

**DISKRETISASI MODEL PREDATOR-PREY LOTKA-VOLTERRA  
ORDE FRAKSIONAL DENGAN PERLINDUNGAN PREY DAN  
MAKANAN TAMBAHAN**

**TESIS**



Oleh

**RIO SATRIYANTARA  
NIM. 156090400011001**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
BIDANG MINAT MATEMATIKA BIOLOGI**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**DISKRETISASI MODEL PREDATOR-PREY LOTKA-VOLTERRA  
ORDE FRAKSIONAL DENGAN PERLINDUNGAN PREY DAN  
MAKANAN TAMBAHAN**

**TESIS**

**Untuk Memenuhi Persyaratan  
Memperoleh Gelar Magister dalam Bidang Matematika**



Oleh

**RIO SATRIYANTARA  
NIM. 156090400011001**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
BIDANG MINAT MATEMATIKA BIOLOGI**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG**

**2018**





**TESIS**

**DISKRETISASI MODEL PREDATOR-PREY LOTKA-VOLTERRA ORDE FRAKSIONAL DENGAN PERLINDUNGAN PREY DAN MAKANAN TAMBAHAN**

Oleh:

**RIO SATRIYANTARA**

**NIM. 156090400011001**

Telah dipertahankan di depan Komisi Penguji

pada tanggal .....

dan dinyatakan **LULUS**

Menyetujui,

**KOMISI PEMBIMBING**

**Ketua**

**Anggota**

**Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.**

**NIP. 19690807 199412 1 001**

**Dr. Noor Hidayat, M.Si.**

**NIP. 19611204 198802 1 001**

**Mengetahui:**

**Ketua Program Studi Magister Matematika**

**Dr. Noor Hidayat, M.Si.**

**NIP. 19611204 198802 1 001**

# IDENTITAS TIM PENGUJI

Judul Tesis : Diskretisasi Model Predator-Prey Lotka-Volterra Orde Fraksional dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan

Nama : Rio Satriyantara

NIM : 156090400011001

Program Studi : Matematika

Bidang Minat : MATEMATIKA BIOLOGI

## KOMISI PEMBIMBING

Ketua : Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.

Anggota : Dr. Noor Hidayat, M.Si.

## TIM DOSEN PENGUJI

Dosen Penguji 1 : Syaiful Anam, S.Si., M.T., Ph.D.

Dosen Penguji 2 : Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D.

Tanggal Ujian :

SK Penguji :

## PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, di dalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan sumber kutipan dalam daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur plagiasi, saya bersedia diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan tesis ini dibatalkan.

Malang, 9 Maret 2018

Rio Satriyantara

NIM. 156090400011001

## RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama lengkap Rio Satriyantara, lahir pada tanggal 09 Mei 1993 di Kota Mataram, Provinsi Nusa Tenggara Barat. Penulis adalah anak pertama dari Ibu Sri Wuryantari dan Bapak Eddy Sutrisno. Penulis menyelesaikan pendidikan Taman Kanak-Kanak (TK) di TK Nahdatul Wathan Kota Mataram pada tahun 1999 dan menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di Sekolah Dasar Negeri 02 Cakra-negara Kota Mataram pada tahun 2005. Tahun 2008, penulis lulus dari Sekolah Menengah Pertama Negeri 6 Mataram. Tahun 2011 lulus dari Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Mataram. Penulis menyelesaikan pendidikan tingkat sarjana (S1) di Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Negeri Mataram pada tahun 2015. Di tahun 2015 juga, penulis melanjutkan pendidikan tingkat magister (S2) pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Malang, 9 Maret 2018

Rio Satriyantara

NIM. 156090400011001

## RINGKASAN

RIO SATRIYANTARA, Program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Brawijaya, Diskretisasi Model Predator-Prey Lotka-Volterra Orde Fraksional dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan, Ketua Komisi Pembimbing: Agus Suryanto, Anggota Komisi Pembimbing: Noor Hidayat.

Dalam tesis ini dibahas tentang perilaku dinamik model diskret predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan pada prey dan makanan tambahan untuk predator. Model diskret diperoleh dengan melakukan pendekatan model fraksional kontinu menjadi bentuk persamaan integral nonlinear Volterra. Selanjutnya, persamaan integral Volterra diselesaikan dengan mengasumsikan *piecewise constant arguments* untuk mendapatkan model diskret. Analisis dinamik dari model diskret tersebut terdiri atas analisis eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangannya. Model diskret yang dihasilkan memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kepunahan populasi, titik kepunahan predator, dan titik ko-eksisten (interior). Berdasarkan hasil analisis kestabilan, titik kepunahan populasi prey dan predator bersifat tidak stabil. Titik kesetimbangan kepunahan predator dan titik kesetimbangan ko-eksisten (interior) bersifat stabil asimtotik dengan syarat tertentu. Simulasi numerik menunjukkan bahwa kestabilan titik kesetimbangan tidak hanya bergantung pada nilai parameter, tetapi juga pada ukuran langkah waktu integrasi.

## SUMMARY

RIO SATRIYANTARA, Mathematics Master Study Program, Faculty of Sciences, University of Brawijaya. *A Discrete Fractional-Order Lotka-Volterra Predator-Prey Model with Prey Refuge and Additional Food*. Supervisors: Agus Suryanto, Co-Supervisors: Noor Hidayat.

*In this thesis we discuss about dynamical behaviors of a discrete fractional-order Lotka-Volterra predator-prey model with prey refuge and additional food for predator. The discrete model is obtained by approximating the continuous fractional order model in term of nonlinear Volterra integral equation. Afterward, the Volterra equation integral is then solved by assuming piecewise constant arguments to obtain the discrete model. The dynamical analysis of our discrete fractional order model consists of the existence of the equilibrium points and their stability. It is found that the model has three equilibrium points, namely the extinction of both prey and predator point, the extinction of predator point, and the co-existing (interior) point. Based on the analysis, the trivial equilibrium point is unstable, while others are conditionally asymptotically stable. Numerical simulations show that the stability of the equilibrium points depend not only on the parameter, but also on the integration of time step.*



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur senantiasa penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas berkat rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **"Diskretisasi Model Predator-Prey Lotka-Volterra Orde Fraksional dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan"** sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar magister dalam bidang matematika. Tak lupa shalawat serta salam penulis haturkan kepada junjungan Rasulullah SAW beserta para sahabat.

Selama proses penyusunan Tesis, penulis menyadari bahwa ada banyak pihak yang telah membantu, mendukung, dan berkontribusi. Oleh sebab itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih sedalam-dalamnya atas segala bantuan, dukungan, dan kontribusi kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., dan Dr. Noor Hidayat, M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan nasihat, saran, kritik, dan masukan yang sangat bermanfaat bagi penulis dan selalu sabar dalam menjelaskan materi kepada penulis selama proses penyusunan hingga Tesis ini dapat diselesaikan.
2. Bapak Syaiful Anam, S.Si., M.T., Ph.D., dan Ibu Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran selama pengerjaan dan penyusunan Tesis ini.
3. Ibunda Sri Wuryantari dan Ayahanda Eddy Sutrisno, selaku orang tua kandung penulis serta seluruh keluarga besar yang senantiasa memanjatkan doa dan selalu memberikan dukungan di setiap langkah yang diambil penulis selama ini.
4. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah senantiasa memberikan anugerah, rahmat, dan hidayah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan Tesis ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena

itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun yang dapat disampaikan melalui email [riosatriyantara@gmail.com](mailto:riosatriyantara@gmail.com).

Akhir kata, semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak dan menjadi sumber inspirasi untuk penulisan selanjutnya.

Malang, 9 Maret 2018

Rio Satriyantara

NIM. 156090400011001



# Daftar Isi

<b>LEMBAR PENGESAHAN</b>	iii
<b>IDENTITAS TIM PENGUJI</b>	iv
<b>PERNYATAAN ORISINALITAS</b>	v
<b>RIWAYAT HIDUP PENULIS</b>	vi
<b>RINGKASAN</b>	vii
<b>SUMMARY</b>	viii
<b>KATA PENGANTAR</b>	ix
<b>DAFTAR ISI</b>	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b>	xiv
<b>1 Pendahuluan</b>	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	4
<b>2 Kajian Pustaka</b>	5
2.1 Sistem Dinamik Diskret	5
2.1.1 Sistem Dinamik Diskret Orde Satu Linear	5
2.1.2 Sistem Dinamik Diskret Orde Satu Nonlinear	6
2.1.3 Kestabilan Sistem Dinamik Diskret	8
2.2 Sistem Dinamik Orde Fraksional	13
2.2.1 Kalkulus Fraksional	13
2.2.2 Turunan Reimann-Liouville	14
2.2.3 Turunan Caputo	16
2.3 Diskretisasi Persamaan Diferensial Orde Fraksional	17
2.4 Model Pertumbuhan Logistik	19
2.5 Model Predator-Prey Lotka-Voterra	20
2.6 Fungsi Respon	21
2.7 Perlindungan pada Prey	21
2.8 Makanan Tambahan	22
2.9 Model Predator-Prey Lotka-Volterra dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan	23

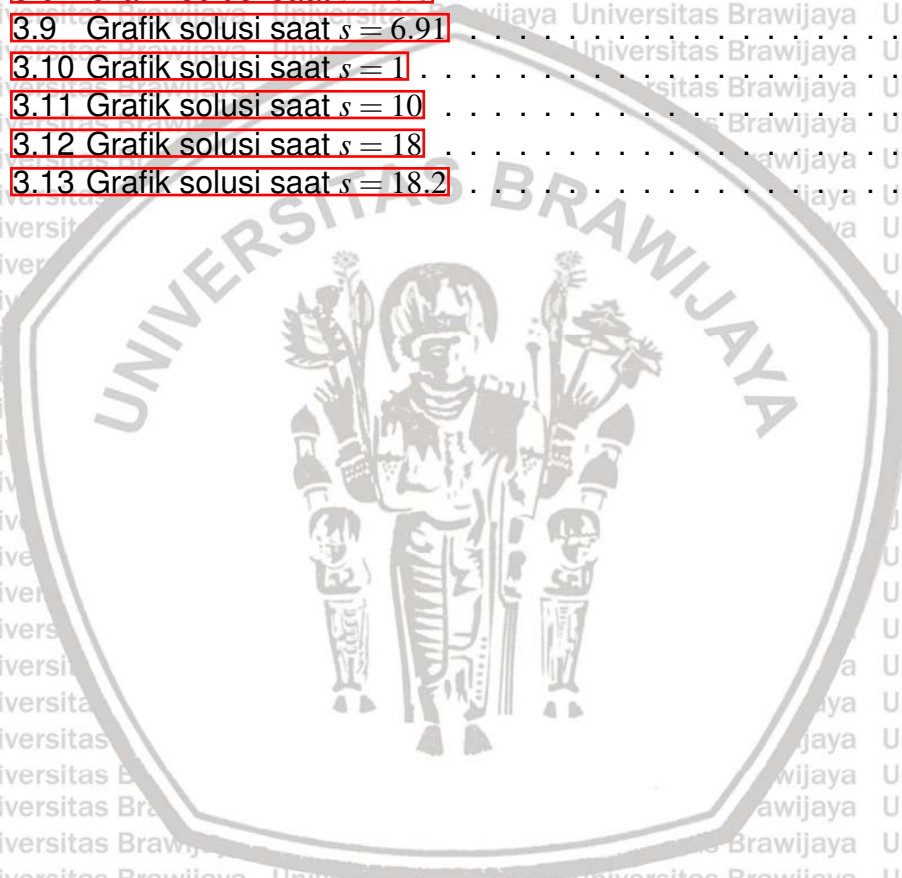


<b>3</b>	<b>Pembahasan</b>	<b>25</b>
3.1	Konstruksi dan Diskretisasi Model Predator-Prey Lotka-Volterra Orde Fraksional dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan	25
3.2	Titik Kesetimbangan	27
3.3	Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan	30
3.3.1	Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_0 = (0,0)$	30
3.3.2	Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1 = (\gamma,0)$	31
3.3.3	Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_2 = (x^*,y^*)$	33
3.4	Simulasi Numerik	40
3.4.1	Titik Kesetimbangan Kepunahan Populasi Predator	40
3.4.2	Titik Kesetimbangan Populasi Prey dan Populasi Predator Dapat Hidup Bersama (Interior)	43
<b>4</b>	<b>Kesimpulan dan Saran</b>	<b>50</b>
4.1	Kesimpulan	50
4.2	Saran	50
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>51</b>
	<b>LAMPIRAN</b>	<b>55</b>



# Daftar Gambar

3.1	Grafik solusi saat $s = 0.1$ .	41
3.2	Grafik solusi saat $s = 0.5$ .	41
3.3	Grafik solusi saat $s = 2$ .	42
3.4	Grafik solusi saat $s = 2.1$ .	42
3.5	Grafik solusi saat $s = 0.5$ .	44
3.6	Grafik solusi saat $s = 2$ .	44
3.7	Grafik solusi saat $s = 4$ .	45
3.8	Grafik solusi saat $s = 6.8$ .	45
3.9	Grafik solusi saat $s = 6.91$ .	46
3.10	Grafik solusi saat $s = 1$ .	47
3.11	Grafik solusi saat $s = 10$ .	47
3.12	Grafik solusi saat $s = 18$ .	48
3.13	Grafik solusi saat $s = 18.2$ .	48



# Daftar Tabel

3.1. Syarat Eksistensi dan Kestabilan.	39
3.2. Nilai Parameter.	40



# Bab 1

## Pendahuluan

### 1.1 Latar Belakang

Model matematika yang menggambarkan perubahan yang terjadi pada suatu populasi seiring berjalannya waktu, seperti pertumbuhan, disebut dengan model dinamika populasi. Menurut Tarumingkeng (1994), populasi adalah sekumpulan individu atau kelompok individu dalam satu spesies yang pada suatu waktu menghuni suatu wilayah atau tata ruang tertentu. Sapi-sapi di padang rumput, hiu-hiu di laut lepas, dan penduduk di suatu wilayah merupakan contoh dari populasi.

Kehidupan populasi membentuk suatu sistem dimana antara suatu populasi dengan populasi lainnya saling mempengaruhi atau saling berinteraksi. Interaksi populasi prey dan predator merupakan salah satu contoh sistem kehidupan dimana predator memangsa prey. Sistem kehidupan prey dan predator demikian disebut sebagai model predator-prey yang pertama kali diperkenalkan oleh Alfred James Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1928 yang dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Model ini kemudian banyak mengalami perkembangan. Salah satu perkembangannya adalah laju pertumbuhan predator dibatasi oleh *carrying capacity* (jumlah maksimum dari individu yang dapat didukung atau dilayani oleh sumber daya yang tersedia di ekosistem) yang sebanding dengan banyaknya prey (Murray, 2002).

Interaksi antara predator dan prey mengakibatkan populasi prey berkurang. Agar populasi prey dapat terhindar dari kepunahan maka diperlukan suatu perlindungan pada prey. Perlindungan prey adalah suatu area yang ditempati oleh prey yang berpotensi untuk mengurangi laju pertemuan prey dengan predator. Wuhaib dan Hasan (2013) memaparkan bahwa dengan adanya perlindungan maka popu-

lasi prey akan terjaga kestabilannya. Ma dkk. (2009) mengatakan bahwa efek dari perlindungan prey bersifat positif pada pertumbuhan populasi prey karena dapat menurunkan angka kematian prey dan bersifat negatif pada predator dimana terjadi penurunan keberhasilan predasi.

Sifat dari predator yang bergerak aktif memangsa makanan menjadi salah satu indikator bahwa predator beralih memangsa dari prey yang satu ke prey yang lain atau sumber makanan lain. Dengan mempertimbangkan kemungkinan punahnya prey di masa yang akan datang maka diperlukan adanya sumber makanan lain bagi predator. Sumber makanan ini bisa berupa makanan lain selain prey itu sendiri, dikenal sebagai makanan tambahan. Makanan tambahan adalah komponen yang penting dalam membantu mengontrol populasi predator. Kualitas yang baik dan jumlah yang cukup dari makanan tambahan akan menghasilkan pertumbuhan predator yang cepat (Sahoo dan Poria, 2015). Tambahan makanan dapat mengurangi efek atau tekanan predasi pada populasi prey.

Model predator-prey secara sistematis membentuk sistem persamaan diferensial. Salah satu bentuk dari sistem persamaan diferensial dikenal dengan nama orde fraksional. Perkembangan model predator-prey orde fraksional telah menambah minat banyak peneliti untuk menginvestigasi sistem dinamik orde fraksional (Javidi dan Nyamoradi, 2013). Persamaan diferensial orde fraksional memiliki relasi atau hubungan yang alami dengan fenomena di alam dikarenakan adanya penggunaan memori pada persamaan diferensial ini (Elsadany, 2015). Keberadaan memori pada model orde fraksional tidak hanya menceritakan bagaimana perilaku dinamiknyanya, tetapi juga memberikan informasi akan dampak dari perilaku dinamik tersebut pada masa ini dan masa mendatang secara lebih detail (El-Shahed dkk., 2016). Hal ini dikarenakan turunan fraksional pada titik tertentu berisi informasi tentang fungsi pada titik-titik sebelumnya. Perkembangan dari orde fraksional ini terletak pada penggantian turunan pertama sistem menjadi orde fraksional  $n$  dengan  $0 < n < 1$  dan  $n \in \mathbb{R}$ .



Pada penelitian-penelitian sebelumnya, model predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional merupakan model kontinu yang berupa persamaan diferensial nonlinier. Solusi eksak model predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional kontinu tidak mudah ditemukan. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu metode numerik untuk membantu mencari pendekatan solusi persamaan diferensial orde fraksional yang tidak mudah ditentukan secara analitik (Das dkk., 2011). Salah satu pendekatan numerik yang digunakan adalah dengan menggunakan metode yang digunakan Diethelm (2004) yang telah dikaji dan digunakan oleh Elsadany (2015).

Pada tahun 2011, Das dan Gupta memodifikasi model predator-prey Lotka-Volterra menjadi model predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional. Tahun 2015, Elsadany dan Matouk meneliti perilaku dinamik dari model Lotka-Volterra orde fraksional dan diskretisasinya. Ghosh dkk. (2017) meneliti dinamika predator-prey Lotka-Volterra kontinu dengan adanya perlindungan prey dan makanan tambahan untuk predator. Pada penelitian ini akan dilakukan diskretisasi model predator-prey Ghosh dkk. (2017) dengan terlebih dahulu memodifikasi model ke dalam orde fraksional. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis.

## 1.2 Rumusan Masalah

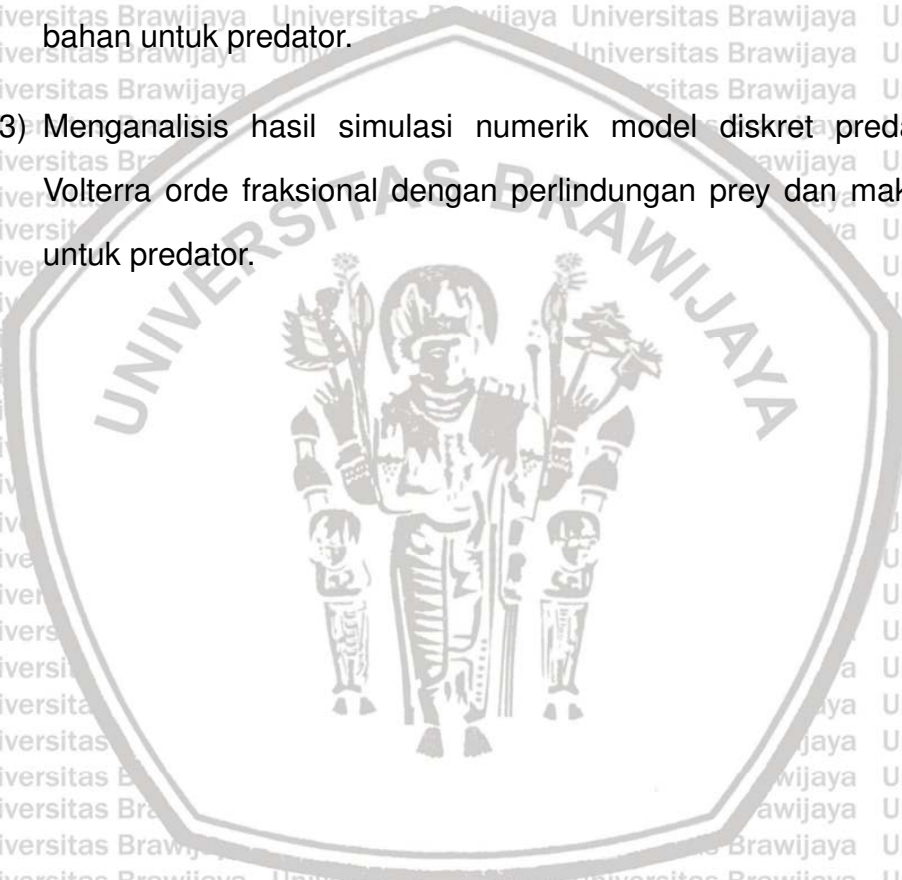
Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dari tesis ini adalah:

- (1) Bagaimana diskretisasi model predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan prey dan makanan tambahan untuk predator?
- (2) Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model diskret predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan prey dan makanan tambahan untuk predator?
- (3) Bagaimana hasil simulasi numerik model diskret predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan prey dan makanan tambahan untuk predator?

### 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari penulisan tesis ini adalah:

- (1) Mendiskretisasi model predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan prey dan makanan tambahan untuk predator.
- (2) Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model diskret predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan prey dan makanan tambahan untuk predator.
- (3) Menganalisis hasil simulasi numerik model diskret predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan prey dan makanan tambahan untuk predator.



## Bab 2

# Kajian Pustaka

### 2.1 Sistem Dinamik Diskret

Sistem dinamik merupakan sistem yang selalu berubah dan dipengaruhi oleh waktu ( $t$ ). Kondisi dari suatu sistem di masa mendatang dapat diketahui jika diketahui kondisi saat ini atau kondisi di masa lalu. Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$\vec{x}(n+1) = \vec{G}(\vec{x}(n)), \quad (2.1)$$

dengan  $\vec{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$  dan fungsi  $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_k)^T$  disebut sebagai fungsi pembangkit sistem (Elaydi, 2005). Titik  $\vec{x}^*$  dikatakan sebagai titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1) jika memenuhi  $\vec{G}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$  (Robinson, 2004).

#### 2.1.1 Sistem Dinamik Diskret Orde Satu Linear

Bentuk umum persamaan beda orde satu dengan  $n$  variabel bebas adalah

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n). \quad (2.2)$$

Pada sistem persamaan (2.2) di atas, matriks  $A = (a)_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  bernilai real dan  $\vec{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$  dengan  $T$  adalah *transpose* dari vektor. Misalkan  $\vec{x}^*(n)$  adalah titik kesetimbangan sistem persamaan (2.2), maka

$$A\vec{x}^*(n) = \vec{x}^*(n)$$

$$A\vec{x}^*(n) - \vec{x}^*(n) = 0$$

$$(A - I)\vec{x}^*(n) = 0.$$

Jika  $(A - I)$  tak singular, maka  $\vec{x}^* = 0$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem persamaan (2.2). Jika diberikan nilai awal  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ , maka sistem persamaan (2.2) memiliki solusi umum

$$\vec{x}(n) = A^n \vec{x}_0.$$

Jika matriks  $A$  dapat didiagonalisasi, maka solusi umum sistem persamaan (2.2) adalah

$$\vec{x}(n) = c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 + \dots + c_k \lambda_k^n \vec{v}_k,$$

dengan  $c_i$  adalah konstanta sembarang dan  $\vec{v}_i$  adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_i$ . Misalkan  $\lambda_i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, k$  adalah akar-akar persamaan karakteristik persamaan (2.2), maka semua solusi persamaan (2.2) konvergen menuju  $\vec{0}$  jika dan hanya jika maksimum  $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_k|\} < 1$  (Elaydi, 2005).

### 2.1.2 Sistem Dinamik Diskret Orde Satu Nonlinear

Pandang sistem dinamik diskret sistem persamaan (2.1). Jika  $G_1, G_2, \dots, G_k$  pada sistem persamaan (2.1) memuat perkalian antara variabel tak bebas, maka sistem dinamik tersebut dinamakan sistem dinamik diskret nonlinear. Untuk mengetahui sifat kestabilan sistem dinamik diskret nonlinear dilakukan analisis sistem hasil linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Proses linearisasi ini dilakukan dengan menggunakan ekspansi Taylor, yakni

$$G_1(\vec{x}(n)) = G_1(\vec{x}^*) + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) + \eta_1(\vec{x}(n))$$

$$G_2(\vec{x}(n)) = G_2(\vec{x}^*) + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) + \eta_2(\vec{x}(n))$$

$$\vdots$$

$$G_k(\vec{x}(n)) = G_k(\vec{x}^*) + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*) + \eta_k(\vec{x}(n))$$

dengan  $\eta_1(\vec{x}(n)), \eta_2(\vec{x}(n)), \dots, \eta_k(\vec{x}(n))$  adalah suku sisa yang memenuhi

$$\lim_{\vec{x}(n) \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_j(\vec{x}(n))}{\|\vec{x}(n) - \vec{x}^*\|} = 0$$

untuk setiap  $j = 1, 2, \dots, k$ . Oleh karena itu,  $\eta_j(\vec{x}(n))$  dapat diabaikan. Dengan mengingat bahwa  $\vec{x}^*$  adalah titik kesetimbangan, sistem persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai

$$x_1(n+1) = x_1^* + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*)$$

$$x_2(n+1) = x_2^* + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*)$$

$\vdots$

$$x_k(n+1) = x_k^* + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*)$$

atau

$$x_1(n+1) - x_1^* = \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*)$$

$$x_2(n+1) - x_2^* = \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*)$$

$\vdots$

$$x_k(n+1) - x_k^* = \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k}(x_k(n) - x_k^*)$$

(2.3)

Dengan memisalkan  $u_j = x_j(n) - x_j^*$  untuk setiap  $j = 1, 2, \dots, k$ , sistem persamaan

(2.3) menjadi

$$\begin{aligned} u_1(n+1) &= \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(n) + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(n) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(n) \\ u_2(n+1) &= \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(n) + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(n) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(n) \\ &\dots \\ u_k(n+1) &= \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(n) + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(n) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(n). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Jika dibuat dalam bentuk matriks, maka sistem persamaan (2.4) akan berbentuk

$$\vec{u}(n+1) = J\vec{u}(n) \tag{2.5}$$

dengan

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

dan  $u_j(n) = x_j(n) - x_j^*$  untuk setiap  $j = 1, 2, \dots, k$  (Elaydi, 2005). Sistem persamaan

(2.5) berbentuk sistem persamaan diskret linear yang serupa dengan sistem persamaan (2.2) sehingga solusi umumnya berbentuk solusi sistem persamaan diskret linear.

### 2.1.3 Kestabilan Sistem Dinamik Diskret

Pandang persamaan beda

$$x(n+1) = F(x(n), x(n-1), \dots, x(n-k)), \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) dapat dinyatakan dalam vektor sebagai persamaan

$$Y(n+1) = G(Y(n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

dimana

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y(n)^0 \\ y(n)^1 \\ \vdots \\ y(n)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-k) \end{pmatrix}$$

dan

$$Y(n+1)^0 = F(y(n)^0, y(n)^1, \dots, y(n)^k)$$

$$Y(n+1)^1 = y(n)^0$$

$$Y(n+1)^2 = y(n)^1$$

$\vdots$

$$Y(n+1)^k = y(n)^{k-1}$$

sehingga

$$G(Y(n)) = \begin{pmatrix} F(y(n)^0, y(n)^1, \dots, y(n)^k) \\ y(n)^0 \\ y(n)^1 \\ \vdots \\ y(n)^{k-1} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan pada definisi titik kesetimbangan sistem dinamik diskret, titik  $x^*$  disebut sebagai titik kesetimbangan jika

$$Y(n+1)^0 = F(y(n)^0, y(n)^1, \dots, y(n)^k) = F(x(n), x(n-1), \dots, x(n-k)) = x^*,$$

$$Y(n+1)^1 = y(n)^0 = x^*,$$

$$Y(n+1)^2 = y(n)^1 = x^*,$$

$$Y(n+1)^k = y(n)^{k-1} = x^*.$$

Sebuah titik kesetimbangan persamaan (2.6) adalah titik  $x^* \in \mathbb{R}$ , sehingga  $x^* = F(x^*, x^*, \dots, x^*)$  dengan  $x^*$  adalah titik kesetimbangan dari fungsi  $F(x(n), x(n-1), \dots, x(n-k))$ . Dapat dikatakan pula bahwa titik kesetimbangan persamaan (2.6) adalah berupa  $\vec{Y}^* \in \mathbb{R}^{k+1}$  sehingga  $\vec{Y}^* = G(\vec{Y}^*)$ . Disimpulkan bahwa  $x^*$  adalah titik kesetimbangan persamaan (2.6) jika dan hanya jika

$$\vec{Y}^* = (x^*, x^*, \dots, x^*)^T$$

adalah titik kesetimbangan persamaan (2.7). Jika persamaan (2.6) berbentuk linear

$$x(n+1) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_kx(n-k), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

maka dengan transformasi seperti di atas, persamaan (2.8) akan menjadi

$$Y(n+1) = AY(n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

Matriks  $A$  pada persamaan (2.9) adalah sebuah matriks berukuran  $(k+1) \times (k+1)$  dimana

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$



dan persamaan karakteristik matriks  $A$  adalah

$$\lambda^{k+1} + b_0\lambda^k + \dots + b_k = 0$$

(Kocic dan Ladas, 1993).

**Teorema 1.** (Kocic dan Ladas, 1993.) *Perhatikan persamaan beda nonlinear berikut.*

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n) + F(\vec{x}(n)), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.11)$$

dengan  $A = (a)_{ij}$  adalah matriks konstan berukuran  $k \times k$ ,  $\vec{x}(n) \in \mathbb{R}^k$ , dan  $F \in C[\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k]$  sedemikian sehingga

$$F(0) = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{F(u)}{\|u\|} = 0. \quad (2.12)$$

Sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (2.11) dapat ditentukan dari pernyataan-pernyataan berikut.

(1) Jika seluruh nilai eigen matriks  $A$ , dalam hal ini  $\lambda$ , berada dalam lingkaran terbuka  $|\lambda| < 1$ , maka titik kesetimbangan persamaan linear

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

bersifat stabil asimtotik lokal. Dengan demikian, titik kesetimbangan persamaan (2.11) juga bersifat stabil asimtotik lokal.

(2) Jika terdapat minimal satu nilai eigen dari matriks  $A$  yang memiliki nilai modulus lebih besar dari satu maka titik kesetimbangan persamaan (2.11) tidak stabil. Hal ini menyebabkan beberapa hal berikut.

(a) Titik kesetimbangan persamaan (2.11) disebut titik kesetimbangan nonhiperbolik jika seluruh mutlak nilai eigen memenuhi  $|\lambda| = 1$ .

(b) Titik kesetimbangan persamaan (2.11) disebut titik kesetimbangan sumber jika seluruh mutlak nilai eigen memiliki nilai lebih besar dari 1.

(c) Titik kesetimbangan persamaan (2.11) disebut titik kesetimbangan sadel atau pelana jika memiliki beberapa mutlak nilai eigen lebih besar dari 1 dan beberapa lainnya kurang dari 1.

(3) Jika terdapat satu nilai eigen matriks  $A$  yang mempunyai nilai modulus satu dan nilai eigen lainnya berada pada lingkaran tertutup  $|\lambda| < 1$  maka kestabilan titik kesetimbangan (2.11) tidak dapat ditentukan hanya dengan menggunakan kriteria kestabilan titik kesetimbangan persamaan (2.13).

Teorema 1 berhubungan dengan kestabilan dari titik kesetimbangan pada persamaan (2.11). Jika persamaan (2.12) terpenuhi maka persamaan (2.13) disebut sebagai persamaan hasil linearisasi yang berkaitan dengan persamaan (2.11).

Persamaan hasil linearisasi menentukan kestabilan lokal dari persamaan nonlinear yang terdapat pada nomor (1) dan (2) Teorema 1.

**Teorema 2.** (Elaydi, 2005.) Misalkan  $J$  pada persamaan (2.5) adalah matriks Jacobi berukuran  $2 \times 2$  dengan persamaan karakteristik berbentuk  $\lambda^2 - \text{Trace}(J)\lambda + \text{Determinan}(J) = 0$ . Syarat cukup dan syarat perlu agar nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi tersebut memiliki nilai mutlak kurang dari 1 adalah kondisi:

$$|\text{Trace}(J)| < 1 + \text{Determinan}(J) < 2. \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) menghasilkan tiga bentuk berikut yang selanjutnya akan disebut sebagai Jury Condition.

(1)  $1 - \text{Trace}(J) + \text{Determinan}(J) > 0,$

(2)  $1 + \text{Trace}(J) + \text{Determinan}(J) > 0,$  dan

(3)  $\text{Determinan}(J) < 1.$

## 2.2 Sistem Dinamik Orde Fraksional

### 2.2.1 Kalkulus Fraksional

Kalkulus memiliki dua cabang utama yaitu kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Kalkulus diferensial mempunyai aplikasi dalam semua bidang kuantitatif. Kalkulus integral dikembangkan menyusul dengan adanya perkembangan masalah diferensial. Hal ini mengakibatkan matematikawan harus berpikir bagaimana menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi diferensial.

Orde turunan dan integral dari suatu fungsi pada umumnya senantiasa berupa bilangan asli. Pada perkembangan ilmu matematika muncul kalkulus fraksional yang merupakan cabang dari kalkulus yang menggabungkan konsep turunan dan integral dari suatu fungsi dengan orde bukan bilangan asli, yaitu orde fraksional. Orde fraksional meliputi bilangan rasional positif. Dengan demikian kalkulus fraksional merupakan salah satu cara untuk menentukan penyelesaian dari turunan dan integral dengan orde fraksional (Kimeu, 2009).

Kalkulus fraksional, sering disebut dengan differintegral, muncul pada tahun 1695 atas pemikiran G. F. A. de l'Hospital dan G. W. Leibniz yang didorong rasa ingin tahunya tentang turunan orde setengah. Gagasan konsep ini adalah bagaimana menentukan turunan dan integral yang berorde suatu bilangan pecahan. Turunan dan integral tersebut berturut-turut dinamakan sebagai turunan fraksional dan integral fraksional. Persamaan diferensial yang memuat turunan fraksional disebut sebagai persamaan diferensial orde fraksional. Tahun 1819, Lacroix menjadi ilmuwan pertama yang mendefinisikan turunan fraksional (Kimeu, 2009). Misalkan  $y = x^m$  dengan  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Lacroix menotasikan turunan ke- $n$  dari fungsi  $y$  sebagai

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \quad (2.15)$$

dengan  $m \geq n$  dan  $n \in \mathbb{Q}$ .

Salah satu fungsi penting yang digunakan dalam kalkulus fraksional adalah

fungsi Gamma Euler, yang didefinisikan

$$\Gamma(v) = (v-1)! \tag{2.16}$$

dengan  $v \in \mathbb{N}$  (Podlubny, 1999). Apabila  $v \in \mathbb{R}^+$ , maka fungsi Gamma Euler didefinisikan

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t} dt \tag{2.17}$$

dimana  $t^{v-1} = e^{(v-1)\log(t)}$ . Integral pada persamaan (2.17) konvergen untuk setiap  $v \in \mathbb{C}$  dan bagian  $\text{Re}(v) > 0$ . Fungsi Gamma Euler memiliki sifat dasar

$$\Gamma(v+1) = v\Gamma(v) \tag{2.18}$$

dengan  $v \in \mathbb{R}^+$  (Kilbas dkk., 2006). Dengan menggunakan simbol Gamma ( $\Gamma$ ), persamaan Lacroix pada persamaan (2.15) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{2.19}$$

dimana  $m \in \mathbb{N}$  dan  $n \in \mathbb{Q}$ .

Petras (2011) mendefinisikan tiga pendekatan yang digunakan untuk mendefinisikan kalkulus fraksional, yakni Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov. Berikut akan dibahas pendekatan Riemann-Liouville dan Caputo.

### 2.2.2 Turunan Reimann-Liouville

Turunan Fraksional Reimann-Liouville dengan orde  $n$  berbentuk

$${}^{RL}D_t^n u(t) = \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{n-m+1}} d\tau \tag{2.20}$$



dengan  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(m-1) < n < m$ , dan  $a, t$  adalah operasi limit  ${}_a D_t^n u(t)$ . Contoh turunan fraksional  $u(t) = t^p$  dengan  $p > 0$  dan  $0 < n < 1$  adalah

$$\begin{aligned}
 {}_a^{RL} D_t^n t^p &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{\tau^p}{(t-\tau)^{n+m+1}} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \tau^p (t-\tau)^{m-n-1} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \tau^p t^{m-n-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{m-n-1} d\tau. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Dengan memisalkan  $\lambda = \frac{\tau}{t}$  pada persamaan (2.21), diperoleh

$$\begin{aligned}
 {}_a^{RL} D_t^n t^p &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} (t^{m-n+p}) \int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{m-n-1} d\lambda \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} (t^{m-n+p}) B(p+1, m-n) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(m-n)}{\Gamma(p+1+m-n)} \frac{d^m}{dt^m} (t^{m-n+p}) \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+m-n)} \frac{\Gamma(m-n+p+1)}{\Gamma(p-n+1)} t^{p-n} \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} t^{p-n}
 \end{aligned}$$

dengan  $B(p+1, m-n)$  adalah fungsi Beta yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
 B(p+1, m-n) &= \int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{m-n-1} d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(m-n)}{\Gamma(p+1+m-n)}
 \end{aligned}$$

dan

$$\frac{d^m}{dt^m} t^{m-n+p} = \frac{\Gamma(m-n+p+1)}{\Gamma(m-n+p-m+1)} t^{p-n}$$

untuk setiap  $p \in \mathbb{R}$  dan  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2.2.3 Turunan Caputo

Turunan Fraksional Caputo berbentuk

$${}^C D_t^n u(t) = \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^t \frac{u^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{n-m+1}} d\tau \quad (2.22)$$

dengan  $(m-1) < n < m$ . Contoh turunan fraksional  $u(t) = t^p$  dengan  $p > 0$  dan  $0 < n < 1$  adalah

$$\begin{aligned} {}^C D_t^n t^p &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_0^t \frac{(\tau^p)^{(m)}}{(t-\tau)^{n-m+1}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} \tau^{p-n} (t-\tau)^{m-n-1} d\tau. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dengan melakukan substitusi  $\tau = \lambda t$  pada persamaan (2.23), diperoleh

$$\begin{aligned} {}^C D_t^n t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-n)\Gamma(p-m+1)} \int_0^1 (\lambda t)^{p-m} ((1-\lambda)t)^{m-n-1} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-n)\Gamma(p-m+1)} t^{p-n} \int_0^1 \lambda^{p-m} (1-\lambda)^{m-n-1} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-n)\Gamma(p-m+1)} t^{p-n} B(p-m+1, m-n) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-n)\Gamma(p-m+1)} t^{p-n} \frac{\Gamma(p-m+1)\Gamma(m-n)}{\Gamma(p-n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} t^{p-n} \end{aligned}$$

dengan  $B(p+1, m-n)$  adalah fungsi Beta (dengan bentuk yang sama pada turunan Riemann-Liouville) dan

$$\frac{d^m}{d\tau^m} (\tau^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} \tau^{(p-m)}$$

untuk setiap  $p \in \mathbb{R}$  dan  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.3 Diskretisasi Persamaan Diferensial Orde Fraksional

Pandang persamaan diferensial orde fraksional

$$D^n y(t) = f(t, y(t)) \tag{2.24}$$

dengan nilai awal  $D^k y(0) = y_0^{(k)}$  dimana  $k = 0, 1, \dots, m - 1$  dan  $m = \lceil n \rceil$  (pembulatan ke atas dengan  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , dan  $m > n$ ) (Diethelm, 2004). Jika  $f(t, y(t))$  pada persamaan (2.24) kontinu, maka masalah nilai awalnya sama dengan persamaan integral nonlinear Volterra bentuk kedua berikut.

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \tag{2.25}$$

(Li dan Ma, 2013).

Jika  $f(\tau, y(\tau))$  dengan  $\tau \in [0, t)$  adalah fungsi konstan, yaitu  $f(\tau, y(\tau)) = \bar{f}$ , maka persamaan (2.25) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \frac{1}{\Gamma(n)} \bar{f} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} d\tau \\ &= y(0) + \frac{1}{\Gamma(n)} \bar{f} \left( -\frac{1}{n} (t - \tau)^n \Big|_0^t \right) \\ &= y(0) + \frac{\bar{f}}{\Gamma(n)} \left( \frac{1}{n} t^n \right) \\ &= y(0) + \frac{\bar{f} t^n}{n \Gamma(n)} \\ &= y_0 + \frac{\bar{f} t^n}{n \Gamma(n)}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Selanjutnya akan dibahas diskretisasi persamaan (2.24). Persamaan (2.24) dapat ditulis dalam bentuk

$$D^n y(t) = f\left(\left[\frac{t}{s}\right]s, y\left(\left[\frac{t}{s}\right]s\right)\right). \tag{2.27}$$

Misalkan  $t \in [0, s)$  maka  $\frac{t}{s} \in [0, 1)$ , sehingga persamaan (2.27) dapat dibentuk menjadi

$$D^n y(t) = f(0, y_0). \quad (2.28)$$

Solusi dari persamaan (2.28) berdasarkan persamaan (2.26) adalah

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(0, y_0) d\tau \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(n)} f(0, y_0) \left( -\frac{1}{n} (t-\tau)^n \Big|_0^t \right) \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(n)} f(0, y_0) \left( -\frac{1}{n} (t-t)^n + \frac{1}{n} (t-0)^n \right) \\ &= y_0 + \frac{t^n}{n\Gamma(n)} (f(0, y_0)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Misalkan  $t \in [s, 2s)$  maka  $\frac{t}{s} \in [1, 2)$ , sehingga persamaan (2.27) menjadi

$$D^n y(t) = f(s, y_1). \quad (2.30)$$

Solusi dari persamaan (2.30) berdasarkan persamaan (2.26) adalah

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1 + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_s^t (t-\tau)^{n-1} f(1, y_1) d\tau \\ &= y_1 + \frac{1}{\Gamma(n)} f(1, y_1) \left( -\frac{1}{n} (t-\tau)^n \Big|_s^t \right) \\ &= y_1 + \frac{1}{\Gamma(n)} f(1, y_1) \left( -\frac{1}{n} (t-t)^n + \frac{1}{n} (t-s)^n \right) \\ &= y_1 + \frac{(t-s)^n}{n\Gamma(n)} (f(1, y_1)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Misalkan  $t \in [2s, 3s)$  maka  $\frac{t}{s} \in [2, 3)$ , sehingga persamaan (2.27) menjadi

$$D^n y(t) = f(2s, y_2). \quad (2.32)$$



Solusi dari persamaan (2.32) berdasarkan persamaan (2.26) adalah

$$\begin{aligned}
 y_3(t) &= y_2 + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{2s}^t (t-\tau)^{n-1} f(2, y_2) d\tau \\
 &= y_2 + \frac{1}{\Gamma(n)} f(2, y_2) \left( -\frac{1}{n} (t-\tau)^n \Big|_{2s}^t \right) \\
 &= y_2 + \frac{1}{\Gamma(n)} f(2, y_2) \left( -\frac{1}{n} (t-t)^n + \frac{1}{n} (t-2s)^n \right) \\
 &= y_2 + \frac{(t-2s)^n}{n\Gamma(n)} (f(2, y_2)).
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Secara umum, proses diskretisasi pada interval  $t \in (ws, (w+1)s)$  adalah

$$\begin{aligned}
 y_{w+1}(t) &= y_w + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{ws}^t (t-\tau)^{n-1} f(w, y_w) d\tau \\
 &= y_w + \frac{1}{\Gamma(n)} f(w, y_w) \left( -\frac{1}{n} (t-\tau)^n \Big|_{ws}^t \right) \\
 &= y_w + \frac{1}{\Gamma(n)} f(w, y_w) \left( -\frac{1}{n} (t-t)^n + \frac{1}{n} (t-ws)^n \right) \\
 &= y_w + \frac{(t-ws)^n}{n\Gamma(n)} (f(w, y_w))
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

sehingga untuk  $t \rightarrow (w+1)s$  akan didapat

$$y_{w+1} = y_w + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} (f(w, y_w)). \tag{2.35}$$

Jika  $n \rightarrow 1$ , maka persamaan (2.35) akan menjadi bentuk Euler.

## 2.4 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya yang terbatas. Semakin padat populasinya maka semakin lemah pertumbuhan populasinya kemudian akan berhenti pada populasi tertentu. Ukuran populasi yang menghentikan pertumbuhan tersebut dikenal dengan istilah *carrying capacity* atau daya dukung lingkungan. Daya dukung lingkungan adalah jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya (Molles, 2002). Laju pertum-

jumlah populasi bergantung pada kepadatan populasi sehingga laju pertumbuhan dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{2.36}$$

Misalkan  $K$  adalah daya dukung lingkungan. Jika terdapat individu sejumlah  $x$ , maka lingkungan tersebut masih mampu mendukung  $(K - x)$  individu untuk bertahan hidup. Oleh karena itu, proporsi lingkungan yang masih dapat ditempati adalah sebesar

$$\frac{K - x}{K} = 1 - \frac{x}{K} \tag{2.37}$$

yang sebanding dengan pertumbuhan per kapita. Oleh karena itu, laju pertumbuhan pada model logistik didefinisikan sebagai

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \rightarrow \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{2.38}$$

dengan  $r, K > 0$ . Parameter  $r$  menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi (Boyce dan DiPrima, 2012).

## 2.5 Model Predator-Prey Lotka-Volterra

Model sederhana dari rantai makanan adalah model predator-prey. Dasar model ini adalah model Lotka-Volterra yang terdiri atas dua populasi. Populasi pertama memberi pengaruh positif terhadap populasi kedua dan populasi kedua memberi pengaruh negatif terhadap populasi pertama. Sistem persamaan tersebut dapat dimodelkan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(r - px) - e_1xy, \\ \frac{dy}{dt} &= y(s - qy) + e_2xy, \end{aligned} \tag{2.39}$$

dengan semua parameter bernilai positif. Variabel  $x$  dan  $y$  masing-masing menyatakan populasi prey dan populasi predator. Laju pertumbuhan prey dan laju pertum-

bahan predator masing-masing dinyatakan dalam parameter  $r$  dan  $s$ . Parameter  $p$  dan  $q$  adalah parameter interaksi antar populasi prey dan parameter interaksi antar populasi predator. Parameter  $e_1$  dan  $e_2$  adalah parameter pemangsaan predator terhadap prey (Zhuang dan Wen, 2011). Perhatikan bahwa tanpa adanya interaksi, prey dan predator pada sistem persamaan (2.39) akan tumbuh secara logistik.

## 2.6 Fungsi Respon

Salah satu komponen penting hubungan antara predator dan prey adalah laju per kapita predator memangsa prey atau yang disebut juga fungsi respon (Skalski dan Gilliam, 2001). Holling (1959) menggambarkan fungsi respon sebagai laju pemangsaan prey oleh predator per kapita dan berupa fungsi dari banyaknya populasi prey. Hal ini berarti laju konsumsi dari suatu individu predator bergantung pada kepadatan populasi prey sehingga fungsi respon yang bergantung pada prey tersebut dinamakan Holling Tipe I dengan bentuk

$$p(x) = ex \tag{2.40}$$

dan Holling Tipe II (Model Michaelis-Menten) berbentuk

$$p(x) = \frac{sx}{c+x} \tag{2.41}$$

dimana  $e$ ,  $s$ ,  $c$  bernilai positif dan masing-masing menyatakan laju penangkapan prey, laju pertumbuhan maksimum predator, dan konstanta Michaelis-Menten.

## 2.7 Perlindungan pada Prey

Untuk menghindari kepunahan prey karena proses predasi dari predator secara terus menerus, diperlukan faktor perlindungan pada prey. Efek perlindungan pada prey mampu mengurangi kemungkinan prey untuk dimangsa sehingga terhindar dari kepunahan (Pal dan Samanta, 2010).

Misalkan  $m_1x$  menyatakan laju prey yang berlindung maka laju prey yang dimangsa oleh predator adalah  $x(1 - m_1)$  dengan  $m_1 \in [0, 1)$ . Jika faktor perlindungan prey diperhitungkan, maka sistem persamaan Lotka-Volterra (2.39) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = x(r - px) - e_1(1 - m_1)xy, \tag{2.42}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(s - qy) + e_2(1 - m_1)xy$$

(Zhuang dan Wen, 2011).

## 2.8 Makanan Tambahan

Sen dkk. (2015) mengkaji model predator-prey dengan adanya makanan tambahan dan pemanenan pada predator yang ditunjukkan pada persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r_1x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{m_1 + a_1\eta A + x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{sy(x + \eta A)}{m_1 + a_1\eta A + x} - \beta y - \rho. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Nilai nutrisi dari makanan tambahan berperan penting dalam pengendalian sistem predator-prey. Jika nilai nutrisi dan kuantitas makanan tambahan tinggi, maka laju pemangsaan predator terhadap prey lebih rendah sehingga kemungkinan terjadi kepunahan pada prey lebih kecil. Sistem persamaan (2.43) merupakan model predator-prey Lotka-Volterra yang dimodifikasi dengan adanya makanan tambahan serta pemanenan pada predator.

Laju pertumbuhan prey mengikuti model logistik dengan  $r_1$  adalah pertumbuhan intrinsik prey dan kapasitas daya dukung lingkungan sebesar  $K$ . Parameter  $b$  dan  $m_1$  berturut-turut menyatakan laju pemangsaan prey oleh predator dan proteksi lingkungan. Bagian  $a_1\eta A$  merupakan makanan tambahan bagi predator dimana  $a_1$ ,  $\eta$ ,  $A$  berturut-turut menyatakan waktu untuk memakan, nilai nutrisi, dan populasi dari makanan tambahan. Parameter  $s$  menyatakan pertumbuhan instrinsik predator. Karena predator memiliki nilai ekonomis yang tinggi, dilakukan pemanenan sebesar

$\rho$ . Adanya kompetisi antar predator untuk memperoleh prey mengakibatkan adanya kematian alami predator yang dinyatakan dalam parameter  $\beta$ .

## 2.9 Model Predator-Prey Lotka-Volterra dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan

Ghosh dkk. (2017) menganalisis dinamika predator-prey dengan perlindungan pada prey dan makanan tambahan yang dimulai dengan mengkaji fungsi respon Holling type II yang berbentuk

$$f(N) = \frac{cN}{a+N} \quad (2.44)$$

dimana  $N$  adalah jumlah populasi prey,  $c$  menyatakan laju predasi terhadap prey, dan  $a$  adalah konstanta setengah saturasi. Jika ditambahkan konstanta  $h_1$  dan  $e_1$  yang masing-masing menyatakan waktu yang dibutuhkan predator untuk memakan satu buah prey dan kemampuan predator untuk mendapatkan keberadaan prey, maka modifikasi fungsi respon Holling tipe II persamaan (2.44) akan berbentuk

$$f(N) = \frac{ce_1N}{a+h_1e_1N}. \quad (2.45)$$

Perlindungan pada prey adalah suatu area yang ditempati oleh prey yang berpotensi meminimalisir laju predasi predator terhadap prey. Kehadiran perlindungan pada prey ini dapat menyebabkan kepunahan predator pada sistem predator-prey. Jika dimisalkan parameter  $c'$  sebagai perlindungan prey dan laju predasi menjadi  $c(1-c')$  dengan  $c' \in [0, 1)$  maka fungsi respon persamaan (2.45) akan menjadi

$$f(N) = \frac{c(1-c')e_1N}{a+h_1e_1N} \quad (2.46)$$

Untuk menjaga populasi predator dikarenakan adanya perlindungan pada prey, Ghosh menambahkan tambahan makanan pada sistem persamaannya.

Dengan adanya tambahan makanan tersebut, persamaan (2.46) akan berbentuk

$$f(N) = \frac{c(1-c')e_1N}{a+h_2e_2A+h_1e_1N} \quad (2.47)$$

dimana parameter  $h_2$  dan  $e_2$  masing-masing merepresentasikan waktu yang dibutuhkan predator untuk memakan makanan tambahan ( $A$ ) dan kemampuan predator untuk mendeteksi makanan tambahan. Model predator-prey dengan laju pertumbuhan logistik dengan perlindungan pada prey dan makanan tambahan Ghosh dkk. (2017) berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dT} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{c(1-c')e_1NP}{a+h_2e_2A+h_1e_1N}, \\ \frac{dP}{dT} &= \frac{b[(1-c')e_1N+e_2A]P}{a+h_2e_2A+h_1e_1N} - mP, \end{aligned} \quad (2.48)$$

dengan  $b$  merepresentasikan laju konversi biomassa prey menjadi laju reproduksi predator dan  $m$  adalah laju kematian predator. Parameter  $K$  menyatakan daya dukung lingkungan. Dengan mendefinisikan  $c_1 = \frac{c}{h_1}$ ,  $\alpha = \frac{h_2}{h_1}$ ,  $\eta = \frac{e_2}{e_1}$ ,  $b_1 = \frac{b}{h_1}$ , dan  $a_1 = \frac{a}{e_1h_1}$ , sistem persamaan (2.48) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dT} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{c_1(1-c')NP}{a_1+\alpha\eta A+N}, \\ \frac{dP}{dT} &= \frac{b_1[(1-c')N+\eta A]P}{a_1+\alpha\eta A+N} - mP. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Untuk mengurangi jumlah parameter, digunakan penyekalaan dengan  $x = \frac{N}{a_1}$ ,  $y = \frac{c_1P}{ra_1}$ ,  $t = rT$ ,  $\gamma = \frac{K}{a_1}$ ,  $\xi = \frac{\eta A}{a_1}$ ,  $\beta = \frac{b_1}{r}$ , dan  $\delta = \frac{m}{r}$  sehingga persamaan (2.49) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) - \frac{(1-c')xy}{1+\alpha\xi+x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\beta[(1-c')x+\xi]y}{1+\alpha\xi+x} - \delta y. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Parameter  $\alpha$  dan  $\xi$  berturut-turut merepresentasikan kualitas dan kuantitas dari makanan tambahan yang disediakan untuk predator.

# Bab 3 Pembahasan

## 3.1 Konstruksi dan Diskretisasi Model Predator-Prey Lotka-Volterra Orde Fraksional dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan

Sistem persamaan (2.50) berbentuk turunan  $dx/dt$  dan  $dy/dt$ . Sistem persamaan  $dx/dt$  dan  $dy/dt$  dimodifikasi, agar memuat informasi tentang fungsi pada titik-titik sebelumnya, menjadi turunan orde fraksional berbentuk

$$\begin{aligned} D_t^n x &= x(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x(t)y(t)}{1 + \alpha\xi + x(t)}, \\ D_t^n y &= \frac{\beta((1-c')x(t) + \xi)y(t)}{1 + \alpha\xi + x(t)} - \delta y(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan  $n$  menyatakan orde fraksional dimana  $n \in (0, 1]$ .

Proses diskretisasi sistem persamaan (3.1) dilakukan sebagai berikut. Asumsikan nilai awal persamaan (3.1) adalah  $x(0) = x_0$  dan  $y(0) = y_0$ . Proses diskretisasi sistem persamaan (3.1) dilakukan dengan menyatakan sistem persamaan (3.1) ke dalam bentuk

$$\begin{aligned} D^n x(t) &= x((t/s)s) \left( 1 - \frac{x((t/s)s)}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x((t/s)s)y((t/s)s)}{1 + \alpha\xi + x((t/s)s)}, \\ D^n y(t) &= \frac{\beta((1-c')x((t/s)s) + \xi)y((t/s)s)}{1 + \alpha\xi + x((t/s)s)} - \delta y((t/s)s). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Misalkan  $t \in [0, s)$  maka  $\frac{t}{s} \in [0, 1)$ , sehingga sistem persamaan (3.2) menjadi

$$\begin{aligned} D^n x(t) &= x_0 \left( 1 - \frac{x_0}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_0 y_0}{1 + \alpha \xi + x_0}, \\ D^n y(t) &= \frac{\beta((1-c')x_0 + \xi)y_0}{1 + \alpha \xi + x_0} - \delta y_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Jika dimisalkan  $J_s^n \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_t^s (t-\tau)^{n-1} d\tau$ ,  $n > 0$ , maka solusi sistem persamaan (3.3) adalah

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + J_s^n \left( x_0 \left( 1 - \frac{x_0}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_0 y_0}{1 + \alpha \xi + x_0} \right), \\ y_1(t) &= y_0 + J_s^n \left( \frac{\beta((1-c')x_0 + \xi)y_0}{1 + \alpha \xi + x_0} - \delta y_0 \right), \end{aligned}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \frac{t^n}{n\Gamma(n)} \left( x_0 \left( 1 - \frac{x_0}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_0 y_0}{1 + \alpha \xi + x_0} \right), \\ y_1(t) &= y_0 + \frac{t^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta((1-c')x_0 + \xi)y_0}{1 + \alpha \xi + x_0} - \delta y_0 \right). \end{aligned}$$

Untuk  $t \in [s, 2s)$  atau  $\frac{t}{s} \in [1, 2)$ , sistem persamaan (3.2) akan menjadi

$$\begin{aligned} D^n x(t) &= x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_1 y_1}{1 + \alpha \xi + x_1}, \\ D^n y(t) &= \frac{\beta((1-c')x_1 + \xi)y_1}{1 + \alpha \xi + x_1} - \delta y_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sistem persamaan (3.4) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(s) + J_s^n \left( x_1(s) \left( 1 - \frac{x_1(s)}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_1(s)y_1(s)}{1 + \alpha \xi + x_1(s)} \right) \\ &= x_1(s) + \frac{(t-s)^n}{n\Gamma(n)} \left( x_1(s) \left( 1 - \frac{x_1(s)}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_1(s)y_1(s)}{1 + \alpha \xi + x_1(s)} \right), \\ y_2(t) &= y_1(s) + J_s^n \left( \frac{\beta((1-c')x_1(s) + \xi)y_1(s)}{1 + \alpha \xi + x_1(s)} - \delta y_1(s) \right) \\ &= y_1(s) + \frac{(t-s)^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta((1-c')x_1(s) + \xi)y_1(s)}{1 + \alpha \xi + x_1(s)} - \delta y_1(s) \right). \end{aligned}$$



Secara umum, proses diskritisasi pada interval  $t \in (ms, (m+1)s)$  adalah

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t) &= x_m(ms) + \frac{(t-ms)^n}{n\Gamma(n)} \left( x_m(ms) \left( 1 - \frac{x_m(ms)}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_m(ms)y_m(ms)}{1+\alpha\xi+x_m(ms)} \right), \\ y_{m+1}(t) &= y_m(ms) + \frac{(t-ms)^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta((1-c')x_m(ms)+\xi)y_m(ms)}{1+\alpha\xi+x_m(ms)} - \delta y_m(ms) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Untuk  $t \rightarrow (m+1)s$  sistem persamaan (3.5) berbentuk

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t) &= x_m + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( x_m \left( 1 - \frac{x_m}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x_my_m}{1+\alpha\xi+x_m} \right), \\ y_{m+1}(t) &= y_m + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta((1-c')x_m+\xi)y_m}{1+\alpha\xi+x_m} - \delta y_m \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Jika  $n \rightarrow 1$  maka sistem persamaan (3.6) akan menjadi bentuk Euler.

### 3.2 Titik Kesetimbangan

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan, titik  $x^*$  dan  $y^*$  dikatakan titik kesetimbangan persamaan (3.6) jika memenuhi kondisi

$$\begin{aligned} x^* &= x^* + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( x^* \left( 1 - \frac{x^*}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x^*y^*}{1+\alpha\xi+x^*} \right), \\ y^* &= y^* + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta((1-c')x^*+\xi)y^*}{1+\alpha\xi+x^*} - \delta y^* \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sistem persamaan (3.7) dapat disederhanakan ke dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( x^* \left( 1 - \frac{x^*}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')x^*y^*}{1+\alpha\xi+x^*} \right) &= 0, \\ \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta((1-c')x^*+\xi)y^*}{1+\alpha\xi+x^*} - \delta y^* \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pada sistem persamaan (3.8), perhatikan bahwa  $\frac{s^n}{n\Gamma(n)} > 0$ , sehingga berlaku

$$x^* \left[ \left( 1 - \frac{x^*}{\gamma} \right) - \frac{(1-c')y^*}{1+\alpha\xi+x^*} \right] = 0, \quad (3.9)$$

$$y^* \left[ \frac{\beta[(1-c')x^*+\xi]}{1+\alpha\xi+x^*} - \delta \right] = 0. \quad (3.10)$$

Persamaan (3.9) menghasilkan

$$x^* = 0 \text{ atau} \tag{3.11}$$

$$\left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) - \frac{(1-c')y^*}{1 + \alpha\xi + x^*} = 0, \tag{3.12}$$

dan dari persamaan (3.10) diperoleh

$$y^* = 0 \text{ atau} \tag{3.13}$$

$$\frac{\beta[(1-c')x^* + \xi]}{1 + \alpha\xi + x^*} - \delta = 0. \tag{3.14}$$

Dari empat kombinasi di atas, yakni persamaan (3.11) sampai dengan persamaan (3.14), dihasilkan tiga titik kesetimbangan sebagai berikut.

- (1) Titik Kesetimbangan  $E_0 = (0, 0)$ .

Titik kesetimbangan  $E_0$  diperoleh dari persamaan (3.11) dan persamaan (3.13). Titik kesetimbangan ini merepresentasikan terjadinya kepunahan baik pada populasi prey maupun predator.

- (2) Titik Kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$ .

Titik kesetimbangan  $E_1$  dihasilkan dari hasil substitusi persamaan (3.13) ke dalam persamaan (3.12) sehingga diperoleh

$$\left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) - \frac{(1-c')x^*y^*}{1 + \alpha\xi + x^*} = 0$$

Karena  $y^* = 0$  maka  $1 - \frac{x^*}{\gamma} = 0$   
 $x^* = \gamma$

Titik kesetimbangan  $E_1$  disebut sebagai titik kesetimbangan kepunahan predator. Populasi prey yang mampu bertahan hidup adalah sebesar  $\gamma$ .

(3) Titik Kesetimbangan  $E_2 = (x^*, y^*)$ .

Titik kesetimbangan  $E_2$ , dengan

$$x^* = \frac{\delta + \alpha\delta\xi - \beta\xi}{\beta(1-c') - \delta} \quad \text{dan} \quad y^* = \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{1 + \alpha\xi + x^*}{1 - c'}\right),$$

diperoleh dari kombinasi persamaan (3.12) dan persamaan (3.14) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) - \frac{(1-c')y^*}{1 + \alpha\xi + x^*} &= 0 \\ (1-c')y^* &= \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right)(1 + \alpha\xi + x^*) \\ y^* &= \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{1 + \alpha\xi + x^*}{1 - c'}\right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \beta((1-c')x^* + \xi) &= \delta(1 + \alpha\xi + x^*) \\ x^*\beta(1-c') + \beta\xi &= \delta + \alpha\delta\xi + x^*\delta \\ x^*\beta(1-c') - x^*\delta &= \delta + \alpha\delta\xi - \beta\xi \\ x^*(\beta(1-c') - \delta) &= \delta + \alpha\delta\xi - \beta\xi \\ x^* &= \frac{\delta + \alpha\delta\xi - \beta\xi}{\beta(1-c') - \delta} \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan  $E_2$  disebut sebagai titik kesetimbangan ko-eksisten atau interior. Dalam hal ini, populasi prey dan populasi predator dapat hidup bersama dan tidak terjadi kepunahan pada kedua populasi tersebut. Titik kesetimbangan  $E_2$  dikatakan eksis jika  $x^* > 0$  dan  $y^* > 0$ . Oleh karena itu, titik kesetimbangan  $E_2$  akan eksis jika terpenuhi  $x^* < \gamma$  dan  $\frac{\beta\xi}{1 + \alpha\xi} < \delta < \beta(1 - c')$  atau  $\beta(1 - c') < \delta < \frac{\beta\xi}{1 + \alpha\xi}$  dengan  $c' \in [0, 1)$ .

### 3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem persamaan (3.6) merupakan sistem nonlinear. Analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear dapat dilakukan dengan menganalisis nilai eigen matriks Jacobi hasil linearisasi. Matriks Jacobi hasil linearisasi sistem persamaan (3.6) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_m} x_{m+1} & \frac{\partial}{\partial y_m} x_{m+1} \\ \frac{\partial}{\partial x_m} y_{m+1} & \frac{\partial}{\partial y_m} y_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ 1 - \frac{2x^*}{\gamma} - \frac{(1-c')y^*(1+\alpha\xi+x^*) - (1-c')x^*y^*}{(1+\alpha\xi+x^*)^2} \right], \\ a_{12} &= \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{(1-c')x^*}{1+\alpha\xi+x^*} \right], \\ a_{21} &= \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta y^*(1-c')(1+\alpha\xi+x^*) - (\beta y^*[(1-c')x^* + \xi])}{(1+\alpha\xi+x^*)^2} \right], \\ a_{22} &= 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')x^* + \xi]}{1+\alpha\xi+x^*} - \delta \right]. \end{aligned}$$

Matriks Jacobi pada persamaan (3.15) selanjutnya akan digunakan untuk menganalisis kestabilan masing-masing titik kesetimbangan dengan cara melakukan substitusi masing-masing titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobi tersebut.

#### 3.3.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_0 = (0, 0)$

Substitusi titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0)$  ke dalam matriks Jacobi (3.15) menghasilkan

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right] \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Matriks Jacobi (3.16) berupa matriks diagonal sehingga dengan mudah dapat ditentukan nilai eigennya, yakni  $\lambda_1 = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)}$  dan  $\lambda_2 = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right]$ . Perhatikan bahwa  $\frac{s^n}{n\Gamma(n)} > 0$  sehingga  $|\lambda_1| > 1$ . Berdasarkan Teorema 1, sifat kestabilan titik

kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  adalah sebagai berikut:

(1) titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  bersifat sadel (pelana) jika  $|\lambda_2| < 1$ , yaitu jika

$$0 < s < \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1+\alpha\xi)}{\beta\xi - \delta(1+\alpha\xi)}} \text{ dan } \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} < \delta,$$

(2) titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  bersifat sumber jika  $|\lambda_2| > 1$ , yaitu jika

$$s > \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1+\alpha\xi)}{\beta\xi - \delta(1+\alpha\xi)}} \text{ dan } \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} < \delta, \text{ dan}$$

(3) titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  bersifat nonhiperbolik jika  $|\lambda_2| = 1$ , yaitu jika

$$s = \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1+\alpha\xi)}{\beta\xi - \delta(1+\alpha\xi)}} \text{ dan } \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} < \delta.$$

### 3.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1 = (\gamma, 0)$

Titik kesetimbangan kepunahan predator untuk sistem persamaan (3.6) adalah  $(\gamma, 0)$ , sehingga matriks Jacobi (3.15) dapat ditulis sebagai

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} & -\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{(1-c')\gamma}{1+\alpha\xi+\gamma} \right] \\ 0 & 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma+\xi]}{1+\alpha\xi+\gamma} - \delta \right] \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Matriks Jacobi (3.17) berupa matriks segitiga atas sehingga nilai eigennya berada pada kolom diagonal, yakni  $\lambda_1 = 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)}$  dan  $\lambda_2 = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma+\xi]}{1+\alpha\xi+\gamma} - \delta \right]$ . Berdasarkan definisi kestabilan, titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat stabil jika  $|\lambda_1| = \left| 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \right| < 1$  dan  $|\lambda_2| = \left| 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma+\xi]}{1+\alpha\xi+\gamma} - \delta \right] \right| < 1$ . Berikut akan dilakukan analisis pada kedua nilai eigen tersebut.

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \right| < 1 &\iff -1 < 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} < 1 \\ &\iff -2 < -\frac{s^n}{n\Gamma(n)} < 0 \\ &\iff -2n\Gamma(n) < -s^n < 0 \\ &\iff \sqrt[n]{2n\Gamma(n)} > s > 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\left| 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right] \right| < 1 \iff -1 < 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right] < 1$$

$$-2 < \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right] < 0.$$

Apabila  $\frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} > \delta$  maka  $|\lambda_2| > 1$ . Untuk memenuhi  $|\lambda_2| < 1$  maka haruslah  $\frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} < \delta$  sehingga

$$-2 < \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right] < 0$$

$$-2n\Gamma(n) < s^n \left[ \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right] < 0$$

$$\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)} > s^n > 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} > s > 0. \quad (3.19)$$

Dari persamaan (3.18) dan persamaan (3.19) diperoleh syarat agar titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  stabil adalah :

- (1)  $\frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} < \delta$  dan
- (2)  $0 < s < \min \left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\}$ .

Perhatikan bahwa sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  tidak hanya bergantung pada parameter, tetapi juga pada langkah waktu integrasi ( $s$ ). Jika  $\frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} < \delta$ , maka titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat stabil asimtotik hanya jika nilai  $s$  relatif kecil. Apabila kedua syarat kestabilan titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  di atas tidak terpenuhi, maka muncul beberapa sifat ketidakstabilan dari titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  adalah sebagai berikut:

- (1) titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sadel (pelana), yaitu apabila

$$\min \left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\} < s < \max \left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\},$$

- (2) titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sumber, yaitu apabila

$$s > \max \left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\}, \text{ dan}$$

(3) titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat nonhiperbolik, yaitu apabila

$$s = \sqrt{2n\Gamma(n)} \quad \text{atau} \quad s = \sqrt{\frac{-2n\Gamma(n)(1+\alpha\xi+\gamma)}{\beta(1-c')\gamma+\xi-\delta(1+\alpha\xi+\gamma)}}$$

### 3.3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_2 = (x^*, y^*)$

Substitusi titik kesetimbangan  $E_2 = (x^*, y^*)$ , dengan

$$x^* = \frac{\delta + \alpha\delta\xi - \beta\xi}{\beta(1-c') - \delta} \quad \text{dan} \quad y^* = \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{1 + \alpha\xi + x^*}{1-c'}\right),$$

ke dalam matriks Jacobi (3.15) menghasilkan

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

dengan

$$a_{11} = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ 1 - \frac{2x^*}{\gamma} - \frac{(1-c') \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{1+\alpha\xi+x^*}{1-c'}\right) (1 + \alpha\xi + x^*)}{(1 + \alpha\xi + x^*)^2} \right] +$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{(1-c')x^* \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{1+\alpha\xi+x^*}{1-c'}\right)}{(1 + \alpha\xi + x^*)^2} \right]$$

$$= 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right],$$

$$a_{12} = \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{(1-c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*} \right],$$

$$a_{21} = \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{1+\alpha\xi+x^*}{1-c'}\right) (1-c')(1 + \alpha\xi + x^*)}{(1 + \alpha\xi + x^*)^2} + \right]$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{\beta \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{1+\alpha\xi+x^*}{1-c'}\right) ((1-c')x^* + \xi)}{(1 + \alpha\xi + x^*)^2} \right]$$

$$= \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1-c'}\right) \right],$$

$$a_{22} = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ \frac{\beta((1-c')x^* + \xi)}{1 + \alpha\xi + x^*} - \delta \right]$$

$$= 1.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi (3.20) dapat dinyatakan dalam bentuk  $A(\lambda) = \lambda^2 - \text{Trace}(J)\lambda + \text{Determinan}(J)$  dengan  $\text{Trace}(J)$  dan  $\text{Determinan}(J)$  berturut-turut adalah

$$\text{Trace}(J) = 2 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] \quad (3.21)$$

dan

$$\text{Determinan}(J) = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] + \left(\frac{s^n}{n\Gamma(n)}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right]. \quad (3.22)$$

Berdasarkan pada Teorema 2, syarat cukup dan syarat perlu agar nilai-nilai eigen dari  $A(\lambda)$  memiliki nilai mutlak kurang dari 1 adalah dengan menggunakan *Jury Condition*. Berikut akan dilakukan analisis pada ketiga *Jury Condition* tersebut.

### Jury Condition 1

*Jury Condition 1* berbentuk  $1 - \text{Trace}(J) + \text{Determinan}(J) > 0$ . Dengan melakukan substitusi nilai  $\text{Trace}(J)$  dan  $\text{Determinan}(J)$  pada persamaan (3.21) dan (3.22) ke dalam *Jury Condition 1* akan diperoleh



$$1 - \text{Trace}(J) + \text{Determinan}(J) > 0$$

$$1 - 2 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] + \left(\frac{s^n}{n\Gamma(n)}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] \geq 0$$

$$\left(\frac{s^n}{n\Gamma(n)}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] > 0. \quad (3.23)$$

Berdasarkan hasil analisis titik kesetimbangan  $E_2$ , diperoleh syarat eksistensi titik kesetimbangan  $E_2$  adalah  $x^* < \gamma$  dan  $\frac{\beta\xi}{1 + \alpha\xi} < \delta < \beta(1 - c')$ . Kondisi  $x^* < \gamma$  akan menyebabkan bagian  $1 - \frac{x^*}{\gamma}$  bernilai positif, begitu pula dengan  $\frac{\beta\xi}{1 + \alpha\xi} < \delta < \beta(1 - c')$  pada  $\beta - \frac{\delta}{1 - c'}$ . Nilai dari  $c'$  berada dalam interval  $[0, 1)$  mengakibatkan bagian  $\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}$  juga bernilai positif. Karena  $s$  adalah ukuran langkah dimana  $s \in \mathbb{R}^+$  dan  $n$  antara 0 sampai 1 maka *Jury Condition 1*, dalam hal ini persamaan (3.23), terpenuhi  $\forall s > 0$ .

### Jury Condition 2

*Jury Condition 2* berbentuk  $1 + \text{Trace}(J) + \text{Determinan}(J) > 0$ . Substitusi *Trace*( $J$ ) dan *Determinan*( $J$ ) persamaan (3.21) dan (3.22) ke dalam *Jury Condition 2* akan menghasilkan

$$1 + \text{Trace}(J) + \text{Det}(J) > 0$$

$$1 + 2 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] + \left(\frac{s^n}{n\Gamma(n)}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] > 0$$

$$4 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{2x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{2x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] + \left(\frac{s^n}{n\Gamma(n)}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] > 0$$

$$4 + s^n \left[ -\frac{2x^*}{\gamma n\Gamma(n)} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{2x^*}{(1 + \alpha\xi + x^*)(n\Gamma(n))}\right) \right] + (s^n)^2 \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{(1 + \alpha\xi + x^*)(n\Gamma(n))^2}\right) \right] > 0. \quad (3.24)$$

Pertidaksamaan (3.24) dapat ditulis dalam bentuk  $f(s^n) = a(s^n)^2 + b(s^n) + c > 0$  dengan

$$a = \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{(1 + \alpha\xi + x^*)(n\Gamma(n))^2}\right) > 0,$$

$$b = -\frac{2x^*}{\gamma n\Gamma(n)} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{2x^*}{(1 + \alpha\xi + x^*)(n\Gamma(n))}\right), \quad (3.25)$$

$$c = 4 > 0.$$

Karena  $a > 0$ , kurva  $f(s^n)$  berupa parabola terbuka ke atas. Interval  $s$  sedemikian sehingga  $f(s^n) > 0$  bergantung pada kondisi  $b^2 - 4ac$ . Karena  $c = 4$ ,  $b^2 - 4ac$  dapat ditulis menjadi  $b^2 - 16a$ . Terdapat tiga kemungkinan nilai  $b^2 - 16a$ , yakni  $b^2 - 16a < 0$ ,  $b^2 - 16a = 0$ , dan  $b^2 - 16a > 0$ . Masing-masing kemungkinan tersebut menentukan banyaknya titik potong kurva  $f(s^n)$  dengan sumbu  $s^n$ , seperti penjelasan sebagai berikut.

(1) Kondisi  $b^2 - 16a > 0$  menyebabkan kurva  $f(s^n)$  memotong sumbu  $s^n$  di dua titik yaitu

$$s_1^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 16a}}{2a} \quad \text{dan} \quad s_2^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 16a}}{2a}. \quad (3.26)$$

Karena  $b^2 - 16a > 0$  dan  $a > 0$ ,  $b^2 - 16a < |b|$ . Jika  $b > 0$  maka  $s_1^n < 0$  dan  $s_2^n < 0$ , sehingga  $f(s^n) > 0$  terpenuhi  $\forall s > 0$ . Apabila  $b < 0$  maka  $s_1^n > 0$  dan  $s_2^n > 0$ , sehingga  $f(s^n) > 0$  terpenuhi jika  $0 < s^n < s_1^n$  atau  $s^n > s_2^n$  dan dapat

disederhanakan menjadi  $0 < s < s_1$  atau  $s > s_2$  dimana

$$s_1 = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 16a}}{2a}} \quad \text{dan} \quad s_2 = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 16a}}{2a}}. \quad (3.27)$$

Dari persamaan (3.25),  $b > 0$  apabila  $x^* < \frac{\gamma - (1 + \alpha\xi)}{2}$  dan  $b < 0$  apabila  $x^* > \frac{\gamma - (1 + \alpha\xi)}{2}$ .

(2) Kondisi  $b^2 - 16a = 0$  menyebabkan kurva  $f(s^n)$  menyinggung sumbu  $s^n$  di titik

$$\begin{aligned} s_{1,2}^n &= \frac{b}{2a} \\ s_{1,2} &= \sqrt[n]{\frac{b}{2a}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{-\frac{2x^*}{\gamma\Gamma(n)} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{2x^*}{(1 + \alpha\xi + x^*)(n\Gamma(n))}\right)}{2 \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{(1 + \alpha\xi + x^*)(n\Gamma(n))^2}\right)}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Persamaan (3.28) dapat disederhanakan menjadi

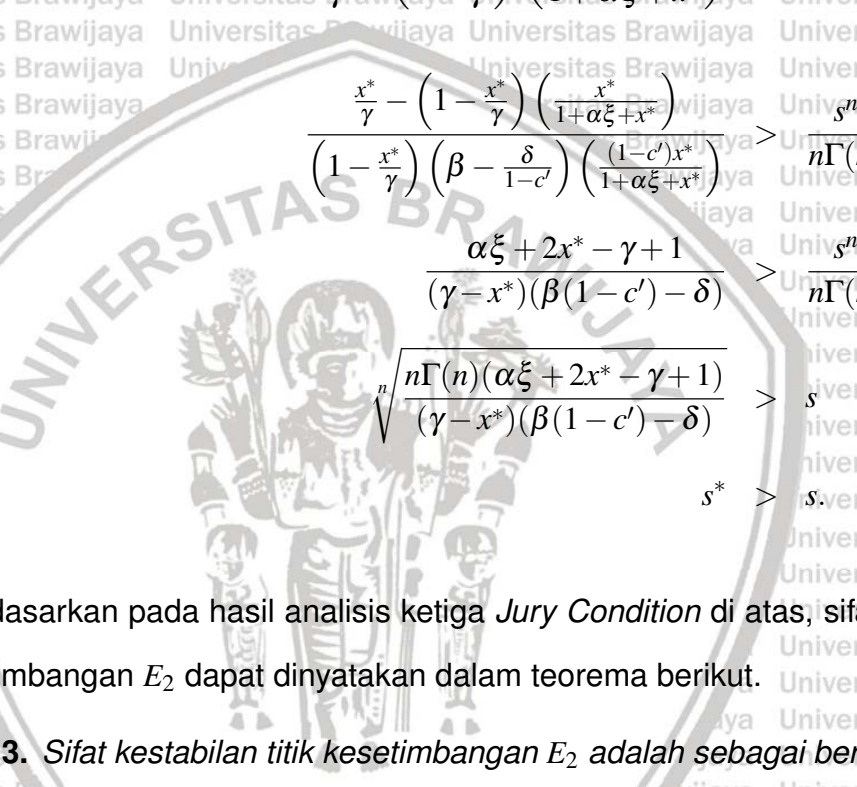
$$s_{1,2} = \sqrt[n]{\frac{n\Gamma(n)(\alpha\xi + 2x^* - \gamma + 1)}{(\gamma - x^*)(\beta(1 - c') - \delta)}} = s^*. \quad (3.29)$$

Titik potong kurva  $f(s^n)$  pada sumbu  $s^n$  adalah pada  $s^*$  sehingga  $f(s^n) > 0$  jika  $s \neq s^*$ .

(3) Kondisi  $b^2 - 16a < 0$  menyebabkan kurva  $f(s^n)$  berada di atas sumbu  $s^n$  sehingga  $f(s^n) > 0$  berlaku  $\forall s > 0$ .

### Jury Condition 3

Jury Condition 3 berbentuk *Determinan* ( $J$ )  $< 1$ . Dengan melakukan substitusi nilai *Determinan* ( $J$ ) pada persamaan (3.22) ke dalam Jury Condition 3 akan diperoleh



$$\begin{aligned}
 & \text{Determinan } (J) < 1 \\
 & 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left[ -\frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] + \\
 & \left(\frac{s^n}{n\Gamma(n)}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] < 1 \\
 & \left(\frac{s^n}{n\Gamma(n)}\right) \left[ \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) \right] - \\
 & \frac{x^*}{\gamma} + \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right) < 0 \\
 & \frac{\frac{x^*}{\gamma} - \left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\frac{x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right)}{\left(1 - \frac{x^*}{\gamma}\right) \left(\beta - \frac{\delta}{1 - c'}\right) \left(\frac{(1 - c')x^*}{1 + \alpha\xi + x^*}\right)} > \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \\
 & \frac{\alpha\xi + 2x^* - \gamma + 1}{(\gamma - x^*)(\beta(1 - c') - \delta)} > \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \\
 & \sqrt[n]{\frac{n\Gamma(n)(\alpha\xi + 2x^* - \gamma + 1)}{(\gamma - x^*)(\beta(1 - c') - \delta)}} > s \\
 & s^* > s. \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan pada hasil analisis ketiga *Jury Condition* di atas, sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

**Teorema 3.** *Sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  adalah sebagai berikut.*

- (1) *Jika  $b^2 - 16a \leq 0$  maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik apabila  $0 < s < s^*$ .*
- (2) *Jika  $b^2 - 16a > 0$  dan  $x^* < \frac{\gamma - (1 + \alpha\xi)}{2}$  maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik apabila  $0 < s < s^*$ .*
- (3) *Jika  $b^2 - 16a > 0$  dan  $x^* > \frac{\gamma - (1 + \alpha\xi)}{2}$  maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik apabila  $0 < s < s_1$ . Hal ini disebabkan karena  $s_1 \leq s^* \leq s_2$ .*

Dengan demikian, jenis kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  adalah stabil asimtotik untuk ukuran langkah  $s$  tertentu. Hasil analisis model predator-prey Lotka-

Volterra orde fraksional diskret dengan perlindungan pada prey serta makanan tambahan secara ringkas dapat dilihat pada **Tabel 3.1** berikut.

Tabel 3.1: Syarat Eksistensi dan Kestabilan.

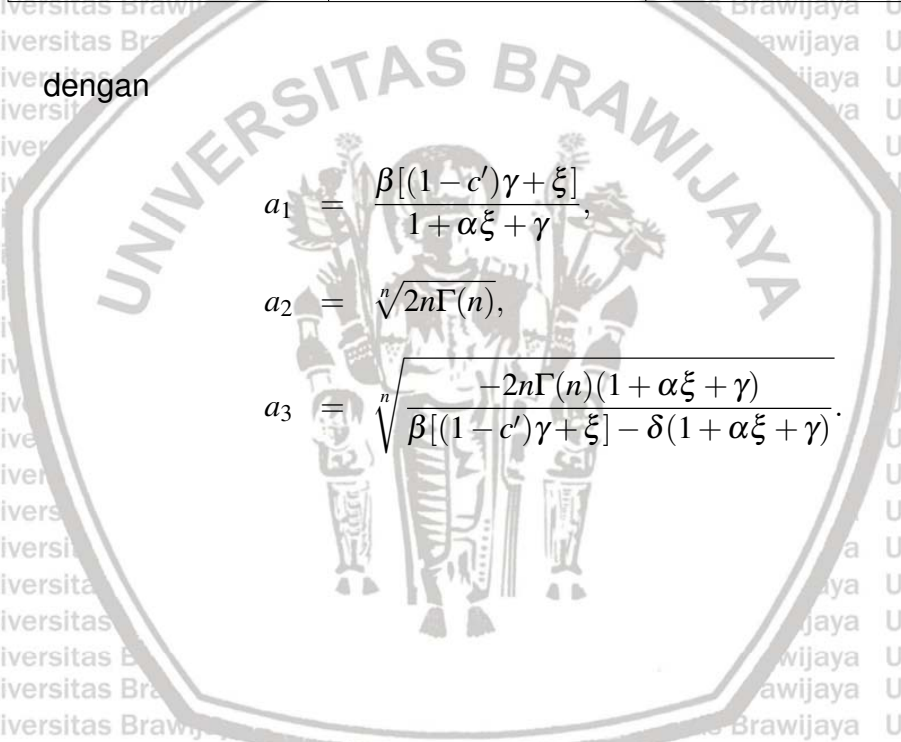
Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
$E_0 = (0, 0)$	Tidak Ada	Tidak Stabil
$E_1 = (\gamma, 0)$	Tidak Ada	$a_1 < \delta$ dan $0 < s < \min\{a_2, a_3\}$
$E_2 = (x^*, y^*)$	$x^* < \gamma$ dan $\frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} < \delta < \beta(1-c')$ atau $\beta(1-c') < \delta < \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi}$	Teorema 3

dengan

$$a_1 = \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma},$$

$$a_2 = \sqrt[n]{2n\Gamma(n)},$$

$$a_3 = \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}}.$$



### 3.4 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan disimulasikan solusi dari model predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional diskret dengan perlindungan pada prey dan makanan tambahan menggunakan aplikasi MATLAB R2009A dan Maple 13 sebagai alat bantu perhitungan.

#### 3.4.1 Titik Kesetimbangan Kepunahan Populasi Predator

Simulasi numerik berikut bertujuan untuk menggambarkan sifat kestabilan titik kesetimbangan kepunahan populasi predator ( $E_1$ ). Simulasi numerik titik kesetimbangan  $E_1$  menggunakan nilai parameter pada Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2: Nilai Parameter.

Parameter	$\alpha$	$\gamma$	$c'$	$\xi$	$\delta$	$\beta$	$n$ (orde fraksional)
Nilai	0.6	4	0.21	0.2	0.9	0.15	0.9

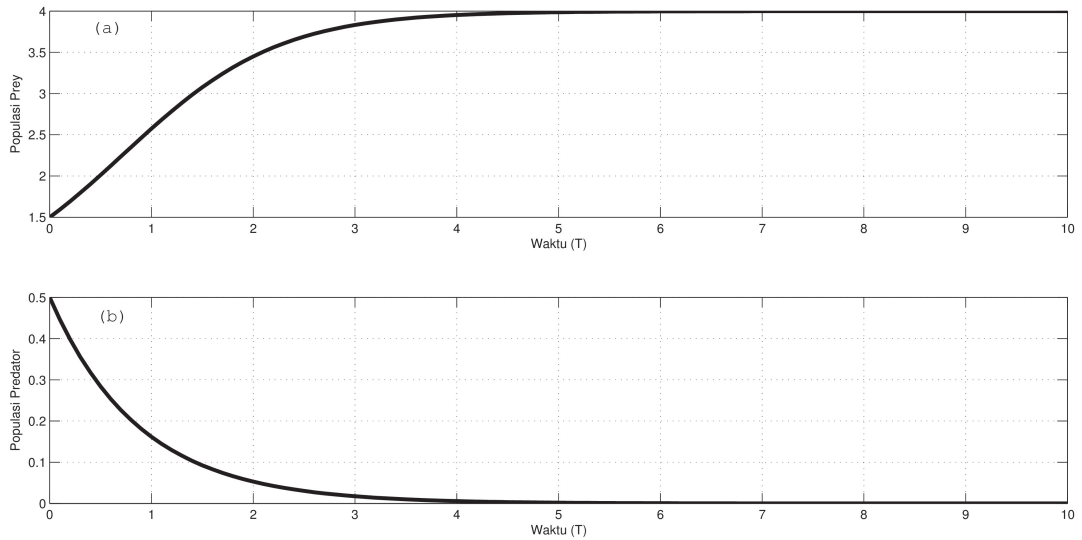
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.2, diperoleh titik kesetimbangan yang eksis yaitu  $E_0 = (0,0)$  dan  $E_1 = (4,0)$ . Dari hasil analisis pada Subbab 3.3.1, titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat tidak stabil dan diperoleh

$$\frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} = 0.0984 < \delta. \tag{3.31}$$

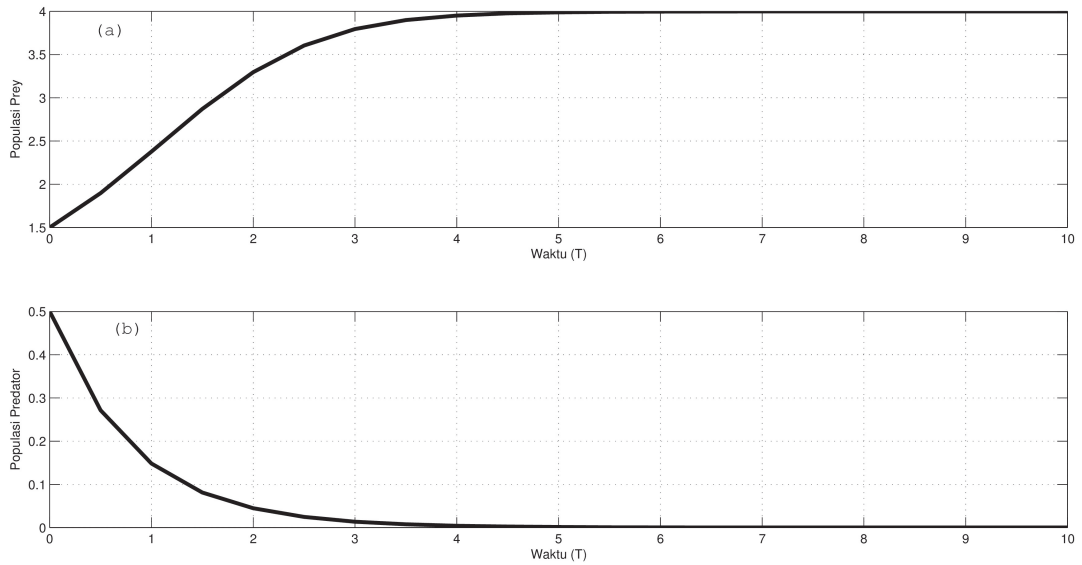
Persamaan (3.31) memenuhi syarat kestabilan pertama titik kesetimbangan  $E_1$  sekaligus menyebabkan titik kesetimbangan  $E_2$  tidak eksis. Syarat kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  selanjutnya adalah

$$s < \min \left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\} \\ = \min\{2.068, 2.644\} \\ = 2.068.$$

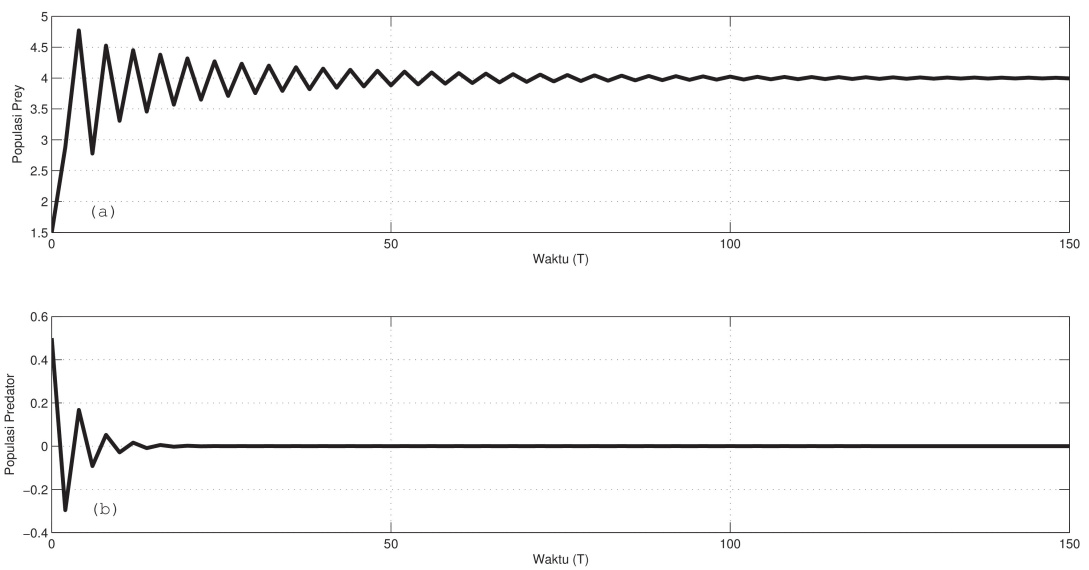
Untuk memberikan ilustrasi, pada Gambar 3.1 sampai dengan Gambar 3.4 ditunjukkan solusi numerik skema (3.6) menggunakan masing-masing nilai  $s$  yaitu 0.1, 0.5, 2.0, dan 2.1.



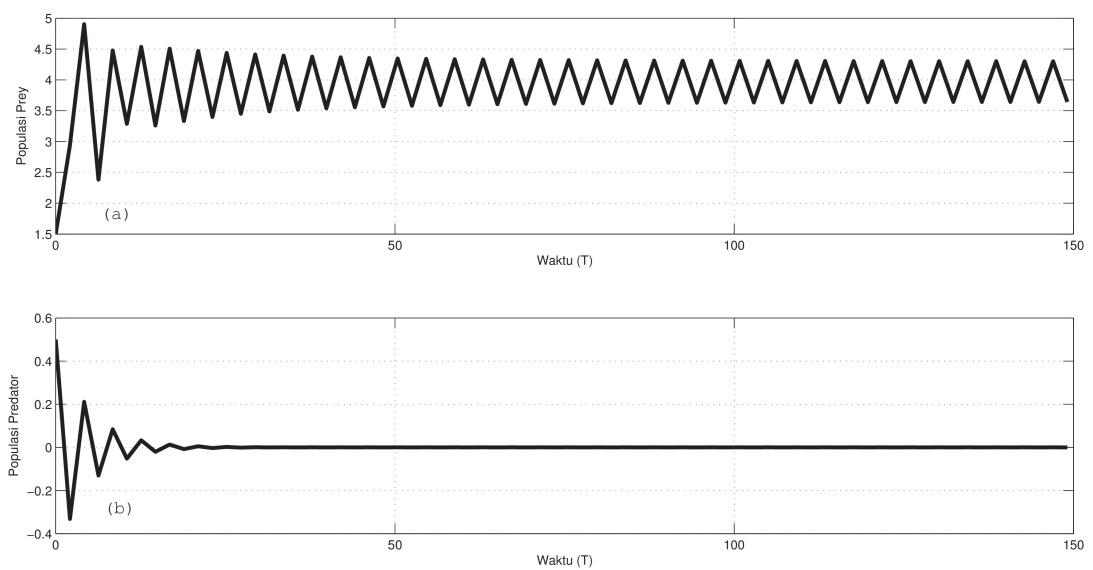
Gambar 3.1: Grafik solusi saat  $s = 0.1$ .



Gambar 3.2: Grafik solusi saat  $s = 0.5$ .



Gambar 3.3: Grafik solusi saat  $s = 2$ .



Gambar 3.4: Grafik solusi saat  $s = 2.1$ .

Pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2, dengan menggunakan nilai awal  $(1.5, 0.5)$  dan ukuran langkah  $0 < s < 2.068$ , solusi numerik memperlihatkan bahwa populasi prey konvergen menuju titik konstan yaitu  $x = 4$ , sedangkan populasi predator langsung menuju titik kepunahan. Pada Gambar 3.3, ditunjukkan bahwa meskipun terdapat solusi negatif pada populasi predator, solusi umum tetap konvergen menuju



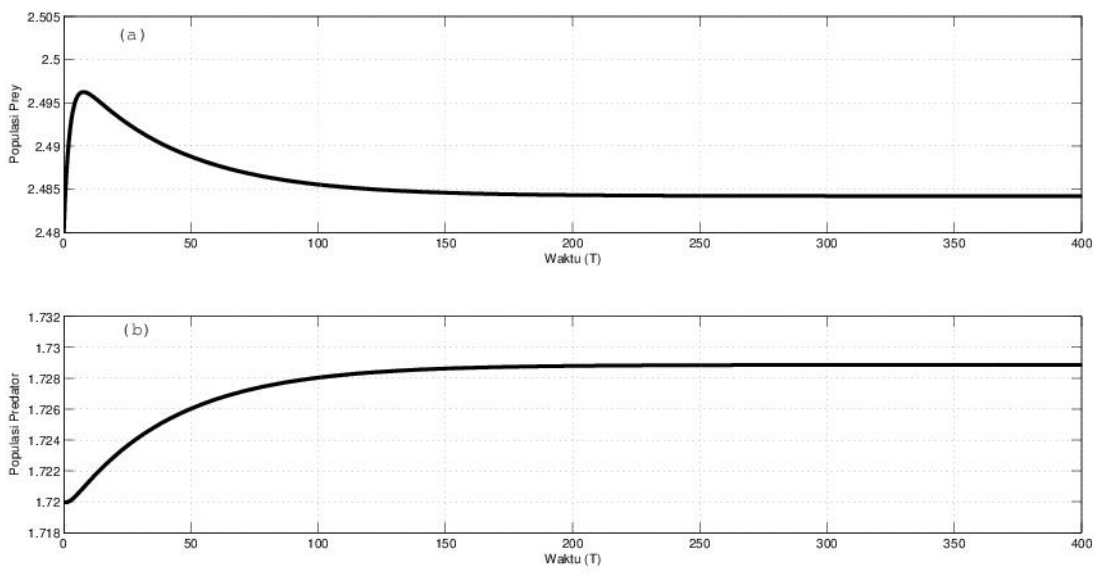
titik kesetimbangan  $E_1 = (4, 0)$ . Hal ini sesuai dengan syarat kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  yaitu  $\frac{\beta[(1-c')\gamma+\xi]}{1+\alpha\xi+\gamma} < \delta$  dan  $0 < s < 2.068$ . Saat dipilih nilai  $s = 2.1 > 2.068$ , titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil karena pada populasi prey muncul titik periode-2. Selain itu, populasi predator bernilai negatif (lihat Gambar 3.4). Solusi populasi predator bernilai negatif bertentangan dengan sifat kepositifan solusi, yaitu bahwa populasi harus lebih besar atau sama dengan nol.

### 3.4.2 Titik Kesetimbangan Populasi Prey dan Populasi Predator Dapat Hidup Bersama (Interior)

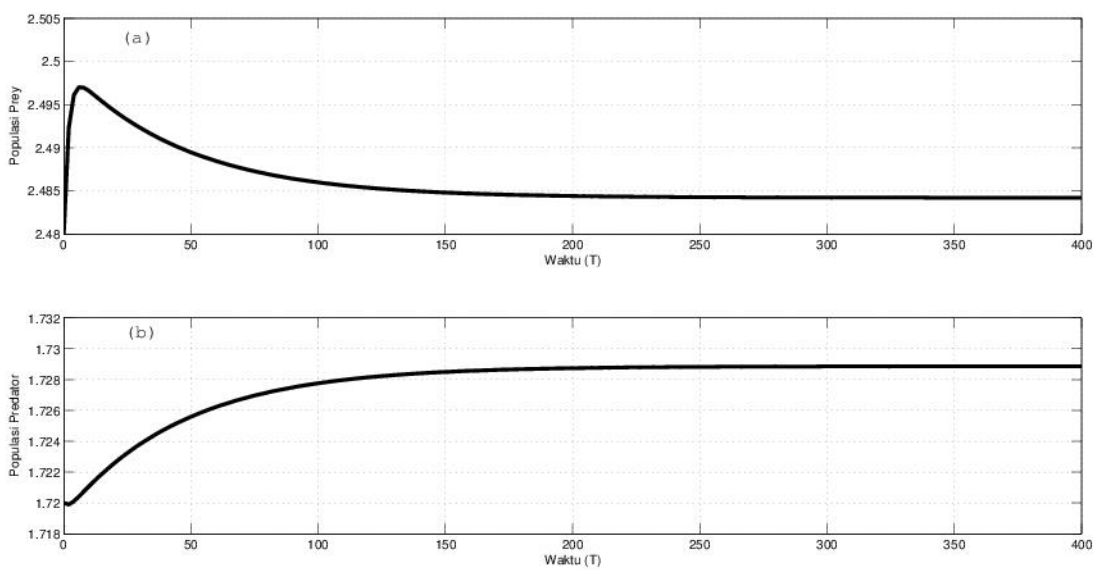
Pada bagian ini akan disimulasikan sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  berdasarkan pada kondisi  $b^2 - 16a > 0$  dan  $b^2 - 16a \leq 0$  dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 3.2.

#### Kondisi $b^2 - 16a > 0$

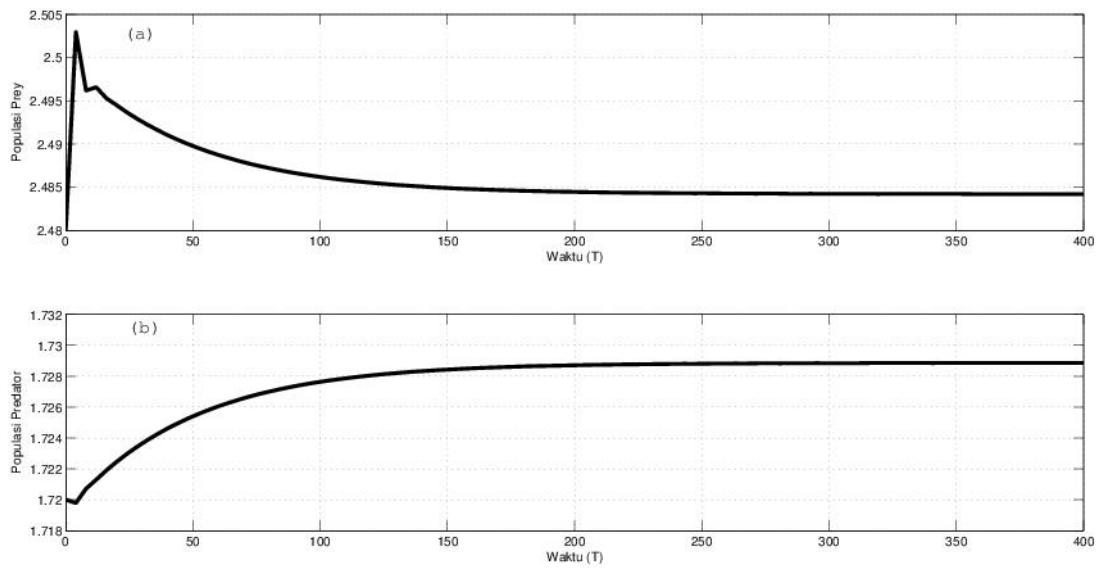
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.2 dengan perubahan  $\delta = 0.09$ , diperoleh titik kesetimbangan yang eksis adalah  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (4, 0)$ , dan  $E_2 = (2.4842, 1.7288)$ . Titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil karena  $\frac{\beta[(1-c')\gamma+\xi]}{1+\alpha\xi+\gamma} = 0.0984 > \delta = 0.09$ . Berdasarkan hasil analisis titik kesetimbangan, diperoleh  $x^* = 2.4842 < \gamma = 4$  dan  $\frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} = 0.0267 < \delta = 0.09 < \beta(1-c') = 0.1185$ . Kedua hal ini menjamin eksistensi titik kesetimbangan  $E_2$ . Karena  $x^* = 2.4842 > \frac{\gamma-(1+\alpha\xi)}{2} = 1.44$  dan  $b^2 - 16a = 0.43 > 0$  dengan langkah integrasi  $s$  yaitu  $0 < s < s_1 = 6,907$ , berdasarkan pada Teorema 3, titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik. Pada simulasi numerik berikut akan digunakan beberapa nilai  $s$  yakni 0.5, 2, 4, 6.8, dan 6.91.



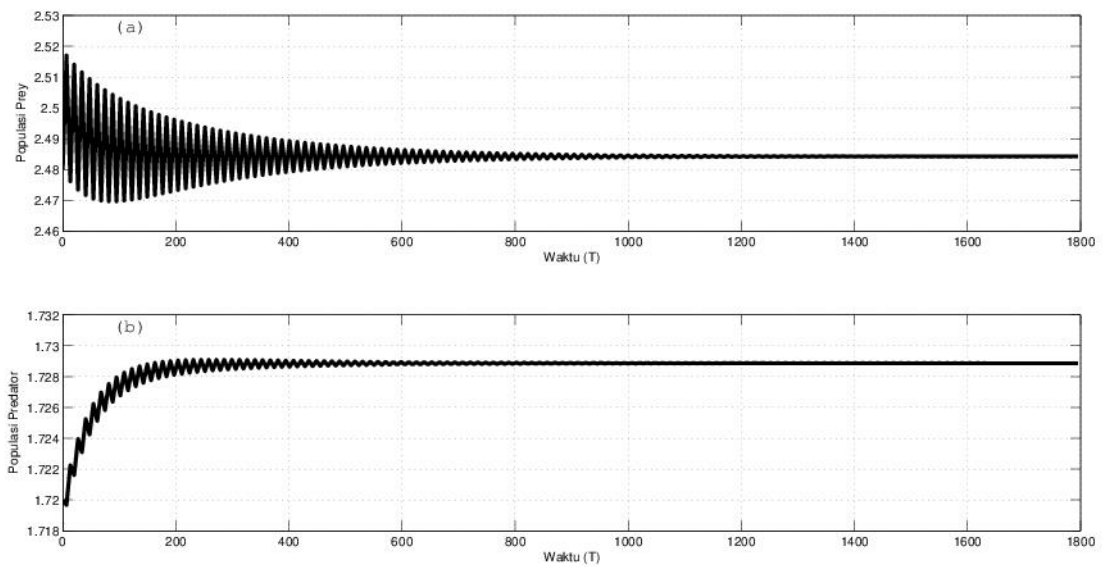
Gambar 3.5: Grafik solusi saat  $s = 0.5$



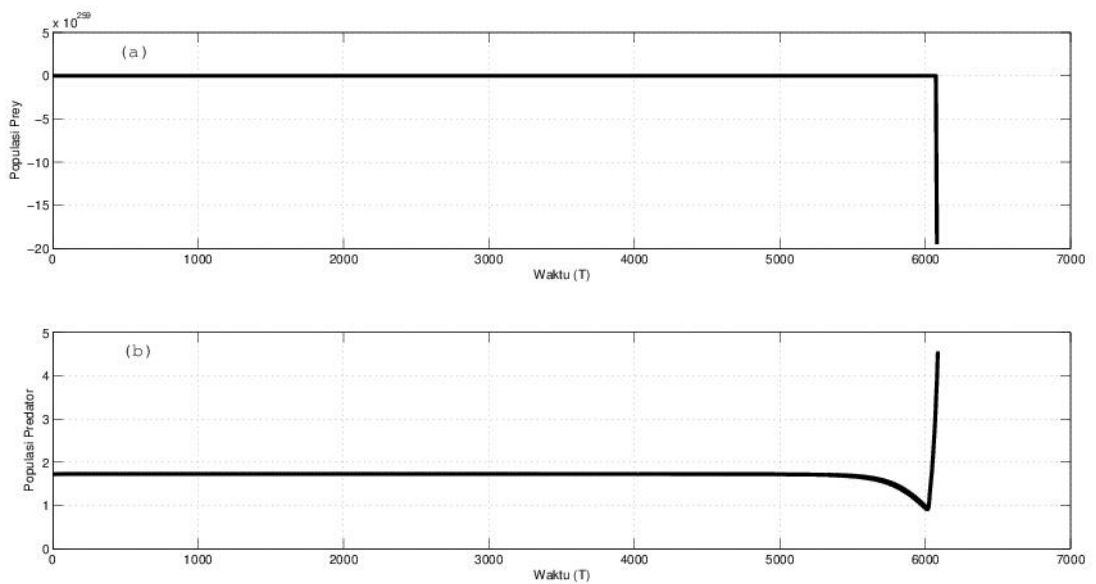
Gambar 3.6: Grafik solusi saat  $s = 2$



Gambar 3.7: Grafik solusi saat  $s = 4$



Gambar 3.8: Grafik solusi saat  $s = 6.8$



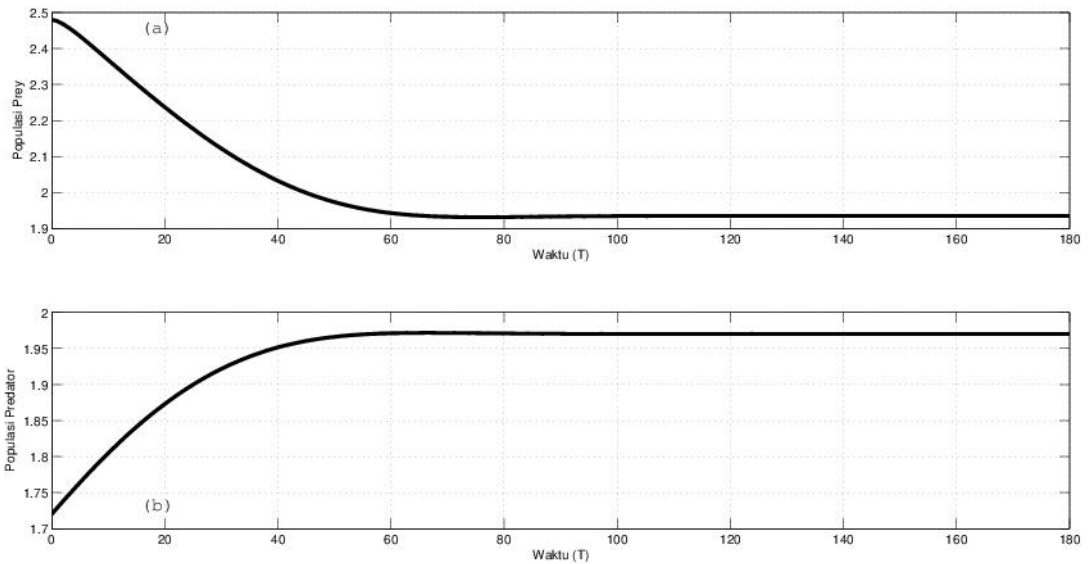
Gambar 3.9: Grafik solusi saat  $s = 6.91$

Berdasarkan hasil simulasi numerik di atas, jika  $b^2 - 16a > 0$  maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik apabila ukuran langkah integrasi  $s$  berada pada interval  $0 < s < s_1$ . Dari Gambar 3.5 sampai dengan Gambar 3.8 terlihat bahwa solusi numerik stabil asimtotik karena solusi konvergen menuju ke titik kesetimbangan  $E_2 = (2.4842, 1.7288)$ . Untuk  $s = 6.91 > s_1 = 6.907$ , solusi numerik tidak konvergen menuju ke titik kesetimbangan, tetapi menuju  $\pm\infty$  (lihat Gambar 3.9). Hasil simulasi telah menunjukkan hal yang sesuai dengan hasil analisis.

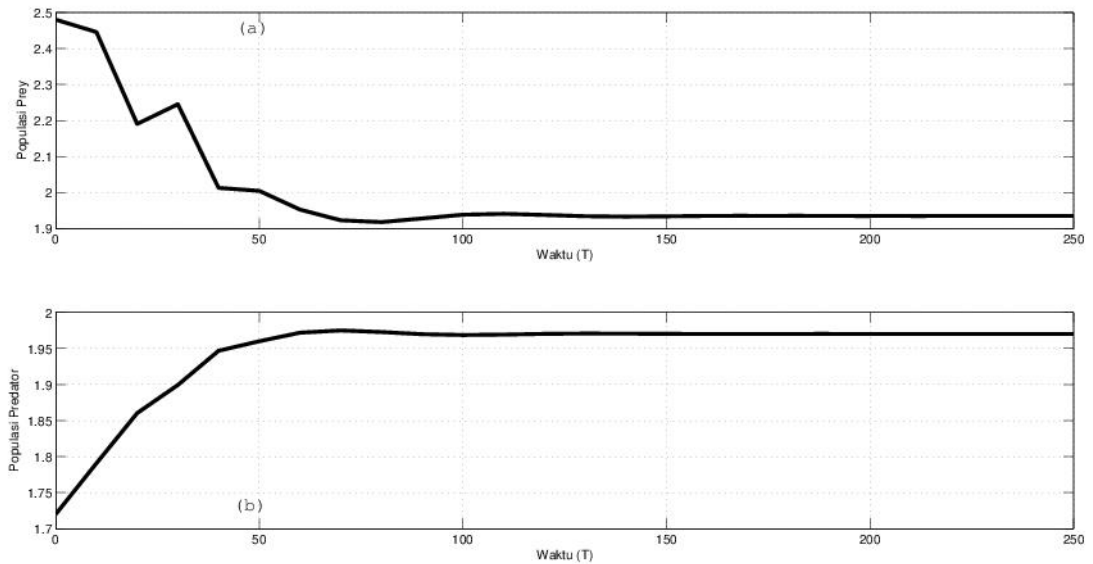
**Kondisi  $b^2 - 16a \leq 0$**

Dari Teorema 3 bagian (1), saat  $b^2 - 16a \leq 0$  dan  $0 < s < s^*$  titik kesetimbangan  $E_2$  akan bersifat stabil asimtotik. Digunakan kembali nilai parameter pada Tabel 3.2 dengan perubahan  $\delta = 0.086$  dan  $\alpha = 0.4$ . Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan yang eksis adalah  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (4, 0)$ , dan  $E_2 = (1.934, 1.9707)$ . Karena  $\frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} = 0.0992 > \delta = 0.086$ , titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil. Eksistensi titik kesetimbangan  $E_2$  dijamin oleh  $x^* = 1.9347 < \gamma = 4$  dan  $\frac{\beta\xi}{1 + \alpha\xi} = 0.0277 < \delta = 0.086 < \beta(1 - c') = 0.1185$ . Dari nilai parameter tersebut,  $b^2 - 16a = -0.08 \leq 0$  dan langkah waktu integrasi  $s$  yaitu

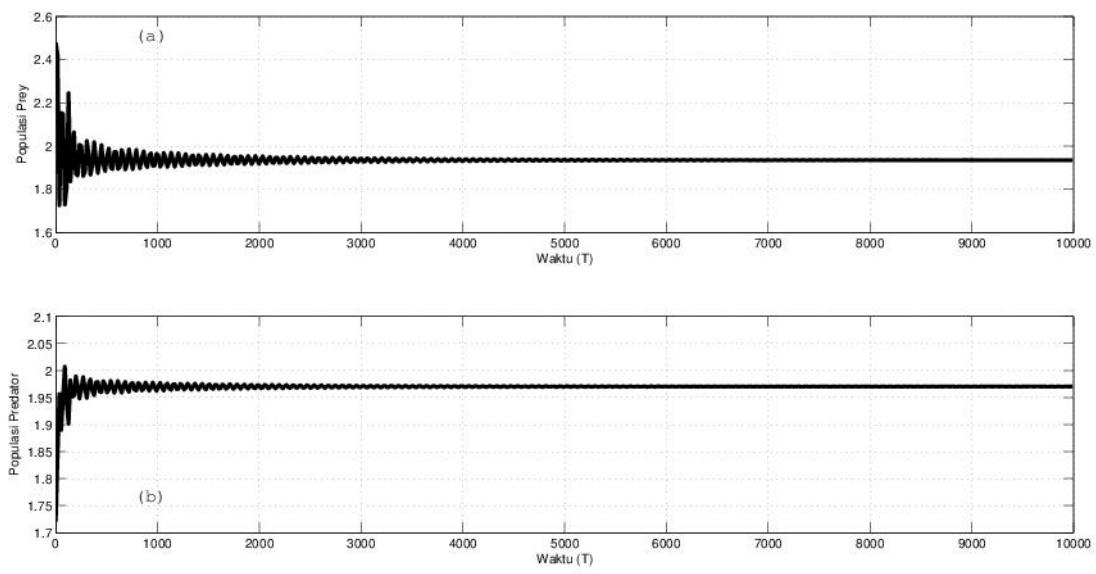
$0 < s < s^* = 18.184$ . Berikut adalah simulasi numerik dengan beberapa nilai  $s$  yakni 1, 10, 18, dan 18.2.



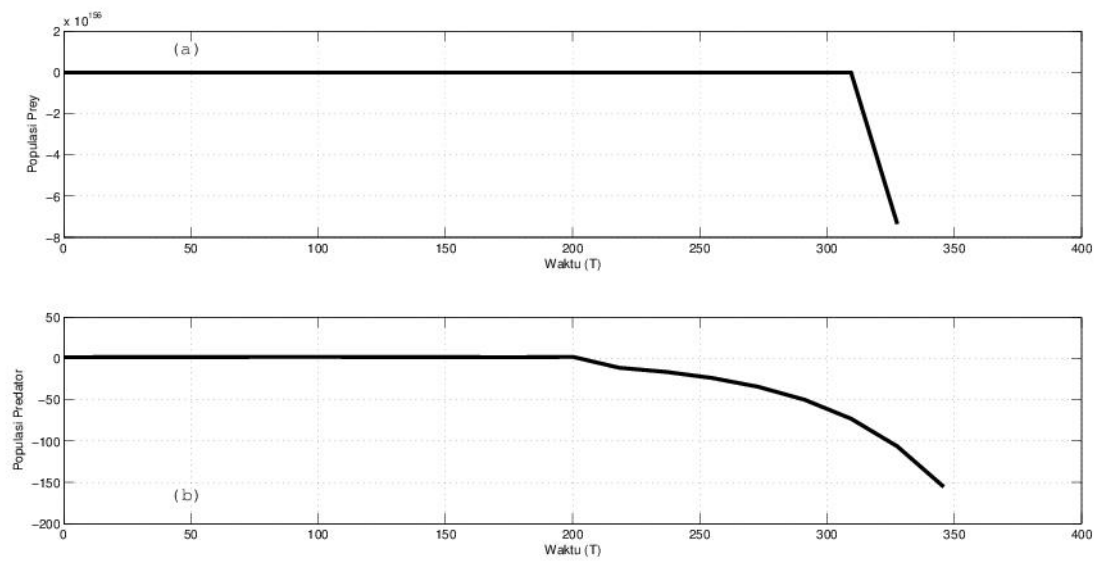
Gambar 3.10: Grafik solusi saat  $s = 1$



Gambar 3.11: Grafik solusi saat  $s = 10$



Gambar 3.12: Grafik solusi saat  $s = 18$



Gambar 3.13: Grafik solusi saat  $s = 18.2$

Dari Gambar 3.10 sampai dengan Gambar 3.12 terlihat bahwa saat  $s = 1$ ,  $s = 10$ , dan  $s = 18$ , solusi numerik konvergen menuju ke titik kesetimbangan  $E_2 = (1.934, 1.9707)$ . Akan tetapi, saat  $s = 18.2 > s^* = 18.1$ , solusi numerik tidak konvergen menuju ke titik kesetimbangan.

Dari ketiga hasil simulasi di atas, telah ditunjukkan bahwa model diskret predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan pada prey dan makanan tambahan untuk predator akan bersifat stabil asimtotik untuk ukuran langka  $s$  tertentu. Kestabilan masing-masing titik kesetimbangan bergantung pada nilai  $s$  yang relatif kecil. Selain itu, ditunjukkan pula bahwa semakin besar nilai  $s$ , semakin lama waktu yang dibutuhkan solusi untuk menuju titik kesetimbangan. Hal ini dibuktikan dengan kesesuaian antara hasil analisis dengan simulasi numerik.



## Bab 4

# Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

### 4.1 Kesimpulan

1. Telah dibahas model diskret predator-prey Lotka-Volterra orde fraksional dengan perlindungan pada prey dan makanan tambahan. Model tersebut memiliki tiga titik kesetimbangan yakni titik kepunahan populasi ( $E_0$ ), titik kepunahan populasi predator ( $E_1$ ), dan titik kesetimbangan populasi prey dan populasi predator dapat hidup bersama atau titik kesetimbangan interior ( $E_2$ ).
2. Sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_0$  adalah tidak stabil. Titik kesetimbangan  $E_1$  dan titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik dengan syarat tertentu. Jika titik kesetimbangan  $E_1$  stabil asimtotik, maka titik kesetimbangan  $E_2$  tidak eksis. Jika titik kesetimbangan  $E_2$  eksis, maka titik kesetimbangan  $E_1$  selalu tidak stabil. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  dan titik kesetimbangan  $E_2$  tidak hanya bergantung pada parameter, tetapi juga pada langkah waktu integrasi.
3. Hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil analisis dinamik.

### 4.2 Saran

Analisis kestabilan yang diteliti pada penelitian ini didasarkan pada sistem hasil linearisasi di sekitar titik kesetimbangan sehingga kestabilan yang diperoleh berupa kestabilan lokal. Penelitian ini dapat dikembangkan untuk mencari kestabilan



yang bersifat global. Selain itu, penelitian ini juga dapat dikembangkan dengan cara mencari metode lain sedemikian sehingga syarat kestabilan masing-masing titik kesetimbangan tidak bergantung pada langkah waktu integrasi, sekaligus menjaga kepositifan solusi.



# Daftar Pustaka

- Arditi, R. dan L. R. Ginzburg. 1989. Coupling in Predator-Prey Dynamics : Reaction Dependence. *J. Theoretical Biology*. 139 : 311-326.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth Edition. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Brauer, F. dan C. Chavez. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer.
- Das, P., D. Mukherjee, dan A. K. Sarkar. 2011. Study of An S-I Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate : Discrete and Stochastic Version. *J. Applied Mathematics and Computation*. 218(6): 2509-2515.
- Das, S. dan P. K. Gupta. 2011. A Mathematical Model on Fractional Lotka Volterra Equations. *J. Theoretical Biology*. 277: 1-6.
- Diethelm, K. 2004. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.
- Elsadany, A. A. dan A. E. Matouk. 2015. Dynamical Behaviors of Fractional-Order LotkaVolterra PredatorPrey Model and Its Discretization. *J. Applied Mathematical Computation*. 49: 269-283.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction To Difference Equations : Third Edition*. Springer. United States of America.
- El-Shahed, M., A. M. Ahmed, dan I. M. E. Abdelstar. 2016. Fractional Order Model in Generalist Predator-Prey Dynamics. *J. Mathematics and Its Application*. 4: 19-28.
- Ghosh, J., B. Sahoo, dan S. Poria. 2017. Prey-Predator Dynamics with Prey Refuge Providing Additional Food to Predator. *J. Chaos, Solitons, and Fractals*. 96: 110-119.
- Holling, C. S. 1959. Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism. *J. Canadian Entomology*. 91: 385-398.
- Javidi, M. dan N. Nyamoradi. 2013. Dynamic Analysis of A Fractional Order Prey-Predator Interaction with Harvesting. *J. Applied Mathematical Modelling*. 37: 8496-8956.
- Kilbas, A. A., H. M. Srivastava, dan J. J. Trujillo. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. First Edition. Elsevier, New York.

Kimeu, J. M. 2009. *Fractional Calculus : Definitions and Applications*. Western Kentucky University.

Kocic, V. L. dan G. Ladas. 1993. *Global Behaviour of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Kot, M. 2001. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Li, C. dan Y. Ma. 2013. Fractional Dynamical System and Its Linarization Theorem. *J. Nonlinear Dynamical*. 71: 621-633.

Ma, Z., W. Li, Y. Zhao, W. Wang, H. Zhang, dan Z. Li. 2009. Effects of Prey Refuges on A Predator-Prey Model with A Class of Functional Responses : The Role of Refuges. *J. Mathematical Biosciences*. 218: 73-79.

Molles, M. C. 2002. *Ecology Concept and Applications*. Second Edition. McGraw Hill. Mexico City.

Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology I. An Introduction Third Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Pal, A. K. dan G. P. Samanta. 2010. Stability Analysis of An Epidemiological Model Incorporating A Prey Refuge. *J. Modelling and Control*. 15: 473-491.

Petras, I. 2011. *Fractional Order Nonlinear Systems*. Higher Education Press, Beijing, and Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.

Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, California USA.

Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems : Continuous and Discrete*. Prentice Hall, Reading, MA.

Sahoo, B. dan S. Poria. 2015. Effect on Additional Food in A Delayed Predator-Prey Model. *J. Mathematical Biosciences*. 2015: 62-73.

Sen, M., P. D. N. Srinivasu, dan M. Banerjee. 2015. Global Dynamics of an Additional Food Provided Predator-Prey System with Constant Harvest in Predators. *J. Applied Mathematics and Computation*. 193-211.

Skalski, G. T. dan J. F. Gilliam. 2001. Functional Responses with Predator Interference : Viable Alternatives to the Holling Type II Model. *J. Ecology*. 82(11): 3083-3092.

Tarumingkeng, R. C. 1994. *Dinamika Populasi : Kajian Ekologi Kuantitatif*. Jakarta: Pustaka Sinar Harapan dan Universitas Kristen krida Wacana.

Wuhaib, S. A. dan Y. A. Hasan. 2013. Predator-Prey interactions with harvesting of predator with prey in refuge. *J. Commun. Math. Biol. Neurosci.* 2013: 1.

Zhuang, K. dan Z. Wen. 2011. Dynamical behaviors in a discrete predator-prey model with a prey refuge. *J. World Academy of Science, Engineering, & Technology.* 56: 679.



**Lampiran 1. Titik Kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$ .**

Pandang nilai eigen titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$ , yakni  $\lambda_1 = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)}$  dan  $\lambda_2 = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right)$ . Perhatikan bahwa  $\frac{s^n}{n\Gamma(n)} > 0$ , sehingga  $|\lambda_1| > 1$ . Hal ini menyebabkan titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  selalu tidak stabil. Titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  bersifat sadel jika  $|\lambda_2| < 1$ , sumber jika  $|\lambda_2| > 1$ , dan nonhiperbolik jika  $|\lambda_2| = 1$ . Berikut analisis sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$ .

(1) Titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  bersifat sadel jika  $|\lambda_2| < 1$ .

$$\begin{aligned} & \left| 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) \right| < 1 \\ -1 < & 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) < 1 \\ -2 < & \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) < 0 \\ -2n\Gamma(n) < & s^n \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) < 0 \\ \frac{-2n\Gamma(n)}{\frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta} > & s^n > 0 \\ \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1+\alpha\xi)}{\beta\xi - \delta(1+\alpha\xi)}} > & s > 0. \end{aligned}$$

(2) Titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  bersifat sumber jika  $|\lambda_2| > 1$ .

$$\begin{aligned} \lambda_2 < & -1 \\ 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) < & -1 \\ \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) < & -2 \\ s > & \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1+\alpha\xi)}{\beta\xi - \delta(1+\alpha\xi)}} \end{aligned}$$

dan

$$\lambda_2 > 1$$

$$1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) > 1$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) > 0$$

$$s > 0$$

(3) Titik kesetimbangan  $E_0 = (0,0)$  bersifat nonhiperbolik jika  $|\lambda_2| = 1$ .

$$\lambda_2 = 1$$

$$1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) = 1$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) = 0$$

$$s = 0$$

dan

$$-\lambda_2 = 1$$

$$-1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) = 1$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} - \delta \right) = -2$$

$$s = \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1+\alpha\xi)}{\beta\xi - \delta(1+\alpha\xi)}}$$

Ketiga kondisi di atas terpenuhi dengan syarat  $\frac{\beta\xi}{1+\alpha\xi} < \delta$ .



**Lampiran 2. Titik Kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$**

Perhatikan nilai eigen titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$ , yakni  $\lambda_1 = 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)}$  dan  $\lambda_2 = 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right)$ . Berikut akan dianalisis sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$ .

(1) Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat stabil apabila  $|\lambda_1| < 1$  dan  $|\lambda_2| < 1$ .

$$\begin{aligned}
 |\lambda_1| &< 1 \\
 -1 &< 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} < 1 \\
 -2 &< -\frac{s^n}{n\Gamma(n)} < 0 \\
 2 &> \frac{s^n}{n\Gamma(n)} > 0 \\
 0 &< s < \sqrt[n]{2n\Gamma(n)} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 |\lambda_2| &< 1 \\
 -1 &< 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) < 1 \\
 -2 &< \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) < 0 \\
 0 &< s < \sqrt[n]{C_1} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

dengan  $C_1 = \frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \delta)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}$ . Dari persamaan (4.1) dan (4.2), dapat disimpulkan titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat stabil apabila

$$0 < s < \min \left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\}.$$

(2) Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sadel jika  $|\lambda_1| < 1$  dan  $|\lambda_2| > 1$  atau  $|\lambda_1| > 1$  dan  $|\lambda_2| < 1$ . Jika  $|\lambda| > 1$ , maka  $\lambda < -1$  dan  $\lambda > 1$ .

(a) Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sadel jika  $|\lambda_1| < 1$  dan  $|\lambda_2| > 1$ .

$$\begin{aligned} \lambda_2 &< -1 \\ 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) &< -1 \\ \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) &< -2 \\ s &> \sqrt[n]{C_2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

dengan  $C_2 = \frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \delta)}{\beta((1-c')\gamma + \xi) - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}$  dan

$$\begin{aligned} \lambda_2 &> 1 \\ 1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) &> 1 \\ \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) &> 0 \\ s &> 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Berdasarkan pada persamaan (4.1), (4.3), dan (4.4), titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sadel jika

$$\sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \delta)}{\beta((1-c')\gamma + \xi) - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} < s < \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}. \quad (4.5)$$

(b) Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sadel jika  $|\lambda_1| > 1$  dan  $|\lambda_2| < 1$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 &< -1 \\ 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} &< -1 \\ \frac{s^n}{n\Gamma(n)} &> 2 \\ s &> \sqrt[n]{2n\Gamma(n)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dan



$$\begin{aligned} \lambda_1 &> -1 \\ 1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} &> 1 \\ s &< 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dari persamaan (4.2), (4.6), dan (4.7), titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sadel jika

$$\sqrt[n]{2n\Gamma(n)} < s < \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \delta)}{\beta((1 - c')\gamma + \xi) - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \tag{4.8}$$

Disimpulkan dari persamaan (4.5) dan (4.8) bahwa titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sadel apabila

$$\begin{aligned} \min &\left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1 - c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\} < s < \\ \max &\left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1 - c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\} \end{aligned}$$

(3) Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sumber apabila  $|\lambda_1| > 1$  dan  $|\lambda_2| > 1$ .

Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  bersifat sumber apabila

$$s > \max \left\{ \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}, \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1 - c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}} \right\}$$

(4) Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$  akan bersifat nonhiperbolik jika  $|\lambda_1|, |\lambda_2| = 1$ .

Jika  $|\lambda| = 1$  maka  $\lambda = 1$  dan  $-\lambda = 1$ .

(a)  $|\lambda_1| = 1$

$$1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} = 1$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} = 0$$

$$s = 0$$

dan

$$-1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} = 1$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} = 2$$

$$s = \sqrt[n]{2n\Gamma(n)} \quad (4.9)$$

(b)  $|\lambda_2| = 1$

$$1 + \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) = 1$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) = 0$$

$$s = 0$$

dan

$$-1 - \frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) = 1$$

$$\frac{s^n}{n\Gamma(n)} \left( \frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} - \delta \right) = -2$$

$$s = \sqrt[n]{C_3} \quad (4.10)$$

dengan  $C_3 = \frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}$ . Dari persamaan (4.9) dan (4.10),

titik kesetimbangan  $(\gamma, 0)$  bersifat nonhiperbolik jika  $s = \sqrt[n]{2n\Gamma(n)}$  atau

$$s = \sqrt[n]{\frac{-2n\Gamma(n)(1 + \alpha\xi + \gamma)}{\beta[(1-c')\gamma + \xi] - \delta(1 + \alpha\xi + \gamma)}}$$

Keempat kondisi di atas terpenuhi dengan syarat  $\frac{\beta[(1-c')\gamma + \xi]}{1 + \alpha\xi + \gamma} > \delta$ .

Lampiran 3. Simulasi Numerik Titik kesetimbangan  $E_1 = (\gamma, 0)$

1 % orde fraksional n = af

2 % Gamma(n) = gamma(af)

3 % gamma = g

4 % c' = c

5 % alpha = a

6 % xi = xi

7 % delta = d

8 % beta = b

9 % s = h (time step)

10 clear all;

11 clc;

13 h=2.07

14 t=0:h:1000;

15 N=length(t);

16 x=zeros(N,1);

17 y=zeros(N,1);

19 a=0.6;

20 g=4;

21 c=0.21;

22 xi=0.2;

23 d=0.9;

24 b=0.15;

26 af=0.9;



```

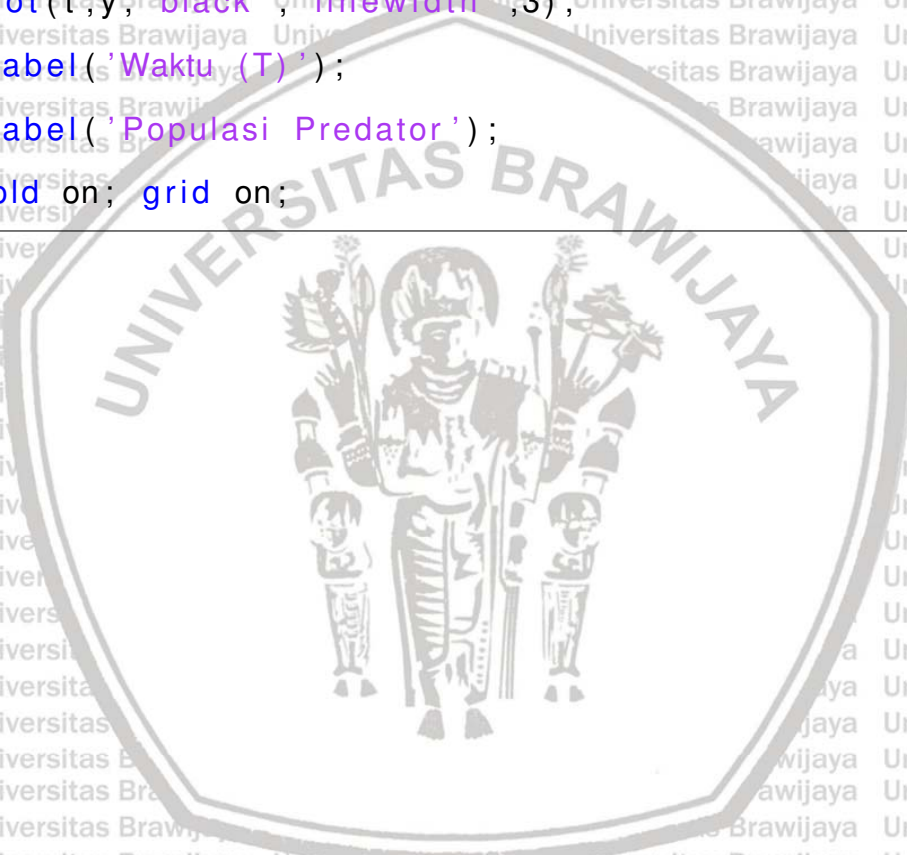
27
28 x(1)=1.5;
29 y(1)=0.5;
30
31 for j=2:N;
32 k1=x(j-1)*(1-x(j-1)/g);
33 k2=(1-c)*x(j-1)*y(j-1)/(1+a*xi+x(j-1));
34 k3=b*y(j-1)*((1-c)*x(j-1)+xi)/(1+a*xi+x(j-1));
35 k4=d*y(j-1);
36
37 fx=k1-k2;
38 fy=k3-k4
39
40 x(j)=x(j-1)+h^af*fx/(af*gamma(af));
41 y(j)=y(j-1)+h^af*fy/(af*gamma(af));
42
43 end
44
45 %xx=(d+a*d*xi-b*xi)/(b*(1-c)-d)
46 %yy=(1-xx/g)*((1+a*xi+xx)/(1-c))
47
48 xx=g
49 yy=0
50
51 %xx=0
52 %yy=0
53
54

```



```

55 figure(1)
56 subplot(2,1,1);
57 plot(t,x,'black','linewidth',3);
58 xlabel('Waktu (T)');
59 ylabel('Populasi Prey');
60 hold on; grid on;
61 subplot(2,1,2);
62 plot(t,y,'black','linewidth',3);
63 xlabel('Waktu (T)');
64 ylabel('Populasi Predator');
65 hold on; grid on;
    
```



### Lampiran 4. Keterangan Bebas Plagiasi

The image shows a screenshot of a plagiarism detection software interface. On the left, a vertical green bar contains the text "plagiarism-detector" and "Cutting-edge class tool for plagiarism detection and prevention." The main area displays a certificate from Universitas Brawijaya. The certificate is titled "SERTIFIKAT BEBAS PLAGIASI" and is issued to Rio Satriyantara for a Master's thesis in Mathematics. The certificate number is 327/UN10.F40/PN/2018. The thesis title is "Diskretisasi Model Predator-Prey Lotka-Volterra Orde Fraksional dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan". The certificate states that the work was checked online on January 29, 2018, and found to be free of plagiarism with a tolerance rate of ≤ 5%. The certificate is signed by Prof. Dr. Abdul Hakim, M.Si, and the Head of the Journal Publication Board, Lukman Hakim, SSI, M.Sc, Dr.Sc. The background of the certificate features a globe and the university's logo.

18 0087 T

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
PASCASARJANA

**SERTIFIKAT BEBAS PLAGIASI**  
Nomor: 327/UN10.F40/PN/2018  
Sertifikat ini diberikan kepada:

Nama : Rio Satriyantara  
NIM : 156090400011001  
Program Studi : Program Magister Matematika  
Fakultas : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas : Universitas Brawijaya

Dengan Judul Tesis  
**Diskretisasi Model Predator-Prey Lotka-Volterra Orde Fraksional dengan Perlindungan Prey dan Makanan Tambahan**

Telah dideteksi tingkat plagiasinya secara online pada tanggal **29 Januari 2018** dan dinyatakan **bebas plagiasi** dengan kriteria toleransi  $\leq 5\%$ .

Malang, 29 Januari 2018  
Ketua Badan Penerbitan Jurnal

Prof. Dr. Abdul Hakim, M.Si  
NIP. 19610202 198503 1 006

Lukman Hakim, SSI, M.Sc, Dr.Sc  
NIP. 19820412 200312 1 002