman, W. (1996). *Applied linear statistical models*, volume 4. Irwin Chicago.

Renshaw, A. E. and Verrall, R. J. (1998). A stochastic model underlying the chain-ladder technique. *British Actuarial Journal*, 4(4):903–923.

Schnieper, R. (1991). Separating true ibnr and ibner claims 1. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 21(1):111–127.

Sherman, R. E. and Diss, G. F. (2016). Estimating the workerscompensation tail. In *Casual s Actuwial Sode*, *Forum*, pages 207–282. Citeseer.

Taylor, G. and McGuire, G. (2016). Stochastic loss reserving using generalized linear models. *CAS Monograph*, (3).

Tee, L. (2017). *Stochastic chain-ladder methods in non-life insurance*. University of Tartu, ISBN: 978-9949-77-485-2.





Verrall, R., Nielsen, J. P., and Jessen, A. H. (2010). Prediction of rbns and ibnr claims using claim amounts and claim counts. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 40(2):871–887.

Wüthrich, M. V. (2016). Claims reserving using tweedie's compound poisson model. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 33(2):331–346.

Wüthrich, M. V. (2017). *Non-life insurance: mathematics & statistics*. <https://ssrn.com/abstract=2319328>, Diakses pada 31 Januari 2018.

## LAMPIRAN 1: Distribusi Anggota EDF

Berikut ini akan disajikan penurunan rumus dari masing-masing anggota EDF dua parameter untuk distribusi Normal, distribusi Gamma dan distribusi Poisson yang sesuai dengan Tabel 2.5. Diketahui FKP dari EDF adalah sebagai berikut,

$$\pi(y; \theta, \phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \theta)\right).$$

### 1. Distribusi Normal

$$\begin{aligned}\pi(y; \mu, \sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ \ln \pi(y; \mu, \sigma^2) &= \ln\left((2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\ &= \ln(2\pi\sigma^2)^{-1/2} + \left(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \left(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \\ \pi(y; \mu, \sigma^2) &= \exp\left(\left(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-y^2 + 2y\mu - \mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2)\right) \\ &= \exp\left(\frac{2y\mu - \mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{y\mu - \frac{1}{2}\mu^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right),\end{aligned}$$

dengan

$$\theta = \mu,$$

$$\phi = \theta,$$

$$a(\phi) = \sigma^2 = \phi,$$

$$b(\theta) = \frac{1}{2}\mu^2 = \frac{1}{2}\theta^2,$$

$$c(y, \theta) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{y^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\theta) - \frac{y^2}{2\theta},$$



$$E[y] = b'(\theta) = \theta,$$

$$V[\mu] = b''(\theta) = 1,$$

$$\text{Var}[y] = a(\phi) \cdot b''(\theta) = \phi.$$

## 2. Distribusi Gamma

$$\pi(y; \alpha, \beta) = \frac{y^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\ln \pi(y; \alpha, \beta) = \ln \left( y^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta y} \right) - \ln \Gamma(\alpha)$$

$$= (\alpha - 1) \ln y + \alpha \ln \beta - \beta y - \ln \Gamma(\alpha)$$

$$= (\alpha - 1) \ln y + \alpha \ln \beta - \beta y - \ln \Gamma(\alpha)$$

$$\exp \cdot \ln \pi(y; \alpha, \beta) = \exp \left( (\alpha - 1) \ln y + \alpha \ln \beta - \beta y - \ln \Gamma(\alpha) \right)$$

$$\pi(y; \alpha, \beta) = \exp \left( (\alpha - 1) \ln y + \alpha \ln \beta - \beta y - \ln \Gamma(\alpha) \right)$$

$$= \exp \left( -\beta y + \alpha \ln \beta + (\alpha - 1) \ln y - \ln \Gamma(\alpha) \right)$$

$$= \exp \left( \frac{-\beta y}{\frac{1}{\alpha}} + \ln \beta + (\alpha - 1) \ln y - \ln \Gamma(\alpha) \right)$$

$$= \exp \left( \frac{\beta y}{\frac{-1}{\alpha}} - \ln \beta + (\alpha - 1) \ln y - \ln \Gamma(\alpha) \right)$$

Misal,

$$\theta = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$a(\phi) = \frac{-1}{\alpha}$$

$$\phi = \frac{1}{\alpha},$$

$$\beta = \theta \alpha,$$

$$\ln \beta = \ln \theta - \ln \phi$$

$$\pi(y; \theta, \phi) = \exp \left( \frac{y\theta - \ln \theta}{-\phi} + \frac{\ln \phi}{\phi} + \left( \frac{1}{\phi} - 1 \right) \ln y - \ln \Gamma \left( \frac{1}{\phi} \right) \right)$$



$$c(y, \phi) = \frac{\ln \phi}{\phi} + \left( \frac{1}{\phi} \right)^{-1} \ln y - \ln \Gamma \frac{1}{\phi},$$

dengan

$$E[y] = b'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \theta = \frac{1}{\theta},$$

$$\text{Link function} = (b')^{-1}(\theta) = \theta; (b')^{-1}(\mu) = \frac{1}{\mu},$$

$$V[\mu] = b''(\theta) = \frac{1}{\phi^2},$$

$$\text{Var}[y] = a(\phi)b''(\theta) = \frac{\phi}{\phi^2}.$$

### 3. Distribusi Poisson

Fungsi kepadatan peluang pada distribusi Poisson adalah

$$\pi(y; \lambda) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$$

$$\ln \pi(y; \lambda) = \ln \left( \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \right)$$

$$= y \ln \lambda - \lambda - \ln y!$$

$$\pi(y; \lambda) = \exp[y \ln \lambda - \lambda - \ln(y!)],$$

dengan

$$\theta = \ln \lambda,$$

$$\lambda = \exp \theta,$$

$$b(\theta) = \exp \theta,$$

$$a(\phi) = 1,$$

$$c(y, \phi) = -\ln(y!)$$

$$E[y] = \frac{\partial}{\partial \theta} b(\theta) = \exp \theta,$$

$$\text{Var}[y] = a(\phi) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} b(\theta) = 1 \cdot \exp \theta$$

$g(\mu) = \theta; \lambda = \exp \theta; \ln(\lambda) = \theta$ , jadi *link function* untuk distribusi Poisson adalah  $\ln$ .

**LAMPIRAN 2: Data (Segitiga *Run-Off* Kumulatif)**Tabel 6.1: Segitiga *Run-Off* Kumulatif pada LoB1 (dalam 1.000).

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	96.118	158.801	171.240	177.068	180.396	182.848	184.616	186.221	187.606	189.001	190.196	191.335
2	97.350	164.884	179.798	186.834	191.205	194.134	196.783	199.158	201.558	203.654	205.478	
3	89.018	153.536	167.939	174.670	178.250	181.468	183.819	185.946	188.019	189.919		
4	85.127	145.480	159.816	165.758	170.319	173.500	175.953	178.173	180.230			
5	85.516	149.098	163.633	171.514	176.388	180.106	183.556	186.212				
6	96.833	160.676	179.112	188.277	193.684	197.668	201.198					
7	91.886	163.360	180.811	188.524	193.635	197.865						
8	94.711	173.229	193.322	202.775	209.208							
9	95.071	169.761	188.511	198.164								
10	98.998	176.217	196.305									
11	104.434	184.382										
12	109.294											

Sumber: [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2966126](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2966126),  
diakses 31 Januari 2018

Tabel 6.2: Segitiga *Run-Off* Kumulatif pada LoB2 (dalam 1.000).

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	211.140	324.006	354.523	368.653	374.936	378.302	379.956	381.443	382.951	384.170	385.208	386.117
2	214.103	335.528	370.343	385.252	392.270	396.774	400.070	402.242	404.100	405.591	407.149	
3	190.751	301.699	333.392	347.424	354.800	359.813	363.311	365.622	367.489	369.166		
4	173.064	272.394	301.590	316.911	324.642	329.910	332.987	334.787	336.442			
5	173.183	278.643	311.352	328.357	336.764	342.731	346.547	349.172				
6	183.984	301.054	339.930	359.675	369.700	374.919	387.321					
7	187.130	306.818	346.286	363.818	372.827	378.186						
8	197.778	334.437	380.220	399.758	409.064							
9	196.153	327.335	369.029	388.119								
10	194.471	320.507	359.105									
11	193.964	316.400										
12	198.044											

Sumber: [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2966126](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2966126),  
diakses 31 Januari 2018

Tabel 6.3: Segitiga *Run-Off* Kumulatif pada LoB3 (dalam 1.000).

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	295.186	431.479	464.365	480.067	487.713	493.847	498.420	502.311	506.359	508.933	511.130	512.264
2	299.660	446.740	481.987	497.796	507.334	511.955	516.464	519.930	522.887	525.401	527.285	
3	266.192	398.568	429.419	445.049	454.731	460.428	464.521	468.137	470.774	473.027		
4	254.573	378.839	409.262	424.335	433.733	441.152	446.219	449.462	452.343			
5	248.042	379.443	415.075	433.904	445.015	451.467	456.185	460.895				
6	252.999	389.011	430.336	454.222	468.053	476.050	481.083					
7	261.441	407.536	452.194	477.130	490.776	497.365						
8	268.152	429.468	477.525	501.464	514.241							
9	287.997	451.948	502.360	524.594								
10	309.494	473.797	519.740									
11	286.677	439.290										
12	284.587											

Sumber: [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2966126](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2966126), diakses 31 Januari 2018

Tabel 6.4: Segitiga *Run-Off* Kumulatif pada LoB4 (dalam 1.000).

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	181.839	289.538	311.377	321.551	328.308	332.832	336.734	340.328	344.066	346.941	349.899	352.669
2	182.613	298.150	322.728	333.471	340.609	345.698	350.733	355.034	358.774	362.181	365.836	
3	168.023	279.485	302.449	313.211	319.830	325.143	329.912	333.702	337.343	340.809		
4	173.239	280.427	304.857	316.319	324.321	330.107	335.114	339.187	343.040			
5	173.820	291.870	316.960	330.650	339.044	345.439	350.970	355.219				
6	186.084	292.664	323.617	339.279	349.504	357.319	364.477					
7	181.812	306.435	336.791	352.604	362.952	370.785						
8	188.244	325.470	358.968	375.168	386.592							
9	202.450	341.968	377.401	394.707								
10	223.740	369.547	406.420									
11	221.241	363.868										
12	228.235											

Sumber: [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2966126](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2966126), diakses 31 Januari 2018



### LAMPIRAN 3: Segitiga *Run-Off Incremental*

Tabel 6.5: Segitiga *Run-Off Incremental* pada LoB 2 (dalam 1.000)

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	211.140	112.866	30.517	14.130	6.283	3.366	1.654	1.487	1.508	1.219	1.038	909
2	21.4103	121.425	34.815	14.909	7.018	4.504	3.296	2.172	1.858	1.491	1.558	
3	190.751	110.948	31.693	14.032	7.376	5.013	3.498	2.311	1.867	1.677		
4	173.064	99.330	29.196	15.321	7.731	5.268	3.077	1.800	1.655			
5	173.183	105.460	32.709	17.005	8.407	5.967	3.816	2.625				
6	183.984	117.070	38.876	19.745	10.025	5.219	12.402					
7	187.130	119.688	39.468	17.532	9.009	5.359						
8	197.778	136.659	45.783	19.538	9.306							
9	196.153	131.182	41.694	19.090								
10	194.471	126.036	38.598									
11	193.964	122.436										
12	198.044											

Tabel 6.6: Segitiga *Run-Off Incremental* pada LoB 3 (dalam 1.000)

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	295.186	136.293	32.886	15.702	7.646	6.134	4.573	3.891	4.048	2.574	2.197	1.134
2	299.660	147.080	35.247	15.809	9.538	4.621	4.509	3.466	2.957	2.514	1.884	
3	266.192	132.376	30.851	15.630	9.682	5.697	4.093	3.616	2.637	2.253		
4	254.573	124.266	30.423	15.073	9.398	7.419	5.067	3.243	2.881			
5	248.042	131.401	35.632	18.829	11.111	6.452	4.718	4.710				
6	252.999	136.012	41.325	23.886	13.831	7.997	5.033					
7	261.441	146.095	44.658	24.936	13.646	6.589						
8	268.152	161.316	48.057	23.939	12.777							
9	287.997	163.951	50.412	22.234								
10	309.494	164.303	45.943									
11	286.677	152.613										
12	284.587											

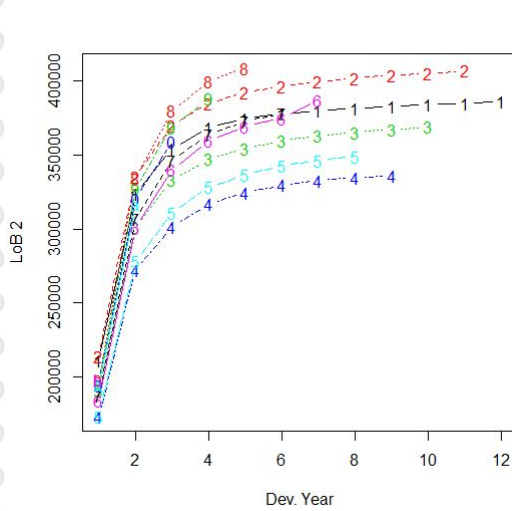


Tabel 6.7: Segitiga *Run-Off Incremental* pada LoB 4 (dalam 1.000)

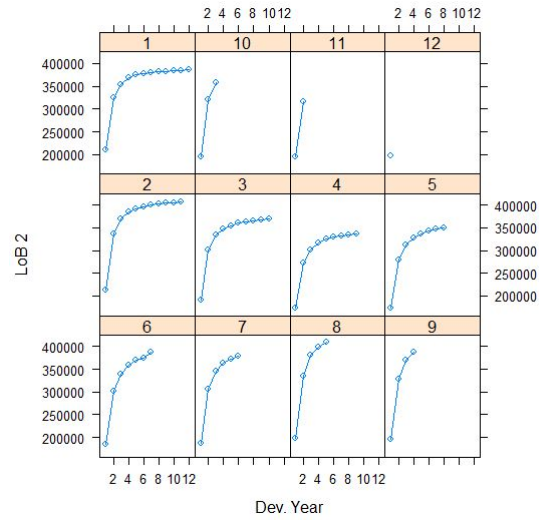
Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	181.839	107.699	21.839	10.174	6.757	4.524	3.902	3.594	3.738	2.875	2.958	2.770
2	182.613	115.537	24.578	10.743	7.138	5.089	5.035	4.301	3.740	3.407	3.655	
3	168.023	111.462	22.964	10.762	6.619	5.313	4.769	3.790	3.641	3.466		
4	173.239	107.188	24.430	11.462	8.002	5.786	5.007	4.073	3.853			
5	173.820	118.050	25.090	13.690	8.394	6.395	5.531	4.249				
6	186.084	106.580	30.953	15.662	10.225	7.815	7.158					
7	181.812	124.623	30.356	15.813	10.348	7.833						
8	188.244	137.226	33.498	16.200	11.424							
9	202.450	139.518	35.433	17.306								
10	223.740	145.807	36.873									
11	221.241	142.627										
12	228.235											



## LAMPIRAN 4: Visualisasi Klaim Kumulatif

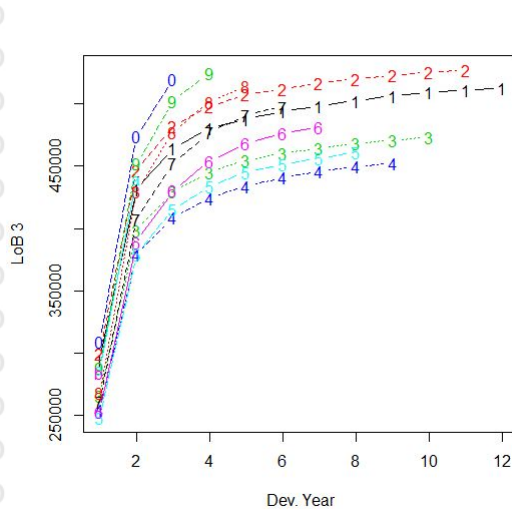


(a) Dalam satu grafik

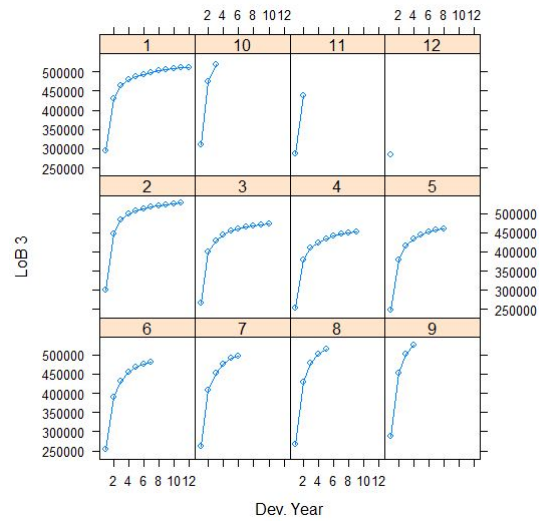


(b) Secara terpisah

Gambar 6.1: Visualisasi Besar Klaim Kumulatif pada LoB 2

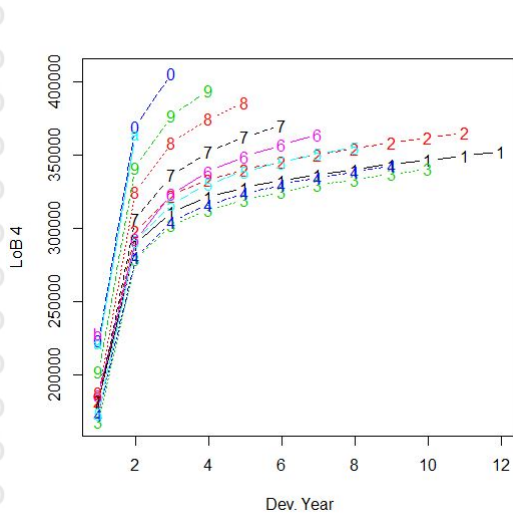


(a) Dalam satu grafik

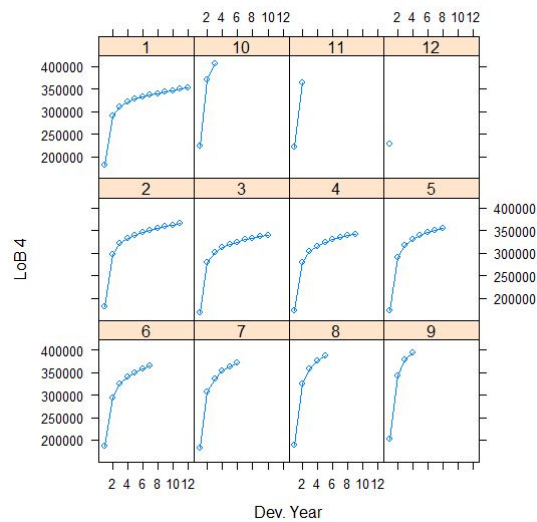


(b) Secara terpisah

Gambar 6.2: Visualisasi Besar Klaim Kumulatif pada LoB 3



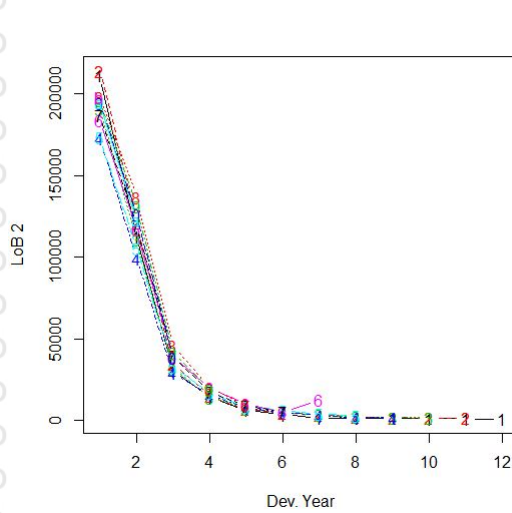
(a) Dalam satu grafik



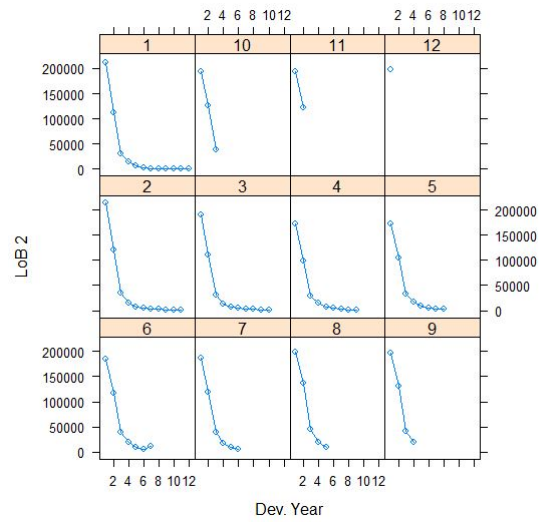
(b) Setiap Accident Period

Gambar 6.3: Visualisasi Besar Klaim Kumulatif pada LoB 4

LAMPIRAN 5: Visualisasi Klaim Incremental

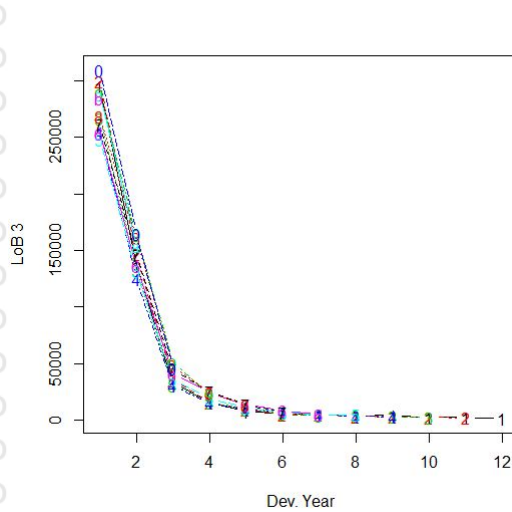


(a) Dalam satu grafik

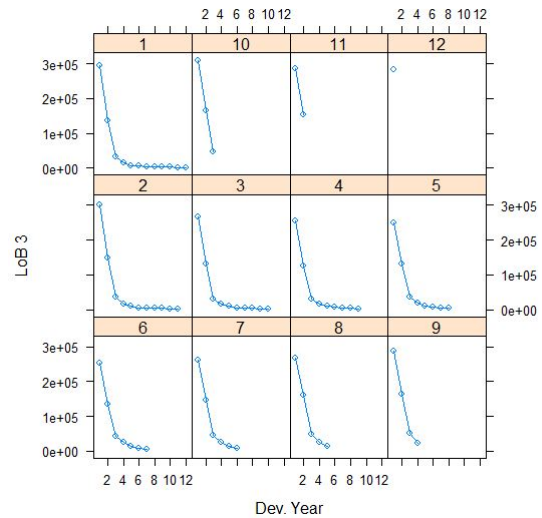


(b) Setiap Accident Period

Gambar 6.4: Visualisasi Besar Klaim Incremental LoB2

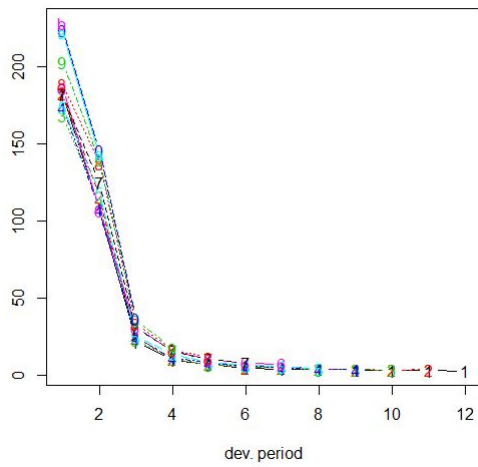


(a) Dalam satu grafik

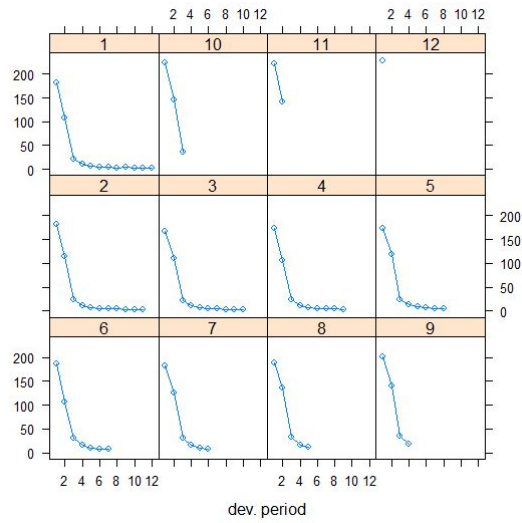


(b) Setiap Accident Period

Gambar 6.5: Visualisasi Besar Klaim Incremental LoB 3



(a) Dalam satu grafik



(b) Setiap Accident Period

Gambar 6.6: Visualisasi Besar Klaim Incremental LoB 4

LAMPIRAN 6: Hasil Segitiga *Run-Off* Metode *Chain-Ladder*

Tabel 6.8: Segitiga *Run-Off* Kumulatif LoB2 (dalam 1.000) -Metode *Chain-Ladder*

Acc. Period	Development Period												ULT
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	211.140	324.006	354.523	368.653	374.936	378.302	379.956	381.443	382.951	384.170	385.208	386.117	386.930
2	214.103	335.528	370.343	385.252	392.270	396.774	400.070	402.242	404.100	405.591	407.149	408.109	408.968
3	190.751	301.699	333.392	347.424	354.800	359.813	363.311	365.622	367.489	369.166	370.379	371.254	372.034
4	173.064	272.394	301.590	316.911	324.642	329.910	332.987	334.787	336.442	337.720	338.831	339.630	340.344
5	173.183	278.643	311.352	328.357	336.764	342.731	346.547	349.172	350.793	352.126	353.283	354.117	354.861
6	183.984	301.054	339.930	359.675	369.700	374.919	387.321	389.530	391.338	392.825	394.116	395.046	395.877
7	187.130	306.818	346.286	363.818	372.827	378.186	382.993	385.178	386.965	388.436	389.712	390.632	391.453
8	197.778	334.437	380.220	399.758	409.064	414.683	419.954	422.350	424.310	425.922	427.322	428.330	429.231
9	196.153	327.335	369.029	388.119	396.931	402.383	407.498	409.822	411.724	413.289	414.647	415.626	416.499
10	194.471	320.507	359.105	376.594	385.144	390.435	395.397	397.652	399.498	401.016	402.334	403.284	404.132
11	193.964	316.400	353.456	370.670	379.086	384.293	389.178	391.397	393.214	394.708	396.005	396.940	397.775
12	198.044	320.022	357.502	374.913	383.425	388.692	393.633	395.878	397.715	399.226	400.538	401.484	402.328

Tabel 6.9: Cadangan Klaim IBNR pada LoB 2 (dalam 1.000)

$i$	$C_{i,j+1-i}$	$C_i^{ult}$	$R_i^c$
1	386.117	386.929,0	812,004
2	407.149	408.968,0	1.819,030
3	369.166	372.034,2	2.868,229
4	336.442	340.344,3	3.902,319
5	349.172	354.861,4	5.689,351
6	387.321	395.876,6	8.555,647
7	378.186	391.453,5	13.267,505
8	409.064	429.230,7	20.166,741
9	388.119	416.499,1	28.380,146
10	359.105	404.131,7	45.026,702
11	316.400	397.774,5	81.374,510
12	198.044	402.327,9	204.283,881
Total Cadangan Klaim IBNR pada LoB 2			416.146,065

Tabel 6.10: Segitiga *Run-Off* Kumulatif LoB 3 (dalam 1.000)-Metode *Chain-Ladder*

Acc. Per.	Development Period												ULT
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	295.186	431.479	464.365	480.067	487.713	493.847	498.420	502.311	506.359	508.933	511.130	512.264	513741
2	299.660	446.740	481.987	497.796	507.334	511.955	516.464	519.930	522.887	525.401	527.285	528.455	529.978
3	266.192	398.568	429.419	445.049	454.731	460.428	464.521	468.137	470.774	473.027	474.893	475.947	477.319
4	254.573	378.839	409.262	424.335	433.733	441.152	446.219	449.462	452.343	454.557	456.351	457.363	458.681
5	248.042	379.443	415.075	433.904	445.015	451.467	456.185	460.895	463.870	466.141	467.980	469.018	470.370
6	252.999	389.011	430.336	454.222	468.053	476.050	481.083	484.906	488.036	490.424	492.360	493.452	494.875
7	261.441	407.536	452.194	477.130	490.776	497.365	502.276	506.267	509.536	512.029	514.050	515.190	516.675
8	268.152	429.468	477.525	501.464	514.241	521.266	526.413	530.596	534.022	536.635	538.752	539.948	541.504
9	287.997	451.948	502.360	524.594	536.972	544.307	549.682	554.050	557.626	560.355	562.566	563.814	565.440
10	309.494	473.797	519.740	542.262	555.059	562.639	568.194	572.709	576.406	579.227	581.513	582.803	584.483
11	286.677	439.290	480.780	501.613	513.448	520.463	525.602	529.778	533.198	535.808	537.922	539.115	540.670
12	284.587	434.440	475.472	496.075	507.780	514.717	519.799	523.930	527.312	529.892	531.983	533.163	534.701





Tabel 6.11: Cadangan Klaim IBNR pada LoB 3 (dalam 1.000)

$i$	$C_{i,I+1-i}$	$C_{i,t}^{ult}$	$\hat{R}_i^{cl}$
1	512.264	513.740,9	1.476,857
2	527.285	529.978,4	2.693,377
3	473.027	477.319,1	4.292,104
4	452.343	458.681,2	6.338,248
5	460.895	470.370,2	9.475,164
6	481.083	494.874,5	13.791,495
7	497.365	516.675,2	19.310,247
8	514.241	541.504,3	27.263,326
9	524.594	565.440,9	40.846,927
10	519.740	584.483,0	64.743,021
11	439.290	540.669,5	101.379,490
12	284.587	534.700,5	250.113,491
Total Cadangan Klaim IBNR pada LoB 3			541.723,747

Tabel 6.12: Segitiga *Run-Off* Kumulatif LoB 4 (dalam 1.000)-Metode *Chain-Ladder*

Acc. Per.	Development Period												ULT
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	181.839	289.538	311.377	321.551	328.308	332.832	336.734	340.328	344.066	346.941	349.899	352.669	356.394
2	182.613	298.150	322.728	333.471	340.609	345.698	350.733	355.034	358.774	362.181	365.836	368.732	372.627
3	168.023	279.485	302.449	313.211	319.830	325.143	329.912	333.702	337.343	340.809	343.987	346.710	350.373
4	173.239	280.427	304.857	316.319	324.321	330.107	335.114	339.187	343.040	346.255	349.484	352.251	355.971
5	173.820	291.870	316.960	330.650	339.044	345.439	350.970	355.219	359.106	362.471	365.852	368.748	372.643
6	186.084	292.664	323.617	339.279	349.504	357.319	364.477	368.758	372.793	376.286	379.796	382.802	386.846
7	181.812	306.435	336.791	352.604	362.952	370.785	376.502	380.924	385.092	388.701	392.326	395.432	399.609
8	188.244	325.470	358.968	375.168	386.592	393.582	399.651	404.345	408.769	412.600	416.448	419.745	424.178
9	202.450	341.968	377.401	394.707	404.847	412.167	418.523	423.438	428.072	432.083	436.113	439.565	444.208
10	223.740	369.547	406.420	423.173	434.044	441.892	448.706	453.976	458.943	463.244	467.564	471.266	476.244
11	221.241	363.868	397.706	414.100	424.738	432.418	439.086	444.243	449.104	453.312	457.540	461.162	466.033
12	228.235	376.840	411.884	428.862	439.880	447.833	454.739	460.079	465.114	469.473	473.851	477.602	482.647

Tabel 6.13: Cadangan Klaim IBNR pada LoB 4 (dalam 1.000)

$i$	$C_{i,I+1-i}$	$C_{i,t}^{ult}$	$\hat{R}_i^{cl}$
1	352.669	356.394,2	3.725,243
2	365.836	372.627,1	6.791,084
3	340.809	350.372,8	9.563,756
4	343.040	355.971,3	12.931,349
5	355.219	372.642,9	17.423,939
6	364.477	386.845,8	22.368,777
7	370.785	399.609,0	28.824,040
8	386.592	424.178,4	37.586,418
9	394.707	444.208,3	49.501,273
10	406.420	476.244,0	69.823,981
11	363.868	466.033,2	102.165,178
12	228.235	482.646,9	254.411,899
Total Cadangan Klaim IBNR pada LoB 4			615.115,935

### LAMPIRAN 7: Hasil Segitiga *Run-Off* Metode Mack's *Chain-Ladder*

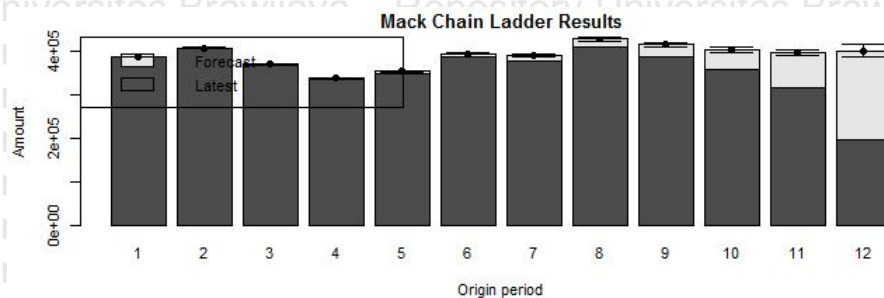
Berikut ini disajikan adalah hasil perhitungan cadangan klaim IBNR dengan menggunakan metode Msck's pada LoB 2, LoB 3, dan LoB 4 beserta informasi CV dan visualisasinya.

Tabel 6.14: Segitiga *Run-Off Incremental* LoB 2 (dalam 1.000)-Metode Mack

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	211.140	324.006	354.523	368.653	374.936	378.302	379.956	381.443	382.951	384.170	385.208	386.117
2	214.103	335.528	370.343	385.252	392.270	396.774	400.070	402.242	404.100	405.591	407.149	408.110
3	190.751	301.699	333.392	347.424	354.800	359.813	363.311	365.622	367.489	369.166	370.379	371.253
4	173.064	272.394	301.590	316.911	324.642	329.910	332.987	334.787	336.442	337.720	338.831	339.630
5	173.183	278.643	311.352	328.357	336.764	342.731	346.547	349.172	350.793	352.126	353.283	354.117
6	183.984	301.054	339.930	359.675	369.700	374.919	387.321	389.530	391.338	392.825	394.116	395.046
7	187.130	306.818	346.286	363.818	372.827	378.186	382.993	385.177	386.965	388.436	389.712	390.632
8	197.778	334.437	380.220	399.758	409.064	414.683	419.954	422.349	424.309	425.922	427.322	428.330
9	196.153	327.335	369.029	388.119	396.931	402.383	407.498	409.822	411.724	413.288	414.647	415.625
10	194.471	320.507	359.105	376.594	385.144	390.434	395.398	397.652	399.498	401.016	402.334	403.284
11	193.964	316.400	353.456	370.670	379.086	384.293	389.178	391.397	393.214	394.708	396.005	396.940
12	198.044	320.022	357.502	374.913	383.425	388.692	393.633	395.878	397.715	399.226	400.538	401.484

Tabel 6.15: *Coefisien Variation* CV dari IBNR LoB 2 - Metode Mack's CL

$i$	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i$	$Process\ Risk_{i,I}$	$Parameter\ Risk_{i,I}$	$s.e.\ \hat{R}_{i,I}$	CV	CV (%)
1	386.117,000	0,000					
2	408.109,776	960,776	272,509	280,163	390,835	0,407	40,68%
3	371.253,483	2.087,483	403,180	330,698	521,455	0,250	24,98%
4	339.630,077	3.188,077	459,095	331,072	566,019	0,178	17,75%
5	354.116,644	4.944,644	504,177	356,736	617,621	0,125	12,49%
6	395.045,866	7.724,866	739,754	463,034	872,718	0,113	11,30%
7	390.632,006	12.446,006	4.009,034	1.703,223	4.355,837	0,350	35,00%
8	428.329,963	19.265,963	4.352,002	1.923,825	4.758,258	0,247	24,70%
9	415.625,086	27.506,086	4.535,268	1.954,835	4.938,627	0,180	17,95%
10	403.283,596	44.178,596	5.103,635	2.074,046	5.508,971	0,125	12,47%
11	396.939,745	80.539,745	7.085,281	2.583,126	7.541,469	0,094	9,36%
12	401.483,561	203.439,561	13.861,186	4.478,615	14.566,759	0,072	7,16%
Total	4.690.566,803	406.281,803	18.033,600	12.781,547	22.103,816	0,054	5,44%



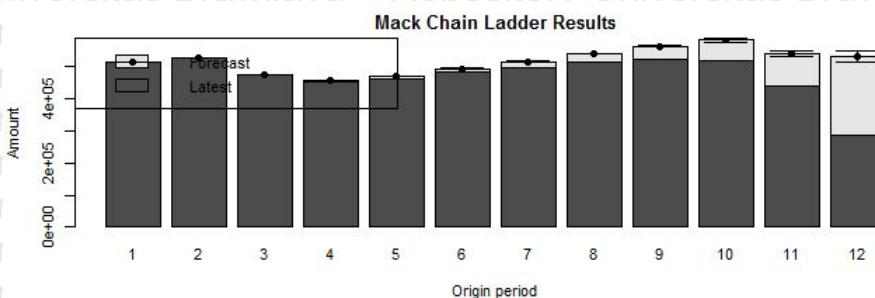
Gambar 6.7: Visualisasi  $\hat{R}^{Mack,s}$ ,  $C_{i,I+1-i}$ , dan  $\hat{C}_{i,I}$  LoB 2

Tabel 6.16: Segitiga *Run-Off Incremental* LoB 3 (dalam 1.000)-Metode Mack

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	295.186	431.479	464.365	480.067	487.713	493.847	498.420	502.311	506.359	508.933	511.130	512.264
2	299.660	446.740	481.987	497.796	507.334	511.955	516.464	519.930	522.887	525.401	527.285	528.455
3	266.192	398.568	429.419	445.049	454.731	460.428	464.521	468.137	470.774	473.027	474.893	475.947
4	254.573	378.839	409.262	424.335	433.733	441.152	446.219	449.462	452.343	454.557	456.350	457.363
5	248.042	379.443	415.075	433.904	445.015	451.467	456.185	460.895	463.870	466.141	467.980	469.018
6	252.999	389.011	430.336	454.222	468.053	476.050	481.083	484.906	488.036	490.425	492.360	493.452
7	261.441	407.536	452.194	477.130	490.776	497.365	502.276	506.267	509.536	512.029	514.049	515.190
8	268.152	429.468	477.525	501.464	514.241	521.266	526.413	530.596	534.022	536.635	538.752	539.948
9	287.997	451.948	502.360	524.594	536.972	544.307	549.682	554.050	557.626	560.355	562.566	563.814
10	309.494	473.797	519.740	542.261	555.056	562.639	568.194	572.709	576.406	579.227	581.513	582.803
11	286.677	439.290	480.780	501.613	513.448	520.462	525.602	529.778	533.198	535.808	537.922	539.115
12	284.587	434.440	475.472	496.075	507.780	514.717	519.799	523.929	527.312	529.892	531.983	533.163

Tabel 6.17: *Coefisien Variation* CV dari IBNR LoB 3 - Metode Mack's CL

$i$	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i$	Process Risk $_{i,I}$	Parameter Risk $_{i,I}$	$s.e. \hat{R}_i$	CV	CV (%)
1	512.264,000	0,000					
2	528.454,842	1.169,842	85,221	86,557	121,469	0,104	10,38%
3	475.946,949	2.919,949	268,670	189,993	329,061	0,113	11,27%
4	457.362,671	5.019,671	275,086	187,711	333,029	0,066	6,63%
5	469.017,985	8.122,985	615,200	329,453	697,861	0,086	8,59%
6	493.451,874	12.368,874	919,823	458,920	1.027,950	0,083	8,31%
7	515.189,955	17.824,955	1.081,862	529,092	1.204,311	0,068	6,76%
8	539.947,657	25.706,657	1.819,092	795,766	1.985,532	0,077	7,72%
9	563.814,450	39.220,450	3.159,746	1.316,168	3.422,907	0,087	8,73%
10	582.802,800	63.062,800	5.628,166	2.140,825	6.021,577	0,095	9,55%
11	539.115,221	99.825,221	9.047,425	3.071,783	9.554,671	0,096	9,57%
12	533.163,381	248.576,381	16.655,224	5.260,874	17.466,347	0,070	7,03%
Total	6.210.531,784	523.817,784	20.168,585	10.231,821	22.615,525	0,043	4,32%



Gambar 6.8: Visualisasi  $\hat{R}^{Mack,s}$ ,  $C_{i,I+1-i}$ , dan  $\hat{C}_{i,I}$  LoB 3

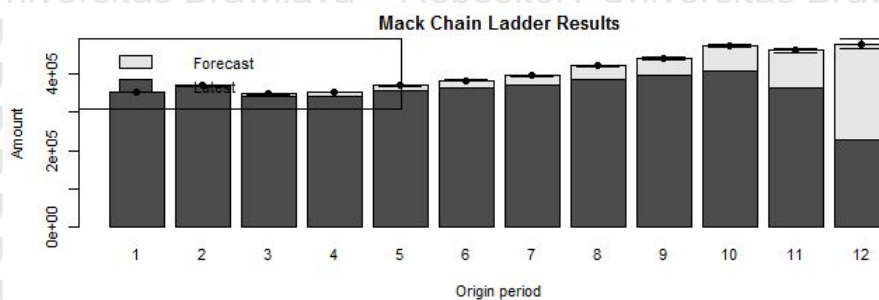


Tabel 6.18: Segitiga *Run-Off Incremental* LoB 4 (dalam 1.000)-Metode Mack

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	181.839	289.538	311.377	321.551	328.308	332.832	336.734	340.328	344.066	346.941	349.899	352.669
2	182.613	298.150	322.728	333.471	340.609	345.698	350.733	355.034	358.774	362.181	365.836	368.732
3	168.023	279.485	302.449	313.211	319.830	325.143	329.912	333.702	337.343	340.809	343.507	346.226
4	173.239	280.427	304.857	316.319	324.321	330.107	335.114	339.187	343.040	346.255	349.484	352.251
5	173.820	291.870	316.960	330.650	339.044	345.439	350.970	355.219	359.106	362.471	365.852	368.748
6	186.084	292.664	323.617	339.279	349.504	357.319	364.477	368.758	372.793	376.286	379.796	382.802
7	181.812	306.435	336.791	352.604	362.952	370.785	376.502	380.924	385.092	388.701	392.326	395.432
8	188.244	325.470	358.968	375.168	386.592	393.582	399.651	404.345	408.769	412.600	416.448	419.745
9	202.450	341.968	377.401	394.707	404.847	412.167	418.523	423.438	428.072	432.083	436.113	439.565
10	223.740	369.547	406.420	423.173	434.044	441.892	448.706	453.976	458.943	463.244	467.564	471.266
11	221.241	363.868	397.706	414.100	424.738	432.418	439.086	444.243	449.104	453.312	457.540	461.162
12	228.235	376.840	411.884	428.862	439.880	447.833	454.739	460.079	465.114	469.473	473.851	477.602

Tabel 6.19: *Coefisien Variation* CV dari IBNR LoB4 - Metode Mack's CL

$i$	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i$	$Process\ Risk_{i,I}$	$Parameter\ Risk_{i,I}$	$s.e.\ \hat{R}_{i,I}$	CV	CV(%)
1	352.669,000	0,000					
2	368.732,166	2.896,166	340,932	348,609	487,609	0,168	16,84%
3	346.710,453	5.901,453	509,596	423,942	662,884	0,112	11,23%
4	352.250,527	9.210,527	613,707	471,928	774,178	0,084	8,41%
5	368.747,855	13.528,855	639,642	497,921	810,597	0,060	5,99%
6	382.802,236	18.325,236	695,782	529,045	874,072	0,048	4,77%
7	395.432,091	24.647,091	1.241,489	698,736	1.424,614	0,058	5,78%
8	419.744,655	33.152,655	1.785,866	896,695	1.998,344	0,060	6,03%
9	439.565,146	44.858,146	2.458,527	1.154,656	2.716,171	0,061	6,06%
10	471.265,998	64.845,998	3.568,127	1.546,674	3.888,924	0,060	6,00%
11	461.161,924	97.293,924	5.494,359	2.094,823	5.880,158	0,060	6,04%
12	477.601,989	249.366,989	13.110,222	4.484,758	13.856,081	0,056	5,56%
Total	4.836.684,042	564.027,042	15.073,759	9.453,509	17.792,893	0,032	3,15%



Gambar 6.9: Visualisasi  $\hat{R}^{Mack,s}$ ,  $C_{i,I+1-i}$ , dan  $\hat{C}_{i,I}$  LoB 4

**LAMPIRAN 8: Hasil Segitiga Run-Off Metode GLM-ODP**

Tabel 6.20: Segitiga Run-Off Incremental LoB 2 (dalam 1.000)-Metode GLM-ODP

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	211.140	112.866	30.517	14.130	6.283	3.366	1.654	1.487	1.508	1.219	1.038	909
2	21.4103	121.425	34.815	14.909	7.018	4.504	3.296	2.172	1.858	1.491	1.558	961
3	190.751	110.948	31.693	14.032	7.376	5.013	3.498	2.311	1.867	1.677	1.213	874
4	173.064	99.330	29.196	15.321	7.731	5.268	3.077	1.800	1.655	1.278	1.110	800
5	173.183	105.460	32.709	17.005	8.407	5.967	3.816	2.625	1.621	1.333	1.157	834
6	183.984	117.070	38.876	19.745	10.025	5.219	12.402	2.209	1.808	1.487	1.291	930
7	187.130	119.688	39.468	17.532	9.009	5.359	4.807	2.184	1.788	1.470	1.277	9.20
8	197.778	136.659	45.783	19.538	9.306	5.619	5.271	2.395	1.960	1.612	1.400	1.008
9	196.153	131.182	41.694	19.090	8.812	5.452	5.115	2.324	1.902	1.564	1.359	978
10	194.471	126.036	38.598	17.489	8.550	5.290	4.963	2.255	1.846	1.518	1.318	949
11	193.964	122.436	37.056	17.214	8.415	5.207	4.885	2.219	1.817	1.494	1.297	934
12	198.044	121.978	374.80	17.411	8.512	5.267	4.941	2.245	1.837	1.511	1.312	945

Estimasi parameter untuk LoB 2 adalah sebagai berikut.

Tabel 6.21: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 2 Metode GLM ODP

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	12,15722	0,03942	308,401	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	0,05540	0,05242	1,057	0,2952
$\hat{\alpha}_3$	-0,03926	0,05373	-0,731	0,4681
$\hat{\alpha}_4$	-0,12828	0,05507	-2,330	0,0235 *
$\hat{\alpha}_5$	-0,08651	0,05454	-1,586	0,1184
$\hat{\alpha}_6$	0,02286	0,05313	0,430	0,6687
$\hat{\alpha}_7$	0,01163	0,05348	0,217	0,8287
$\hat{\alpha}_8$	0,10375	0,05249	1,977	0,0531 .
$\hat{\alpha}_9$	0,07364	0,05320	1,384	0,1719
$\hat{\alpha}_{10}$	0,04350	0,05433	0,801	0,4268
$\hat{\alpha}_{11}$	0,02764	0,05635	0,491	0,6256
$\hat{\alpha}_{12}$	0,03903	0,06557	0,595	0,5542 ***
$\hat{\beta}_2$	-0,48465	0,02597	-18,663	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_3$	-1,66467	0,04207	-39,568	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_4$	-2,43138	0,06234	-39,004	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_5$	-3,14704	0,09306	-33,816	$< 2e - 16$ ***





Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\hat{\beta}_6$	-3,62709	0,12656	-28,658	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_7$	-3,69092	0,14136	-26,110	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_8$	-4,47991	0,22967	-19,506	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_9$	-4,68016	0,28188	-16,603	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{10}$	-4,87557	0,35295	-13,814	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{11}$	-5,01672	0,45860	-10,939	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{12}$	-5,34487	0,77449	-6,901	$< 2e-16$ ***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 543,8351

Null deviance: 6.472.807 on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 27.258 on 55 derajat kebebasan

Tabel 5.56 menyajikan hasil uji signifikan pada estimasi parameter untuk LoB

2. Dapat diketahui pada tabel bahwa terdapat sembilan parameter yang tidak signifikan. Setelah dilakukan perhitungan SSE, dapat diketahui bahwa SSE untuk model regresi yang melibatkan parameter non-signifikan bernilai lebih kecil, sehingga model regresi yang dibangun melibatkan parameter yang tidak signifikan.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i = \mu_i = & \exp(12,15722 + 0,05540_{2,\bullet} - 0,03926_{3,\bullet} - 0,18284_{4,\bullet} - 0,08651_{5,\bullet} \\ & + 0,02286_{6,\bullet} + 0,01163_{7,\bullet} + 0,10375_{8,\bullet} + 0,07364_{9,\bullet} + 0,04350_{10,\bullet} \\ & + 0,02764_{11,\bullet} + 0,03953_{12,\bullet} - 0,48465_{\bullet,2} - 1,66467_{\bullet,3} - 2,43138_{\bullet,4} \\ & - 3,14704_{\bullet,5} - 3,62709_{\bullet,6} - 3,69092_{\bullet,7} - 4,47991_{\bullet,8} - 4,68016_{\bullet,9} \\ & - 4,87557_{\bullet,10} - 5,01672_{\bullet,11} - 5,34487_{\bullet,12}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Tabel 6.22: Coefisien Variation CV dari IBNR LoB 2 - Metode GLM ODP

$i$	$C_{i,I+1-i}$	LDTF	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i^{GLM}$	$s.e\hat{R}_i^{GLM}$	CV	CV dalam %
2	407.149	0,9976452	408.110	961	1.037,933	0,98005488	98%
3	369.166	0,9943785	371.253	2.087	1.382,287	0,66233209	66,23%
4	336.442	0,9906133	339.630	3.188	1.612,299	0,50574001	50,57%
5	349.172	0,9860357	354.117	4.945	1.965,381	0,39744818	39,74%
6	387.321	0,9804453	395.046	7.725	2.441,738	0,31608262	31,61%
7	378.186	0,9681388	390.632	12.446	3.018,044	0,24249111	24,25%
8	409.064	0,9550207	428.330	19.266	3.748,577	0,19456956	19,46%
9	388.119	0,9338202	415.625	27.506	4.432,426	0,16114398	16,11%
10	359.105	0,8904519	403.284	44.179	5.631,970	0,12748070	12,75%
11	316.400	0,7970978	396.940	80.540	7.901,577	0,09810749	9,81%
12	198.044	0,4932799	401.484	203.440	15.739,734	0,07736794	7,74%
Total	3.898.168	0,9056135	4.304.450	406.282	24.091,138	0,05929659	5,93%

Keterangan:

LDTF:

$$\hat{f}_{i,k} = \frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}}, 1 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$

$$LDTF_i = \prod_{n=1}^{I-1} \hat{f}_{i,k}, 2 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$

Tabel 6.23: Segitiga Run-Off Incremental LoB 3 (dalam 1.000) Metode GLM ODP

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	295.186	136.293	32.886	15.702	7.646	6.134	4.573	3.891	4.048	2.574	2.197	1.134
2	299.660	147.080	35.247	15.809	9.538	4.621	4.509	3.466	2.957	2.514	1.884	1.170
3	266.192	132.376	30.851	15.630	9.682	5.697	4.093	3.616	2.637	2.253	1.866	1.054
4	254.573	124.266	30.423	15.073	9.398	7.419	5.067	3.243	2.881	2.214	1.793	1.012
5	248.042	131.401	35.632	18.829	11.111	6.452	4.718	4.710	2.975	2.270	1.839	1.038
6	252.999	136.012	41.325	23.886	13.831	7.997	5.033	3.823	3.130	2.388	1.935	1.092
7	261.441	146.095	44.658	24.936	13.646	6.589	4.911	3.991	3.268	2.494	2.020	1.140
8	268.152	161.316	48.057	23.939	12.777	7.025	5.147	4.183	3.425	2.613	2.117	1.195
9	287.997	163.951	50.412	22.234	12.378	7.336	5.375	4.368	3.577	2.729	2.211	1.248
10	309.494	164.303	45.943	22521	12.794	7.583	5.556	4.515	3.697	2.821	2.285	1.290
11	286.677	152.613	41.490	20.833	11.835	7.014	5.139	4.176	3.420	2.609	2.114	1.193
12	284.587	149.853	41.032	20.603	11.705	6.937	5.083	4.130	3.382	2.581	2.091	1.180

Berikut ini disajikan hasil estimasi parameter dengan menggunakan program

R.

Tabel 6.24: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 3 Metode GLM ODP

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	12,518806	0,031850	393,056	< 2e - 16 ***
$\hat{\alpha}_2$	0,031117	0,042851	0,726	0,47082



Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\hat{\alpha}_3$	-0,073534	0,044065	-1,669	0,10085
$\hat{\alpha}_4$	-0,12828	0,44602	-2,542	0,01388 *
$\hat{\alpha}_5$	-0,088199	0,044400	-1,986	0,05197
$\hat{\alpha}_6$	-0,037415	0,043927	-0,852	0,39804
$\hat{\alpha}_7$	0,005696	0,043575	0,131	0,89648
$\hat{\alpha}_8$	0,052632	0,043235	1,217	0,22867
$\hat{\alpha}_9$	0,095885	0,043058	2,227	0,03007 *
$\hat{\alpha}_{10}$	0,129009	0,043212	2,985	0,00422 **
$\hat{\alpha}_{11}$	0,051089	0,045222	1,130	0,26349
$\hat{\alpha}_{12}$	0,039988	0,051856	0,771	0,44393
$\hat{\beta}_2$	-0,641383	0,021353	-30,038	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_3$	-1,936696	0,037058	-52,261	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_4$	-2,625591	0,053746	-48,852	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_5$	-3,191056	0,075073	-42,506	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_6$	-3,714192	0,104063	-35,692	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_7$	-4,025230	0,131404	-30,632	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_8$	-4,232676	0,159552	-26,528	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_9$	-4,432476	0,195906	-22,625	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_{10}$	-4,703006	0,255572	-18,402	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_{11}$	-4,913536	0,342523	-14,345	< 2e - 16 ***
$\hat{\beta}_{12}$	-5,485300	0,649062	-8,451	1,61e - 11 ***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 476,5823

Null deviance: 9.152.019 on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 26.300 on 55 derajat kebebasan

Model regresi yang terbentuk adalah sebagai berikut

$$\hat{Y}_i = \mu_i = \exp(12,518806 + 0,0311172_i - 0,0735343_i - 0,1133634_i - 0,0881995_i - 0,0374156_i + 0,0056967_i + 0,0526328_i + 0,0958859_i + 0,129009_{10_i})$$



$$\begin{aligned}
 &+0,051089_{11, \bullet} + 0,039988_{12, \bullet} - 0,641383_{\bullet, 2} - 1,936696_{\bullet, 3} - 2,625591_{\bullet, 4} \\
 &- 3,191056_{\bullet, 5} - 3,714192_{\bullet, 6} - 4,025230_{\bullet, 7} - 4,232676_{\bullet, 8} - 4,432476_{\bullet, 9} \\
 &- 4,703006_{\bullet, 10} - 4,913536_{\bullet, 11} - 5,485300_{\bullet, 12} \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, disajikan hasil cadangan klaim IBNR menggunakan metode GLM dengan pendekatan distribusi ODP pada LoB 3.

Tabel 6.25: *Coefisien Variation* CV dari IBNR LoB 3 - Metode GLM ODP

$i$	$C_{i,I+1-i}$	LDTF	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i^{GLM}$	$s.e\hat{R}_i^{GLM}$	CV	CV dalam %
2	527.285	0,9977860	528.455	1.170	1.065,451	0,91064194	91%
3	473.027	0,9938649	475.947	2.920	1.509,287	0,51687902	51,69%
4	452.343	0,9890240	457.363	5.020	1.884,954	0,37548890	37,55%
5	460.895	0,9826808	469.018	8.123	2.340,709	0,28815821	28,82%
6	481.083	0,9749337	493.452	12.369	2.852,092	0,23058387	23,06%
7	497.365	0,9654011	515.190	17.825	3.392,921	0,19034621	19,03%
8	514.241	0,9523899	539.948	25.707	4.051,266	0,15759390	15,76%
9	524.594	0,9304381	563.814	39.220	4.989,907	0,12722862	12,72%
10	519.740	0,8917936	582.803	63.063	6.363,613	0,10090883	10,10%
11	439.290	0,8148354	539.115	99.825	8.188,701	0,08203057	8,20%
12	284.587	0,5337711	533.163	248.576	15.679,369	0,06307676	6,31%
Total	5.174.450	0,9080742	5.698.268	523.818	25.640,702	0,04894964	4,89%

Keterangan:

LDTF:

$$\hat{f}_{i,k} = \frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}}, 1 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$

$$LDTF_i = \prod_{n=1}^{I-1} \hat{f}_{i,k}, 2 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$

Tabel 6.26: Segitiga *Run-Off Incremental* LoB 4 (dalam 1.000) Metode GLM ODP

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	181.839	107.699	21.839	10.174	6.757	4.524	3.902	3.594	3.798	2.875	2.958	2.770
2	182.613	115.537	24.578	10.743	7.138	5.089	5.035	4.301	3.740	3.407	3.655	2.896
3	168.023	111.462	22.964	10.762	6.619	5.313	4.769	3.790	3.641	3.466	3.178	2.723
4	173.239	107.188	24.430	11.462	8.002	5.786	5.007	4.073	3.853	3.215	3.229	2.767
5	173.820	118.050	25.090	13.690	8.394	6.395	5.531	4.249	3.887	3.365	3.380	2.896
6	186.084	106.580	30.953	15.662	10.225	7.815	7.158	4.281	4.035	3.494	3.509	3.007
7	181.812	124.623	30.356	15.813	10.348	7.833	5.717	4.422	4.168	3.609	3.625	3.106
8	188.244	137.226	33.498	16.200	11.424	6.990	6.069	4.694	4.425	3.831	3.848	3.297
9	202.450	139.518	35.433	17.306	10.140	7.320	6.355	4.916	4.633	4.012	4.029	3.453
10	223.740	145.807	36.873	16.753	10.871	7.848	6.814	5.270	4.968	4.301	4.320	3.702
11	221.241	142.627	33.838	16.394	10.638	7.680	6.668	5.157	4.861	4.209	4.227	3.622
12	228.235	148.605	35.045	16.978	11.017	7.954	6.905	5.341	5.034	4.359	4.378	3.751



Tabel 6.27: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 4 Metode GLM ODP

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )	
$\gamma$	12,034883	0,027025	445,322	$< 2e - 16$	***
$\hat{\alpha}_2$	0,044541	0,036010	1,237	0,22138	
$\hat{\alpha}_3$	-0,017040	0,036692	-0,464	0,64419	
$\hat{\alpha}_4$	-0,001187	0,036660	-0,032	0,97428	
$\hat{\alpha}_5$	0,044583	0,036367	1,226	0,05197	
$\hat{\alpha}_6$	0,081989	0,036160	2,267	0,02732	*
$\hat{\alpha}_7$	0,114449	0,036034	3,176	0,00245	**
$\hat{\alpha}_8$	0,174117	0,035702	4,877	$9,58e - 06$	***
$\hat{\alpha}_9$	0,220256	0,035560	6,194	$7,81e - 08$	***
$\hat{\alpha}_{10}$	0,289893	0,035365	8,197	$4,16e - 11$	***
$\hat{\alpha}_{11}$	0,268219	0,036384	7,372	$9,27e - 10$	***
$\hat{\alpha}_{12}$	0,303248	0,041791	7,256	$1,43e - 09$	***
$\hat{\beta}_2$	-0,429087	0,016802	-25,538	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_3$	-1,873756	0,030498	-61,438	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_4$	-2,598459	0,045085	-57,635	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_5$	-3,030895	0,059207	-51,192	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_6$	-3,356739	0,074685	-44,945	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_7$	-3,498090	0,086927	-40,241	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_8$	-3,754989	0,108566	-34,587	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_9$	-3,814083	0,125378	-30,421	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{10}$	-3,958183	0,155164	-25,510	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{11}$	-3,953756	0,188309	-20,996	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{12}$	-4,108281	0,290607	-14,137	$< 2e - 16$	***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 231,9094

Null deviance: 6.480.732 on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 12.849 on 55 derajat kebebasan

Model regresi yang terbentuk adalah sebagai berikut

$$\hat{Y}_i = \mu_i = \exp(12,034883 + 0,0445412_{i,1} - 0,0170403_{i,2} - 0,0011874_{i,3} + 0,0445835_{i,4} + 0,0819896_{i,5} + 0,1144497_{i,6} + 0,1741178_{i,7} + 0,2202569_{i,8} + 0,28989310_{i,9} + 0,26821911_{i,10} + 0,30324812_{i,11} - 0,429087_{i,12} - 1,873756_{i,13} - 2,598459_{i,14} - 3,030895_{i,15} - 3,356739_{i,16} - 3,498090_{i,17} - 3,754989_{i,18} - 3,814083_{i,19} - 3,958183_{i,20} - 3,953756_{i,21} - 4,108281_{i,22}) \quad (6.3)$$

Selanjutnya, disajikan hasil cadangan klaim IBNR menggunakan metode

GLM dengan pendekatan distribusi ODP pada LoB 4.

Tabel 6.28: *Coefisien Variation CV* dari IBNR LoB 4 - Metode GLM ODP

$i$	$C_{i,I+1-i}$	LDTF	$\hat{C}_{i,I}$	$\hat{R}_i^{GLM}$	$s.e\hat{R}_i^{GLM}$	CV	CV dalam %
2	365.836	0,9921461	368.732	2.896	1.176,760	0,40633991	40,63%
3	340.809	0,9829800	346.710	5.901	1.543,149	0,26150634	26,15%
4	343.040	0,9738510	352.251	9.211	1.863,080	0,20226688	20,27%
5	355.219	0,9633110	368.748	13.529	2.340,709	0,28815821	28,82%
6	364.477	0,9521293	382.802	18.325	2.544,180	0,13883654	13,88%
7	370.785	0,9376707	395.432	24.647	2.917,258	0,11836159	11,84%
8	386.592	0,9210163	419.745	33.153	3.372,718	0,10173190	10,17%
9	394.707	0,8979491	439.565	44.858	3.914,575	0,08726592	8,73%
10	406.420	0,8624004	471.266	64.846	4.735,513	0,07302706	7,30%
11	363.868	0,7890242	461.162	97.294	5.893,781	0,0605770	6,06%
12	228.235	0,4778770	477.602	249.367	1.1730,960	0,04704295	4,70%
Total	3.919.988	0,8742138	4.484.015	564.027	21.837,955	0,03871792	3,87%

Keterangan:

LDTF:

$$\hat{f}_{i,k} = \frac{S_{i,k+1}}{S_{i,k}}, 1 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$

$$LDTF_i = \prod_{k=1}^{I-1} \hat{f}_{i,k}, 2 \leq i \leq I, i \leq k \leq I-1$$



**LAMPIRAN 9: Hasil Segitiga Run-Off Metode GLM Gamma**

Tabel 6.29: Segitiga Run-Off Incremental LoB 1 (dalam 1.000)-Metode GLM Gamma

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	96.118	62.683	12.439	5.828	3.328	2.452	1.768	1.605	1.385	1.395	1.195	1.139
2	97.350	67.534	14.914	7.036	4.371	2.929	2.649	2.375	2.400	2.096	1.824	1.493
3	89.018	64.518	14.403	6.731	3.580	3.218	2.351	2.127	2.073	1.900	1.553	1.368
4	85.127	60.353	14.336	5.942	4.561	3.181	2.453	2.220	2.057	1.837	1.557	1.372
5	85.516	63.582	14.535	7.881	4.874	3.718	3.450	2.656	2.295	2.105	1.785	1.572
6	96.833	63.843	18.436	9.165	5.407	3.984	3.530	2.705	2.511	2.303	1.953	1.720
7	91.886	71.474	17.451	7.713	5.111	4.230	3.030	2.580	2.395	2.197	1.863	1.641
8	94.711	78.518	20.093	9.453	6.433	4.234	3.411	2.905	2.696	2.474	2.097	1.847
9	95.071	74.690	18.750	9.653	5.372	3.999	3.222	2.744	2.547	2.336	1.981	1.745
10	98.998	77.219	20.088	8.768	5.427	4.040	3.255	2.771	2.572	2.360	2.001	1.762
11	104.434	79.948	18.650	8.793	5.442	4.051	3.264	2.780	2.580	2.367	2.007	1.767
12	109.294	80.093	19.091	9.002	5.571	4.147	3.341	2.845	2.641	2.423	2.054	1.809

Hasil CV pada LoB 1 Metode GLM- Gamma

	Latest	Dev. To. Date	Ultimate	IBNR	S. E	CV	
1	2	205478	0.9927864	206971	1493	240.3803	0.16100490
2	3	189919	0.9848527	192840	2921	322.0172	0.11024211
3	4	180230	0.9742373	184996	4766	429.0233	0.09001747
4	5	186212	0.9600140	193968	7756	618.4148	0.07973372
5	6	201198	0.9473045	212390	11192	830.0360	0.07416333
6	7	197865	0.9352135	211572	13707	981.1394	0.07157944
7	8	209208	0.9140870	228871	19663	1405.1392	0.07146108
8	9	198164	0.8921926	222109	23945	1772.3096	0.07401585
9	10	196305	0.8562474	229262	32957	2658.7369	0.08067290
10	11	184382	0.7810017	236084	51702	4936.0715	0.09547158
11	12	109294	0.4510447	242313	133019	17885.0171	0.13445460
12	total	2058255	0.8716337	2361376	303121	19539.0110	0.06445944

Berikut ini disajikan hasil estimasi parameter dengan menggunakan program

R.

Tabel 6.30: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 1 Pendekatan Distribusi Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	11,13898	0,04783	232,874	$< 2e-16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	0,27062	0,04648	5,822	$3,11e-07$ ***
$\hat{\alpha}_3$	0,18321	0,04819	3,802	0,000362 ***
$\hat{\alpha}_4$	0,18578	0,04998	3,717	0,000474 ***
$\hat{\alpha}_5$	0,32217	0,05201	6,195	$7,78e-08$ ***
$\hat{\alpha}_6$	0,41219	0,05440	7,577	$4,28e-10$ ***





Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\hat{\alpha}_7$	0,36507	0,05735	6,365	4,11e-08 ***
$\hat{\alpha}_8$	0,48343	0,06117	7,903	1,26e-10 ***
$\hat{\alpha}_9$	0,42638	0,06641	6,420	3,34e-08 ***
$\hat{\alpha}_{10}$	0,43651	0,07423	5,880	2,51e-07 ***
$\hat{\alpha}_{11}$	0,43940	0,08769	5,011	5,95e-06 ***
$\hat{\alpha}_{12}$	0,46281	0,11904	3,888	0,000274 ***
$\hat{\beta}_2$	-0,31086	0,04648	-6,688	1,22e-08 ***
$\hat{\beta}_3$	-1,74480	0,04819	-36,206	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_4$	-2,49664	0,04998	-49,949	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_5$	-2,97640	0,05201	-57,232	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_6$	-3,27155	0,05440	-60,140	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_7$	-3,48764	0,05735	-60,811	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_8$	-3,64835	0,06117	-59,642	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_9$	-3,72288	0,06641	-56,059	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_{10}$	-3,80902	0,07423	-51,312	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_{11}$	-3,97405	0,08769	-45,322	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_{12}$	-4,10108	0,11904	-34,452	< 2e-16 ***

Keterangan:  
 Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1  
 Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 0,01188168 (*shape parameter*)  
 Null deviance: 158.34891 on 77 derajat kebebasan  
 Residual deviance: 0.62712 on 55 derajat kebebasan

Tabel 6.31: Segitiga *Run-Off Incremental* LoB 2 (dalam 1.000)-Metode Gamma

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	211.140	112.866	30.517	14.130	6.283	3.366	1.654	1.487	1.508	1.219	1.038	909
2	21.4103	121.425	34.815	14.909	7.018	4.504	3.296	2.172	1.858	1.491	1.558	1.118
3	190.751	110.948	31.693	14.032	7.376	5.013	3.498	2.311	1.867	1.677	1.406	1.109
4	173.064	99.330	29.196	15.321	7.731	5.268	3.077	1.800	1.655	1.438	1.306	1.030
5	173.183	105.460	32.709	17.005	8.407	5.967	3.816	2.625	1.955	1.651	1.500	1.183
6	183.984	117.070	38.876	19.745	10.025	5.219	12.402	3.052	2.619	2.212	2.009	1.585
7	187.130	119.688	39.468	17.532	9.009	5.359	4.573	2.406	2.065	1.744	1.584	1.249
8	197.778	136.659	45.783	19.538	9.306	5.895	5.036	2.649	2.274	1.920	1.744	1.376
9	196.153	131.182	41.694	19.090	9.044	5.662	4.837	2.545	2.184	1.844	1.675	1.321
10	194.471	126.036	38.598	17.518	8.569	5.365	4.583	2.411	2.069	1.747	1.587	1.252
11	193.964	122.436	36.649	17.032	8.332	5.216	4.456	2.344	2.012	1.699	1.543	1.217
12	198.044	120.844	36.786	17.095	8.363	5.235	4.472	2.353	2.019	1.705	1.549	1.222

Hasil CV LoB 2 pada metode GLM-Gamma

	Latest	Dev. To. Date	Ult	IBNR	S. E	CV	
1							
2	407149	0.9972	408267	1118	354.41	0.317	
3	369166	0.9932	371681	2515	544.19	0.216	
4	336442	0.9889	340216	3774	668.12	0.177	
5	349172	0.9823	355460	6288	986.43	0.156	
6	387321	0.9712	398797	11476	1676.55	0.146	
7	378186	0.9652	391806	13620	1975.92	0.145	
8	409064	0.9514	429957	20893	3031.09	0.145	
9	388119	0.9302	417232	29113	4418.68	0.151	
10	359105	0.8884	404208	45103	7629.77	0.169	
11	316400	0.7971	396900	80500	15963.40	0.198	
12	198044	0.4954	399688	201644	53575.54	0.265	
13	total	3898168	0.9035	4314212	416044	57825.70	0.138

Berikut ini disajikan hasil estimasi parameter dengan menggunakan program

R.

Tabel 6.32: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 2 Pendekatan Distribusi Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	11,90052	0,09419	126.343	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	0,20681	0,09153	2,260	0,02783 *
$\hat{\alpha}_3$	0,19870	0,09490	2,094	0,04089 *
$\hat{\alpha}_4$	0,12519	0,09843	1,272	0,20876
$\hat{\alpha}_5$	0,26332	0,10241	2,571	0,01287 *
$\hat{\alpha}_6$	0,55570	0,10712	5,188	$3,16e - 06$ ***
$\hat{\alpha}_7$	0,31792	0,11294	2,815	0,00676 **
$\hat{\alpha}_8$	0,41436	0,12046	3,440	0,00112 **



Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\hat{\alpha}_9$	0,374094	0,13077	2,861	0,00597 **
$\hat{\alpha}_{10}$	0,32015	0,14618	2,190	0,03277 *
$\hat{\alpha}_{11}$	0,29200	0,17267	1,691	0,09648 .
$\hat{\alpha}_{12}$	0,29572	0,23441	1,262	0,21243
$\hat{\beta}_2$	-0,49399	0,09153	-5,397	1.48e-06 ***
$\hat{\beta}_3$	-1,68338	0,09490	-17,739	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_4$	-2,44968	0,09843	-24,888	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_5$	-3,16471	0,10241	-30,902	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_6$	-3,63306	0,10712	-33,915	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_7$	-3,79060	0,11294	-33,564	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_8$	-4,43278	0,12046	-36,799	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_9$	-4,58569	0,13077	-35,066	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_{10}$	-4,75474	0,14618	-32,527	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_{11}$	-4,85087	0,17267	-28,093	< 2e-16 ***
$\hat{\beta}_{12}$	-5,08818	0,23441	-21,707	< 2e-16 ***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 0.04607403

Null deviance: 185.5373 on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 2.1386 on 55 derajat kebebasan

Tabel 6.33: Segitiga Run-Off Incremental LoB 3 (dalam 1.000) Metode Gamma

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	295.186	136.293	32.886	15.702	7.646	6.134	4.573	3.891	4.048	2.574	2.197	1.134
2	299.660	147.080	35.247	15.809	9.538	4.621	4.509	3.466	2.957	2.514	1.884	1.081
3	266.192	132.376	30.851	15.630	9.682	5.697	4.093	3.616	2.637	2.253	1.907	1.036
4	254.573	124.266	30.423	15.073	9.398	7.419	5.067	3.243	2.881	2.214	1.793	1.012
5	248.042	131.401	35.632	18.829	11.111	6.452	4.718	4.710	3.415	2.675	2.181	1.185
6	252.999	136.012	41.325	23.886	13.831	7.997	5.033	4.560	3.839	3.006	2.452	1.332
7	261.441	146.095	44.658	24.936	13.646	6.589	5.551	4.631	3.898	3.053	2.490	1.353
8	268.152	161.316	48.057	23.939	12.777	7.706	5.765	4.809	4.049	3.171	2.586	1.405
9	287.997	163.951	50.412	22.234	12.917	7.808	5.842	4.873	4.103	3.213	2.620	1.424
10	309.494	164.303	45.943	22.415	12.847	7.766	5.810	4.847	4.080	3.196	2.606	1.416
11	286.677	152.613	40.912	20.507	11.753	7.105	5.316	4.434	3.733	2.924	2.384	1.295
12	284.587	148.785	40.246	20.173	11.562	6.989	5.229	4.362	3.672	2.876	2.346	1.274

Hasil CV pada LoB 3 metode GLM-Gamma



	1	Latest	Dev. To. Date	Ultimate	IBNR	S. E	CV	
	2	527285	0.9979541	528366	1081	190.8807	0.17657790	
	3	473027	0.9938147	475971	2944	357.8750	0.12156081	
	4	452343	0.9880109	457832	5489	544.8535	0.09926280	
	5	460895	0.9798959	470351	9456	833.9728	0.08819510	
	6	481083	0.9693958	496271	15188	1248.5284	0.08220493	
	7	497365	0.9595324	518341	20976	1666.8958	0.07946681	
	8	514241	0.9457636	543731	29490	2349.0126	0.07965455	
	9	524594	0.9245674	567394	42800	3584.1528	0.08374189	
	10	519740	0.8888638	584724	64984	5988.6577	0.09215588	
	11	439290	0.8140231	539653	100363	10819.3514	0.10780219	
	12	284587	0.5348344	532103	247516	36587.1722	0.14781740	
	13	total	5174450	0.9054572	5714737	540287	39796.8841	0.07365879

Berikut ini disajikan hasil estimasi parameter dengan menggunakan program

R.

Tabel 6.34: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 3 Pendekatan Distribusi Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	12,518806	0,031850	393,056	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	0,031117	0,042851	0,726	0,47082
$\hat{\alpha}_3$	-0,073534	0,044065	-1,669	0,10085
$\hat{\alpha}_4$	-0,12828	0,44602	-2,542	0,01388 *
$\hat{\alpha}_5$	-0,088199	0,044400	-1,986	0,05197
$\hat{\alpha}_6$	-0,037415	0,043927	-0,852	0,39804
$\hat{\alpha}_7$	0,005696	0,043575	0,131	0,89648
$\hat{\alpha}_8$	0,052632	0,043235	1,217	0,22867
$\hat{\alpha}_9$	0,095885	0,043058	2,227	0,03007 *
$\hat{\alpha}_{10}$	0,129009	0,043212	2,985	0,00422 **
$\hat{\alpha}_{11}$	0,051089	0,045222	1,130	0,26349
$\hat{\alpha}_{12}$	0,039988	0,051856	0,771	0,44393
$\hat{\beta}_2$	-0,641383	0,021353	-30,038	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_3$	-1,936696	0,037058	-52,261	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_4$	-2,625591	0,053746	-48,852	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_5$	-3,191056	0,075073	-42,506	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_6$	-3,714192	0,104063	-35,692	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_7$	-4,025230	0,131404	-30,632	$< 2e - 16$ ***



Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\hat{\beta}_8$	-4,232676	0,159552	-26,528	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_9$	-4,432476	0,195906	-22,625	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{10}$	-4,703006	0,255572	-18,402	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{11}$	-4,913536	0,342523	-14,345	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{12}$	-5,485300	0,649062	-8,451	$1,61e - 11$ ***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 0.01430368(shape parameter)

Null deviance:185.49534 on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 0.78062 on 55 derajat kebebasan

Tabel 6.35: Segitiga Run-Off Incremental LoB 4 (dalam 1.000) Metode Gamma

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	181.839	107.699	21.839	10.174	6.757	4.524	3.902	3.594	3.738	2.875	2.958	2.770
2	182.613	115.537	24.578	10.743	7.138	5.089	5.035	4.301	3.740	3.407	3.655	3.091
3	168.023	111.462	22.964	10.762	6.619	5.313	4.769	3.790	3.641	3.466	3.319	2.950
4	173.239	107.188	24.430	11.462	8.002	5.786	5.007	4.073	3.853	3.443	3.506	3.116
5	173.820	118.050	25.090	13.690	8.394	6.395	5.531	4.249	4.230	3.717	3.785	3.364
6	186.084	106.580	30.953	15.662	10.225	7.815	7.158	5.107	4.907	4.312	4.390	3.902
7	181.812	124.623	30.356	15.813	10.348	7.833	6.324	5.098	4.899	4.305	4.383	3.896
8	188.244	137.226	33.498	16.200	11.424	7.535	6.662	5.371	5.161	4.535	4.617	4.104
9	202.450	139.518	35.433	17.306	10.587	7.730	6.835	5.510	5.295	4.652	4.737	4.210
10	223.740	145.807	36.873	16.846	10.994	8.028	7.098	5.722	5.498	4.831	4.919	4.372
11	221.241	142.627	33.247	16.081	10.495	7.663	6.775	5.463	5.249	4.612	4.696	4.174
12	228.235	147.959	34.394	16.636	10.857	7.928	7.009	5.651	5.430	4.771	4.858	4.318

Hasil CV pada LoB 4 metode GLM-Gamma

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	S.E	CV	
1							
2	2	365836	0.9916216	368927	3091	388.3087	0.12562559
3	3	340809	0.9819378	347078	6269	539.3038	0.08602708
4	4	343040	0.9714985	353104	10064	710.6247	0.07061057
5	5	355219	0.9592347	370315	15096	943.0525	0.06247035
6	6	364477	0.9415699	387095	22618	1313.2021	0.05806004
7	7	370785	0.9276838	399689	28904	1617.5162	0.05596167
8	8	386592	0.9105366	424576	37984	2116.7385	0.05572711
9	9	394707	0.8884495	444265	49558	2855.2225	0.05761376
10	10	406420	0.8561095	474729	68309	4271.9035	0.06253793
11	11	363868	0.7870394	462325	98457	7259.7648	0.07373539
12	12	228235	0.4774331	478046	249811	26086.6259	0.10442545
13	total	3919988	0.8691482	4510149	590161	28812.7732	0.04882189

Berikut ini disajikan hasil estimasi parameter dengan menggunakan program

R.



Tabel 6.36: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 4 Pendekatan Distribusi Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )	
$\gamma$	11,89421	0,03732	318,736	$< 2e - 16$	***
$\hat{\alpha}_2$	0,10976	0,03626	3,027	0,00375	**
$\hat{\alpha}_3$	0,06295	0,03760	1,674	0,09976	.
$\hat{\alpha}_4$	0,11762	0,03899	3,016	0,00387	**
$\hat{\alpha}_5$	0,19427	0,04057	4,788	$1,31e - 05$	***
$\hat{\alpha}_6$	0.34265	0.04244	8.074	$6,61e - 11$	***
$\hat{\alpha}_7$	0.34099	0.04474	7.621	$3,63e - 10$	***
$\hat{\alpha}_8$	0.39308	0.04772	8.237	$3,59e - 11$	***
$\hat{\alpha}_9$	0.41872	0.05181	8.082	$6,42e - 11$	***
$\hat{\alpha}_{10}$	0.45645	0.05791	7.882	$1,36e - 10$	***
$\hat{\alpha}_{11}$	0.41001	0.06841	5.994	$1,65e - 07$	***
$\hat{\alpha}_{12}$	0.44392	0.09287	4.780	$1,35e - 05$	***
$\hat{\beta}_2$	-0.43344	0.03626	-11.953	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_3$	-1.89249	0.03760	-50.338	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_4$	-2.61880	0.03899	-67.158	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_5$	-3.04553	0.04057	-75.063	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_6$	-3.36002	0.04244	-79.172	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_7$	-3.48316	0.04474	-77.847	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_8$	-3.69852	0.04772	-77.500	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_9$	-3.73845	0.05181	-72.157	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{10}$	-3.86778	0.05791	-66.787	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{11}$	-3.84974	0.06841	-56.276	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{12}$	-3.96761	0.09287	-42.724	$< 2e - 16$	***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 0.007231663(shape parameter)

Null deviance:162.21201 on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 0.39827 on 55 derajat kebebasan



**LAMPIRAN 10: Hasil Segitiga Run-Off Metode GLM Majemuk Poisson Gamma**

Hasil CV LoB 1 metode GLM Majemuk Poisson Gamma

		Latest	Dev.	Ult	IBNR	S.E	CV
1							
2	2	205478	0.992	206968	1490	223.9044	0.150
3	3	189919	0.984	192837	2918	298.0057	0.102
4	4	180230	0.974	184989	4759	396.0731	0.083
5	5	186212	0.960	193951	7739	571.5272	0.073
6	6	201198	0.947	212368	11170	770.9377	0.069
7	7	197865	0.935	211554	13689	917.5470	0.067
8	8	209208	0.914	228838	19630	1321.5114	0.067
9	9	198164	0.892	222080	23916	1678.2853	0.070
10	10	196305	0.856	229238	32933	2529.3534	0.076
11	11	184382	0.781	236082	51700	4700.3719	0.090
12	12	109294	0.451	242327	133033	16958.7045	0.127
13	total	2058255	0.871	2361233	302978	18595.0289	0.061

Tabel 6.37: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 1 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	11,14117	0.04770	233.543	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	0.26859	0.04670	5.751	$4.04e - 07$ ***
$\hat{\alpha}_3$	0.18140	0.04840	3.748	0.000430 ***
$\hat{\alpha}_4$	0.18346	0.05018	3.656	0.000574 ***
$\hat{\alpha}_5$	0.31877	0.05216	6.112	$1.06e - 07$ ***
$\hat{\alpha}_6$	0.40886	0.05450	7.502	$5.68e - 10$ ***
$\hat{\alpha}_7$	0.36215	0.05741	6.308	$5.09e - 08$ ***
$\hat{\alpha}_8$	0.48000	0.06113	7.852	$1.52e - 10$ ***
$\hat{\alpha}_9$	0.42323	0.06627	6.387	$3.80e - 08$ ***
$\hat{\alpha}_{10}$	0.43371	0.07391	5.868	$2.62e - 07$ ***
$\hat{\alpha}_{11}$	0.43712	0.08705	5.022	$5.74e - 06$ ***
$\hat{\alpha}_{12}$	0.46063	0.11797	3.905	0.000260 ***
$\hat{\beta}_2$	-0.31073	0.04607	-6.744	$9.90e - 09$ ***
$\hat{\beta}_3$	-1.74446	0.04795	-36.380	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_4$	-2.49628	0.04985	-50.078	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_5$	-2.97606	0.05196	-57.282	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_6$	-3.27140	0.05442	-60.111	$< 2e - 16$ ***





Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\hat{\beta}_7$	-3.48742	0.05745	-60.701	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_8$	-3.64850	0.06136	-59.460	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_9$	-3.72334	0.06670	-55.825	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{10}$	-3.80980	0.07465	-51.034	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{11}$	-3.97504	0.08835	-44.993	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{12}$	-4.10326	0.12025	-34.122	$< 2e-16$ ***

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie: 0.0088404

Estimasi Index Parameter:1.99

Null deviance:NA on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 0.69049 on 55 dengan derajat kebebasan sebanyak 55

Min= -0.18558, 1Q =-0.05817 , Median= 0.00843, 3Q =0.03385, Max =0.37196

AIC: 1335.2

Number of Fisher Scoring iterations: 5

Tabel 6.38: Segitiga Run-Off Incremental LoB 2 (dalam 1.000)-Metode Majemuk Poisson Gamma

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	211.140	112.866	30.517	14.130	6.283	3.366	1.654	1.487	1.508	1.219	1.038	909
2	21.4103	121.425	34.815	14.909	7.018	4.504	3.296	2.172	1.858	1.491	1.558	962
3	190.751	110.948	31.693	14.032	7.376	5.013	3.498	2.311	1.867	1.677	1.214	875
4	173.064	99.330	29.196	15.321	7.731	5.268	3.077	1.800	1.655	1.280	1.111	801
5	173.183	105.460	32.709	17.005	8.407	5.967	3.816	2.625	1.623	1.335	1.159	835
6	183.984	117.070	38.876	19.745	10.025	5.219	12.402	2.213	1.812	1.491	1.295	933
7	187.130	119.688	39.468	17.532	9.009	5.359	4.810	2.186	1.790	1.473	1.279	922
8	197.778	136.659	45.783	19.538	9.306	5.623	5.275	2.398	1.963	1.615	1.403	1.011
9	196.153	131.182	41.694	19.090	8.815	5.455	5.117	2.326	1.904	1.567	1.361	980
10	194.471	126.036	38.598	17.492	8.552	5.292	4.964	2.257	1.847	1.520	1.320	951
11	193.964	122.436	37.056	17.215	8.417	5.209	4.886	2.221	1.818	1.496	1.299	936
12	198.044	121.973	37.478	17.411	8.512	5.268	4.941	2.246	1.839	1.513	1.314	947

Hasil CV LoB 2 metode GLM Majemuk Poisson Gamma

		Latest	Dev .	Ult	IBNR	S . E	CV
1							
2	2	407149	0.997	408111	962	915.8076	0.951
3	3	369166	0.994	371255	2089	1187.7002	0.568
4	4	336442	0.990	339634	3192	1359.5361	0.425
5	5	349172	0.986	354124	4952	1646.2694	0.332
6	6	387321	0.980	395065	7744	2044.6010	0.264
7	7	378186	0.968	390645	12459	2504.9644	0.201
8	8	409064	0.954	428351	19287	3116.0525	0.161
9	9	388119	0.933	415646	27527	3676.8405	0.133



10	10	359105	0.890	403300	44195	4697.3071	0.106
11	11	316400	0.797	396952	80552	6736.5158	0.083
12	12	198044	0.493	401487	203443	14469.6554	0.071
13	total	3898168	0.905	4304569	406401	22215.1588	0.054

Tabel 6.39: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 2 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	12.15553	0.03999	303.972	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	0.05616	0.05313	1.057	0.2951
$\hat{\alpha}_3$	-0.03803	0.05444	-0.699	0.4878
$\hat{\alpha}_4$	-0.12675	0.05577	-2.273	0.0270 *
$\hat{\alpha}_5$	-0.08439	0.05525	-1.527	0.1324
$\hat{\alpha}_6$	0.02602	0.05384	0.483	0.6309
$\hat{\alpha}_7$	0.01369	0.05421	0.252	0.8016
$\hat{\alpha}_8$	0.10598	0.05322	1.991	0.0514
$\hat{\alpha}_9$	0.07569	0.05396	1.403	0.1663
$\hat{\alpha}_{10}$	0.04533	0.05512	0.822	0.4144
$\hat{\alpha}_{11}$	0.02939	0.05720	0.514	0.6095
$\hat{\alpha}_{12}$	0.04072	0.06665	0.611	0.5438
$\hat{\beta}_2$	-0.48469	0.02636	-18.384	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_3$	-1.66473	0.04240	-39.265	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_4$	-2.43137	0.06246	-38.925	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_5$	-3.14696	0.09276	-33.927	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_6$	-3.62684	0.12569	-28.855	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_7$	-3.69085	0.14033	-26.300	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_8$	-4.47925	0.22671	-19.758	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_9$	-4.67929	0.27788	-16.839	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{10}$	-4.87449	0.34755	-14.025	$< 2e - 16$ ***
$\hat{\beta}_{11}$	-5.01549	0.45123	-11.115	$1.10e - 15$ ***
$\hat{\beta}_{12}$	-5.34318	0.76016	-7.029	$3.38e - 09$ ***



Parameter      Estimasi      Std. Error      t value      Pr(> |t|)

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie:287.75

Estimasi Index Parameter:1.0134

Null deviance:NA on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 23918 on 55 dengan derajat kebebasan sebanyak 55

Min=-49.153, 1Q = -11.457 , Median= -0.105 , 3Q = 7.361 , Max =84.958

AIC: 1481.3

Number of Fisher Scoring iterations: 5

Tabel 6.40: Segitiga *Run-Off Incremental* LoB 3 (dalam 1.000) Metode GLM Majemuk Poisson Gamma

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	295.186	136.293	32.886	15.702	7.646	6.134	4.573	3.891	4.048	2.574	2.197	1.134
2	299.660	147.080	35.247	15.809	9.538	4.621	4.509	3.466	2.957	2.514	1.884	1.082
3	266.192	132.376	30.851	15.630	9.682	5.697	4.093	3.616	2.637	2.253	1.908	1.037
4	254.573	124.266	30.423	15.073	9.398	7.419	5.067	3.243	2.881	2.428	1.980	1.076
5	248.042	131.401	35.632	18.829	11.111	6.452	4.718	4.710	3.411	2.670	2.178	1.184
6	252.999	136.012	41.325	23.886	13.831	7.997	5.033	4.553	3.832	3.000	2.447	1.330
7	261.441	146.095	44.658	24.936	13.646	6.589	5.545	4.625	3.893	3.048	2.486	1.351
8	268.152	161.316	48.057	23.939	12.777	7.699	5.759	4.803	4.043	3.165	2.581	1.403
9	287.997	163.951	50.412	22.234	12.911	7.804	5.837	4.868	4.098	3.208	2.616	1.422
10	309.494	164.303	45.943	22.416	12.846	7.765	5.808	4.844	4.077	3.192	2.603	1.415
11	286.677	152.613	40.921	20.513	11.755	7.105	5.315	4.433	3.731	2.921	2.382	1.295
12	284.587	148.802	40.259	20.181	11.565	6.990	5.229	4.361	3.670	2.874	2.344	1.274

Hasil LoB 3 Metode GLM majemuk Poisson-Gamma

	1	Latest	Dev .	Ult	IBNR	S . E	CV
2	2	527285	0.997	528367	1082	179.9412	0.166
3	3	473027	0.993	475972	2945	332.1185	0.112
4	4	452343	0.988	457827	5484	503.8330	0.091
5	5	460895	0.979	470338	9443	771.2989	0.081
6	6	481083	0.969	496245	15162	1158.4984	0.076
7	7	497365	0.959	518313	20948	1555.9806	0.074
8	8	514241	0.945	543694	29453	2204.7165	0.074
9	9	524594	0.924	567359	42765	3374.9577	0.078
10	10	519740	0.888	584707	64967	5654.6087	0.087
11	11	439290	0.814	539660	100370	10252.8577	0.102
12	12	284587	0.534	532135	247548	34718.7731	0.140
13	total	5174450	0.905	5714617	540167	37838.2300	0.070



Tabel 6.41: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 3 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
$\gamma$	12.44231	0.05221	238.306	$< 2e-16$ ***
$\hat{\alpha}_2$	-0.04710	0.05118	-0.920	0.36144
$\hat{\alpha}_3$	-0.08942	0.05304	-1.686	0.09748
$\hat{\alpha}_4$	-0.05217	0.05497	-0.949	0.34671
$\hat{\alpha}_5$	0.04311	0.05714	0.755	0.4537
$\hat{\alpha}_6$	0.15954	0.05970	2.673	0.00989 **
$\hat{\alpha}_7$	0.17530	0.06286	2.788	0.00726 **
$\hat{\alpha}_8$	0.21308	0.06695	3.183	0.00240 **
$\hat{\alpha}_9$	0.22659	0.07255	3.123	0.00285 **
$\hat{\alpha}_{10}$	0.22155	0.08092	2.738	0.00832 **
$\hat{\alpha}_{11}$	0.13280	0.09534	1.393	0.16927
$\hat{\alpha}_{12}$	0.11649	0.12914	0.902	0.37097
$\hat{\beta}_2$	-0.64842	0.05045	-12.852	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_3$	-1.95571	0.05249	-37.258	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_4$	-2.64631	0.05456	-48.503	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_5$	-3.20304	0.05688	-56.312	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_6$	-3.70654	0.05962	-62.170	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_7$	-3.99688	0.06296	-63.485	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_8$	-4.17836	0.06725	-62.132	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_9$	-4.35075	0.07313	-59.496	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{10}$	-4.59545	0.08191	-56.107	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{11}$	-4.79932	0.09695	-49.502	$< 2e-16$ ***
$\hat{\beta}_{12}$	-5.40880	0.13217	-40.923	$< 2e-16$ ***



Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
-----------	----------	------------	---------	-----------

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie:0.011049

Estimasi Index Parameter:1.99

Null deviance:NA on 77 derajat kebebasan

Residual deviance: 0.86328 on 55 dengan derajat kebebasan sebanyak 55

Min= -0.29654, 1Q = -0.06631, Median= -0.01089, 3Q = 0.04456, Max = 0.24784

AIC: 1469.6

Number of Fisher Scoring iterations: 4

Tabel 6.42: Segitiga *Run-Off Incremental* LoB 4 (dalam 1.000) Metode GLM ODP

Acc.Per	Development Period											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	181.839	107.699	21.839	10.174	6.757	4.524	3.902	3.594	3.738	2.875	2.958	2.770
2	182.613	115.537	24.578	10.743	7.138	5.089	5.035	4.301	3.740	3.407	3.655	3.090
3	168.023	111.462	22.964	10.762	6.619	5.313	4.769	3.790	3.641	3.466	3.318	2.948
4	173.239	107.188	24.430	11.462	8.002	5.786	5.007	4.073	3.853	3.441	3.503	3.112
5	173.820	118.050	25.090	13.690	8.394	6.395	5.531	4.249	4.227	3.714	3.781	3.359
6	186.084	106.580	30.953	15.662	10.225	7.815	7.158	5.097	4.896	4.302	4.380	3.891
7	181.812	124.623	30.356	15.813	10.348	7.833	6.316	5.090	4.890	4.296	4.374	3.886
8	188.244	137.226	33.498	16.200	11.424	7.528	6.654	5.363	5.152	4.526	4.608	4.094
9	202.450	139.518	35.433	17.306	10.581	7.725	6.829	5.503	5.287	4.645	4.729	4.202
10	223.740	145.807	36.873	16.844	10.992	8.025	7.094	5.717	5.492	4.825	4.913	4.365
11	221.241	142.627	33.256	16.086	10.498	7.664	6.775	5.460	5.245	4.608	4.692	4.169
12	228.235	147.968	34.404	16.642	10.860	7.929	7.009	5.648	5.426	4.767	4.854	4.312

Hasil LoB 4 Metode GLM majemuk Poisson-Gamma

	1	Latest	dev	Ult	IBNR	S.E	CV
2	2	365836	0.991	368926	3090	365.3646	0.118
3	3	340809	0.981	347075	6266	504.2626	0.080
4	4	343040	0.971	353096	10056	664.2496	0.066
5	5	355219	0.959	370300	15081	882.9187	0.058
6	6	364477	0.941	387044	22567	1232.7703	0.054
7	7	370785	0.927	399638	28853	1526.4728	0.052
8	8	386592	0.910	424518	37926	2009.5633	0.052
9	9	394707	0.888	444207	49500	2725.7738	0.055
10	10	406420	0.856	474687	68267	4096.2196	0.060
11	11	363868	0.787	462321	98453	6968.8606	0.070
12	12	228235	0.477	478055	249820	24894.0068	0.099
13	total	3919988	0.869	4509866	589878	27611.7742	0.046



Tabel 6.43: Hasil Estimasi Parameter Pada LoB 4 Pendekatan Distribusi Majemuk Poisson-Gamma

Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )	
$\gamma$	11.89547	0.03727	319.151	$< 2e - 16$	***
$\hat{\alpha}_2$	0.10916	0.03650	2.991	0.00416	**
$\hat{\alpha}_3$	0.06222	0.03783	1.645	0.10570	
$\hat{\alpha}_4$	0.11654	0.03921	2.972	0.00438	**
$\hat{\alpha}_5$	0.19288	0.04077	4.731	$1.60e - 05$	***
$\hat{\alpha}_6$	0.33995	0.04259	7.982	$9.34e - 11$	***
$\hat{\alpha}_7$	0.33860	0.04486	7.548	$4.78e - 10$	***
$\hat{\alpha}_8$	0.39077	0.04778	8.178	$4.47e - 11$	***
$\hat{\alpha}_9$	0.41661	0.05178	8.045	$7.36e - 11$	***
$\hat{\alpha}_{10}$	0.45474	0.05774	7.875	$1.39e - 10$	***
$\hat{\alpha}_{11}$	0.40873	0.06802	6.009	$1.56e - 07$	***
$\hat{\alpha}_{12}$	0.44266	0.09215	4.804	$1.24e - 05$	***
$\hat{\beta}_2$	-0.43338	0.03601	-12.036	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_3$	-1.89220	0.03748	-50.488	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_4$	-2.61847	0.03896	-67.209	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_5$	-3.04526	0.04060	-75.002	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_6$	-3.35985	0.04253	-78.992	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_7$	-3.48320	0.04489	-77.592	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_8$	-3.69902	0.04795	-77.136	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_9$	-3.73914	0.05212	-71.744	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{10}$	-3.86857	0.05835	-66.304	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{11}$	-3.85065	0.06900	-55.808	$< 2e - 16$	***
$\hat{\beta}_{12}$	-3.96887	0.09387	-42.280	$< 2e - 16$	***



Parameter	Estimasi	Std. Error	t value	Pr(>  t )
-----------	----------	------------	---------	-----------

Keterangan:

Signif. codes: 0 (\*\*\*) - 0.001 (\*\*) - 0.01 (\*) - 0.05 (.) 0.1 ( ) 1

Parameter dispersi untuk distribusi Tweedie:0.0056682

Estimasi Index Parameter: 1.99

*Null deviance*:NA on 77 derajat kebebasan

*Residual deviance*: 0.4425 on 55 dengan derajat kebebasan sebanyak 55

Min= -0.230345, 1Q = -0.035767, Median= -0.003074, 3Q = 0.053599 , Max = 0.237203

AIC: 1396.2

Number of Fisher Scoring iterations: 5



### LAMPIRAN 11: Pseudocode

```

1 #Membuka Data
2 dat <- read.csv("F:/kul/Semester 3/NN/CL/LOB2.csv",sep=';', 1)
3 #melihat data
4 dat
5 # Load the ChainLadder package
6 library(ChainLadder)
7 # abaikan kolom pertama yang memuat informasi tentang
  accidentyear
8 tri <- dat[,-1]
9 # Convert to matrix
10 tri <- as.matrix(tri)
11 # Add dimension names
12 dimnames(tri) <- list(origin=dat[,1], dev=1:ncol(tri))
13 # Convert into a triangle class
14 tri <- as.triangle(tri)
15 tri
16 #Metode Chain Ladder
17 n<-12
18
19 f<-sapply(1:(n-1),
20 function(i){
21 sum(tri[c(1:(n-i)),i+1])/sum(tri[c(1:(n-i)),i])
22 })
23
24 round(f,3)
25 f
26 (f-1)
27 round(f-1,3)
28 log(f-1)
29 round(log(f-1),3)
30 dev.period<-1:(n-1)
31 plot(log(f-1)~dev.period,main="Ekstrapolasi Log-linear pada
  FaktorPerkembangan",
32 ylab="Ln(f-1)=fk*",xlab="Dev. Per.")
33 tail.model<-lm(log(f-1)~dev.period)
34 tail.model
35 abline(tail.model)
36 co<-coef(tail.model)
37 co
38 co[1]
39 co[2]
40 tail<-\exp(co[1]+(c(n:(n+100))*co[2]))+1
41 tail
42 f.tail<-prod(tail)#prod product or multiplication
43 f.tail
44 c(f,tail[tail>1.0001])
45 rev(c(f,tail[tail>1.0001]))#rev reverse
46 rev(1/cumprod(rev(c(f,tail[tail>1.0001]))))
47 plot(100*(rev(1/cumprod(rev(c(f,tail[tail>1.0001]))))),
48 t="b", main="Bentuk Ekspektasi Perkembangan Klaim IBNR",
49 xlab="Dev.Per.", ylab="Perkembangan Total Klaim dalam %")
50 f<-c(f,f.tail)
51 f

```





```

52 fullTri<-cbind(tri, Ult=rep(0,12))
53 for(k in 1:n){
54 fullTri[(n-k+1):n,k+1]<-fullTri[(n-k+1):n,k]*f[k]
55 }
56 fullTri
57 sum(fullTri[,13]-getLatestCumulative(tri))#total estimated
   outstanding loss under model
58 ata(tri)
59 linkratios<-c(attr(ata(tri),"vwtd"),tail=1.007939)
60 linkratios
61 round(linkratios,3)
62 LDF<-rev(cumprod(rev(linkratios)))
63 LDF
64 names(LDF)<-colnames(tri)
65 round(LDF,3)
66 rev(LDF)
67 currentEval<-getLatestCumulative(tri)
68 currentEval
69 EstdUlt<-currentEval*rev(LDF)
70 EstdUlt
71 EstdResrve<-EstdUlt-currentEval
72 EstdResrve
73 Exhibit1<-data.frame(currentEval,EstdUlt)
74 Exhibit1<-rbind(Exhibit1,data.frame(currentEval=sum(currentEval),
   EstdUlt=sum(EstdUlt),row.names="Total"))
75 Exhibit2<-data.frame(currentEval,LDF=round(rev(LDF),3),EstdUlt,
   EstdResrve)
76 Exhibit2<-rbind(Exhibit2,data.frame(currentEval=sum(currentEval),
   LDF=NA,EstdUlt=sum(EstdUlt),EstdResrve=sum(EstdResrve),
77 row.names="Total"))
78 #round(Exhibit1,3)
79 #Exhibit1
80 #round(Exhibit2,3)
81 Exhibit2
82
83 #Metode Mack's
84 M <- MackChainLadder(tri, est.sigma = "Mack")
85 M
86 M$f
87 plot(M)
88 #plot(M, lattice=TRUE)
89 #head(dat)
90 #summary(dat)
91 M$call
92 M$Triangle
93 M$FullTriangle
94
95 M$Models
96 M$weights
97 M$alpha
98 M$f
99 M$f.se
100 M$F.se
101 M$sigma
102 M$Mack.ProcessRisk
103 M$Mack.ParameterRisk

```



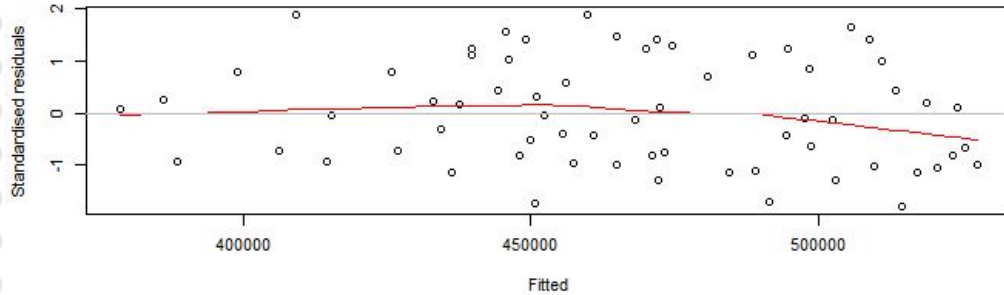
```

104 M$Mack.S.E
105 M$Total.ProcessRisk
106 M$Total.ParameterRisk
107 M$Total.Mack.S.E
108 str(tri)
109 M$tail
110 M$Latest
111
112 #Metode GLM-ODP
113 #fit ODP Poisson
114 fit1<-glmReserve(triinc,var.power=1,link.power=0,cum=FALSE,mse.
    method=c("formula"),nsim=200,nb=FALSE)
115 fit1
116 fit1$FullTriangle
117 summary(fit1,type="model")
118 a<-summary(fit1,type="model")
119 a
120 writexlsx(a,"F:/kul/Semester 3/NN/CL/coba1.xlsx")
121 #plot(fit1, which=1, xlab="dev year", ylab="cum loss")#plot
    original triangle
122 plot(fit1, which=4, xlab="Fitted Value", ylab="Standardized
    Residual", main="Residuals VS Fitted Values LoB1")
123 fit1$model
124
125 #Metode GLM-Gamma
126 #fit Gamma
127 fit2<-glmReserve(triinc,var.power=2,link.power=0,cum=FALSE,mse.
    method=c("formula"),nsim=200,nb=FALSE)
128 fit2
129 fit2$FullTriangle
130 summary(fit2,type="model")
131 #plot(fit1, which=1, xlab="dev year", ylab="cum loss")#plot
    original triangle
132 plot(fit1, which=4, xlab="Estimasi Y", ylab="Standardized
    Residual", main="Residuals VS Fitted Values LoB4 GLM-Gamma")
133
134 #Metode GLM-ODP
135 #fit compoundpoisson
136 fit3<-glmReserve(triinc,var.power=NULL,link.power=0,cum=FALSE,
    mse.method=c("formula"),nsim=200,nb=FALSE)
137 fit3
138 fit3$FullTriangle
139 summary(fit3,type="model")
140 #plot(fit1, which=1, xlab="dev year", ylab="cum loss")#plot
    original triangle
141 plot(fit3, which=4, xlab="Estimasi Y", ylab="Standardized
    Residual", main="Residuals VS Fitted Values LoB4 GLM-Majemuk
    Poisson-Gamma")

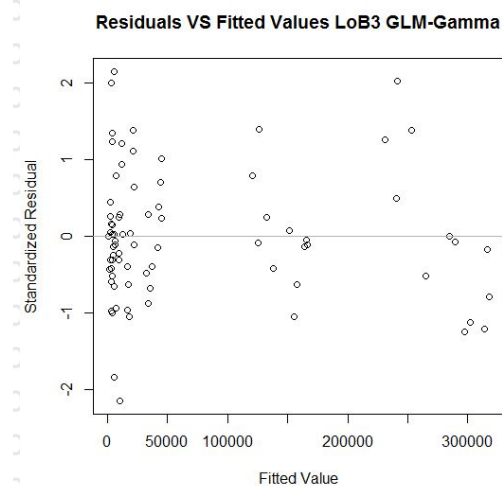
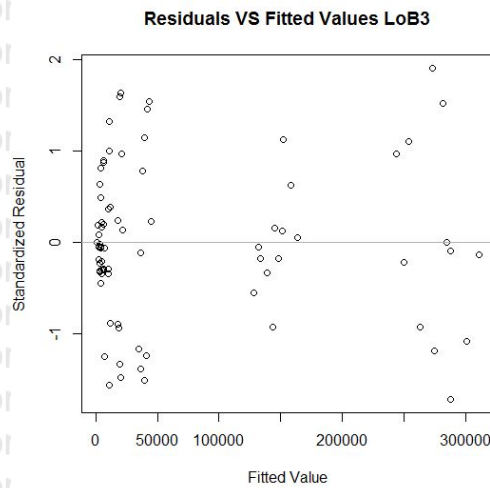
```

## LAMPIRAN 12: Visualisasi MCL dan metode GLM

### Visualisasi MCL dan metode GLM pada LoB 3

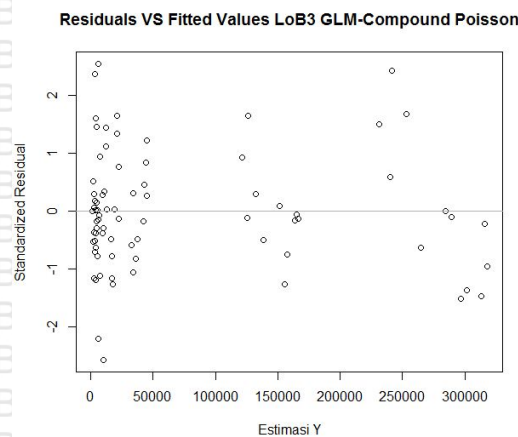


(a) Metode Mack's Chain-Ladder



(b) Metode GLM Model ODP

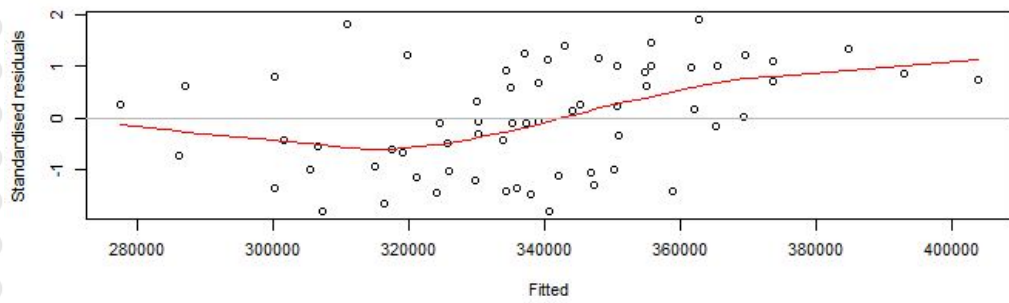
(c) Metode GLM Model Gamma



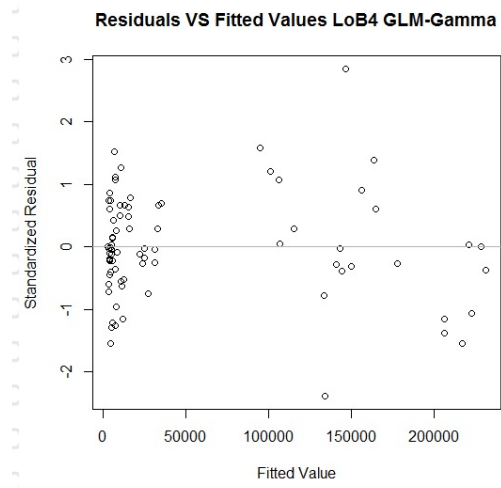
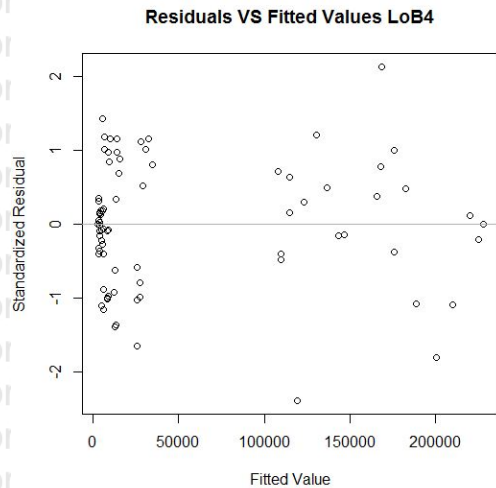
(d) Metode GLM Model Majemuk Poisson-Gamma

Gambar 6.10: *Standardized Residual VS Fitted Value* pada LoB 3

### Visualisasi MCL dan metode GLM pada LoB 4

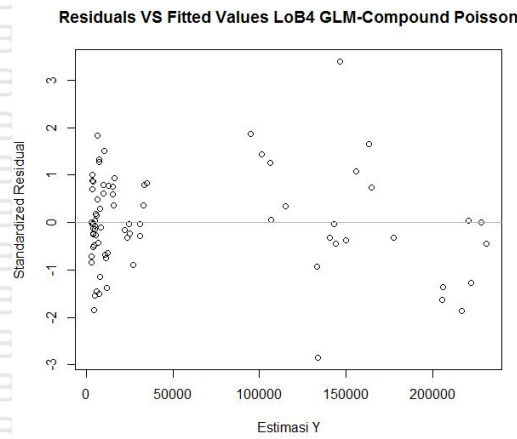


(a) Metode Mack's Chain-Ladder



(b) Metode GLM Model ODP

(c) Metode GLM Model Gamma

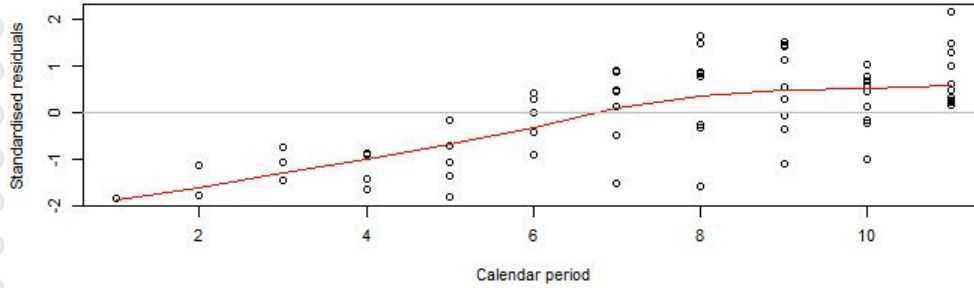


(d) Metode GLM Model Majemuk Poisson-Gamma

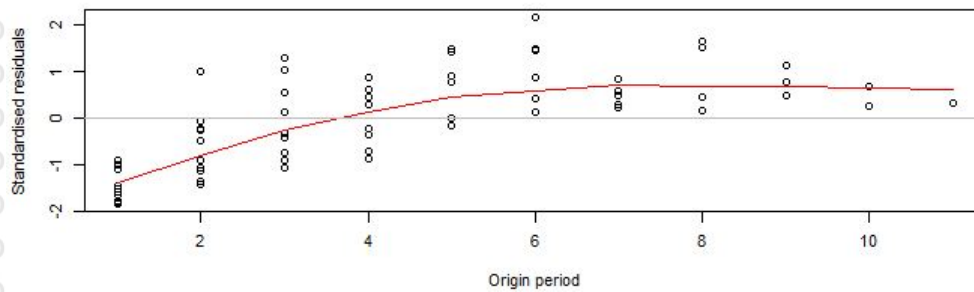
Gambar 6.11: *Standardized Residual VS Fitted Value* pada LoB 4



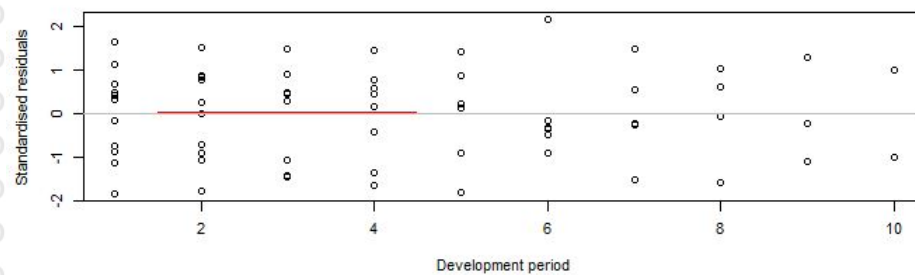
LAMPIRAN 13: Visualisasi *standardized residual* pada metode MCL



(a) *Standardized Residual vs Calendar Period LoB 2*

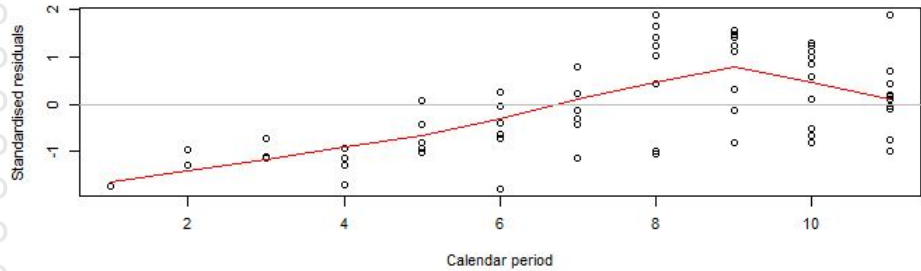


(b) *Standardized Residual vs Accident Period LoB 2*

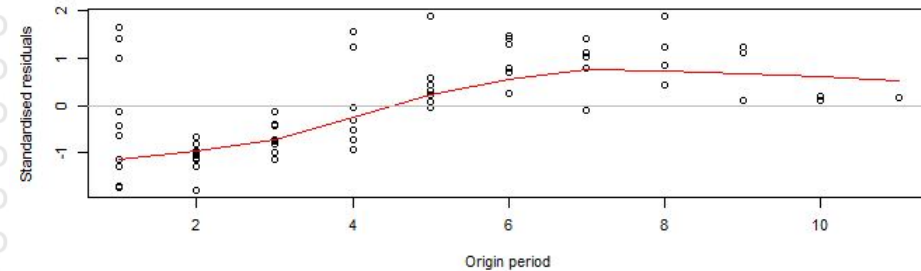


(c) *Standardized Residual vs Development Period LoB 2*

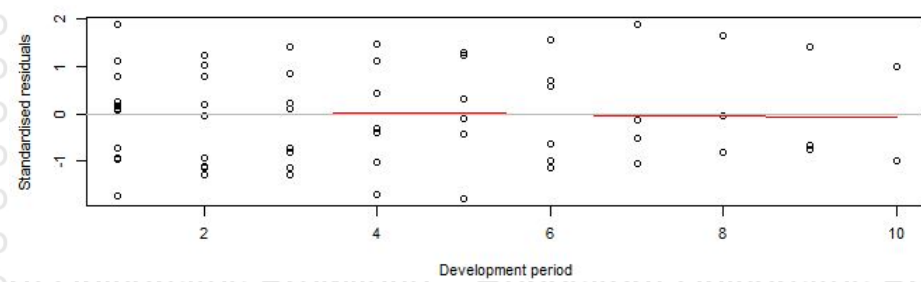
Gambar 6.12: Visualisasi *standardized residual* pada Metode MCL LoB 2



(a) Standardized Residual vs Calendar Period LoB 3

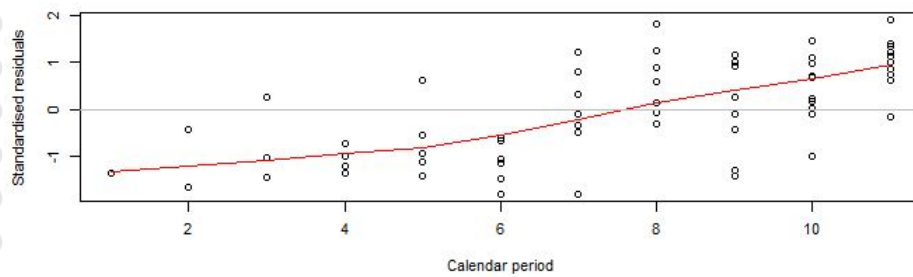


(b) Standardized Residual vs Accident Period LoB 3

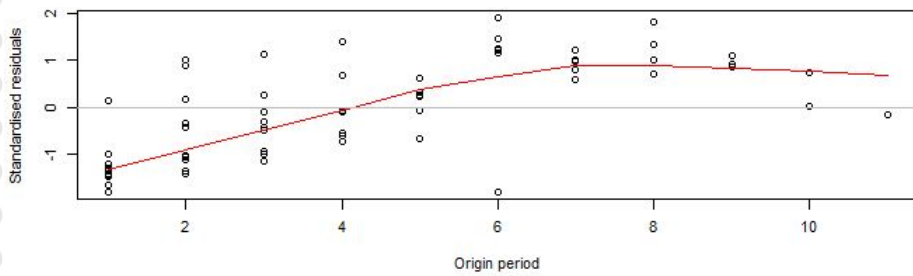


(c) Standardized Residual vs Development Period LoB 3

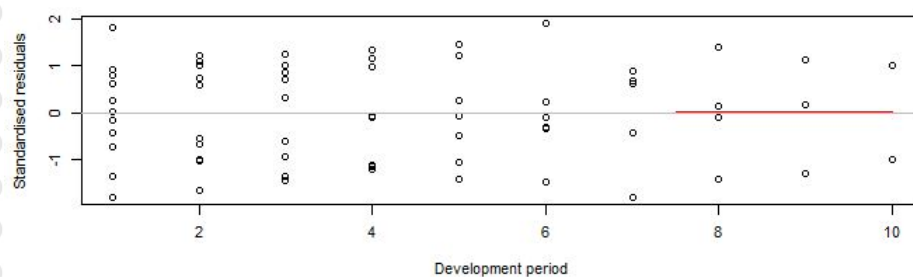
Gambar 6.13: Visualisasi *standardized residual* pada Metode MCL LoB 3



(a) *Standardized Residual vs Calendar Period* LoB 4



(b) *Standardized Residual vs Accident Period* LoB 4



(c) *Standardized Residual vs Development Period* LoB 4

Gambar 6.14: Visualisasi *standardized residual* pada Metode MCL LoB 4