IDEAL SEMU *FUZZY* INTUISIONISTIK PADA Q-ALJABAR

SKRIPSI

oleh
IWAN GILANG AKBAR ADRYANSAH
165090407111012

PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2021

IDEAL SEMU *FUZZY* INTUISIONISTIK PADA Q-ALJABAR

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh

IWAN GILANG AKBAR ADRYANSAH
165090407111012

PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

IDEAL SEMU *FUZZY* INTUISIONISTIK PADA Q-ALJABAR

oleh
IWAN GILANG AKBAR ADRYANSAH
165090407111012

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 24 Desember 2021
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing

Dr. Drs. Noor Hidayat, M.Si
NIP. 196112041988021001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Syaiful Anam, S.Si., M.T., Ph.D
NIP. 197801152002121003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**Iwan Gilang Akbar Adryansah**
NIM	**:**	**165090407111012**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Ideal Semu *Fuzzy* Intuisionistik Pada Q-aljabar**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.**
2. **Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 7 Oktober 2021
yang menyatakan,

Iwan Gilang Akbar Adryansah
NIM. 165090407111012

IDEAL SEMU *FUZZY* INTUISIONISTIK PADA Q-ALJABAR

ABSTRAK

Pada skripsi ini akan diperkenalkan dan dijelaskan beberapa gagasan mengenai ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar dan mengevaluasi keterkaitan di antaranya. Jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar adalah ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik, ideal c-semu *fuzzy* intuisionistik, dan ideal k-semu utuh *fuzzy* intuisionistik.

Kata kunci: *Q-aljabar semu, Q-aljabar semu terbatas, ideal semu, himpunan fuzzy intuisionistik.*

INTUITIONISTIC FUZZY PSEUDO IDEALS IN Q-ALGEBRA

ABSTRACT

In this paper, we will introduce and illustrate several ideas of intuitionistic fuzzy pseudo ideal in Q-algebra and evaluate their relationship. Present several types in this paper of intuitionistic fuzzy pseudo ideal in Q-algebra, called intuitionistic fuzzy k-pseudo ideal, intuitionistic fuzzy c-pseudo ideal, intuitionistic fuzzy complete k-pseudo ideal.

Keywords: *pseudo Q-algebra, bounded pseudo Q-algebra, pseudo ideal, intuitionistic fuzzy set.*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan bidang ilmu dasar yang mempunyai peran penting dalam perkembangan matematika. Struktur aljabar yang merupakan salah satu subbidang dalam aljabar adalah ilmu yang mempelajari suatu himpunan dengan satu atau lebih operasi biner. Dalam skripsi ini akan dibahas mengenai struktur aljabar yang berkaitan dengan Q-aljabar.

Q-aljabar diperkenalkan pertama kali oleh Kim, dkk. (2001) dengan definisinya adalah himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner $*$ dan elemen khusus 0.

Teori himpunan *fuzzy* diperkenalkan pertama kali pada tahun 1965 oleh Zadeh. Pada tahun 1986, Atanassov memperkenalkan himpunan *fuzzy* intuisionistik sebagai perkembangan dari teori himpunan *fuzzy*. Pada tahun 2019, Jawad memperkenalkan gagasan baru tentang ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-Aljabar semu (*pseudo Q-algebra*). Kemudian pada tahun 2020, Abdullah dan Shadhan meneliti tentang jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-Aljabar semu, dan menjelaskan keterkaitan di antaranya.

Dalam skripsi ini dikaji ulang definisi dan sifat-sifat dari hasil penelitian Abdullah dan Shadhan (2020).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini adalah

1. Apa saja jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik padaQ-aljabar semu?
2. Bagaimana sifat dari jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu?
3. Bagaimana keterkaitan jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. Menjelaskan jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu.
2. Menjelaskan sifat jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu.
3. Membahas keterkaitan jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini akan diberikan definisi beserta contoh dari pemetaan, operasi biner, himpunan *fuzzy*, himpunan *fuzzy* intuisionistik, Q-aljabar, dan ideal semu, yang selanjutnya digunakan sebagai acuan untuk membahas ideal semu *fuzzy* intuisionistik.

2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Berikut diberikan definisi relasi, pemetaan, dan operasi biner, yang dirujuk dari Marsudi (2010), dan Hidayat (2017).

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesian)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Hasil kali kartesian dari A dan B dilambangkan dengan $A \times B$ adalah himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, dinotasikan

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$, dan $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, diperoleh hasil kali kartesiannya adalah

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (1, 12), (2, 7), \\ &(2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11), (2, 12), (3, 7), (3, 8), \\ &(3, 9), (3, 10), (3, 11), (3, 12)\}. \end{aligned}$$

Definisi 2.1.3 (Relasi)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Suatu relasi R dari A ke B merupakan himpunan bagian dari $A \times B$, atau $R \subseteq A \times B$. Kemudian jika $(a, b) \in R$ maka dikatakan a berelasi dengan b oleh R, dan dilambangkan dengan aRb. Jika a tidak berelasi dengan b oleh R maka $(a, b) \notin R$. Jika $A = B$ maka dapat dikatakan $R \subseteq A \times A$ adalah relasi biner pada A.

Contoh 2.1.4

Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 16, 20, 25, 30, 36, 44, 50\} = B$, dan didefinisikan R relasi "kuadrat dari" pada A,

$$aRb \leftrightarrow a = b^2,$$

sehingga $R = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5), (36, 6)\}$.

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)

Suatu pemetaan dari himpunan D ke himpunan K adalah suatu aturan pengawanan yang mengawankan setiap elemen dari D dengan tepat satu elemen pada K. Himpunan D selanjutnya disebut sebagai domain dan himpunan K disebut sebagai kodomain dari pemetaan.

Contoh 2.1.6

Diberikan himpunan bilangan real **R** dan suatu relasi f dari **R** ke **R** dengan $f(x) = \frac{x}{2} + 2x$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Akan dibuktikan f adalah pemetaan.

Jawab.

Ambil sembarang $u, v \in \mathbf{R}$ dengan $u = v$. Diperoleh

$$u = v$$

$$\frac{u}{2} + 2u = \frac{v}{2} + 2v$$

$$f(u) = f(v),$$

terbukti f adalah pemetaan.

Definisi 2.1.7 (Operasi Biner)

Suatu operasi biner "$\ast$" pada himpunan tak kosong H adalah pemetaan dengan domain $H \times H$ dan kodomain H dengan

$$(u, v) \to \ast(u, v) \equiv u \ast v$$

untuk setiap $(u, v) \in H \times H$.

Dua hal yang perlu dicermati tentang operasi. Pertama bahwa operasi tersebut merupakan pemetaan, dan kedua bahwa hasil operasi harus merupakan elemen dari himpunan kodomainnya. Jika kedua hal ini dipenuhi, maka dapat dikatakan bahwa operasi tersebut terdefinisi dengan baik. Di samping operasi biner, ada juga operasi lain, seperti operasi triner, kuartiner, dan lain-lain. Jenis operasi ini tergantung pada domain yang digunakan. Untuk operasi dengan domain berbentuk $H \times H \times H$ diperoleh operasi *terner*, sedangkan operasi dengan domain berbentuk $H \times H \times H \times H$ diperoleh operasi *kuartener*, dan lain sebagainya.

Contoh 2.1.8

Diberikan R himpunan bilangan real. Didefinisikan relasi ” $\ast$” pada himpunan bilangan real tersebut, sebagai berikut.

$$\ast : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$$

$$(u, v) \rightarrow \ast(u, v) \equiv u \ast v = \frac{u}{2} + 3v$$

Pertanyaan: apakah ”$\ast$” operasi yang terdefinisi dengan baik?

Jawab.

Jelas bahwa $\frac{u}{2} + 3v \in \mathrm{R}$, $\forall u, v \in \mathrm{R}$. Selanjutnya akan diperiksa apakah ”$\ast$” merupakan pemetaan? Ambil sembarang $u, v, w, y \in \mathrm{R}$, sedemikian sehingga $(u, v) = (w, y)$, diperoleh

$$\ast(u, v) \equiv u \ast v = \frac{u}{2} + 3v,$$

lalu karena $u = w$, dan $v = y$, maka

$$\frac{u}{2} + 3v = \frac{w}{2} + 3y,$$

dengan demikian

$$\ast(u, v) \equiv u \ast v = \frac{u}{2} + 3v = \frac{w}{2} + 3y = \ast(w, y).$$

Jadi ”$\ast$” adalah pemetaan, sehingga dapat disimpulkan bahwa ”$\ast$” merupakan operasi biner yang terdefinisi dengan baik.

2.2 Himpunan *Fuzzy*

Berikut diberikan definisi dan contoh himpunan *fuzzy*, irisan himpunan *fuzzy*, gabungan himpunan *fuzzy*, dan komplemen himpunan *fuzzy* yang dirujuk dari artikel Zadeh (1965).

Definisi 2.2.1 (Himpunan *Fuzzy*)

Suatu himpunan *fuzzy* A dari himpunan tak kosong X adalah suatu objek yang memiliki bentuk

$$A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in X\},$$

dengan f_A adalah fungsi yang memetakan X ke interval $[0, 1]$, dan disebut sebagai fungsi keanggotaan dari A. Kemudian $f_A(x)$ disebut sebagai derajat keanggotaan dari $x \in X$.

Contoh 2.2.2

Diberikan $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, serta didefinisikan himpunan *fuzzy* $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in X\}$ pada X dengan derajat keanggotan $f_A(x)$ sebagai berikut.

$$f_A(x) = \begin{cases} 0.1 & x = 0, 1, \\ 0.2 & x = 2, 3, \\ 0.35 & x = 4, \\ 0.7 & x = 5, \\ 0.65 & x = 6, \\ 0.95 & x = 7, \end{cases}$$

diperoleh anggota himpunan *fuzzy* A pada X,

$A = \{(0, 0.1), (1, 0.1), (2, 0.2), (3, 0.2), (4, 0.35), (5, 0.7),$
$(6, 0.65), (7, 0.95)\}$.

Definisi 2.2.3 (Irisan Himpunan *Fuzzy*)

Misalkan A dan B adalah dua himpunan *fuzzy* pada himpunan X, dengan $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in X\}$, dan $B = \{(x, f_B(x)) \mid x \in X\}$. Irisan dua himpunan *fuzzy* A dan B adalah himpunan $C = A \cap B$ yang memiliki bentuk

$$C = A \cap B = \{(x, f_C(x)) \mid x \in X\},$$

dengan $f_C(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$.

Contoh 2.2.4

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 4, $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, serta didefinisikan himpunan *fuzzy* $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in \mathbb{Z}_4\}$ dan $B = \{(x, f_B(x)) \mid x \in \mathbb{Z}_4\}$ pada $\mathbb{Z}_4$ dengan derajat keanggotaan berturut-turut $f_A(x)$ dan $f_B(x)$ sebagai berikut.

$$f_A(x) = \begin{cases} 0.15 & x = 0, \\ 0.2 & x = 1, \\ 0.5 & x = 2, \\ 0.7 & x = 3, \end{cases}$$

$$f_B(x) = \begin{cases} 0.3 & x = 0, \\ 0.1 & x = 1, \\ 0.5 & x = 2, \\ 0.6 & x = 3, \end{cases}$$

sehingga

$$A = \{(0, 0.15), (1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.7)\}$$
$$B = \{(0, 0.3), (1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.6)\}.$$

Akan ditentukan irisan himpunan *fuzzy* A dan B.

Jawab.
Irisan himpunan *fuzzy* A dan B adalah

$$C = A \cap B = \{(0, 0.15), (1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.6)\}.$$

Definisi 2.2.5 (Gabungan Himpunan *Fuzzy*)

Misalkan A dan B adalah dua himpunan *fuzzy* pada himpunan X, dengan $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in X\}$, dan $B = \{(x, f_B(x)) \mid x \in X\}$. Gabungan dua himpunan *fuzzy* A dan B adalah himpunan $C = A \cup B$ yang memiliki bentuk

$$C = A \cup B = \{(x, f_C(x)) \mid x \in X\},$$

dengan $f_C(x) = \text{maks}\{f_A(x), f_B(x)\}$.

Contoh 2.2.6

Diberikan himpunan $X = \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31\}$, dan didefinisikan himpunan *fuzzy* $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in X\}$ dan $B = \{(x, f_B(x)) \mid x \in X\}$ pada X dengan derajat keanggotaan berturut-turut $f_A(x)$ dan $f_B(x)$ sebagai berikut.

$$f_A(x) = \begin{cases} 0.06 & x = 1, 3, 5, \\ 0.33 & x = 7, 11, \\ 0.62 & x = 13, 17, \\ 0.88 & x = 19, 23, 31, \end{cases}$$

$$f_B(x) = \begin{cases} 0.11 & x = 1, 7, 11, \\ 0.38 & x = 3, 17, \\ 0.56 & x = 5, 23, 31, \\ 1 & x = 13, 19, \end{cases}$$

sehingga

$$A = \{(1, 0.06), (3, 0.06), (5, 0.06), (7, 0.33), (11, 0.33), (13, 0.62), (17, 0.62), (19.0.88), (23, 0.88), (31, 0.88)\},$$

$$B = \{(1, 0.11), (3, 0.38), (5, 0.56), (7, 0.11), (11, 0.11), (13, 1), (17, 0.38), (19, 1), (23, 0.56), (31, 0.56)\}.$$

Akan ditentukan gabungan himpunan *fuzzy* A dan B.

Jawab.

Gabungan himpunan *fuzzy* A dan B adalah

$$D = A \cup B = \{(1, 0.11), (3, 0.38), (5, 0.56), (7, 0.33), (11, 0.33) (13, 1), (17, 0.62), (19, 1), (23, 0.88), (31, 0.88)\}.$$

Definisi 2.2.7 (Komplemen Himpunan *Fuzzy*)

Misalkan A adalah himpunan *fuzzy* pada himpunan tak kosong X, dengan $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in X\}$. Komplemen dari himpunan *fuzzy* A adalah himpunan A^C yang memiliki bentuk

$$A^C = \{(x, f_A^{\rceil}(x)) \mid x \in X\},$$

dengan $f_A^{\rceil}(x) = 1 - f_A(x)$.

Contoh 2.2.8

Berdasarkan Contoh 2.2.2, akan ditentukan komplemen himpunan *fuzzy* A.

Jawab.

Berdasarkan Definisi 2.2.7, komplemen himpunan *fuzzy* A adalah

$$A^C = \{(0, 0.9), (1, 0.9), (2, 0.2), (3, 0.8), (4, 0.65), (5, 0.3) \\ (6, 0.35), (7, 0.05)\}$$

2.3 Himpunan *Fuzzy* Intuisionistik

Berikut diberikan definisi dan contoh himpunan *fuzzy* intuisionistik beserta operasinya yang dirujuk dari Atanassov (1986).

Definisi 2.3.1 (Himpunan *Fuzzy* Intuisionistik)

Suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik A pada himpunan tak kosong X adalah suatu objek yang memiliki bentuk

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\},$$

dengan μ_A dan ν_A adalah fungsi yang memetakan X ke interval $[0, 1]$ dan secara berturut-turut disebut sebagai fungsi keanggotaan dan fungsi non-kenggotaan dari A. Kemudian $\mu_A(x)$ dan $\nu_A(x)$ secara berturut-turut disebut sebagai derajat keanggotaan dan derajat non-keanggotaan dari $x \in X$, serta berlaku

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1.$$

Contoh 2.3.2

Diberikan himpunan tak kosong $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\}$ pada X, dengan derajat keanggotaan dan derajat non-keanggotaan $\mu_A(x)$ dan $\nu_A(x)$ sebagai berikut.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.04 & x = 1, \\ 0.25 & x = 2, \\ 0.14 & x = 3, \\ 0.7 & x = 4, \\ 0.5 & x = 5, \end{cases}$$

$$
\nu_A(x) = \begin{cases} 0.76 & x = 1, \\ 0.5 & x = 2, \\ 0.78 & x = 3, \\ 0.25 & x = 4, \\ 0.4 & x = 5. \end{cases}
$$

Diperoleh himpunan *fuzzy* intuisionistik A,

$A = \{(1, 0.04, 0.76), (2, 0.25, 0.5), (3, 0.14, 0.78), (4, 0.7, 0.25), (5, 0.5, 0.4)\}$.

Definisi 2.3.3 (Operasi pada Himpunan *Fuzzy* Intuisionistik)

Untuk setiap dua himpunan *fuzzy* intuisionistik A dan B pada himpunan X, dengan $A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\}$, dan $B = \{(x, \mu_B(x), \nu_B(x)) \mid x \in X\}$. Berlaku operasi dan relasi sebagai berikut.

1. $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dan $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$,
2. $A^C = \{(x, \nu_A(x), \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ (komplemen),
3. $A = B$ jika dan hanya jika $\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$ dan $\nu_A(x) = \nu_B(x)$,
4. $A \cap B = \{(x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{maks}(\nu_A(x), \nu_B(x))) \mid x \in X\}$,
5. $A \cup B = \{(x, \text{maks}(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x))) \mid x \in X\}$.

Contoh 2.3.4

Diberikan $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, serta didefinisikan himpunan *fuzzy* intuisionistik A dan B pada X, dengan derajat keanggotaan dan derajat non-keanggotaan seperti pada Tabel 2.1.

Sehingga $A = \{(2, 0.11, 0.6), (4, 0.7, 0.15), (6, 0.6, 0.2), (8, 0.15, 0.4), (10, 0.3, 0.35), (12, 0.4, 0.6)\}$, dan

$B = \{(2, 0.2, 0.55), (4, 0.43, 0.2), (6, 0.52, 0.3), (8, 0.8, 0.1), (10, 0.6, 0.19), (12, 0.03, 0.9)\}$.

Tabel 2.1: Derajat Keanggotaan dan Derajat Non-Keanggotaan.

x	$\mu_A(x)$	$\nu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\nu_B(x)$
2	0.11	0.6	0.2	0.55
4	0.7	0.15	0.43	0.2
6	0.6	0.2	0.52	0.3
8	0.15	0.4	0.8	0.1
10	0.3	0.35	0.6	0.19
12	0.4	0.6	0.03	0.9

Akan ditentukan $A \cap B$ dan $A \cup B$.

Jawab.
Berdasarkan definisi 2.3.3,

$A \cap B = \{(2, 0.11, 0.6), (4, 0.43, 0.2), (6, 0.52, 0.0.3), (8, 0.15, 0.4),$
$(10, 0.3, 0.35), (12, 0.03, 0.9)\},$

$A \cup B = \{(2, 0.2, 0.55), (4, 0.7, 0.15), (6, 0.6, 0.2), (8, 0.8, 0.1),$
$(10, 0.6, 0.19), (12, 0.4, 0.6)\}.$

2.4 Q-Aljabar

Berikut diberikan definisi Q-aljabar, ideal *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar, dan sifat-sifatnya yang dirujuk dari Kim, dkk. (2001), Abdullah dan Jawad (2019), dan Abdullah dan Shadhan (2020).

Definisi 2.4.1 (Q-aljabar)
Q-aljabar adalah suatu himpunan M yang dilengkapi dengan satu operasi biner $*$ serta elemen khusus 0, yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $m * m = 0, \ \forall m \in M,$
2. $m * 0 = m, \ \forall m \in M,$
3. $(m * b) * d = (m * d) * b, \ \forall \ m, b, d \in M.$

Selanjutnya Q-aljabar dinotasikan $(M, *, 0)$.

Contoh 2.4.2

Diberikan Z adalah himpunan semua bilangan bulat. $(Z, -, 0)$ merupakan Q-aljabar, karena $a - a = 0$, dan $a - 0 = a$, $\forall a \in Z$, serta $(a - b) - c = (a - c) - b$, $\forall a, b, c \in Z$.

Catatan 2.4.3

Pada Q-aljabar M dapat didefinisikan suatu relasi biner "$\leq$", yaitu $m \leq b$ jika dan hanya jika $m * b = 0$, $\forall m, b \in M$.

Definisi 2.4.4 (Q-aljabar terbatas)

Suatu Q-aljabar $(M, *, 0)$ disebut terbatas jika terdapat suatu elemen $e \in M$, yang memenuhi $m \leq e$, $\forall m \in M$. Kemudian e disebut sebagai "unit". Selanjutnya $e * m$ akan dinotasikan sebagai m^* untuk setiap $m \in M$ pada Q-aljabar terbatas.

Contoh 2.4.5

Diberikan himpunan $M = \{0, \alpha, \beta, \gamma\}$ dilengkapi satu operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagaimana pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Operasi $*$ pada M

$*$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	0	0	0
γ	γ	γ	γ	0

M adalah Q-aljabar terbatas dengan unit γ, karena memenuhi ketiga aksioma Q-aljabar seperti pada Definisi 2.4.1, dan untuk $\gamma \in M$, berlaku $m * \gamma = 0$, $\forall m \in M$.

Teorema 2.4.6

Pada suatu Q-aljabar terbatas M, untuk sembarang $m, b \in M$, dan elemen $e \in M$ adalah unit, berlaku

1. $e^* = 0$, $0^* = e$,
2. $m^* * b = b^* * m$,

3. $0 * m = 0, \forall m \in M,$

4. $e^* * m = 0,$

5. $m^{**} \leq m.$

Bukti.

1. Berdasarkan Definisi 2.4.1, kondisi (1) dan kondisi (2) Q-aljabar, misalkan $e \in M$ adalah unit, maka $e^* = e * e = 0$, dan $0^* = e * 0 = e.$

2. Berdasarkan Definisi 2.4.1, kondisi (3) Q-aljabar, maka $m^* * b = (e * m) * b = (e * b) * m = b^* * m, \forall\ e, m, b \in M.$

3. Diberikan $e \in M$ adalah unit, dan k adalah sembarang elemen di M, maka $k * e = 0$. Selanjutnya dimisalkan $k = (0 * m)$ dengan $m \in M$, maka diperoleh $(0 * m) * e = 0$, lalu berdasarkan Definisi 2.4.1, kondisi (3) Q-aljabar, diperoleh

$$(0 * m) * e = (0 * e) * m = 0 * m = 0.$$

   Terbukti.

4. Berdasarkan Definisi 2.4.1, kondisi (1) Q-aljabar, misalkan $e \in M$ adalah unit dan $m \in M$, maka $e^* * m = (e * e) * m = 0 * m = 0.$

5. Berdasarkan Definisi 2.4.1 kondisi (3) Q-aljabar, dimisalkan $e \in M$ adalah unit, dan m sembarang elemen di M, maka

$$\begin{aligned} m^{**} * m &= (e * (e * m)) * m \\ &= (e * m) * (e * m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Diperoleh $m^{**} * m = 0$. Selanjutnya berdasarkan Catatan 2.4.3, diketahui bahwa $m \leq b$ jika dan hanya jika $m * b = 0, \forall m, b \in M$. Karena $m^{**} * m = 0$, maka $m^{**} \leq m.$ Terbukti.

Definisi 2.4.7 (*Involutory* Q-aljabar)

Misalkan M adalah Q-aljabar terbatas. Suatu elemen $m \in M$ yang memenuhi $m^{**} = m$ disebut involusi. Jika setiap elemen $m \in M$ adalah involusi, M disebut *involutory* Q-aljabar.

Contoh 2.4.8

Diberikan himpunan $M = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ dilengkapi satu operasi biner $\star$ yang didefinisikan sebagaimana pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3: Operasi $\star$ pada M

$\star$	0	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0	0
α	α	0	α	0	0
β	β	β	0	0	0
γ	γ	β	α	0	δ
δ	δ	0	0	0	0

Diperoleh M merupakan Q-aljabar terbatas dengan unit γ. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa M merupakan *involutory* Q-aljabar.

Jawab.

Diberikan tabel hasil operasi m^*, dan m^{**} dengan $m \in M$ sebagaimana pada tabel 2.4.

Tabel 2.4: Hasil operasi m^* dan m^{**}

m	m^*	m^{**}
0	$\gamma \star 0 = \gamma$	$\gamma \star \gamma = 0$
α	$\gamma \star \alpha = \beta$	$\gamma \star \beta = \alpha$
β	$\gamma \star \beta = \alpha$	$\gamma \star \alpha = \beta$
γ	$\gamma \star \gamma = 0$	$\gamma \star 0 = \gamma$
δ	$\gamma \star \delta = \delta$	$\gamma \star \delta = \delta$

Terbukti M merupakan *involutory* Q-aljabar, karena setiap elemen $m \in M$ adalah involusi, atau memenuhi $m^{**} = m$.

Definisi 2.4.9 (Ideal *Fuzzy* Intuisionistik pada Q-aljabar)

Misalkan A adalah himpunan *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar $(M, *, 0)$ dengan $A = \{\langle m, \mu_A(m), \nu_A(m)\rangle \mid m \in M\}$. A disebut ideal *fuzzy* intuisionistik jika memenuhi

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M$,
2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m), \forall m \in M$,
3. $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(b)\}\ \forall m, b \in M$,
4. $\nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m * b), \nu_A(b)\}\ \forall m, b \in M$.

Contoh 2.4.10

Berdasarkan Contoh 2.4.5, didefinisikan himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\}$ pada M, dengan

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0.7, & m = 0, \\ 0.5, & m = \alpha, \beta, \gamma, \end{cases}$$

dan

$$\nu_A(m) = \begin{cases} 0.2, & m = 0, \\ 0.4, & m = \alpha, \beta, \gamma. \end{cases}$$

A adalah ideal *fuzzy* intuisionistik, karena

- $\mu_A(0) \geq \mu_A(m)$ dan $\nu_A(0) \leq \nu_A(m)\ \forall m \in M$,
- $\mu_A(m) = 0.5 \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(b)\}\ \forall m, b \in M$,
- $\nu_A(m) = 0.4 \leq \text{maks}\{\nu_A(m * b), \nu_A(b)\}\ \forall m, b \in M$.

2.5 Q-Aljabar Semu

Berikut diberikan definisi dan contoh dari Q-aljabar semu, Q-aljabar semu terbatas, *involutory* Q-aljabar semu, subaljabar semu (*pseudo subalgebra*), ideal semu (*pseudo ideal*), ideal semu utuh (*complete pseudo ideal*), dan ideal k-semu utuh (*complete k-pseudo ideal*), yang dirujuk dari Abdullah dan Jawad (2019).

Definisi 2.5.1 (Q-aljabar Semu)

Suatu Q-aljabar semu adalah himpunan tak kosong M yang dilengkapi dengan elemen khusus 0 dan dua operasi biner $*$ dan $\diamond$, serta memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $m * m = m \diamond m = 0, \forall m \in M$,
2. $m * 0 = m \diamond 0 = m, \forall m \in M$,
3. $(m * u) \diamond p = (m \diamond p) * u, \forall m, u, p \in M$.

Selanjutnya Q-aljabar semu dinotasikan sebagai $(M, *, \diamond, 0)$.

Contoh 2.5.2

Diberikan himpunan $M = \{0, 1, 2\}$ dilengkapi dengan dua operasi biner $*$ dan $\diamond$ yang didefinisikan sebagaimana pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5: Operasi $*$ dan $\diamond$ pada M.

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0

$\diamond$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0

$(M, *, \diamond, 0)$ adalah Q-aljabar semu, karena memenuhi ketiga kondisi Q-aljabar semu.

Catatan 2.5.3

Pada Q-aljabar semu M, dapat didefinisikan suatu relasi biner "≤", dengan $m \leq b$ jika dan hanya jika $m * b = 0$ dan $m \diamond b = 0, \forall m, b \in M$.

Definisi 2.5.4 (Q-aljabar Semu Terbatas)

Suatu Q-aljabar semu M disebut terbatas jika terdapat $e \in M$ yang memenuhi $m \leq e, \forall m \in M$, atau $m \leq e \Leftrightarrow m * e = 0$ dan $m \diamond e = 0$. Kemudian e disebut sebagai "unit semu" dari M. Q-aljabar semu yang disertai unit semu disebut terbatas. Selanjutnya pada Q- aljabar semu terbatas M, $e * m$ dan $e \diamond m$ akan dinotasikan sebagai m^*dan m°.

Contoh 2.5.5

Diberikan himpunan $M = \{0, \alpha, \beta, \gamma\}$ yang dilengkapi dua operasi biner $\star$ dan $\diamond$ sebagaimana didefinisikan pada Tabel 2.6.

Tabel 2.6: Operasi $\star$ dan $\diamond$ pada M.

$\star$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	β	0	α
γ	γ	γ	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	γ	0	γ
γ	γ	γ	0	0

$(M, \star, \diamond, 0)$ adalah Q-aljabar semu terbatas dengan unit semu β, karena untuk setiap $m \in M$, memenuhi ketiga kondisi Q-aljabar semu seperti pada Definisi 2.5.1, serta untuk $\beta \in M$ memenuhi $m \star \beta = 0$, dan $m \diamond \beta = 0, \forall m \in M$.

Teorema 2.5.6

Misalkan $(M, \star, \diamond, 0)$ adalah Q-aljabar semu terbatas dengan $e \in M$ adalah unit semu, maka $(M, \star, \diamond, 0)$ memenuhi pernyataan berikut.

1. $e^{*} = 0 = e^{\circ}$,
2. $m^{*} \diamond b = b^{\circ} \star m, \forall m, b \in M$,
3. $m^{*} \diamond b^{*} = (b^{*})^{\circ} \star m, \forall m, b \in M$,
4. $m^{\circ} \star b^{\circ} = (b^{\circ})^{*} \diamond m, \forall m, b \in M$.

Bukti.

1. Berdasarkan Definisi 2.5.1 kondisi (1) Q-aljabar semu, maka $e \star e = 0 = e \diamond e$.
2. Berdasarkan Definisi 2.5.1 kondisi (3) Q-aljabar semu, maka $m^{*} \diamond b = (e \star m) \diamond b = (e \diamond b) \star m = b^{\circ} \star m$.
3. Berdasarkan Definisi 2.5.1 kondisi (3) Q-aljabar semu, maka $m^{*} \diamond b^{*} = (e \star m) \diamond (e \star b) = (e \diamond (e \star b)) \star m = (b^{*})^{\circ} \star m$.

4. Berdasarkan Definisi 2.5.1 kondisi (3) Q-aljabar semu, maka $m^o * b^o = (e \diamond m) * (e \diamond b) = (e * (e \diamond b)) \diamond m = (b^o)^* \diamond m$.

Definisi 2.5.7 (Subaljabar Semu)

Misalkan $(M, *, \diamond, 0)$ adalah Q-aljabar semu terbatas, dan $\emptyset \neq I \subseteq M$. I disebut subaljabar semu dari M jika $m * b, m \diamond b \in I$, $\forall m, b \in I$.

Contoh 2.5.8

Berdasarkan Contoh 2.5.5, diberikan $I \subseteq M$, dengan $I = \{0, \alpha, \gamma\}$, maka I adalah subaljabar semu dari M, karena berlaku $m * b, m \diamond b \in I, \forall m, b \in I$.

Tabel 2.7: Operasi $*$ dan $\diamond$ pada I.

$*$	0	α	γ
0	0	0	0
α	α	0	0
γ	γ	γ	0

$\diamond$	0	α	γ
0	0	0	0
α	α	0	0
γ	γ	γ	0

Definisi 2.5.9 (Ideal Semu *Fuzzy* - "*Fuzzy Pseudo Ideal*")

Misalkan M adalah Q-aljabar semu. Suatu himpunan *fuzzy* A pada M dengan $A = \{(m, \mu_A(m)) \mid m \in M\}$ disebut ideal semu *fuzzy* jika memenuhi

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M$,
2. $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}, \forall m, b \in M$.

Contoh 2.5.10

Berdasarkan Contoh 2.5.5, didefinisikan himpunan *fuzzy* $A = \{(m, \mu_A(m)) | m \in M\}$ pada M dengan

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0.8, & m = 0, \alpha, \\ 0.6, & m = \beta, \gamma, \end{cases}$$

sehingga A adalah ideal semu *fuzzy*, karena

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m)$, $\forall m \in M$,

2. $\mu_A(m) = 0.6 \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\} = 0.6$, $\forall m \in M \setminus \{0, \alpha\}$ dan $\forall b \in M$.

Definisi 2.5.11 (Ideal Semu)

Misalkan $(M, *, \diamond, 0)$ adalah Q-aljabar semu, dan I himpunan bagian tak kosong dari M, I disebut ideal semu dari M jika untuk setiap $m, b \in I$ berlaku

1. $0 \in I$,

2. Untuk $m * b, m \diamond b \in I$, dan $b \in I$, maka $m \in I$.

Contoh 2.5.12

Diberikan Q-aljabar semu terbatas $(M, *, \diamond, 0)$ dengan duaoperasi biner $*$ dan $\diamond$ sebagaimana pada Tabel 2.8.

Tabel 2.8: Operasi $*$ dan $\diamond$ pada M.

$*$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	0	0	γ
γ	γ	γ	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	α
β	β	β	0	α
γ	γ	γ	0	0

Himpunan bagian $K = \{0, \alpha\}$ adalah ideal semu dari M, karena $0 \in K$ dan untuk $m * b, m \diamond b \in I$, jika $b \in I$, maka $m \in I$.

Definisi 2.5.13 (Ideal Semu Utuh)

Suatu himpunan bagian tak kosong I pada Q-aljabar semu $(M, *, \diamond, 0)$ disebut ideal semu utuh jika

1. $0 \in I$,

2. Untuk $m * b$, $m \diamond b \in I$, $\forall b \in I$, dan $b \,/\!= 0$, maka $m \in I$, $\forall m \in M$.

Selanjutnya ideal semu utuh disingkat menjadi ideal c-semu.

Contoh 2.5.14

Berdasarkan Contoh 2.5.12, himpunan bagian $I = \{0, \alpha, \gamma\}$ pada M adalah ideal c-semu, karena $0 \in I$, dan untuk $m * b, m \diamond b \in I, \forall b \in I$ dan $b \neq 0$, maka $m \in I$.

Definisi 2.5.15 (Ideal k-Semu)

Suatu himpunan bagian tak kosong G dari Q-aljabar semu terbatas $(M, *, \diamond, 0)$ disebut ideal k^*-semu dari M jika

1. $0 \in G$,
2. Untuk $m^* * b, b^o * m \in G$, dan $b \in G$, maka $m^* \in G, \forall m \in M$,

dan disebut ideal k^o-semu dari M jika

1. $0 \in G$,
2. Untuk $m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$, dan $b \in G$, maka $m^o \in G, \forall m \in M$.

Selanjutnya G disebut ideal k-semu jika G merupakan ideal k^*-semu dan ideal k^o-semu.

Contoh 2.5.16

Diberikan Q-aljabar terbatas $(M, *, \diamond, 0)$ dengan dua operasi biner $*$ dan $\diamond$ sebagaimana pada Tabel 2.9.

Tabel 2.9: Operasi $*$ dan $\diamond$ pada M.

$*$	0	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	0	α
β	β	0	0	β	β
γ	γ	0	γ	0	β
δ	δ	0	δ	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	α
β	β	0	0	0	0
γ	γ	0	δ	0	δ
δ	δ	0	δ	0	0

Diperoleh α adalah unit dari M. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan bagian $G = \{0, \alpha\}$ adalah ideal k-semu dari M.

Jawab.

1. $0 \in G$,

2. Diberikan tabel operasi $m^* \star b$, dan $b^o \star m$ sebagaimana pada Tabel 2.10, dengan $b \in G$, dan $m \in M$.

Tabel 2.10: Operasi $m^* \star b$, dan $b^o \star m$.

b	m	$m^* \star b$	$b^o \star m$	Keterangan	m^*
0	0	α	α	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$\alpha \in G$
α	0	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$\alpha \in G$
0	α	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$0 \in G$
α	α	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$0 \in G$
0	β	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$0 \in G$
α	β	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$0 \in G$
0	γ	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \notin G$	$0 \in G$
α	γ	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$0 \in G$
0	δ	α	α	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$\alpha \in G$
α	δ	0	0	$m^* \star b, b^o \star m \in G$	$\alpha \in G$

Dari Tabel 2.10 diperoleh untuk $m^* \star b, b^o \star m \in G$, dan $b \in G$, maka $m^* \in G$.

3. Diberikan tabel operasi $m^o \diamond b$, dan $b^* \diamond m$ sebagaimana pada Tabel 2.11, dengan $b \in G$, dan $m \in M$.

Tabel 2.11: Operasi $m^o \diamond b$, dan $b^* \diamond m$.

b	m	$m^o \diamond b$	$b^* \diamond m$	Keterangan	m^o
0	0	α	α	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$\alpha \in G$
α	0	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$\alpha \in G$
0	α	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$0 \in G$
α	α	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$0 \in G$
0	β	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$0 \in G$
α	β	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$0 \in G$
0	γ	α	α	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$\alpha \in G$
α	γ	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$\alpha \in G$
0	δ	α	α	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$\alpha \in G$
α	δ	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$	$\alpha \in G$

Dari Tabel 2.11 diperoleh untuk $m^o \diamond b, b^* \diamond m \in G$, dan $b \in G$, maka $m^o \in G$.

Definisi 2.5.17 (Ideal k-Semu Utuh)

Suatu himpunan bagian tak kosong I dari Q-aljabar semu terbatas $(M, *, \diamond, 0)$ disebut ideal k*-semu utuh dari M jika

1. $0 \in I$,

2. Untuk $m^* * b, b^o * m \in I$, $\forall b \in I$ dengan $b \neq 0$, maka $m^* \in I$, $\forall m \in M$,

dan I disebut ideal k^o-semu utuh dari M jika

1. $0 \in I$,

2. Untuk $m^o \diamond b, b^* \diamond m \in I$, $\forall b \in I$ dengan $b \neq 0$, maka $m^o \in I$, $\forall m \in M$.

Kemudian I disebut ideal k-semu utuh jika I merupakan ideal k*-semu utuh dan ideal k^o-semu utuh. Selanjutnya ideal k-semu utuh disingkat menjadi ideal c-k-semu.

Contoh 2.5.18

Berdasarkan Contoh 2.5.5, suatu himpunan bagian $L = \{0, \alpha, \gamma\}$ dari M adalah ideal c-k-semu, karena

1. $0 \in L$,

2. Diberikan tabel operasi $m^* \ast b$, dan $b^o \ast m$ sebagaimana pada Tabel 2.12, dengan $b \in L$, $b /= 0$, dan $m \in M$.

Tabel 2.12: Operasi $m^* \ast b$, dan $b^o \ast m$.

b	m	$m^* \ast b$	$b^o \ast m$	Keterangan	m^*
α	0	β	γ	$m^* \ast b, b^o \ast m \notin L$	$\beta \in L$
γ	0	α	γ	$m^* \ast b, b^o \ast m \in L$	$\beta \notin L$
α	α	β	γ	$m^* \ast b, b^o \ast m \notin L$	$\beta \notin L$
γ	α	α	γ	$m^* \ast b, b^o \ast m \in L$	$\beta \notin L$
α	β	0	0	$m^* \ast b, b^o \ast m \in L$	$0 \in L$
γ	β	0	0	$m^* \ast b, b^o \ast m \in L$	$0 \in L$
α	γ	0	0	$m^* \ast b, b^o \ast m \in L$	$\alpha \in L$
γ	γ	0	0	$m^* \ast b, b^o \ast m \in L$	$\alpha \in L$

Dari Tabel 2.12 diperoleh untuk $m^* \ast b$, dan $b^o \ast m \in L$, $\forall b \in L$ dengan $b /= 0$, maka $m^* \in L$.

3. Diberikan tabel operasi $m^o \diamond b$, dan $b^* \diamond m$ sebagaimana pada Tabel 2.13, dengan $b \in L$, b 0, dan $m \in M$.

Tabel 2.13: Operasi $m^o \diamond b$, dan $b^* \diamond m$.

b	m	$m^o \diamond b$	$b^* \diamond m$	Keterangan	m^o
α	0	γ	β	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \notin L$	$\beta \notin L$
γ	0	γ	α	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in L$	$\beta \notin G$
α	α	γ	γ	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in L$	$\gamma \in L$
γ	α	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in L$	$\gamma \in L$
α	β	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in L$	$0 \in L$
γ	β	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in L$	$0 \in L$
α	γ	γ	γ	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in L$	$\gamma \in L$
γ	γ	0	0	$m^o \diamond b, b^* \diamond m \in L$	$\gamma \in L$

Dari Tabel 2.13 diperoleh untuk $m^o \diamond b$, dan $b^* \diamond m \in L, \forall b \in L$ dengan $b \quad 0$, maka $m^o \in L$.

Definisi 2.5.19 (*Involutory* Q-aljabar Semu)

Misalkan M Q-aljabar semu terbatas. Suatu elemen $m \in M$ yang memenuhi $m^{**} = m = m^{oo}$ disebut "involusi semu". Jika setiap elemen $m \in M$ adalah involusi semu, M disebut *involutory* Q-aljabar semu.

Contoh 2.5.20

Diberikan himpunan $M = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ dilengkapi dengan dua operasi biner $*$ dan $\diamond$ sebagaimana pada Tabel 2.14.

Tabel 2.14: Operasi $*$ dan $\diamond$ pada M.

$*$	0	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	0	0
β	β	δ	0	0	0
γ	γ	α	δ	0	β
δ	δ	0	0	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0	0
α	α	0	δ	0	0
β	β	0	0	0	0
γ	γ	δ	β	0	α
δ	δ	0	0	0	0

Berdasarkan Tabel 2.14 diperoleh M merupakan Q-aljabar semu terbatas dengan unit semu γ.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa M merupakan *involutory* Q-aljabar semu.

Jawab.
Diberikan tabel hasil operasi m^*, m^{**}, m^o, dan m^{oo} sebagaimana pada Tabel 2.15.

Tabel 2.15: Hasil operasi m^*, m^{**}, m^o, m^{oo}

m	m^*	m^{**}	m^o	m^{oo}
0	$\gamma * 0 = \gamma$	$\gamma * \gamma = 0$	$\gamma \diamond 0 = \gamma$	$\gamma \diamond \gamma = 0$
α	$\gamma * \alpha = \alpha$	$\gamma * \alpha = \alpha$	$\gamma \diamond \alpha = \delta$	$\gamma \diamond \delta = \alpha$
β	$\gamma * \beta = \delta$	$\gamma * \delta = \beta$	$\gamma \diamond \beta = \beta$	$\gamma \diamond \beta = \beta$
γ	$\gamma * \gamma = 0$	$\gamma * 0 = \gamma$	$\gamma \diamond \gamma = 0$	$\gamma \diamond 0 = \gamma$
δ	$\gamma * \delta = \beta$	$\gamma * \beta = \delta$	$\gamma \diamond \delta = \alpha$	$\gamma \diamond \alpha = \delta$

Diperoleh untuk setiap $m \in M$ memenuhi $m^{**} = m = m^{oo}$, sehingga terbukti bahwa M merupakan *involutory* Q-aljabar semu.

BAB III
PEMBAHASAN

Selanjutnya dibahas jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu yang meliputi definisi, contoh, teorema, serta keterkaitan di antaranya.

3.1 Ideal Semu *Fuzzy* Intuisionistik

Berikut dibahas definisi dan contoh ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu.

Definisi 3.1.1 (Ideal Semu *Fuzzy* Intuisionistik)

Misalkan M adalah Q-aljabar semu. Suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{\langle m, \mu_A(m), \nu_A(m)\rangle \mid m \in M\}$ disebut ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada M jika memenuhi

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M$,
2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m), \forall m \in M$,
3. $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m \star b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}, \forall m, b \in M$,
4. $\nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m \star b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}, \forall m, b \in M$.

Contoh 3.1.2

Diberikan Q-aljabar semu terbatas $(M, \star, \diamond, 0)$ dengan tabel operasi sebagaimana pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1: Operasi $\star$ dan $\diamond$ pada M.

$\star$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	0	0	γ
γ	γ	γ	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	α
β	β	β	0	α
γ	γ	γ	0	0

Didefinisikan suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\}$ pada M, dengan

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0.8, & m = 0, \alpha, \\ 0.6, & m = \beta, \gamma, \end{cases} \quad \& \quad \nu_A(m) = \begin{cases} 0.2, & m = 0, \alpha, \\ 0.4, & m = \beta, \gamma. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan A adalah ideal semu *fuzzy* intuisionistik.

Jawab.

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m)$, dan $\nu_A(0) \leq \nu_A(m)$, $\forall m \in M$,
2. Dengan derajat keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2: Derajat keanggotaan A pada M.

m	b	$\mu_A(m)$	$\min\{\mu_A(m \star b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}$
0	0	0.8	0.8
0	α	0.8	0.8
0	β	0.8	0.8
0	γ	0.8	0.8
α	0	0.8	0.8
α	α	0.8	0.8
α	β	0.8	0.8
α	γ	0.8	0.8
β	0	0.6	0.6
β	α	0.6	0.6
β	β	0.6	0.6
β	γ	0.6	0.6
γ	0	0.6	0.6
γ	α	0.6	0.6
γ	β	0.6	0.6
γ	γ	0.6	0.6

Diperoleh $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m \star b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}$, untuk setiap $m, b \in M$.

3. Dengan derajat non-keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.3, diperoleh $\nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m \star b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}$, untuk setiap $m, b \in M$.

Tabel 3.3: Derajat non-keanggotaan A pada M.

m	b	$\nu_A(m)$	maks$\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}$
0	0	0.8	0.8
0	α	0.8	0.8
0	β	0.8	0.8
0	γ	0.8	0.8
α	0	0.8	0.8
α	α	0.8	0.8
α	β	0.8	0.8
α	γ	0.8	0.8
β	0	0.6	0.6
β	α	0.6	0.8
β	β	0.6	0.8
β	γ	0.6	0.8
γ	0	0.6	0.6
γ	α	0.6	0.6
γ	β	0.6	0.8
γ	γ	0.6	0.8

3.2 Jenis-jenis Ideal Semu *Fuzzy* Intuisionistik

Berikut dibahas definisi, contoh, dan teorema dari jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik.

Definisi 3.2.1 (Ideal Semu Utuh *Fuzzy* Intuisionistik)

Misalkan I adalah ideal semu utuh dari Q-aljabar semu M. Suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m)) \mid m \in M\}$ disebut ideal semu utuh *fuzzy* intuisionistik pada I jika

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M$,

2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m), \forall m \in M$,

3. $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}, \forall b \in I, \forall m \in M$,

4. $\nu_A(m) \leq$ maks$\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}, \forall b \in I, \forall m \in M$.

Selanjutnya ideal semu utuh *fuzzy* intuisionistik disingkat menjadi ideal c-semu IF.

Contoh 3.2.2

Diberikan Q-aljabar semu $(M, \star, \diamond, 0)$ dengan tabel operasi sebagaimana pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4: Operasi $\star$ dan $\diamond$ pada M.

$\star$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	0	0	α
γ	γ	γ	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	α
β	β	β	0	α
γ	γ	γ	0	0

Diperoleh $I = \{0, \alpha, \beta\}$ adalah ideal semu utuh dari M. Didefinisikan suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\}$, dengan

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0.5 & : \text{jika } m = 0, \alpha, \gamma, \\ 0.4 & : \text{jika } m = \beta, \end{cases}$$

$$\nu_A(m) = \begin{cases} 0.5 & : \text{jika } m = 0, \alpha, \gamma \\ 0.6 & : \text{jika } m = \beta, \end{cases}$$

Akan ditunjukkan A adalah ideal c-semu IF pada I di M.

Jawab.

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m)$, dan $\nu_A(0) \leq \nu_A(m)$, $\forall m \in M$,
2. Dengan derajat keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.5, diperoleh $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m \star b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}$, $\forall b \in I, \forall m \in M$,
3. Dengan derajat non-keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.6, diperoleh $\nu_A(m) \leq$ maks$\{\nu_A(m \star b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}$, $\forall b \in I$, $\forall m \in M$.

Tabel 3.5: Derajat keanggotaan A pada M.

m	b	$\mu_A(m)$	$\min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(m)\}$
0	0	0.5	0.5
0	α	0.5	0.5
0	β	0.5	0.5
α	0	0.5	0.5
α	α	0.5	0.5
α	β	0.5	0.5
β	0	0.4	0.4
β	α	0.4	0.4
β	β	0.4	0.4
γ	0	0.5	0.5
γ	α	0.5	0.5
γ	β	0.5	0.5

Tabel 3.6: Derajat non-keanggotaan A pada M.

m	b	$\nu_A(m)$	$\text{maks}\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(m)\}$
0	0	0.5	0.5
0	α	0.5	0.5
0	β	0.5	0.5
α	0	0.5	0.5
α	α	0.5	0.5
α	β	0.5	0.5
β	0	0.6	0.6
β	α	0.6	0.6
β	β	0.6	0.6
γ	0	0.5	0.5
γ	α	0.5	0.5
γ	β	0.5	0.5

Teorema 3.2.3

Setiap ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu adalah ideal c-semu IF. Tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Bukti.

Misalkan I adalah ideal c-semu dari Q-aljabar semu M, dan $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\}$ adalah ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada M, maka berdasarkan Definisi 3.1.1, diperoleh

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M,$
2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m), \forall m \in M,$
3. $\mu_A(m) \geq$ min$\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}, \forall m, b \in M,$
4. $\nu_A(m) \leq$ maks$\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}, \forall m, b \in M.$

Karena $I \subseteq M$, maka berlaku
$\mu_A(m) \geq$ min $\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}$ dan
$\nu_A(m) \leq$ maks $\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}\ \forall b \in I.$
Terbukti A adalah ideal c-semu IF. Tetapi tidak berlaku sebaliknya.
Berdasarkan Contoh 3.2.2, A adalah ideal c-semu IF pada I di M, dengan $I = \{0, \alpha, \beta\}$, tetapi A bukan ideal semu *fuzzy* intuisionistik, karena $\mu_A(\beta) = 0.4 \not\geq$ min$\{\mu_A(\beta * \gamma), \mu_A(\beta \diamond \gamma), \mu_A(\gamma)\} = 0.5.$

Teorema 3.2.4

Misalkan I adalah ideal c-semu dari *involutory* Q-aljabar semu M. Suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik A adalah ideal c-semu IF pada I di M jika dan hanya jika memenuhi

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M,$
2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m), \forall m \in M,$
3. $\mu_A(m) \geq$ min$\{\mu_A(m^{**} * b), \mu_A(b^{o} * m^{*}), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m) \geq$ min$\{\mu_A(b^{*} \diamond m^{o}), \mu_A(m^{oo} \diamond b), \mu_A(b)\}\ \forall m, b \in M,$
4. $\nu_A(m) \leq$ maks$\{\nu_A(m^{**} * b), \nu_A(b^{o} * m^{*}), \nu_A(b)\}$, dan
   $\nu_A(m^{o}) \leq$ maks$\{\nu_A(m^{o} \diamond b), \nu_A(b^{*} \diamond m), \nu_A(b)\}\ \forall m, b \in M.$

Bukti.

1. Berdasarkan Definisi 3.2.1, $\mu_A(0) \geq \mu_A(m),\ \forall m \in M$,

2. Berdasarkan Definisi 3.2.1, $\nu_A(0) \leq \nu_A(m),\ \forall m \in M$,

3. Berdasarkan Definisi 2.5.19, diperoleh
   $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m^{**} \star b), \mu_A(b^{\circ} \star m^{*}), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m^{\circ\circ} \star b), \mu_A(b^{\circ} \star m^{*}), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(b^{*} \diamond m^{\circ}), \mu_A(m^{\circ\circ} \diamond b), \mu_A(b)\}\ \forall m, b \in M$,

4. Berdasarkan Definisi 2.5.19, dan Definisi 3.2.1, diperoleh
   $\nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m \star b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^{**}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{**} \star b), \nu_A(m^{**} \diamond b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{**} \star b), \nu_A(b^{\circ} \star m^{*}), \nu_A(b)\}$, dan
   $\nu_A(m^{\circ}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{\circ} \star b), \nu_A(m^{\circ} \diamond b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^{\circ}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{\circ} \diamond b), \nu_A(b^{*} \diamond m), \nu_A(b)\}\ \forall m, b \in M$.

Definisi 3.2.5 (Ideal k-Semu *Fuzzy* Intuisionistik)

Misalkan $(M, \star, \diamond)$ adalah Q-aljabar semu terbatas. Suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m)) \mid m \in M\}$ disebut ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik pada M jika

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m)\ \forall m \in M$,

2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m)\ \forall m \in M$,

3. $\mu_A(m^{*}) \geq \min\{\mu_A(m^{*} \star b), \mu_A(b^{\circ} \star m), \mu_A(b)\}$, dan
   $\mu_A(m^{\circ}) \geq \min\{\mu_A(m^{\circ} \diamond b), \mu_A(b^{*} \diamond m), \mu_A(b)\},\ \forall m, b \in M$,

4. $\nu_A(m^{*}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{*} \star b), \nu_A(b^{\circ} \star m), \nu_A(b)\}$, dan
   $\nu_A(m^{\circ}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{\circ} \diamond b), \nu_A(b^{*} \diamond m), \nu_A(b)\},\ \forall m, b \in M$.

Selanjutnya ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik disingkat menjadi ideal k-semu IF.

Contoh 3.2.6

Diberikan himpunan $M = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ yang dilengkapi dua operasi biner "$\star$" dan "$\diamond$" sebagaimana pada Tabel 3.7.

Tabel 3.7: Operasi $\star$ dan $\diamond$ pada M.

$\star$	0	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	0	α
β	β	0	0	β	β
γ	γ	0	γ	0	β
δ	δ	0	δ	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ	δ
0	0	0	0	0	0
α	α	0	0	α	α
β	β	0	0	0	0
γ	γ	0	δ	0	δ
δ	δ	0	δ	0	0

Maka $(M, \star, \diamond, 0)$ adalah Q-aljabar semu terbatas dengan unit α. Didefinisikan suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\}$ pada M, dengan

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0.9 & : \text{jika } m = 0, \alpha, \\ 0.3 & : \text{jika } m = \beta, \gamma, \delta, \end{cases}$$

$$\nu_A(m) = \begin{cases} 0.1 & : \text{jika } m = 0, \alpha \\ 0.7 & : \text{jika } m = \beta, \gamma, \delta, \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A adalah ideal k-semu IF.

Jawab.

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m)$ dan $\nu_A(0) \leq \nu_A(m), \forall m \in M$,
2. Dengan derajat keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.8, $\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* \star b), \mu_A(b^\circ \star m), \mu_A(b)\}, \forall m, b \in M$,
3. Dengan derajat keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.9, $\mu_A(m^\circ) \geq \min\{\mu_A(m^\circ \diamond b), \mu_A(b^* \diamond m), \mu_A(b)\}, \forall m, b \in M$,
4. Dengan derajat non-keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.2.10, $\nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* \star b), \nu_A(b^\circ \star m), \nu_A(b)\}$, $\forall m, b \in M$,
5. Dengan derajat non-keanggotaan sebagaimana pada Tabel 3.2.11, $\nu_A(m^\circ) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^\circ \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\}$, $\forall m, b \in M$.

Terbukti A merupakan ideal k-semu IF pada M.

Tabel 3.8: Derajat keanggotaan A pada M.

m	b	$\mu_A(m^*)$	$\min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^o * m), \mu_A(b)\}$
0	0	0.9	0.9
0	α	0.9	0.9
0	β	0.9	0.3
0	γ	0.9	0.3
0	δ	0.9	0.3
α	0	0.9	0.9
α	α	0.9	0.9
α	β	0.9	0.3
α	γ	0.9	0.3
α	δ	0.9	0.3
β	0	0.9	0.9
β	α	0.9	0.9
β	β	0.9	0.3
β	γ	0.9	0.3
β	δ	0.9	0.3
γ	0	0.9	0.9
γ	α	0.9	0.9
γ	β	0.9	0.3
γ	γ	0.9	0.3
γ	δ	0.9	0.3
δ	0	0.9	0.9
δ	α	0.9	0.9
δ	β	0.9	0.3
δ	γ	0.9	0.3
δ	δ	0.9	0.3

Tabel 3.9: Derajat keanggotaan A pada M.

m	b	$\mu_A(m^o)$	$\min\{\mu_A(m^o \diamond b), \mu_A(b^* \diamond m), \mu_A(b)\}$
0	0	0.9	0.9
0	α	0.9	0.9
0	β	0.9	0.3
0	γ	0.9	0.3
0	δ	0.9	0.3
α	0	0.9	0.9
α	α	0.9	0.9
α	β	0.9	0.3
α	γ	0.9	0.3
α	δ	0.9	0.3
β	0	0.9	0.9
β	α	0.9	0.9
β	β	0.9	0.3
β	γ	0.9	0.3
β	δ	0.9	0.3
γ	0	0.9	0.9
γ	α	0.9	0.9
γ	β	0.9	0.3
γ	γ	0.9	0.3
γ	δ	0.9	0.3
δ	0	0.9	0.9
δ	α	0.9	0.9
δ	β	0.9	0.3
δ	γ	0.9	0.3
δ	δ	0.9	0.3

Tabel 3.10: Derajat keanggotaan A pada M.

m	b	$\nu_A(m^*)$	maks$\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(b^o * m), \nu_A(b)\}$
0	0	0.1	0.1
0	α	0.1	0.1
0	β	0.1	0.7
0	γ	0.1	0.7
0	δ	0.1	0.7
α	0	0.1	0.1
α	α	0.1	0.1
α	β	0.1	0.7
α	γ	0.1	0.7
α	δ	0.1	0.7
β	0	0.1	0.1
β	α	0.1	0.1
β	β	0.1	0.7
β	γ	0.1	0.7
β	δ	0.1	0.7
γ	0	0.1	0.1
γ	α	0.1	0.1
γ	β	0.1	0.7
γ	γ	0.1	0.7
γ	δ	0.1	0.7
δ	0	0.1	0.1
δ	α	0.1	0.1
δ	β	0.1	0.7
δ	γ	0.1	0.7
δ	δ	0.1	0.7

Tabel 3.11: Derajat keanggotaan A pada M.

m	b	$\nu_A(m^\circ)$	maks$\{\nu_A(m^\circ \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\}$
0	0	0.1	0.1
0	α	0.1	0.1
0	β	0.1	0.7
0	γ	0.1	0.7
0	δ	0.1	0.7
α	0	0.1	0.1
α	α	0.1	0.1
α	β	0.1	0.7
α	γ	0.1	0.7
α	δ	0.1	0.7
β	0	0.1	0.1
β	α	0.1	0.1
β	β	0.1	0.7
β	γ	0.1	0.7
β	δ	0.1	0.7
γ	0	0.1	0.1
γ	α	0.1	0.1
γ	β	0.1	0.7
γ	γ	0.1	0.7
γ	δ	0.1	0.7
δ	0	0.1	0.1
δ	α	0.1	0.1
δ	β	0.1	0.7
δ	γ	0.1	0.7
δ	δ	0.1	0.7

Teorema 3.2.7

Setiap ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu terbatas adalah ideal k-semu IF. Tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Bukti.

Misalkan $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\ m \mid M\in$ adalah ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu terbatas $(M, *, \diamond, 0)$, maka berdasarkan Definisi 3.1.1, diperoleh

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m),\ \forall m \in M$,
2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m),\ \forall m \in M$,
3. $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}$, maka
   $\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(m^* \diamond b), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^o * m), \mu_A(b)\},\ \forall m, b \in M$,
   dan
   $\mu_A(m^o) \geq \min\{\mu_A(m^o * b), \mu_A(m^o \diamond b), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m^o) \geq \min\{\mu_A(m^o \diamond b), \mu_A(b^* \diamond m), \mu_A(b)\},\ \forall m, b \in M$,
4. $\nu_A(m) \leq$ maks$\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}$, maka
   $\nu_A(m^*) \leq$ maks$\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(m^* \diamond b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^*) \leq$ maks$\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(b^o * m), \nu_A(b)\},\ \forall m, b \in M$
   dan
   $\nu_A(m^o) \leq$ maks$\{\nu_A(m^o * b), \nu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^o) \leq$ maks$\{\nu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\},\ \forall m, b \in M$.

Terbukti A adalah ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik pada M. Tetapi tidak berlaku sebaliknya.
Berdasarkan Contoh 3.2.6, A adalah ideal k-semu IF pada M, tetapi bukan ideal semu *fuzzy* intuisionistik, karena $\mu_A(\beta) = 0.3 \not\geq \min\{\mu_A(\beta * \alpha), \mu_A(\beta \diamond \alpha), \mu_A(\alpha)\}$.

Teorema 3.2.8

Setiap ideal k-semu IF pada *involutory* Q-aljabar semu M adalah ideal semu *fuzzy* intuisionistik.

Bukti.

Diasumsikan $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\ m \in M\}$ adalah ideal k-semu IF pada *involutory* Q-aljabar semu M. Karena M adalah

involutory Q-aljabar semu, maka
$\mu_A(m) = \mu_A(m^{**}) \geq \min\{\mu_A(m^{**} * b), \mu_A(b^{\circ} * m^{*}), \mu_A(b)\}$
$= \mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}$ dan
$\nu_A(m) = \nu_A(m^{**}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{**} * b), \nu_A(b^{\circ} * m^{*}), \nu_A(b)\}$
$= \nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}, \forall m, b \in M$.
Terbukti $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m)) \mid m \in M\}$ juga merupakan ideal semu *fuzzy* intuisionistik.

Teorema 3.2.9

Jika $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m)) \mid m \in M\}$ adalah ideal k-semu IF pada Q-aljabar semu terbatas M, dengan $e \in M$ adalah unit semu, maka

1. $\mu_A(m^*) \geq \mu_A(e)$ dan $\mu_A(m^{\circ}) \geq \mu_A(e), \forall m \in M$,
2. $\nu_A(m^*) \leq \nu_A(e)$ dan $\nu_A(m^{\circ}) \leq \nu_A(e), \forall m \in M$,
3. jika $m^* \leq b$ maka $\mu_A(m^*) \geq \mu_A(b)$, dan $\nu_A(m^*) \leq \nu_A(b)$,
4. jika $m^{\circ} \leq b$ maka $\mu_A(m^{\circ}) \geq \mu_A(b)$, dan $\nu_A(m^{\circ}) \leq \nu_A(b)$.

Bukti.

1. Karena A adalah ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik, diperoleh
$\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * e), \mu_A(e^{\circ} * m), \mu_A(e)\}$
$= \mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(0), \mu_A(e)\} = \mu_A(e)$, dan
$\mu_A(m^{\circ}) \geq \min\{\mu_A(m^{\circ} \diamond e), \mu_A(e^* \diamond m), \mu_A(e)\}$
$= \mu_A(m^{\circ}) \geq \min\{\mu_A(0), \mu_A(e)\} = \mu_A(e), \forall m \in M$.
2. Karena A adalah ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik, diperoleh
$\nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* * e), \nu_A(e^{\circ} * m), \nu_A(e)\}$
$= \nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(0), \nu_A(e)\} = \nu_A(e)$, dan
$\nu_A(m^{\circ}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{\circ} \diamond e), \nu_A(e^* \diamond m), \nu_A(e)\}$
$= \nu_A(m^{\circ}) \leq \text{maks}\{\nu_A(0), \nu_A(e)\} = \nu_A(e), \forall m \in M$.
3. Jika $m^* \leq b$ maka $m^* * b = 0$, dan $m^* \diamond b = 0$. Lalu karena A adalah ideal k-semu IF, maka
$\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^{\circ} * m), \mu_A(b)\}$
$= \mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(0), \mu_A(b)\}$
$= \mu_A(m^*) \geq \mu_A(b)$, dan
$\nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(b^{\circ} * m), \nu_A(b)\}$

$= \nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(0), \nu_A(b)\}$
$= \nu_A(m^*) \leq \nu_A(b), \forall m, b \in M.$

4. Jika $m^o \leq b$ maka $m^o * b = 0$, dan $m^o \diamond b = 0$. Lalu karena A adalah ideal k-semu IF, maka
$\mu_A(m^o) \geq \min\{\mu_A(m^o \diamond b), \mu_A(b^* \diamond m), \mu_A(b)\}$
$= \mu_A(m^o) \geq \min\{\mu_A(0), \mu_A(b)\}$
$= \mu_A(m^o) \geq \mu_A(b)$, dan
$\nu_A(m^o) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\}$
$= \nu_A(m^o) \leq \text{maks}\{\nu_A(0), \nu_A(b)\}$
$= \nu_A(m^o) \leq \nu_A(b)$.

Definisi 3.2.10 (Ideal k-Semu Utuh *Fuzzy* Intuisionistik)

Misalkan I adalah ideal c-k-semu dari Q-aljabar semu terbatas M. Suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m)) \quad \}$ disebut ideal k-semu utuh *fuzzy* intuisionistik pada I di M jika

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M$,

2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m), \forall m \in M$,

3. $\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^o * m), \mu_A(b)\}$, dan $\mu_A(m^o) \geq \min\{\mu_A(m^o \diamond b), \mu_A(b^* \diamond m), \mu_A(b)\}, \forall b \in I$, $\forall m \in M$,

4. $\nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(b^o * m), \nu_A(b)\}$, dan $\nu_A(m^o) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\}, \forall b \in I$, $\forall m \in M$.

Selanjutnya ideal k-semu utuh *fuzzy* intuisionistik disingkat menjadi ideal c-k-semu IF.

Contoh 3.2.11

Diberikan Q-aljabar semu terbatas $(M, *, \diamond, 0)$ dengan tabel operasi sebagaimana pada Tabel 3.12, dan ideal c-k-semu $I = \{0, \alpha, \beta\}$ dari M.

Tabel 3.12: Operasi $\ast$ dan $\diamond$ pada M.

$\ast$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	β	0	α
γ	γ	γ	0	0

$\diamond$	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	α	0	0	0
β	β	γ	0	γ
γ	γ	γ	0	0

Didefinisikan suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\}$ pada M dengan

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0.6, & \text{jika } m = 0, \alpha, \gamma, \\ 0.2, & \text{jika } m = \beta, \end{cases}$$

$$\nu_A(m) = \begin{cases} 0.4, & \text{jika } m = 0, \alpha, \gamma, \\ 0.8, & \text{jika } m = \beta. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan A adalah ideal c-k-semu *fuzzy* intuisionistik di M.

Jawab.

$\mu_A(0) \geq \mu_A(m)$, dan $\nu_A(0) \leq \nu_A(m)$, $\forall m \in M$,

$\mu_A(0^*) = 0.2 \geq \min\{\mu_A(0^* \ast b), \mu_A(b^o \ast 0), \mu_A(b)\} = 0.2, \forall b \in I,$

$\mu_A(\alpha^*) = 0.2 \geq \min\{\mu_A(\alpha^* \ast b), \mu_A(b^o \ast \alpha), \mu_A(b)\} = 0.2, \forall b \in I,$

$\mu_A(0^o) = 0.2 \geq \min\{\mu_A(0^o \diamond b), \mu_A(b^* \diamond 0), \mu_A(b)\} = 0.2, \forall b \in I,$

dan

$\nu_A(0^*) = 0.8 \leq \text{maks}\{\nu_A(0^* \ast b), \nu_A(b^o \ast 0), \nu_A(b)\} = 0.8, \forall b \in I,$

$\nu_A(\alpha^*) = 0.8 \leq \text{maks}\{\nu_A(\alpha^* \ast b), \nu_A(b^o \ast \alpha), \nu_A(b)\} = 0.8, \forall b \in I,$

$\nu_A(0^o) = 0.8 \leq \text{maks}\{\nu_A(0^o \diamond b), \nu_A(b^* \diamond 0), \nu_A(b)\} = 0.8, \forall b \in I.$ Maka A adalah ideal c-k-semu *fuzzy* intuisionistik.

Teorema 3.2.12

Setiap ideal k-semu IF pada Q-aljabar semu terbatas adalah ideal c-k-semu IF. Tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Bukti.

Misalkan I adalah ideal c-k semu dari Q-aljabar semu terbatas M, dan $A = \{(m, \mu_A(m), \nu_A(m))\}$ adalah ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik pada M, maka

$\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^o * m), \mu_A(b)\}$ dan
$\nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(b^o * m), \nu_A(b)\}, \forall m, b \in M$.
Karena $I \subseteq M$, maka diperoleh
$\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^o * m), \mu_A(b)$, dan
$\nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(b^o * m), \nu_A(b)\}, \forall b \in I$, dan
$\mu_A(m^o) \geq \min\{m^o \diamond b), \mu_A(b^* \diamond m), \mu_A(b)\}$ dan
$\nu_A(m^o) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\}, \forall b \in I, \forall m \in M$.
Terbukti A juga merupakan ideal c-k-semu IF. Tetapi tidak berlaku sebaliknya. Berdasarkan Contoh 3.2.11, diperoleh $I = \{0, \alpha, \beta\}$ merupakan ideal c-k-semu dari M, dan A merupakan ideal c-k-semu *fuzzy* intuisionistik. Tetapi A bukan ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik, karena $\mu_A(0^o) = 0.2 \not\geq \min\{\mu_A(0^o \diamond \gamma), \mu_A(\gamma^* \diamond 0), \mu_A(\gamma)\} = 0.6$.

Akibat 3.2.13

Setiap ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu terbatas adalah ideal c-k-semu IF.

Bukti.

Berdasarkan Teorema 3.2.7, telah dibuktikan bahwa setiap ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu terbatas merupakan ideal k-semu *fuzzy* intuisionsitik. Sedangkan pada Teorema 3.2.12 dibuktikan bahwa setiap ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu terbatas merupakan ideal k-semu utuh *fuzzy* intuisionistik. Sehingga terbukti bahwa setiap ideal semu *fuzzy* intuisionistik pada Q-aljabar semu terbatas merupakan ideal c-k-semu*fuzzy* intuisionistik.

Teorema 3.2.14

Setiap ideal c-semu IF pada Q-aljabar semu terbatas adalah ideal c-k-semu IF.

Bukti.

Misalkan $A = \{m, \mu_A(m), \nu_A(m)\}$ adalah ideal c-semu IF pada Q-aljabar semu terbatas M, dan I adalah ideal c-semu dan idealc-k-semu dari M.
Karena A adalah ideal c-semu IF, berdasarkan Definisi 3.2.1, diperoleh:

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m), \forall m \in M$,

2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m),\ \forall m \in M,$

3. $\mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\}, \forall b \in I$, maka
   $\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(m^* \diamond b), \mu_A(b)$
   $= \mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^o * b), \mu_A(b)\},\ \forall b \in I$, dan
   $\mu_A(m^o) \geq \min\{\mu_A(m^o * b), \mu_A(m^o \diamond b), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m^o) \geq \min\{\mu_A(m^o \diamond b), \mu_A(b^* \diamond m), \mu_A(b)\},\ \forall b \in I,$

4. $\nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\}, \forall b \in I$, maka
   $\nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(m^* \diamond b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^*) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^* * b), \nu_A(b^o * m), \nu_A(b)\},\ \forall b \in I,$
   dan
   $\nu_A(m^o) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^o * b), \nu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^o) \leq \text{maks}\{\mu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\},\ \forall b \in I.$

Terbukti A juga merupakan ideal c-k-semu IF.

Teorema 3.2.15

Setiap ideal c-k-semu IF pada *involutory* Q-aljabar semu M adalah ideal c-semu IF.

Bukti.

Misalkan $A = \{\langle m, \mu_A(m), \nu_A(m)\rangle\}$ adalah ideal c-k-semu IF pada M, dan I adalah ideal c-semu dan ideal c-k-semu dari M.
Karena M adalah *involutory* Q-aljabar semu, diperoleh:

1. $\mu_A(0) \geq \mu_A(m^{**})$
   $= \mu_A(0) \geq \mu_A(m),\ \forall m \in M,$

2. $\nu_A(0) \leq \nu_A(m^{oo})$
   $= \nu_A(0) \leq \nu_A(m),\ \forall m \in M,$

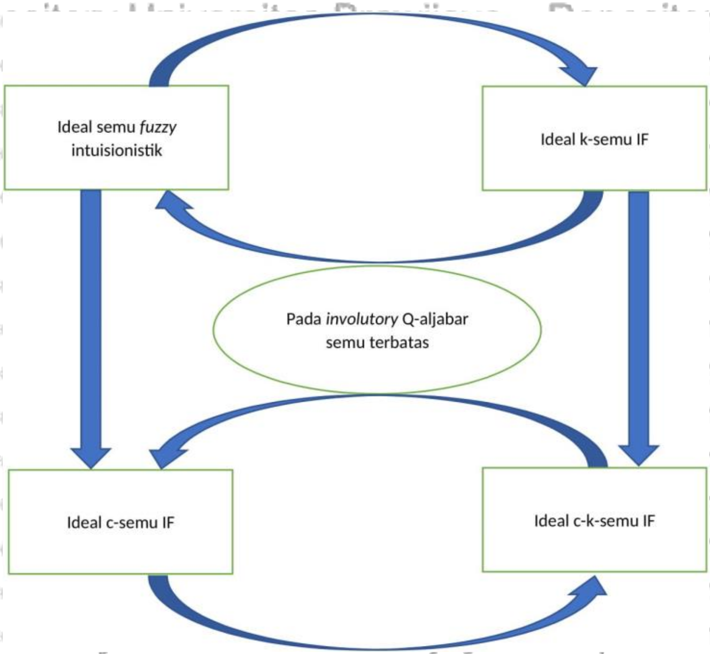
3. $\mu_A(m^*) \geq \min\{\mu_A(m^* * b), \mu_A(b^o * m), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m^{**}) \geq \min\{\mu_A(m^{**} * b), \mu_A(b^o * m^*), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m^{**}) \geq \min\{\mu_A(m^{**} * b), \mu_A(m^{**} \diamond b), \mu_A(b)\}$
   $= \mu_A(m) \geq \min\{\mu_A(m * b), \mu_A(m \diamond b), \mu_A(b)\},\ \forall b \in I,$

4. $\nu_A(m^o) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^o \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^{oo}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{oo} \diamond b), \nu_A(b^* \diamond m^o), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m^{oo}) \leq \text{maks}\{\nu_A(m^{oo} \diamond b), \nu_A(m^{oo} * b), \nu_A(b)\}$
   $= \nu_A(m) \leq \text{maks}\{\nu_A(m * b), \nu_A(m \diamond b), \nu_A(b)\},\ \forall b \in I.$

Terbukti *A* juga merupakan ideal c-semu IF.

Catatan 3.2.16

Gambar berikut menunjukkan keterkaitan antara ideal semu *fuzzy* intuisionistik, ideal k-semu IF, ideal c-semu IF, dan ideal c-k-semu IF pada Q-aljabar semu.



Gambar 3.1: Keterkaitan jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik. (Sumber: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1591/1/012095).

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penulisan skripsi ini dan pembahasan yang telah dipaparkan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik adalah: ideal semu utuh *fuzzy* intuisionistik, ideal k-semu *fuzzy* intuisionistik, dan ideal k-semu utuh *fuzzy* intuisionistik.
2. Masing-masing dari jenis-jenis ideal semu *fuzzy* intuisionistik memiliki keterkaitan satu sama lain. Misalnya jika suatu himpunan *fuzzy* intuisionistik merupakan ideal semu *fuzzy* intuisionistik, maka himpunan tersebut juga merupakan ideal semu utuh *fuzzy* intuisionistik. Dan seterusnya.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas pengertian dan sifat-sifat dari ideal *fuzzy* intuisionistik pada struktur aljabar yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah, H. K., dan Jawad, H. K. 2019. *New Types of Pseudo Ideals in Pseudo Q-algebra*. Baghdad Science Journal. Vol. 16 No. 2 (2019): Issue 2.

Abdullah, H. K., dan Shadhan, M. T. 2020. *Intuitionistic Fuzzy Pseudo Ideals in Q-algebra*. Journal of Physics: Conference Series. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1591/1/012095

Atanassov, T. 1999. *On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory*. Berlin. Springer.

Hidayat, N. 2017. *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar: Teori, Latihan Soal, dan Bukti Lengkap*. Malang. UB Press.

Kim, H. S., Ahn, S. S., dan Neggers, J. 2001. *On Q-algebras*. Hindawi Publishing Corporation. Vol. 27, No. 12 (2001). hal: 749-757.

Marsudi. 2010. *Logika dan Teori Himpunan*. Malang. UB Press.

Wang, W., dan Liu, X. 2013. *Some operations over atanassov's intuitionistic fuzzy sets based on einstein T-norm and T-conorm*. International Journal of Uncertainty Fuzziness andKnowledge-Based Systems. Vol. 21, No. 2 (2013). hal: 263-276.

Zadeh, L. A. 1965. *Fuzzy Sets*. Information and Control. Vol. 8, hal: 338-353.