

**ANALISIS DINAMIK MODEL SIR ORDE FRAKSIONAL
DENGAN LAJU KEJADIAN NONLINEAR**

SKRIPSI

oleh
RIZKY SAPRIANTO

155090407111010



JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2019

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rizky Saprianto
NIM : 155090407111010
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model SIR Orde Fraksional dengan Laju Kejadian Nonlinear

dengan ini menyatakan bahwa:

1. isi skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi yang saya tulis adalah hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 30 Desember 2019

yang menyatakan,

Rizky Saprianto
NIM. 155090407111010

ANALISIS DINAMIK MODEL SIR ORDE FRAKSIONAL DENGAN LAJU KEJADIAN NONLINEAR

ABSTRAK

Pada skripsi ini disajikan analisis dinamik pada model SIR orde fraksional dengan laju kejadian nonlinear. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa terdapat dua titik kesetimbangan pada model, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Kestabilan titik kesetimbangan bergantung pada suatu parameter yang dinotasikan sebagai R_0 . Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Dilakukan simulasi numerik menggunakan metode pendekatan Grunwald-Letnikov. Hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan bahwa, jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal. Selain itu, dilakukan simulasi untuk mengetahui pengaruh nilai α . Hasil simulasi menunjukkan bahwa, jika nilai α semakin tinggi maka solusi akan semakin cepat konvergen menuju ke titik kesetimbangan.

Kata kunci: turunan fraksional, model SIR, laju kejadian nonlinear, titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal.

DYNAMICAL ANALYSIS OF A FRACTIONAL ORDER SIR MODEL WITH NONLINEAR INCIDENCE RATE

ABSTRACT

This final project presents dynamical analysis on a fractional order SIR model with nonlinear incidence rate. Dynamical analysis is performed by finding the equilibrium point and analyzing local stability of equilibrium point. It shows that there are two equilibrium points, namely disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. The stability of equilibrium points depends on a parameter called R_0 . If $R_0 < 1$ then the disease-free equilibrium point is local asymptotically stable. Numerical simulation is done by using Grunwald-Letnikov approximation method. The result of numerical simulation supports the result of the dynamical analysis. The result of numerical simulation shows that if $R_0 > 1$ then the endemic equilibrium point is local asymptotically stable. Moreover, another simulation is performed to find out the effect of α values. It shows that the higher α value, the faster the solution of the model reach the equilibrium point.

Keywords: fractional derivatif, SIR model, nonlinear incidence rate, equilibrium, local stability analysis.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufiq, hidayah-Nya, dan nikmat iman kepada penulis. Shalawat serta salam selalu turunkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan yang baik bagi penulis dan umat manusia lainnya.

Penulis sangat bersyukur atas karunia dan nikmat Allah SWT, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Analisis Dinamik Model SIR Orde Fraksional dengan Laju Kejadian Nonlinear*" dengan proses yang bermanfaat. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar,
2. Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritik yang membantu penulis untuk membuat skripsi ini menjadi lebih baik,
3. seluruh dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmu pengetahuan yang sangat bermanfaat serta seluruh karyawan dan staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
4. Bapak, Mama, Adi, Iwan, dan seluruh keluarga besar yang selalu mendukung, mendoakan, dan memotivasi penulis dalam kesulitan maupun kebahagiaan.

5. sahabat-sahabat terdekat penulis dan teman-teman Matematika 2015 yang selalu menemani serta membantu dalam suka duka selama empat tahun masa kuliah, dalam pengerjaan skripsi, hingga skripsi ini dapat selesai tepat waktu,

Semoga Allah SWT melimpahkan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu, juga semua yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang dapat disampaikan melalui email rizkysaprianto07@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

JUDUL

i

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

iii

LEMBAR PERNYATAAN

v

ABSTRAK

vii

ABSTRACT

ix

KATA PENGANTAR

xi

DAFTAR ISI

xiii

DAFTAR GAMBAR

xv

DAFTAR LAMPIRAN

xvii

BAB I PENDAHULUAN

1

1.1 Latar Belakang

1

1.2 Rumusan Masalah

2

1.3 Tujuan

2

BAB II DASAR TEORI

3

2.1 Turunan Fraksional

3

2.2 Pendekatan Grunwald-Letnikov

9

2.3 Sistem Dinamik Fraksional

11

2.3.1 Sistem otonomus fraksional

12

2.3.2 Sistem otonomus linear fraksional

13

2.3.3 Sistem otonomus nonlinear fraksional

14

2.4 Model SIR Orde Fraksional

16

2.5 Model Epidemologi SIR dengan Laju Kejadian Umum

17

BAB III PEMBAHASAN

19

3.1 Model SIR Orde Fraksional dengan Laju Kejadian Nonlinear

19

3.2 Titik Keseimbangan Model

19

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

21

3.3.1 Kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit

22

3.3.2 Kestabilan titik keseimbangan endemik

23

3.4 Skema Grunwald-Letnikov untuk Model SIR Orde Fraksional dengan Laju Kejadian Nonlinear

24

3.5 Simulasi Numerik

25

3.5.1 Kasus $R_0 < 1$

25



3.5.2 Kasus $R_0 > 1$

26

3.5.3 Simulasi $\alpha = 0.5, \alpha = 0.7, \alpha = 0.9, \text{ dan } \alpha = 1$

27

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

31

4.1 Kesimpulan

31

4.2 Saran

31

DAFTAR PUSTAKA

33

LAMPIRAN

35



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik turunan fraksional fungsi t^2 8

Gambar 2.2 Grafik turunan fraksional fungsi t^3 9

Gambar 2.3 Daerah kestabilan sistem linear fraksional dengan $\alpha \in (0,1)$ 14

Gambar 3.1 Potrait fase untuk $R_0 < 1$ dan $\alpha \neq 0.9$ 26

Gambar 3.2 Potrait fase untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha \neq 0.9$ 27

Gambar 3.3 Perubahan jumlah individu subpopulasi S dan I , untuk $R_0 < 1$ dengan beberapa nilai α 28

Gambar 3.4 Perubahan jumlah individu subpopulasi S dan I , untuk $R_0 > 1$ dengan beberapa nilai α 29



DAFTAR LAMPIRAN

Perhitungan Persamaan Karakteristik

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kalkulus fraksional merupakan generalisasi dari integral dan turunan berorde bilangan bulat ke orde bilangan real positif. Kalkulus fraksional pertama kali diperkenalkan oleh L'Hopital dan Leibniz pada tahun 1695. Kemudian pada tahun 1823, Kalkulus fraksional pertama kali diterapkan oleh Niels Henrik Abel dalam studinya tentang masalah tautokron. Kalkulus fraksional saat ini sudah banyak digunakan di berbagai bidang seperti mekanika, bioteknologi, keuangan, dan teori kontrol.

Kelebihan turunan orde fraksional daripada turunan orde bilangan bulat terletak pada adanya efek memori, sebab turunan fraksional pada titik tertentu mengandung informasi mengenai nilai fungsi pada titik-titik sebelumnya. Oleh karena itu, turunan orde fraksional cocok untuk pemodelan yang melibatkan memori, yang terjadi pada sebagian besar sistem biologi (Cole, 2003 dan Djordjevic dkk., 2003). Menurut Saeedian dkk. (2017) memori memiliki peran yang penting dalam penyebaran penyakit. Sebagai contoh, ketika suatu penyakit menyebar dalam suatu populasi, pengalaman dan pengetahuan yang dimiliki individu tentang penyakit tersebut akan memengaruhi laju terjadinya infeksi penyakit tersebut.

Dalam epidemiologi, model epidemi SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendric (1927). Kemudian model ini dikembangkan oleh peneliti-peneliti selanjutnya seperti H.E.Soper (1929) dan Hethcote (1976). Model yang dikaji pada penelitian tersebut masing-masing menggunakan laju kejadian bilinear. Kemudian pada tahun 2000, Hethcote merumuskan model SIR dengan memperhatikan faktor kelahiran dan kematian. Laju kejadian yang digunakan dalam penelitian Hethcote (2000) masih berbentuk bilinear. Selanjutnya, pada tahun 2013, Hattaf dkk. mengembangkan model dengan laju kejadian umum. Pada tahun 2016, Okyere dkk. mengembangkan model SIR yang dirumuskan

oleh Hethcote (2000) menjadi model SIR dengan orde fraksional. Kemudian Pada tahun 2018, Mouaouine dkk. membahas model SIR orde fraksional dengan laju kejadian nonlinear. Laju kejadian yang digunakan oleh Mouaouine dkk,(2018) berasal dari penelitian Hattaf dkk.(2013) dan meliputi beberapa tipe laju kejadian, yaitu laju kejadian bilinear, laju kejadian tersaturasi, laju kejadian Beddington-DeAngelis, dan laju kejadian Crowley-Martin. Skripsi ini mengulas kembali analisis dinamik yang telah dilakukan oleh Mouaouine dkk.(2018), namun laju kejadian yang digunakan adalah laju kejadian nonlinear, yaitu $\frac{\beta SI}{1+a_1S+a_2I+a_3SI}$. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Kemudian dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis dinamik. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan pendekatan Grunwald-Letnikov.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model epidemi SIR orde fraksional dengan laju kejadian nonlinear?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan kestabilan lokal titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model tersebut?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model epidemi SIR orde fraksional dengan laju kejadian nonlinear.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal titik kesetimbangan model.
3. Melakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis dinamik.



$$\int e^{-tv} dt = u \frac{d}{du} \int v du$$

$$= -t^\nu e^{-t} + \int e^{-t} \nu t^{\nu-1} dt$$

$$= -t^\nu e^{-t} + \nu \int e^{-t} t^{\nu-1} dt.$$

Oleh karena itu,

$$\Gamma(\nu + 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-t^\nu e^{-t} \Big|_0^b + \nu \int_0^b e^{-t} t^{\nu-1} dt \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-b^\nu e^{-b} + 0 + \nu \Gamma(\nu) \right]$$

$$= 0 + \nu \Gamma(\nu)$$

sehingga

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \tag{2.2}$$

Jika $\nu \in \mathbb{N}$ maka

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma((\nu - 1) + 1)$$

$$= \nu(\nu - 1) \Gamma(\nu - 1)$$

$$= \nu(\nu - 1) \Gamma((\nu - 2) + 1)$$

$$= \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \Gamma(\nu - 2)$$

$$= \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \dots 2 \Gamma(1)$$

$$= \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \dots (2)(1)$$

$$= \nu!$$

sehingga

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu!$$

(Podlubny, 1999)

Definisi 2.1.2 (Fungsi Beta)

Selain fungsi Gamma, fungsi Beta juga digunakan dalam turunan fraksional. Fungsi Beta didefinisikan sebagai

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt,$$

yang konvergen untuk $n > 0$. Fungsi Beta juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi Gamma, yaitu:

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

(Podlubny, 1999)

Fungsi lain yang mempunyai peran penting dalam turunan fraksional adalah fungsi Mittag-Leffler. Fungsi ini merupakan generalisasi dari fungsi eksponensial. Perhatikan bahwa dengan menggunakan deret Taylor, fungsi eksponensial dapat dinyatakan sebagai:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}.$$

Fungsi ini kemudian digeneralisasi menjadi fungsi Mittag-Leffler yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 (Fungsi Mittag-Leffler)

Fungsi Mittag-Leffler satu parameter disimbolkan dengan E_α dan didefinisikan sebagai

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)},$$

asalkan deret tersebut konvergen, untuk $\alpha > 0$ dan $z \in \mathbb{C}$.

(Diethelm, 2010)

Teorema 2.1.4 (Konvergensi fungsi Mittag-Leffler)

Untuk $|z| \rightarrow \infty$, fungsi Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ memenuhi sifat-sifat berikut

1. $E_\alpha(z) \rightarrow 0$ jika $|\arg(z)| > \frac{\alpha\pi}{2}$;
2. $E_\alpha(z)$ terbatas jika $|\arg(z)| = \frac{\alpha\pi}{2}$;
3. $|E_\alpha(z)| \rightarrow \infty$ jika $|\arg(z)| < \frac{\alpha\pi}{2}$.

(Diethelm, 2010)



Definisi 2.1.5 (Turunan fraksional Riemann-Liouville)

Turunan fraksional Riemann-Liouville orde α fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2.3)$$

dengan $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$.

(Petras, 2011).

Contoh 2.1. Turunan fraksional untuk $f(t) = t^p$ dengan $p, t > 0$ dan

$0 < \alpha < 1$ adalah

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{\tau^p}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \tau^p (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \tau^p (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $\lambda = \frac{\tau}{t}$ diperoleh

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{n-\alpha-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \beta(p+1, n-\alpha) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1+n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \end{aligned}$$

sebab

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(t^{n-\alpha+p}) &= (n-\alpha+p)t^{n-\alpha+p-1} \\ \frac{d^2}{dt^2}(t^{n-\alpha+p}) &= (n-\alpha+p)(n-\alpha+p-1)t^{n-\alpha+p-2} \\ &\vdots \\ \frac{d^k}{dt^k}(t^{n-\alpha+p}) &= (n-\alpha+p) \cdots (n-\alpha+p-(k-1))t^{n-\alpha+p-k} \\ &= \frac{(n-\alpha+p)!}{(n-\alpha+p-k)!} t^{n-\alpha+p-k} \\ \frac{d^n}{dt^n}(t^{n-\alpha+p}) &= \frac{(n-\alpha+p)!}{(\alpha+p)!} t^{-\alpha+p} \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(-\alpha+p+1)} t^{-\alpha+p} \end{aligned}$$

untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.1.6 (Turunan Caputo)

Turunan fraksional Caputo dengan orde α dinyatakan sebagai

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} (t-\tau)^{\alpha-n+1} d\tau \quad (2.4)$$

dengan $(n-1 < \alpha < n)$, $n \in \mathbb{N}$ (Petras, 2011).

Contoh 2.2. Turunan fraksional untuk $f(t) = t^p$ dengan $p, t > 0$, dan $0 < \alpha < 1$ adalah

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{d^n}{d\tau^n} (\tau^p) (t-\tau)^{\alpha-n+1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} (\tau)^{p-n} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $\lambda t = \tau$ diperoleh



Bentuk umum turunan ke p fungsi $x(t)$ terhadap t adalah

$$\frac{d^p x}{dt^p} \equiv x^p(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} x(t - jh), \quad (2.8)$$

dengan $\binom{p}{j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}$ dan $p \in \mathbb{N}$. Analog dengan persamaan (2.8) turunan fraksional $x(t)$ terhadap t orde α , menurut Grunwald-Letnikov didefinisikan sebagai

$${}^G L D_t^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t + jh), \quad (2.9)$$

dengan

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \text{ dan } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(Petras, 2011).

Pendekatan Grunwald-Letnikov untuk turunan Caputo diperoleh dari hubungan antara turunan Riemann-Liouville dan turunan Caputo. Hubungan antara turunan Riemann-Liouville dan turunan Caputo dinyatakan sebagai

$${}^{RL} D_t^\alpha x(t) = {}^C D_t^\alpha x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{(k)}(0), \quad (2.10)$$

dengan $k = 0, 1, \dots, n-1$. Berdasarkan persamaan (2.4), jika $0 < \alpha < 1$ maka $n = 1$, sehingga persamaan (2.10) menjadi

$${}^C D_t^\alpha x(t) = {}^{RL} D_t^\alpha x(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} x(0). \quad (2.11)$$

Jika $0 < t < T$ dan h adalah lebar grid dengan $\frac{t}{h} \in \mathbb{N}$, $t_m = mh$, dan $x_m = x(t_m)$ maka

$${}^{RL} D_t^\alpha x(t_{m+1}) \equiv {}^G L D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{m+1-j} + O(h). \quad (2.12)$$

Berdasarkan (2.11) dan (2.12) diperoleh pendekatan Grunwald-Letnikov untuk turunan Caputo dengan $0 < \alpha < 1$ dan $x(0) = x_0$ sebagai berikut

$${}^C D_t^\alpha x(t_{m+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{m+1-j} + \frac{t_m^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x_0$$

Dengan demikian persamaan diferensial fraksional ${}^C D_t^\alpha x(t) = f(x(t))$ pada $t = t_m$ dapat didekati dengan ${}^C D_t^\alpha x(t_{m+1}) = f(x(t_m))$, yaitu

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{m+1-j} + \frac{((m+1)h)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x_0 = f(x_m) \quad (2.13)$$

Bila kedua ruas dikalikan dengan h^α dan $\binom{\alpha}{0} = 1$ maka persamaan (2.13) dapat ditulis sebagai

$$x_{m+1} + \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{m+1-j} - \frac{(m+1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x_0 = h^\alpha f(x_m)$$

atau

$$x_{m+1} = h^\alpha f(x_m) - \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{m+1-j} + \frac{(m+1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x_0 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) merupakan skema numerik untuk menyelesaikan masalah nilai awal orde fraksional ${}^C D_t^\alpha x = f(x), x(0) = x_0$.

(Scherer, dkk., 2011).

2.3 Sistem Dinamik Fraksional

Sistem dinamik fraksional didefinisikan sebagai

$${}_0 D_t^\alpha \vec{x} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (2.15)$$

dengan $\vec{x} \in R^n$. Notasi ${}_0 D_t^\alpha \vec{x}$ sering ditulis juga sebagai $D^\alpha \vec{x}$ yang merupakan turunan Caputo.

(Diethelm, 2010).

2.3.1 Sistem otonomus fraksional

Jika sistem (2.15) tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu maka sistem (2.16) disebut sistem otonomus. Dalam skripsi ini, sistem yang dipelajari merupakan sistem otonomus sehingga sistem dinamik fraksional dinyatakan sebagai

$$D^\alpha \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (2.16)$$

dengan $\vec{x} \in R^n$ dan $0 < \alpha < 1$.

(Petras, 2011).

Definisi 2.3.1 (Titik kesetimbangan)

Perhatikan sistem otonomus fraksional (2.16). Titik kesetimbangan pada sistem (2.16) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\vec{f}(\vec{x}(t)) = \vec{0}, \quad (2.17)$$

dan diperoleh $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ yang merupakan titik kesetimbangan sistem (2.16)

(Petras, 2011).

Definisi 2.3.2 (Kestabilan titik kesetimbangan)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pada sistem differensial fraksional (2.16) dikatakan

1. stabil, jika $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga solusi masalah nilai awal yang terdiri atas sistem differensial fraksional (2.16) pada $t = 0$ dan kondisi awal $x(0) = x_0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon$$

$\forall t > 0$,

2. stabil asimtotik, jika stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ dengan $0 < \delta_0 \leq \delta$ sedemikian sehingga suatu penyelesaian sistem diferensial fraksional (2.16) yang pada saat $t = 0$ memenuhi

$$\|\bar{x}(0) - \bar{x}^*\| < \delta$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \bar{x}^*$$

$$\forall t \geq 0.$$

(Diethelm, 2010).

2.3.2 Sistem otonomus linear fraksional

Sistem diferensial fraksional linear berdimensi n dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t), \\ D^\alpha x_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t), \\ &\vdots \\ D^\alpha x_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

dengan $0 < \alpha < 1$. Sistem persamaan (2.18) dapat dinyatakan sebagai

$$D^\alpha \bar{x}(t) = A\bar{x}(t), \quad (2.19)$$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ dan A adalah matriks koefisien sistem persamaan (2.18) yaitu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Solusi sistem otonomus linear fraksional (2.19) mengikuti sifat konvergensi fungsi Mittag-Leffler yang dinyatakan pada Teorema 2.1.4, sehingga kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear (2.19) fraksional dinyatakan pada teorema berikut.

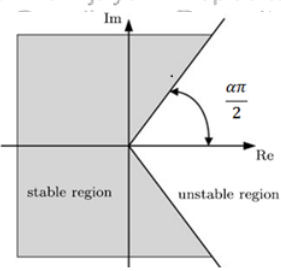


Teorema 2.3.6 (Kestabilan sistem linear fraksional)

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks A pada sistem (2.19) dan $\bar{x}^* = \bar{0}$ adalah titik kesetimbangan sistem (2.19).

1. Jika $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka titik kesetimbangan $\bar{x}^* = \bar{0}$ stabil asimtotik.
2. Jika $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\alpha\pi}{2}$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka titik kesetimbangan $\bar{x}^* = \bar{0}$ stabil.
3. Jika $\exists \lambda_i$ dengan $|\arg(\lambda_i)| < \frac{\alpha\pi}{2}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka titik kesetimbangan $\bar{x}^* = \bar{0}$ tidak stabil.

Daerah kestabilan sistem linear fraksional ditunjukkan pada Gambar 2.3



Gambar 2.3: Daerah kestabilan sistem linear fraksional dengan $\alpha \in (0, 1)$

(Petras, 2011)

2.3.3 Sistem otonomus nonlinear fraksional

Perhatikan sistem dua dimensi sebagai berikut

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= f(x, y), \\ D^\alpha y(t) &= g(x, y), \end{aligned} \tag{2.20}$$

dengan nilai awal $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, dan $\alpha \in (0, 1)$. Misalkan titik kesetimbangan sistem (2.20) adalah (x^*, y^*) , maka

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0.$$

Untuk mengevaluasi kestabilan lokal titik kesetimbangan, dimisalkan

$$\begin{aligned} x(t) &= x^* + \epsilon_1(t), \\ y(t) &= y^* + \epsilon_2(t), \end{aligned}$$

Dengan permasalahan tersebut maka

$$\begin{aligned} D^\alpha(x^* + \epsilon_1(t)) &= f(x^* + \epsilon_1(t), y^* + \epsilon_2(t)), \\ D^\alpha(y^* + \epsilon_2(t)) &= g(x^* + \epsilon_1(t), y^* + \epsilon_2(t)), \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} D^\alpha \epsilon_1(t) &= f(x^* + \epsilon_1(t), y^* + \epsilon_2(t)), \\ D^\alpha \epsilon_2(t) &= g(x^* + \epsilon_1(t), y^* + \epsilon_2(t)). \end{aligned}$$

Deret Taylor fungsi f dan g di sekitar (x^*, y^*) adalah

$$f(x, y) \cong f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \epsilon_2 + \eta_1(x, y), \quad (2.21)$$

$$g(x, y) \cong g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \epsilon_2 + \eta_2(x, y), \quad (2.22)$$

dengan $\eta_1(x, y)$ dan $\eta_2(x, y)$ adalah suku sisa. Berdasarkan hampiran orde satu persamaan (2.21) dan (2.22), suku sisa tersebut memenuhi

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x,y)}{\|\epsilon\|} &= 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x,y)}{\|\epsilon\|} &= 0, \end{aligned}$$

dengan $\vec{\epsilon} = (x - x^*, y - y^*)^T$.

Jika (x, y) berada cukup dekat dengan (x^*, y^*) , maka (ϵ_1, ϵ_2) bernilai kecil, sehingga persamaan (2.21) dan (2.22) menjadi

$$\begin{aligned} f(x, y) &\cong f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \epsilon_2, \\ g(x, y) &\cong g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \epsilon_2. \end{aligned}$$

Karena $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, maka



$$D^\alpha \epsilon_1(t) \cong \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \epsilon_2,$$

$$D^\alpha \epsilon_2(t) \cong \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \epsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \epsilon_2,$$

dan diperoleh sistem

$$D^\alpha \vec{\epsilon} = J \vec{\epsilon},$$

dengan $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau matriks turunan parsial.

(Ahmed dkk, 2007),

Teorema 2.3.7 (Kestabilan lokal sistem nonlinear fraksional)

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem nonlinear fraksional stabil asimtotik lokal apabila setiap nilai eigen $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, matriks Jacobi J di titik \vec{x}^* memenuhi kondisi

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2} \tag{2.23}$$

(Petras, 2011).

2.4 Model SIR Orde Fraksional

Pada tahun 2000, Hethcote merumuskan dan menganalisis model epidemi SIR dengan laju kelahiran dan laju kematian yang sama, yaitu μ . Pada model tersebut, variabel S menyatakan kepadatan populasi rentan, variabel I menyatakan kepadatan populasi terinfeksi, dan R menyatakan kepadatan populasi sembuh. Model yang diusulkan adalah

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - \beta SI,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (r + \mu)I,$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - \mu R,$$
(2.24)

dengan r : laju kesembuhan

μ : laju kematian dan laju kelahiran

β : laju kontak antara individu rentan dan individu terinfeksi

Pada tahun 2017, Okyere membahas sistem dinamik dinamik fraksional orde α dengan turunan Caputo untuk sistem (2.24) dengan mengubah ruas kiri persamaan dengan $D^\alpha S$, $D^\alpha I$, dan $D^\alpha R$.

(Okere, 2017).

2.5 Model Epidemi SIR dengan Laju Kejadian Umum

Hattaf dkk. (2013) mengembangkan model epidemi dengan menyatakan laju kejadian sebagai laju kejadian umum. Model SIR dengan laju kejadian umum yang diperkenalkan oleh Hattaf dkk. (2013) dinyatakan pada persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - f(S, I)I, \\ \frac{dI}{dt} &= f(S, I)I - (\mu + d + r)I, \\ \frac{dR}{dt} &= rI - \mu R. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pada sistem (2.25) Λ menyatakan laju kelahiran, μ menyatakan laju kematian alami, d menyatakan laju kematian karena penyakit, r menyatakan laju kesembuhan, dan $f(S, I)$ adalah fungsi kejadian. $f(S, I)$ diasumsikan terdiferensial kontinu pada R^2 dan memenuhi hipotesis (H1), (H2) dan (H3), yaitu

(H1) $f(0, I) = 0$, untuk setiap $I \geq 0$,

(H2) $\frac{\partial f(S, I)}{\partial S} > 0$, untuk setiap $S > 0$ dan $I \geq 0$.

(H3) $\frac{\partial f(S, I)}{\partial I} \leq 0$ dan $\frac{\partial f(S, I)}{\partial I} \leq 0$ untuk setiap $S \geq 0$ dan $T \geq 0$.

Beberapa bentuk fungsi kejadian $f(S, I)$ yang umum digunakan dan memenuhi hipotesis tersebut adalah $f(S, I) = \beta S$ yang merupakan fungsi kejadian bilinear, $f(S, I) = \frac{\beta S}{S+I}$ yang merupakan fungsi kejadian standar dan $f(S, I) = \frac{\beta S}{1+aS+bI+abSI}$ yang merupakan fungsi kejadian Crowley-Martin.

Dalam penelitiannya, Hattaf dkk. (2013) meneliti model epidemi

dengan laju kejadian $f(S, I) = \frac{\beta SI}{1+a_1S+a_2I+a_3SI}$, yaitu

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \frac{\beta SI}{1+a_1S+a_2I+a_3SI} \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1+a_1S+a_2I+a_3SI} - (\mu + d + r)I \\
 \frac{dR}{dt} &= rI - \mu R.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

dengan $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ adalah konstanta yang menyatakan efek penghambat dan β menyatakan laju infeksi.

(Hattaf, dkk. 2013).



$$D^{\alpha} S = D^{\alpha} I = 0,$$

Diperoleh

$$\Lambda - \mu S - \frac{\beta SI}{1 + a_1 S + a_2 I + a_3 SI} = 0, \quad (3.3)$$

dan

$$\frac{\beta SI}{1 + a_1 S + a_2 I + a_3 SI} - aI = 0, \quad (3.4)$$

Berdasarkan persamaan (3.4) diperoleh

$$\left(\frac{\beta S}{1 + a_1 S + a_2 I + a_3 SI} - a \right) I = 0,$$

sehingga $I = 0$ atau $\frac{\beta S}{1 + a_1 S + a_2 I + a_3 SI} = a$.

Jika $I = 0$ maka berdasarkan persamaan (3.3) diperoleh $S = \frac{\Lambda}{\mu}$, dan diperoleh titik kesetimbangan pertama, yaitu $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$, yang disebut sebagai titik kesetimbangan bebas penyakit.

Jika $I \neq 0$ maka $\frac{\beta S}{1 + a_1 S + a_2 I + a_3 SI} = a$. Akibatnya, persamaan (3.3) menjadi

$$\Lambda - \mu S - aI = 0$$

dan diperoleh

$$I = \frac{\Lambda - \mu S}{a} \quad (3.5)$$

Jika nilai I disubstitusikan ke persamaan (3.3), maka persamaan (3.3) menjadi



$$\Lambda - \mu S - \frac{\beta S \left(\frac{\Lambda - \mu S}{a}\right)}{1 + a_1 S + a_2 \left(\frac{\Lambda - \mu S}{a}\right) + a_3 S \left(\frac{\Lambda - \mu S}{a}\right)} = 0,$$

$$\Lambda + \mu S - \frac{\beta S (\Lambda - \mu S)}{a + aa_1 S + a_2 (\Lambda - \mu S) + a_3 S (\Lambda - \mu S)} = 0,$$

$$\frac{\beta S (\Lambda - \mu S)}{a + aa_1 S + a_2 (\Lambda - \mu S) + a_3 S (\Lambda - \mu S)} = \Lambda - \mu S;$$

$$\frac{\beta S (\Lambda - \mu S)}{a + aa_1 S + a_2 (\Lambda - \mu S) + a_3 S (\Lambda - \mu S)} = 1,$$

$$\frac{\beta S (\Lambda - \mu S)}{a + aa_1 S + a_2 (\Lambda - \mu S) + a_3 S (\Lambda - \mu S)} = \beta S,$$

$$a + aa_1 S + a_2 \Lambda - a_2 \mu S + a_3 S \Lambda - a_3 \mu S^2 = \beta S$$

$$a + a_2 \Lambda - (\beta - aa_1 + a_2 \mu - a_3 \Lambda) S - a_3 \mu S^2 = 0,$$

$$a_3 \mu S^2 + (\beta - aa_1 + a_2 \mu - a_3 \Lambda) S - (a + a_2 \Lambda) = 0.$$

Akar persamaan tersebut adalah

$$S_{1,2} = \frac{-(\beta - aa_1 + a_2 \mu - a_3 \Lambda) \pm \sqrt{P}}{2a_3 \mu}$$

dengan $P = (\beta - aa_1 + a_2 \mu - a_3 \Lambda)^2 + 4a_3 \mu (a + a_2 \Lambda)$. Karena nilai S yang menjadi titik kesetimbangan adalah akar positif dari akar persamaan tersebut maka

$$S = \frac{-(\beta - aa_1 + a_2 \mu - a_3 \Lambda) + \sqrt{P}}{2a_3 \mu}$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, diperoleh titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S_1, I_1)$

dengan

$$S_1 = \frac{-(\beta - aa_1 + a_2 \mu - a_3 \Lambda) + \sqrt{P}}{2a_3 \mu},$$

$$I_1 = \frac{\Lambda - \mu S_1}{a}$$

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Sistem persamaan (3.2) merupakan sistem persamaan diferensial fraksional nonlinear. Penentuan kestabilan lokal titik kesetimbangan sistem dilakukan dengan menggunakan hampiran linear

$$D^\alpha \vec{e}_1 = \mathcal{J} \vec{e}_1,$$

dengan

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & \frac{\beta I^*(1+a_2 I^*)}{(1+a_1 S^*+a_2 I^*+a_3 S^* I^*)^2} \\ \beta I^*(1+a_2 I^*) & \frac{-\beta S^*(1+a_1 S^*)}{(1+a_1 S^*+a_2 I^*+a_3 S^* I^*)} - a \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.3.1 Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit

Jika titik kesetimbangan $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0)$ disubstitusikan ke matriks (3.6) maka diperoleh matriks Jacobi di titik kesetimbangan E_0 , yaitu

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & \frac{-\beta \Lambda}{\mu+a_1 \Lambda} \\ 0 & \frac{\beta \Lambda}{\mu+a_1 \Lambda} - a \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen matriks $J(E_0)$ adalah

$$\lambda_1 = -\mu \text{ dan } \lambda_2 = \frac{\beta \Lambda}{\mu+a_1 \Lambda} - a.$$

Jelas bahwa $\lambda_1 < 0$ dan

$$\lambda_2 = \frac{\beta \Lambda}{\mu+a_1 \Lambda} - a, \quad \lambda_2 = \frac{(\beta \Lambda)a}{(\mu+a_1 \Lambda)a} - a, \quad (3.7)$$

Jika dimisalkan $R_0 = \frac{\beta \Lambda}{(\mu+a_1 \Lambda)a}$ maka diperoleh $\lambda_2 = a(R_0 - 1)$, sehingga λ_2 akan bernilai negatif jika $R_0 < 1$. Karena $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ jika $R_0 < 1$ maka

$$\tan^{-1} \left(\frac{Im(\lambda_{1,2})}{Re(\lambda_{1,2})} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0}{Re(\lambda_{1,2})} \right) = 0 \quad (3.8)$$

sehingga

$$\tan^{-1} \left(\frac{Im(\lambda_{1,2})}{Re(\lambda_{1,2})} \right) > \frac{\alpha\pi}{2}$$

Jadi titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

3.3.2 Kestabilan titik kesetimbangan endemik

Sifat kestabilan titik kesetimbangan E_1 juga diperoleh melalui analisis kestabilan dengan melakukan linearisasi sistem persamaan non linear (3.2). Jika titik kesetimbangan $E_1 = (S_1, I_1)$ disubstitusikan pada matriks (3.6) maka diperoleh matriks Jacobi di titik kesetimbangan E_1 , yaitu

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\mu & \frac{\beta I_1(1+a_2 I_1)}{(K)^2} & \frac{-\beta S_1(1+a_1 S_1)}{(K)^2} \\ \frac{\beta I_1(1+a_2 I_1)}{(K)^2} & \frac{\beta S_1(1+a_1 S_1)}{(K)^2} - a & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$$K = 1 + a_1 S_1 + a_2 I_1 + a_3 S_1 I_1.$$

Selanjutnya diperoleh nilai eigen matriks $J(E_1)$ dengan menyelesaikan persamaan

$$\begin{vmatrix} |J(E_1) - \lambda I| = 0, \\ -\mu - \frac{\beta I_1(1+a_2 I_1)}{(K)^2} - \lambda & \frac{-\beta S_1(1+a_1 S_1)}{(K)^2} \\ \frac{\beta I_1(1+a_2 I_1)}{(K)^2} & \frac{\beta S_1(1+a_1 S_1)}{(K)^2} - a - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Penyelesaian persamaan tersebut dipaparkan dalam Lampiran sehingga diperoleh persamaan kuadrat

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0, \tag{3.9}$$

dengan

$$c_1 = \mu + \frac{\beta I_1(1+a_2 I_1) + \beta S_1 I_1(a_2 + a_3 S_1)}{(K)^2}$$

$$c_2 = \frac{a \beta I_1(1+a_2 I_1) + \mu \beta S_1 I_1(a_2 + a_3 S_1)}{(K)^2}.$$

Terlihat jelas bahwa $c_1 > 0$ dan $c_2 > 0$, sehingga diperoleh nilai-nilai eigen, yaitu

$$\begin{aligned}
 I_{m+1} &= h^\alpha g(S_m, I_m, R_m) - \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} I_{m+1-j} + \frac{(m+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} I_0 \\
 &= h^\alpha \left(\frac{\beta S_m I_m}{1+a_1 S_m + a_2 I_m + a_3 S_m I_m} - (\mu + d + r) I_m \right) - B_1 + B_2
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 R_{m+1} &= h^\alpha k(S_m, I_m, R_m) - \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} R_{m+1-j} + \frac{(m+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} R_0 \\
 &= h^\alpha (r I_m - \mu R_m) = C_1 + C_2
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

dengan

$$A_1 = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} S_{m+1-j}$$

$$A_2 = \frac{(m+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} S_0$$

$$B_1 = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} I_{m+1-j}$$

$$B_2 = \frac{(m+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} I_0$$

$$C_1 = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} R_{m+1-j}$$

$$C_2 = \frac{(m+1)^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} R_0$$

3.5 Simulasi Numerik

Pada subbab ini disimulasikan solusi sistem persamaan (3.2) dengan menggunakan pendekatan Grunwald-Letnikov untuk turunan Caputo pada software MATLAB. Simulasi numerik dilakukan untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya dan menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan endemik. Dengan mengambil beberapa nilai awal, yaitu $T1 = (15, 5, 0)$, $T2 = (13, 6, 1)$, $T3 = (11, 7, 3)$, $T4 = (9, 8, 4)$, dan $T5 = (7, 9, 4)$ dilakukan simulasi numerik yang menghasilkan nilai $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$.

3.5.1 Kasus $R_0 < 1$

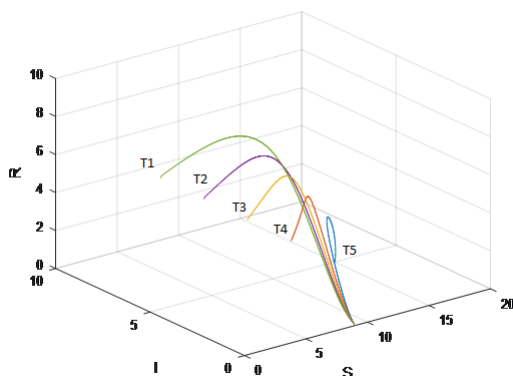
Pada kasus ini, digunakan nilai parameter sebagai berikut:
 $\Lambda = 0.9, \mu = 0.1, \beta = 0.1, d = 0.01, r = 0.5, a_1 = 0.1, a_2 = 0.02,$

dan $a_3 = 0.003$, sehingga diperoleh nilai R_0 , yaitu

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{(\mu+a_1\Lambda)(\mu+d+r)} = 0.7765 < 1$$

Dengan nilai $R_0 < 1$ diperoleh satu titik kesetimbangan yang eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal, yaitu $E_0 = (9, 0)$

Hasil simulasi untuk $\alpha = 0.9$ disajikan pada Gambar 3.1. Terlihat



Gambar 3.1: Potrait fase untuk $R_0 < 1$ dan $\alpha = 0.9$

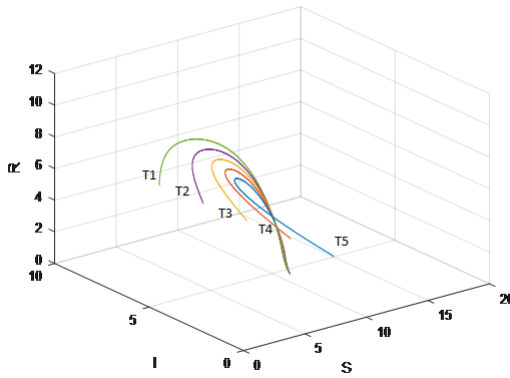
bahwa seluruh orbit menuju titik $E_0 = (9, 0)$. Artinya solusi bergerak menuju titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 yang berarti bahwa setelah waktu yang cukup lama tidak terjadi suatu infeksi. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya, bahwa $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (9, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

3.5.2 Kasus $R_0 > 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter yang sama dengan kasus sebelumnya tetapi nilai β diubah menjadi $\beta = 0.2$ sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{(\mu+a_1\Lambda)(\mu+d+r)} = 1.5531 > 1$$

Dengan nilai $R_0 > 1$ diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (4.4970, 0.7382)$. Hasil simulasi untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha = 0.9$ disajikan pada Gambar 3.2. Terlihat bahwa seluruh orbit bergerak menuju titik $E_1 = (4.4970, 0.7382)$. Artinya solusi bergerak menuju ke titik kesetimbangan endemik E_1 . Hal tersebut menunjukkan bahwa jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik E_1 bersifat stabil asimtotik lokal.

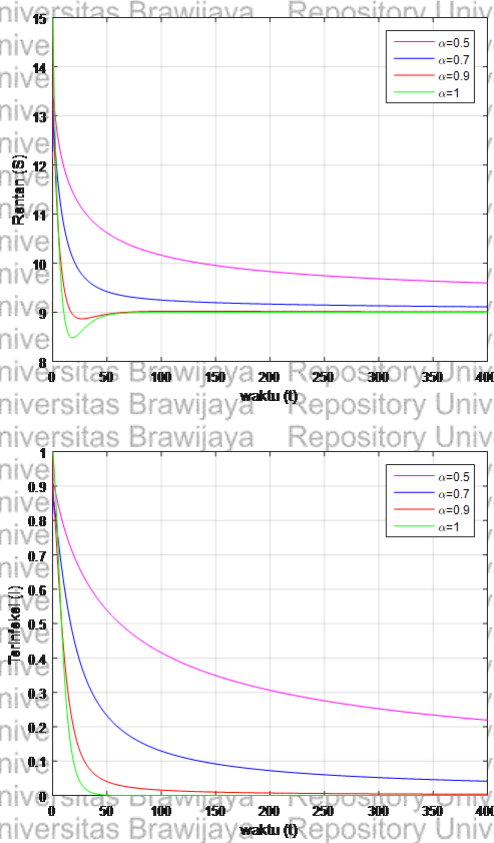


Gambar 3.2. Potrait fase untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha = 0.9$

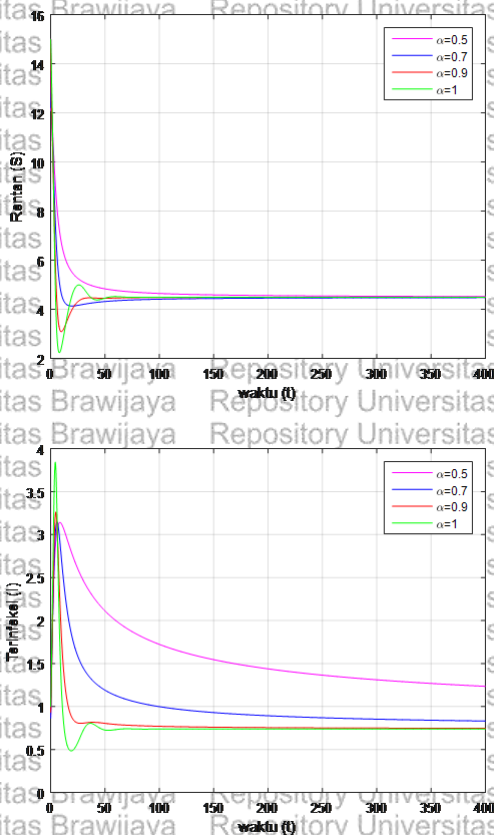
3.5.3 Simulasi $\alpha = 0.5, \alpha = 0.7, \alpha = 0.9, \text{ dan } \alpha = 1$

Pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 telah dilakukan simulasi dengan menggunakan nilai $\alpha = 0.9$. Untuk mengetahui pengaruh dari nilai α terhadap model, maka dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan nilai α yang berbeda-beda. Nilai α yang digunakan adalah $\alpha = 0.5, \alpha = 0.7, \alpha = 0.9, \text{ dan } \alpha = 1$.

Berdasarkan Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 dari simulasi tersebut dapat ditunjukkan bahwa jika nilai α yang digunakan semakin tinggi maka grafik yang terbentuk akan semakin cepat konvergen menuju ke titik kesetimbangan.



Gambar 3.3. Perubahan jumlah individu subpopulasi S dan I untuk $R_0 < 1$ dengan beberapa nilai α



Gambar 3.4: Perubahan jumlah individu subpopulasi S dan I , untuk $R_0 > 1$ dengan beberapa nilai α



DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed, E., El-syaed, A. M. A., dan El-Saka, H. A. A. 2007. Equilibriums Points, Stability, and Numerical Solutions of Fractional-order Predator-prey, and Rabies Models. *J. Math Anal. App.* 325:542-553.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., dan Yorke, J. A. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Brauer, F. dan Chavez, C.C. 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer-Verlag, New York.
- Diethelm, K. 2010. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.
- Dos Santos, J.P.C., Monteiro, E., dan Vieira, G.B. 2017. Global Stability of Fractional SIR Epidemic Model. *Proc.Ser. Braz. Soc. Comput. Appl. Math.*5(1), 1-7.
- El-Saka, H.A.A. 2013. The Fractional-Order SIR and SIRS Epidemic Models with Variable Population Size. *Math. Sci. Lett.* 2. 195-200.
- Hattaf, K., A.A. Lashari, Y. Louartessi, dan N. Yousfi. 2013. A Delayed SIR Epidemic Model with General Incidence. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* 3:1-9.
- Hattaf, K., N. Yousfi, dan A. Tridane. 2013. Stability Analysis of a Virus Dyamics Model with General Incidence Rate and Two Delays. *Applied Mathematics and Computation.* 221(2013): 514-521.

Hefferman, J.M., R.J. Smith, dan L.M. Wahl. 2005. Perspectives on the Basic Reproductive Ratio. *The Royal Society Interface*, 2:281-293.

Hethcote, H. W. 2000. The Mathematics of Infectious Diseases. *SIAM Review*. 42(4): 599-653.

Mouaouine, A., Boukhouima, A., Hattaf, K., dan Youfi, N. 2018. A Fractional Order SIR Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate. *Advances in Difference Equations*. 2018:160.

Odibat, Z. M. 2010. Analytic Study on Linear System of Fractional Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications* 59: 1171-1183.

Okyere, E., Ouduro, F.T., Amponsah, S.K., Dontwi, I.K., Frempong, N.K. Fractional Order SIR Model with Constant Population. *Br. J. Math.* 14(2), 1-12.

Petras, I. 2011. *Fractional-Order Nonlinear Systems*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, Calif. USA.

Scherer, R., Kalla, S. L., Tang, Y., dan Huang, J. 2011. The Grunwald-Letnikov Method for Fractional Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications* 62:902-917.



LAMPIRAN

Perhitungan Persamaan Karakteristik

Perhitungan persamaan (3.9)

$$\left(\frac{\beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} - \lambda \right) \left(\frac{\beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} - a - \lambda \right) - \left(\frac{-\beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} \right) \left(\frac{\beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} \right) = 0$$

$$\frac{\mu \beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} + \mu a + \mu \lambda - \frac{\beta^2 S_1 I_1(1+a_2I_1)(1+a_1S_1)}{(K)^4} + \frac{a \beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} + \frac{\beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} - \lambda \beta S_1(1+a_1S_1) = 0$$

$$\frac{\lambda \beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} - \lambda a + \lambda^2 + \left(\frac{\beta^2 S_1 I_1(1+a_2I_1)(1+a_1S_1)}{(K)^4} \right) = 0$$

$$\frac{\beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} + \mu a + \mu \lambda + \frac{a \beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} + \frac{\beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} - \frac{\lambda \beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} + \lambda a + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda \left(\mu + a + \frac{\beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} - \beta S_1(1+a_1S_1) \right) + \left(\frac{a \beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} + \frac{\mu \beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} + \mu a \right) = 0$$

Misalkan

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0,$$

dengan

$$c_1 = \mu + a + \frac{\beta I_1(1+a_2I_1)}{(K)^2} - \beta S_1(1+a_1S_1)$$

$$c_2 = \frac{\beta S_1(1+a_2I_1) - \mu\beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2} + \mu a$$

Pada persamaan (3.4) untuk $I \neq 0$ diperoleh $\frac{\beta S_1}{1+a_1S_1+a_2I_1+a_3S_1I_1} = a$ karena $D = 1 + a_1S_1 + a_2I_1 + a_3S_1I_1$ maka $a = \frac{\beta S_1}{K}$ kemudian substitusikan pada c_1 dan c_2 sehingga

$$c_1 = \mu + \frac{\beta S_1}{K} + \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) - \beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2}$$

$$c_1 = \mu + \frac{\beta S_1 K}{K^2} + \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) - \beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2}$$

$$c_1 = \mu + \frac{\beta S_1(1+a_1S_1+a_2I_1+a_3S_1I_1) + \beta I_1(1+a_2I_1) - \beta S_1(1+a_1S_1)}{K^2}$$

$$c_1 = \mu + \frac{\beta S_1(1+a_1S_1+a_2I_1+a_3S_1I_1) + \beta I_1(1+a_2I_1) - \beta S_1(1+a_1S_1)}{(K)^2}$$

$$c_1 = \mu + \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) + \beta S_1I_1(a_2+a_3S_1)}{(K)^2}$$

dan



maka persamaan menjadi

$$c_2 = \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) - \mu\beta S_1(1+a_1S_1) + \mu\left(\frac{\beta S_1}{K}\right)}{(K)^2}$$

$$c_2 = \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) - \mu\beta S_1(1+a_1S_1) + \mu\beta S_1(1+a_1S_1+a_2I_1+a_3S_1I_1)}{(K)^2}$$

$$c_2 = \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) - \mu\beta S_1(1+a_1S_1) + \mu\beta S_1(1+a_1S_1+a_2I_1+a_3S_1I_1)}{(K)^2}$$

$$c_2 = \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) + \mu\beta S_1I_1(a_2+a_3S_1)}{(K)^2}$$

denominator

$$c_1 = \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) + \beta S_1I_1(a_2+a_3S_1)}{(K)^2}$$

$$c_2 = \frac{\beta I_1(1+a_2I_1) + \mu\beta S_1I_1(a_2+a_3S_1)}{(K)^2}$$

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0,$$