# ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL PENGARUH SOSIALISASI PENDIDIKAN KESEHATAN MASYARAKAT TERHADAP PEMINUM MINUMAN BERALKOHOL

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh

**DIAN FATMA LORISTA**
**155090401111007**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**2019**

Repository Universitas Brawijaya

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL PENGARUH SOSIALISASI PENDIDIKAN KESEHATAN MASYARAKAT TERHADAP PEMINUM MINUMAN BERALKOHOL**

Oleh

**DIAN FATMA LORISTA**

**155090401111007**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji**
**pada tanggal 13 Februari 2019**
**dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar**
**Sarjana Matematika**

**Pembimbing**

**Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D.**
**NIP. 198411242009122006**

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.**
**NIP. 197509082000031003**

Repository Universitas Brawijaya

# LEMBAR PERNYATAAN

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini:**

| | |
|---|---|
| **Nama** | **: Dian Fatma Lorista** |
| **NIM** | **: 155090401111007** |
| **Jurusan** | **: Matematika** |
| **Penulis Skripsi berjudul** | **: Analisis Kestabilan Global Model Pengaruh Sosialisasi Pendidikan Kesehatan Masyarakat Terhadap Peminum Minuman Beralkohol** |

**dengan ini menyatakan bahwa:**

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.**
2. **Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 13 Februari 2019**
**yang menyatakan,**

**Dian Fatma Lorista**
**NIM. 155090401111007**



Repository Universitas Brawijaya
REPOSITORY.UB.AC.ID
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Repository Universitas Brawijaya

# ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL PENGARUH SOSIALISASI PENDIDIKAN KESEHATAN MASYARAKAT TERHADAP PEMINUM MINUMAN BERALKOHOL


## ABSTRAK

Pada tugas akhir ini dibahas konstruksi dan analisis model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap pecandu minuman beralkohol. Pada model ini terdapat dua individu rentan, yaitu individu rentan yang tidak memperoleh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat dan individu rentan yang memperoleh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat. Selanjutnya dilakukan analisis dinamik yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar $R_0$, dan analisis kestabilan global titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas alkohol dan titik kesetimbangan ada alkohol. Titik kesetimbangan bebas alkohol selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan ada alkohol eksis dengan syarat tertentu. Kestabilan kedua titik kesetimbangan bergantung pada angka reproduksi dasar $R_0$. Titik kesetimbangan bebas alkohol bersifat stabil asimtotik global saat $R_0 \leq 1$ dan titik kesetimbangan ada alkohol bersifat stabil asimtotik global saat $R_0 > 1$. Hasil simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.



**Kata kunci:** analisis dinamik, model pecandu alkohol, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan global.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

# GLOBAL STABILITY ANALYSIS OF EFFECTS OF PUBLIC HEALTH EDUCATIONAL CAMPAIGNS MODEL ON DRINKING DYNAMIC


## ABSTRACT

In this final project discusses the construction and analysis of effects of public health educational campaigns model on drinking dynamic. In this model there a two susceptible individual, the first is susceptible drinkers, who consume alcohol in moderation and do not accept the public health education, the second is educated drinkers, who consume alcohol in moderation and accept the public health education. Dynamical analysis involves determining the equilibrium point, finding the basic reproduction number $R_0$, and analysis of global stability of equilibrium point. The results of dynamical analysis show that the model has two equilibrium points, namely the alcohol-free equilibrium and the alcohol present equilibrium. Alcohol-free equilibrium always exists, while the alcohol present equilibrium exist under certain conditions. The stability of all two equilibrium points depends on the basic reproduction number $R_0$. The alcohol-free equilibrium is global asymptotically stable if $R_0 \leq 1$ and the alcohol present equilibrium is global asymptotically stable if $R_0 > 1$. The result of numerical simulation supports the result of dynamical analysis.



**Keywords:** dynamic analysis, drinking model, basic reproduction number, global stability analysis.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID
Repository Universitas Brawijaya

# KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Kestabilan Global Model Pengaruh Sosialisasi Pendidikan Kesehatan Masyarakat Terhadap Peminum Minuman Alkohol* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen pembimbing skripsi sekaligus dosen penasihat akademik atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Drs. Marsudi, MS. dan Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
4. Ayah (Edi Santoso), Ibu (Anis Fulaila), adik (Nissel Nabila Syahputri) dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Dessy, Dita, dan Lisca atas bantuan ilmu dan motivasi.
6. Keluarga Besar Matematika 2015 atas kebersamaan selama menikmati proses perkuliahan.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email dian030598@gmail.com, untuk perbaikan di masa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 13 Februari 2019

Penulis



Repository Universitas Brawijaya
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

# DAFTAR ISI

**JUDUL** ..... i
**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI** ..... iii
**LEMBAR PERNYATAAN** ..... v
**ABSTRAK** ..... vii
**ABSTRACT** ..... ix
**KATA PENGANTAR** ..... xi
**DAFTAR ISI** ..... xiii
**DAFTAR GAMBAR** ..... xv
**DAFTAR LAMPIRAN** ..... xvii
**DAFTAR TABEL** ..... xix
**BAB I PENDAHULUAN** ..... 1
1.1 Latar Belakang ..... 1
1.2 Rumusan masalah ..... 1
1.3 Tujuan ..... 3
**BAB II DASAR TEORI** ..... 5
2.1 Sistem Dinamik ..... 5
2.1.1 Sistem Otonomus ..... 5
2.1.2 Sistem Otonomus Linear ..... 6
2.1.3 Sistem Otonomus Nonlinear ..... 8
2.2 Angka Reproduksi Dasar ..... 8
2.3 Metode Matriks Generasi Selanjutnya ..... 8
2.4 Analisis Kestabilan Global ..... 10
2.5 Pertaksamaan Rata-rata Aritmetika dan Geometri ..... 14
**BAB III PEMBAHASAN** ..... 17
3.1 Konstruksi Model ..... 17



Repository Universitas Brawijaya
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

3.1.1 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Rentan Yang Tidak Mendapatkan Sosialisasi Pendidikan Kesehatan Masyarakat ($S$) ..... 18
3.1.2 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Rentan Yang Mendapatkan Sosialisasi Pendidikan Kesehatan Masyarakat ($E$) ..... 19
3.1.3 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Pecandu Minuman Alkohol ($A$) ..... 20
3.1.4 Pecandu Minuman Alkohol Yang Sedang Memasuki Masa Pemulihan ($R$) ..... 22
3.1.5 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Pecandu Alkohol Yang Berhenti Meminum Minuman Beralkohol Secara Permanen ($Q$) ..... 23
3.2 Titik Kesetimbangan Model dan Angka Reproduksi Dasar ..... 27
3.3 Analisis Kestabilan Global ..... 36
3.3.1 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Alkohol ..... 36
3.3.2 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Ada Alkohol ..... 39
3.4 Simulasi Numerik ..... 44
3.4.1 Kestabilan titik kesetimbangan $R_0 < 1$ ..... 44
3.4.2 Kestabilan titik kesetimbangan $R_0 = 1$ ..... 48
3.4.3 Kestabilan titik kesetimbangan $R_0 > 1$ ..... 50
**BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN ..... 55**
4.1 Kesimpulan ..... 55
4.2 Saran ..... 56
**DAFTAR PUSTAKA ..... 57**

# DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Diagram Kompartemen .....17
Gambar 3.2 Fungsi $H(A)$ merupakan fungsi monoton turun .....33
Gambar 3.3 Kestabilan titik kesetimbangan bebas alkohol ($P_0$) ketika $R_0 = 0{,}6866$ .....46
Gambar 3.4 Potret fase untuk kestabilan $P_0$ ketika $R_0 < 1$ .....46
Gambar 3.5 Kestabilan titik kesetimbangan bebas alkohol ($P_0$) ketika $R_0 = 1$ .....48
Gambar 3.6 Potret fase untuk kestabilan $P_0$ ketika $R_0 = 1$ .....49
Gambar 3.7 Kestabilan titik kesetimbangan ada alkohol ($P^*$) ketika $R_0 = 1{,}2149$ .....51
Gambar 3.8 Potret fase untuk kestabilan $P^*$ ketika $R_0 > 1$ .....52



Repository Universitas Brawijaya
REPOSITORY.UB.AC.ID
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

# DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Turunan dari $V_1$ .....59
Lampiran 2. Turunan dari $V_2$ .....62
Lampiran 3. Turunan dari $H(A)$ .....65
Lampiran 4. Mensubstitusikan $\Lambda$ ke dalam fungsi $H(A)$ .....67

UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

# DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem ..44
Tabel 3.2 Nilai parameter simulasi I .....45

Repository Universitas Brawijaya

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Modernisasi yang dikatakan sebagai tonggak awal kemajuan zaman telah memberikan pengaruh dan dampak kemanusiaan yang luar biasa pada abad ke-20 ini. Modernisasi yang membawa dampak perubahan fisik dan mental dalam berbagai bidang dan nilai kehidupan, yang tentunya akan memberi konsekuensi dan pengaruh bagi manusia sebagai komponen dalam kehidupan. Pada dasarnya modernisasi merupakan kemajuan teknologi yang mengakibatkan perubahan cukup kompleks, bahwasannya kemajuan ilmu pengetahuan teknologi dan modernisasi merupakan faktor sosial ekonomi baru yang juga akan memberikan dampak pengaruh dalam bidang kesehatan. Salah satu dampak modernisasi dari faktor sosial ekonomi baru ini cukup nyata di tengah masyarakat adalah penyalahgunaan minuman keras di kalangan remaja. Minuman keras atau disebut juga minuman alkohol adalah minuman yang mengandung zat etanol. Etanol adalah zat yang bila dikonsumsi akan menurunkan tingkat kesadaran bagi konsumennya. Minuman alkohol juga memiliki zat adiktif, yaitu zat yang apabila dikonsumsi akan membuat orang tersebut merasa ingin terus mengonsumsinya dan akhirnya merasa bergantung pada minuman alkohol. Minuman alkohol juga mempengaruhi sistem kerja otak karena minuman alkohol menghambat masuknya oksigen, sehingga hal tersebut menyebabkan pengguna minuman beralkohol merasa pusing (Rori, 2015).

Di kalangan remaja, sangat banyak kasus tentang penyalahgunaan minuman alkohol. Penyalahgunaan minuman alkohol di kalangan remaja terjadi karena adanya faktor pendorong. Beberapa remaja dapat terjerumus pada masalah minuman alkohol karena adanya pengaruh dari lingkungan pergaulan. Awalnya seseorang hanya mencoba-coba karena keluarga atau teman-teman yang sering mengonsumsinya, namun ada yang kemudian menjadi kebiasaan. Apabila seseorang telah terbiasa

mengonsumsi minuman beralkohol, maka mereka akan menjadi ketagihan. Ketagihan minum minuman beralkohol sulit disembuhkan, apalagi didukung mudahnya mendapatkan minuman beralkohol (Rori, 2015).

Hingga saat ini, upaya yang paling efektif untuk mencegah pengaruh minuman beralkohol adalah dengan memberikan pendidikan kesehatan masyarakat. Pendidikan kesehatan masyarakat adalah segala upaya yang direncanakan untuk mempengaruhi orang lain baik individu, kelompok, atau masyarakat sehingga mereka melakukan apa yang diharapkan oleh pelaku pendidikan (Notoatmodjo, 2003).

Salah satu cara untuk memperkirakan dampak mengonsumsi minuman beralkohol yang dikaitkan dengan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat adalah dengan pemodelan matematika. Pemodelan matematika yang terkait dengan pecandu alkohol telah banyak dikembangkan. Del Valle, dkk. (2004) mempelajari efek dari pendidikan vaksinasi sementara dan pengobatan pada transmisi HIV pada populasi yang aktif secara homoseksual. Mereka menyarankan bahwa sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat dapat menjadi sebuah pilihan yang efisien untuk mengurangi penyebaran penyakit. Mubayi, dkk. (2010) memperkenalkan sebuah model penularan pecandu alkohol secara sosial. Giuseppe dan Brian (2012) mengembangkan sebuah model pecandu alkohol dengan perawatan. Termotivasi oleh artikel Del Valle, dkk. (2004), Xiang, dkk. (2015) memperkenalkan sebuah model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol. Dalam hal ini, mereka membagi individu yang rentan mengonsumsi minuman beralkohol menjadi dua, yaitu individu rentan yang mengonsumsi minuman beralkohol tanpa mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat dan individu rentan yang mengonsumsi minuman beralkohol dengan mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat. Xiang, dkk. menunjukkan bahwa sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol dapat meningkatkan kesadaran akan bahaya mengonsumsi minuman beralkohol secara berlebihan.

Dalam skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis kestabilan global model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol yang mengkaji ulang pada artikel Xiang, dkk. (2015). Analisis kestabilan global yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan global titik kesetimbangan. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil perhitungan analitik.

## 1.2 Rumusan masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, inti permasalahan yang dikaji pada skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan kestabilan global titik kesetimbangan model tersebut?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi solusi model?

## 1.3 Tujuan

Tujuan yang diperoleh pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menjelaskan konstruksi model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan global titik kesetimbangan model.
3. Menjelaskan hasil simulasi numerik dan menginterpretasikan solusi model.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

# BAB II
# DASAR TEORI

Pada skripsi ini dibahas mengenai analisis dinamik model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol. Oleh karena itu, teori mengenai sistem dinamik, sistem otonomus, angka reproduksi dasar, metode matriks generasi selanjutnya, fungsi Lyapunov, dan pertaksamaan rata-rata aritmetika dan geometri diperlukan untuk membantu memahami persoalan dalam penulisan skripsi ini.

## 2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisi di masa sekarang atau masa lalu (Nagle, dkk., 2012). Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret yang menggunakan persamaan beda dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu yang menggunakan persamaan diferensial dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

(Alligood, dkk., 2000)

Sistem dinamik kontinu dibedakan menjadi sistem otonomus dan sistem nonotonomus. Dalam skripsi ini model yang dibahas merupakan sistem otonomus.

### 2.1.1 Sistem Otonomus

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial biasa yang berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

dengan fungsi $\vec{f}(\vec{x})$ adalah fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas $t$.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

**Definisi 2.1.1 (Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus)**

Titik $\vec{x}^*$ disebut titik kritis sistem otonomus (2.1) jika memenuhi $\vec{f}(\vec{x}) = 0$. Titik kristis $\vec{x}^*$ merupakan solusi sistem persamaan (2.1) yang bernilai konstan, karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang dan titik kritis adalah titik yang memenuhinya, sehingga titik kritis disebut sebagai titik kesetimbangan.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

**Definisi 2.1.2 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)**

Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ sistem otonomus (2.1) dikatakan

1. **stabil**, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) pada saat $t = 0$ memenuhi
$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$
ada $\forall t > 0$ dan memenuhi
$$\|\vec{x}(\mathrm{t}) - \vec{x}^*\| < \varepsilon,$$
2. **stabil asimtotik**, jika $\vec{x}^*$ stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika terdapat suatu solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) yang memenuhi
$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$
maka berlaku
$$\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$
3. **tidak stabil**, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

### 2.1.2 Sistem Otonomus Linear

Secara umum sistem otonomus linear dengan $n$ persamaan dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2, \ldots, n$. Sistem persamaan (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \tag{2.3}$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka $\vec{x}^* = 0$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan (2.2). Penentuan tipe kestabilan titik kesetimbangan pada sistem otonomus linear bergantung pada nilai eigen matriks $A$.

**Teorema 2.1.2 (Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus Linear)**

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks $A$. Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem (2.2) bersifat,

1. **stabil asimtotik**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif,
2. **stabil**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real tak positif,
3. **tidak stabil**, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

### 2.1.3 Sistem Otonomus Nonlinear

Misalkan sistem persamaan (2.1) adalah sistem persamaan nonlinear yang memiliki turunan parsial kontinu di titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$. Sistem persamaan (2.1) dapat didekati oleh sistem otonomus linear dengan melakukan proses linearisasi. Linearisasi yang dilakukan adalah dengan Taylor. Linearisasi adalah proses hampiran sistem otonomus nonlinear dengan otonomus linear.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

## 2.2 Angka Reproduksi Dasar

Salah satu hal yang paling penting diperhatikan dalam penyebaran penyakit adalah kemampuan penyakit untuk menyebar atau mewabah dalam suatu populasi. Angka reproduksi dasar ($R_0$) adalah angka yang khas dalam model epidemi yang menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu terinfeksi selama proses penularan penyakit dalam suatu populasi rentan (Heffernan, dkk., 2005). Angka reproduksi dasar ($R_0$) dapat digunakan untuk menentukan terjadi atau tidaknya wabah penyakit dalam suatu populasi. Jika $R_0 < 1$, artinya banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu terinfeksi berjumlah kurang dari satu individu, sehingga tidak mungkin terjadi penyebaran penyakit. Sedangkan jika $R_0 > 1$, artinya banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu terinfeksi berjumlah lebih dari satu individu, sehingga terjadi penyebaran penyakit.

(Driessche dan Watmough, 2002)

Pada kasus ini, angka reproduksi dasar digunakan untuk menyatakan rata-rata banyaknya individu baru yang terpengaruh minuman beralkohol akibat satu individu pecandu minuman beralkohol.

## 2.3 Metode Matriks Generasi Selanjutnya

Metode matriks generasi selanjutnya adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan angka reproduksi dasar ($R_0$). Langkah awal pada metode ini adalah membagi model kompartemen penyebaran penyakit menjadi dua, yaitu kompartemen terinfeksi dan kompartemen tidak terinfeksi. Jika terdapat individu-individu terinfeksi maka suatu

kompartemen disebut kompartemen terinfeksi. Misalkan terdapat $1, \dots, m, m+1, \dots, n$ kompartemen dengan kompartemen pertama sampai dengan $m$ memuat individu terinfeksi dan kompartemen $m+1$ sampai dengan $n$ memuat individu tidak terinfeksi. Model kompartemen yang memuat individu terinfeksi dapat dituliskan sebagai berikut

$$x_i' = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

dengan $x_i$ menyatakan jumlah individu pada setiap kompartemen $i$. $\mathcal{F}_i$ menyatakan komponen pembentuk matriks $\mathcal{F}$ yang merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke-$i$. Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari individu rentan dan $\mathcal{F}_i$ tidak boleh negatif. $\mathcal{V}_i$ menyatakan komponen pembentuk matriks $\mathcal{V}$ yang merupakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya. $\mathcal{V}_i$ bernilai positif jika menyatakan transfer keluar dari matriks ke-$i$ dan $\mathcal{V}_i$ bernilai negatif jika transfer masuk pada suatu kompartemen. Didefinisikan $D\mathcal{F}$ dan $D\mathcal{V}$ adalah matriks $m \times m$ sebagai berikut

$$D\mathcal{F} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(P_0)}{\partial x_j}\right], D\mathcal{V} = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(P_0)}{\partial x_j}\right], \qquad i,j = 1,\dots,m$$

dengan $P_0$ merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai berikut

$$K = (D\mathcal{F})(D\mathcal{V})^{-1}.$$

Angka reproduksi dasar diperoleh dari perhitungan matriks generasi selanjutnya, yaitu

$$R_0 = \rho(K),$$

dengan $\rho(K)$ adalah radius spektral matriks $K$, yaitu nilai absolut terbesar dari nilai eigen matriks $K$.

(Brauer dan Chaves, 2010)

Contoh : Diberikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \alpha - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ masing-masing menyatakan jumlah individu yang rentan, infeksi, dan sembuh saat $t$. Parameter $\alpha, \beta, \gamma$, dan $\mu$ merupakan parameter yang terkait dengan sistem persamaan (2.4). Sistem persamaan (2.4) mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit $\varepsilon_0 = (1,0,0)$. Matriks generasi selanjutnya dapat diperoleh dari kelas $I$, sehingga kelas $I$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$I(t) = \varphi\big((S,R),I\big) - \psi\big((S,R),I\big),$$

Dengan nilai parameter $\varphi$ dan $\psi$ adalah sebagai berikut.

$$\varphi = [\beta S(t) I(t)],$$
$$\psi = [\gamma I(t) + \mu I(t)].$$

Hasil linearisasi dari $\varphi$ dan $\psi$ masing-masing adalah $F = [\beta S(t)]$ dan $V = [\gamma + \mu]$. Matriks generasi selanjutnya diperoleh sebagai berikut.

$$K = FV^{-1} = [\beta S(t)]\left[\frac{1}{\gamma + \mu}\right] = \frac{\beta S(t)}{\gamma + \mu}. \tag{2.5}$$

Selanjutnya substitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit $\varepsilon_0 = (1,0,0)$ ke persamaan (2.5) diperoleh

$$K = \frac{\beta}{(\gamma + \mu)}.$$

Dari sistem persamaan (2.4) diperoleh nilai $R_0$ adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{(\gamma + \mu)}.$$

(Driessche dan Watmough, 2002)

## 2.4 Analisis Kestabilan Global

Kestabilan global titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov dibedakan menjadi dua, yaitu fungsi Lyapunov lemah dan kuat.

**Definisi 2.4.1 (Fungsi Lyapunov Lemah)**

Misalkan $\vec{x}^*$ adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Suatu fungsi $L : R^n \to R$ disebut **fungsi Lyapunov lemah** untuk $\vec{x}^*$ jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq R^n$ dari $\vec{x}^*$ yang memenuhi kondisi,

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall\, \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $\dot{L}(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$.

**Definisi 2.4.2 (Fungsi Lyapunov Kuat)**

Fungsi $L$ disebut **fungsi Lyapunov kuat** untuk $\vec{x}^*$ jika terdapat suatu persekitaran $W$ pada $\vec{x}^*$ yang memenuhi kondisi,

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall\, \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $\dot{L}(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$.

**Teorema 2.4 (Kestabilan global dengan fungsi Lyapunov)**

Misalkan $\vec{x}^*$ adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ bersifat,

1. **stabil global**, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk $\vec{x}^*$,
2. **stabil asimtotik global**, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk $\vec{x}^*$.

(Alligood, dkk., 2000)

Contoh : Diberikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - dS - \frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I} + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I} - (d+\mu+\delta)I \\ \frac{dR}{dt} &= \mu I - (d+\gamma)R \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ masing-masing menyatakan jumlah individu yang rentan, infeksi, dan sembuh saat $t$. Parameter $b, d, k, \alpha, \beta, \gamma$, dan $\mu$ merupakan parameter yang terkait dengan model. Sistem persamaan (2.6) mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{b}{d}, 0, 0\right)$ dan $R_0 = \frac{bk}{(d+\alpha b)(d+\mu+\delta)}$. Analisis kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit dapat ditentukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov.

Didefinisikan bahwa fungsi Lyapunov untuk model (2.6) pada titik kesetimbangan bebas penyakit adalah $V: \{(S, I, R) \in \Gamma: S > 0\} \to \mathbb{R}$

$$V(S,I,R) = \frac{[(S-S^0)+I+R]^2}{2} + \frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)I}{k} + \frac{(\delta+2d)R^2}{2\mu}$$

Selanjutnya perlu dibuktikan apakah fungsi $V(S,I,R)$ tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah untuk $E_0$, perlu diperiksa apakah fungsi $V(S,I,R)$ tersebut memenuhi kondisi 1 pada Definisi Fungsi Lyapunov.

a. Akan ditunjukkan fungsi $V(E_0) = 0$

$$V(E_0) = V(S_0, I_0, R_0)$$

$$= V\left(\frac{b}{d}, 0, 0\right)$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{b}{d}-\frac{b}{d}\right)+0+0\right]^2}{2} + \frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)(0)}{k} + \frac{(\delta+2d)(0)^2}{2\mu}$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa $V(E_0) = 0$.

b. Akan ditunjukkan fungsi $V(S,I,R) > 0$

Substitusikan $(S,I,R) = (2,1,1)$ ke fungsi Lyapunov tersebut

$$V(2,1,1) = \frac{[(2-2)+1+]^2}{2} + \frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)1}{k} + \frac{(\delta+2d)1^2}{2\mu}$$

$$V(2,1,1) = 2 + \frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)}{k} + \frac{(\delta+2d)}{2\mu}$$

$$V(2,1,1) > 0$$

Terbukti bahwa $V(S,I,R) > 0$.

Dengan demikian terbukti bahwa $V(S,I,R)$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi Fungsi Lyapunov.

Setelah itu, dilakukan pemeriksaan apakah fungsi $V(S,I,R)$ memenuhi kondisi 2 pada Definisi Fungsi Lyapunov.

Dengan menggunakan turunan aturan rantai, maka :

$$\dot{V}(S,I,R) = \frac{\partial V}{\partial S}.\frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial I}.\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}.\frac{dR}{dt}$$

$$= \frac{2[(S-S^0)+I+R]}{2}\left(b - dS - \frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I} + \gamma R\right)$$

$$+\left(\frac{2[(S-S^0)+I+R]}{2} + \left(\frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)}{k}\right)\right)$$

$$\left(\frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I} - (d+\mu+\delta)I\right)$$

$$+\left(\frac{2[(S-S^0)+I+R]}{2}+\frac{2(\delta+2d)R}{2\mu}\right)(\mu I-(d+\gamma)R)$$

$$=\frac{2[(S-S^0)+I+R]}{2}\left(b-dS-\frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I}+\gamma R+\frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I}\right.$$

$$\left.-(d+\mu+\delta)I+\mu I-(d+\gamma)R\right)$$

$$+\left(\frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)}{k}\left(\frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(d+\mu+\delta)I\right)\right)$$

$$+\left(\frac{2(\delta+2d)R}{2\mu}(\mu I-(d+\gamma)R)\right)$$

$$=[(S-S^0)+I+R](b-dS-(d+\delta)I)-(d)R)$$

$$+\left(\frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)}{k}\left(\frac{kSI}{1+\alpha S+\beta I}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)}{k}((d+\mu+\delta)I)\right)$$

$$+\left(\frac{(\delta+2d)R}{2\mu}(\mu I)\right)-\left(\frac{(\delta+2d)}{2\mu}(d+\gamma)R^2\right)$$

$$=[(S-S^0)+I+R](dS^0-dS-(d+\delta)I)-(d)R)$$

$$+\left(\frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)SI}{1+\alpha S+\beta I}\right)-(\delta+2d)SI$$

$$-\left(\frac{(\delta+2d)(\alpha b+d)(d+\mu+\delta)I}{k}\right)+(\delta+2d)SI+((\delta+2d)RI)$$

$$-\left(\frac{(\delta+2d)(d+\gamma)R^2}{\mu}\right)$$

$$= -d[(S - S^0) + I + R]^2 - (d + \delta)I^2 - (\delta + 2d)SI\left(1 - \frac{\alpha b + d}{1 + \alpha S + \beta I}\right) - \left(\frac{(\delta + 2d)(\alpha b + d)(d + \mu + \delta)I}{k}\right) + (\delta + 2d)I(S^0) - \left(\frac{(\delta + 2d)(d + \gamma)R^2}{\mu}\right)$$

$$= -d[(S - S^0) + R]^2 - (d + \delta)I^2 - (\delta + 2d)SI\left(1 - \frac{\alpha b + d}{1 + \alpha S + \beta I}\right) - \left(\frac{(\delta + 2d)(\alpha b + d)(d + \mu + \delta)I}{k}\right)\left(1 - \frac{bk}{d(\alpha b + d)(d + \mu + \delta)}\right) - \left(\frac{(\delta + 2d)(d + \gamma)R^2}{\mu}\right)$$

$$= -d[(S - S^0) + R]^2 - (d + \delta)I^2 - (\delta + 2d)SI\left(1 - \frac{\alpha b + d}{1 + \alpha S + \beta I}\right) - \left(\frac{(\delta + 2d)(\alpha b + d)(d + \mu + \delta)I}{k}\right)\left(1 - \frac{R_0}{d}\right) - \left(\frac{(\delta + 2d)(d + \gamma)R^2}{\mu}\right)$$

$$= -d[(S - S^0) + R]^2 - (d + \delta)I^2 - (\delta + 2d)SI\left(1 - \frac{\alpha b + d}{1 + \alpha S + \beta I}\right) - \left(\frac{(\delta + 2d)(d + \gamma)R^2}{\mu}\right) - \left(\frac{(\delta + 2d)(\alpha b + d)(d + \mu + \delta)I}{k}\right)\left(1 - \frac{R_0}{d}\right)$$

$\dot{V}(S, I, R) < 0$

Oleh karena itu $\dot{V}(S, I, R) < 0$ apabila $R_0 \leq 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $V(S, I, R)$ adalah fungsi Lyapunov untuk model epidemik $SIR$ pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Maka terbukti bahwa $\dot{V}(S, I, R)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat. Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik global.

(Nurjanah, dkk., 2018)

## 2.5 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri

Misalkan $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Rata-rata aritmatika yang diberikan adalah

$$AM(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Misalkan $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Rata-rata geometri yang diberikan adalah

$$GM(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . \cdots . a_n} = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Teorema 2.5 (Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri)**

Misalkan $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, dengan $n \geq 2$ maka

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 . a_2 . \cdots . a_n}. \tag{2.7}$$

Pertaksamaan (2.7) akan menjadi persamaan jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

(Mercer, 2014)

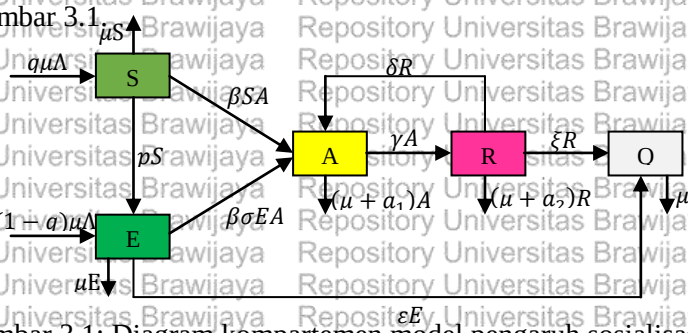
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

# BAB III
# PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan global. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

## 3.1 Konstruksi Model

Populasi dalam model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol ini dibagi menjadi lima subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan yang tidak menerima sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat (*Susceptible drinkers*), subpopulasi rentan yang menerima sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat (*Educated drinkers*), subpopulasi pecandu minuman beralkohol (*Alcoholics*), subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan sementara (*Recovered drinkers*), dan subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang berhenti minum secara permanen (*Quit drinkers*). Selanjutnya, perpindahan subpopulasi diantara kompartemen $S, E, A, R,$ dan $Q$ disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 3.1.




Gambar 3.1: Diagram kompartemen model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol

### 3.1.1 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Rentan Yang Tidak Mendapatkan Sosialisasi Pendidikan Kesehatan Masyarakat ($S$)

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi rentan ($S$) dipengaruhi oleh kelahiran, perubahan individu rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu pecandu minuman beralkohol, perubahan individu rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat, dan kematian alami.

Individu baru akan masuk ke dalam subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$), sehingga mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) dengan laju sebesar $q\mu\Lambda$ dengan $0 < q < 1$.

Setiap individu pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) dapat tertular mengonsumsi minuman beralkohol karena terjadinya kontak dengan individu pecandu minuman beralkohol ($A$) dengan tingkat $\beta$. Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) berkurang dengan laju sebesar $\beta SA$.

Adanya perubahan individu rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ke individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat dengan tingkat $p$ mengakibatkan berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) dengan laju sebesar $pS$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) juga disebabkan karena kematian alami dengan laju sebesar $\mu S$.

Dengan demikian, perubahan subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) per satuan waktu $t$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = q\mu\Lambda - \beta SA - pS - \mu S. \tag{3.1}$$

### 3.1.2 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Rentan Yang Mendapatkan Sosialisasi Pendidikan Kesehatan Masyarakat ($E$)

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($E$) dipengaruhi oleh kelahiran, perubahan individu rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat, perubahan individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu pecandu minuman beralkohol, kematian alami, dan perubahan individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu yang bebas dari minuman beralkohol.

Individu baru akan masuk ke dalam subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($E$), sehingga mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($E$) dengan laju sebesar $(1-q)\mu\Lambda$ dengan $0 < q < 1$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) disebabkan karena individu terdidik pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($S$) memiliki kesadaran untuk terbebas dari minuman beralkohol dengan tingkat $p$, mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($E$) bertambah dengan laju sebesar $pS$.

Setiap individu pada subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat ($E$) dapat tertular mengonsumsi minuman beralkohol karena terjadinya kontak dengan individu pecandu minuman beralkohol ($A$) dengan tingkat $\beta\sigma$. Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi rentan yang

mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(E)$ berkurang dengan laju sebesar $\beta\sigma EA$ dengan $0 < \sigma < 1$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(E)$ juga disebabkan karena kematian alami dengan laju sebesar $\mu E$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(E)$ karena mereka menjauhkan diri dari minuman beralkohol yang mengakibatkan mereka menjadi individu yang bebas dari minuman beralkohol. Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(E)$ berkurang dengan laju sebesar $\varepsilon E$.

Dengan demikian, perubahan subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(E)$ per satuan waktu $t$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dE}{dt} = (1-q)\mu\Lambda + \mathrm{p}S - \beta\sigma EA - \mu E - \varepsilon E.$$

atau dapat ditulis juga sebagai

$$\frac{dE}{dt} = (1-q)\mu\Lambda + \mathrm{p}S - \beta\sigma EA - (\mu+\varepsilon)E. \tag{3.2}$$

### 3.1.3 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Pecandu Minuman Beralkohol $(A)$

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi individu pecandu minuman beralkohol $(A)$ dipengaruhi oleh perubahan individu rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu pecandu minuman beralkohol, perubahan individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu pecandu minuman beralkohol, kematian alami, kematian akibat mengonsumsi minuman beralkohol secara berlebihan, perubahan individu pecandu minuman beralkohol menjadi individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan, dan perubahan individu pecandu minuman

beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan yang kembali lagi menjadi individu pecandu minuman beralkohol.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan yang tidak mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(S)$ akibat terjadinya kontak dengan individu pecandu minuman beralkohol $(A)$ dengan laju sebesar $\beta$. Sama halnya dengan jumlah individu pada subpopulasi rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(E)$ berkurang akibat terjadinya kontak dengan individu pecandu minuman beralkohol $(A)$ dengan tingkat $\beta\sigma$. Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol $(A)$ bertambah dengan laju sebesar $\beta SA$ dan $\beta\sigma EA$ dengan $0 < \sigma < 1$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol $(A)$ juga disebabkan karena kematian alami dengan laju sebesar $\mu A$, kematian akibat mengonsumsi minuman beralkohol secara berlebihan dengan laju sebesar $a_1 A$, dan perubahan individu pecandu minuman beralkohol menjadi individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan dengan laju sebesar $\gamma A$.

Jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol (A) dapat bertambah karena perubahan individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan kembali lagi menjadi individu pecandu minuman beralkohol dengan laju sebesar $\delta R$.

Dengan demikian, perubahan subpopulasi pecandu minuman beralkohol $(A)$ per satuan waktu $t$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dA}{dt} = \beta SA + \beta\sigma EA - \mu A - a_1 A - \gamma A + \delta R.$$

atau dapat ditulis juga sebagai

$$\frac{dA}{dt} = \beta SA + \beta\sigma EA + \delta R - (\mu + a_1 + \gamma)A. \tag{3.3}$$

### 3.1.4 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Pecandu Minuman Beralkohol Yang Sedang Memasuki Masa Pemulihan ($R$)

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan ($R$) dipengaruhi oleh perubahan individu pecandu minuman beralkohol menjadi individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan, perubahan individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan kembali lagi menjadi individu pecandu minuman beralkohol, perubahan individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan menjadi individu pecandu beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen, kematian alami, dan kematian akibat mengonsumsi minuman beralkohol secara berlebihan.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol ($A$) akibat pemulihan dengan laju $\gamma$ menyebabkan perubahan individu pecandu minuman beralkohol menjadi individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan ($R$). Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan($R$) bertambah dengan laju sebesar $\gamma A$.

Adanya perubahan individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan kembali lagi menjadi individu pecandu minuman beralkohol diakibatkan oleh lingkungannya dengan tingkat $\delta$ mengakibatkan berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan ($R$) dengan laju sebesar $\delta R$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan ($R$) juga disebabkan karena perubahan individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan menjadi individu pecandu beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen dengan laju sebesar $\xi R$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan $(R)$ juga disebabkan karena kematian alami dengan laju sebesar $\mu R$ dan kematian akibat mengonsumsi minuman beralkohol secara berlebihan dengan laju sebesar $a_2 R$.

Dengan demikian, perubahan subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan $(R)$ per satuan waktu $t$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dR}{dt} = \gamma A - \delta R - \xi R - \mu R - a_2 R.$$

atau dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dR}{dt} = \gamma A - (\delta + \xi + \mu + a_2)R. \tag{3.4}$$

### 3.1.5 Laju Perubahan Subpopulasi Individu Pecandu Minuman Beralkohol Yang Berhenti Mengonsumsi Minuman Beralkohol Secara Permanen $(Q)$

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen $(Q)$ dipengaruhi oleh perubahan individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan menjadi individu pecandu minuman beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen, perubahan individu rentan yang mendapatkan sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu yang terbebas dari minuman beralkohol, dan kematian alami.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan $(R)$ akibat berhasilnya masa pemulihan tersebut dengan laju sebesar $\xi$ menyebabkan individu pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan menjadi individu pecandu minuman beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen. Hal ini

mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen $(Q)$ bertambah dengan laju sebesar $\xi R$.

Adanya perubahan individu rentan yang mendapat sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat menjadi individu yang bebas dari minuman beralkohol dengan tingkat $\varepsilon$ mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen $(Q)$ dengan laju sebesar $\varepsilon E$.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen $(Q)$ disebabkan karena kematian alami dengan laju sebesar $\mu Q$.

Dengan demikian, perubahan subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang berhenti mengonsumsi minuman beralkohol secara permanen $(Q)$ per satuan waktu $t$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dQ}{dt} = \xi R + \varepsilon E - \mu Q. \tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan (3.1)-(3.5) diperoleh sistem persamaan otonomus nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= q\mu\Lambda - \beta SA - (p+\mu)S,\\
\frac{dE}{dt} &= (1-q)\mu\Lambda + pS - \beta\sigma EA - (\mu+\varepsilon)E,\\
\frac{dA}{dt} &= \beta SA + \beta\sigma EA + \delta R - (\mu + a_1 + \gamma)A,\\
\frac{dR}{dt} &= \gamma A - (\delta + \xi + \mu + a_2)R,\\
\frac{dQ}{dt} &= \xi R + \varepsilon E - \mu Q.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Oleh karena variabel $S, E, A$ dan $R$ tidak bergantung pada $Q$ serta tanpa kehilangan keadaan umum sistem variabel $Q$ dapat direduksi sehingga sistem persamaan otonomus nonlinear (3.6) menjadi sistem persamaan (3.7).

$$\frac{dS}{dt} = q\mu\Lambda - \beta SA - (p+\mu)S,$$
$$\frac{dE}{dt} = (1-q)\mu\Lambda + pS - \beta\sigma EA - (\mu+\varepsilon)E,$$
$$\frac{dA}{dt} = \beta SA + \beta\sigma EA + \delta R - (\mu + a_1 + \gamma)A,$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma A - (\delta + \xi + \mu + a_2)R. \tag{3.7}$$

Total populasi dari kelas kompartemen $S, E, A, R,$ dan $Q$ dinotasikan dengan $N$, yaitu

$$N = S + E + A + R + Q$$

Laju perubahan total kelas kompartemen dapat dituliskan sebagai berikut.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $t \to \infty$, maka solusi $S, E, A, R,$ dan $Q$ akan menuju titik kesetimbangan.

$$\begin{aligned}
\frac{dN(t)}{dt} &= \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dE(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt} \\
&= q\mu\Lambda - \beta SA(t) - (p+\mu)S(t) + (1-q)\mu\Lambda + pS(t) \\
&\quad - \beta\sigma E(t)A(t) - (\mu+\varepsilon)E(t) + \beta S(t)A(t) + \beta\sigma E(t)A(t) \\
&\quad + \delta R(t) - (\mu + a_1 + \gamma)A(t) + \gamma A(t) - (\delta + \xi + \mu + a_2)R(t) \\
&\quad + \xi R(t) + \varepsilon E(t) - \mu Q(t) \\
&= q\mu\Lambda - \beta S(t)A(t) - pS(t) - \mu S(t) + \mu\Lambda - q\mu\Lambda + pS(t) \\
&\quad - \beta\sigma E(t)A(t) - \mu E(t) - \varepsilon E(t) + \beta S(t)A(t) + \beta\sigma E(t)A(t) \\
&\quad + \delta R(t) - \mu A(t) - a_1 A(t) - \gamma A(t) + \gamma A(t) - \delta R(t) - \xi R(t) \\
&\quad - \mu R(t) - a_2 R(t) + \xi R(t) + \varepsilon E(t) - \mu Q(t) \\
&= -\mu S(t) + \mu\Lambda - \mu E(t) - \mu A(t) - a_1 A(t) - \mu R(t) - a_2 R(t) \\
&\quad - \mu Q(t) \\
&= \mu\Lambda - \mu(S(t) + E(t) + A(t) + R(t) + Q(t)) - a_1 A(t) \\
&\quad - a_2 R(t) \\
&= \mu\Lambda - \mu\big(N(t)\big) - a_1 A(t) - a_2 R(t) \\
&= \mu(\Lambda - N(t)) - a_1 A(t) - a_2 R(t)
\end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas, diperoleh $\frac{dN(t)}{dt} = \mu(\Lambda - N(t)) - a_1 A(t) - a_2 R(t)$. Solusi persamaan tersebut diperoleh dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mu(\Lambda - N(t)) - a_1A(t) - a_2R(t)$$

$$\frac{dN(t)}{\mu(\Lambda - N(t)) - a_1A(t) - a_2R(t)} = dt$$

$$\int \frac{dN(t)}{\mu(\Lambda - N(t)) - a_1A(t) - a_2R(t)} = \int dt$$

$$\int \frac{dN(t)}{\mu\Lambda - \mu N(t) - a_1A(t) - a_2R(t)} = \int dt$$

$$-\frac{1}{\mu}\ln(\mu\Lambda - \mu N(t) - a_1A(t) - a_2R(t)) = t + k_1$$

$$\ln(\mu\Lambda - \mu N(t) - a_1A(t) - a_2R(t)) = -\mu(t + k_1)$$

$$e^{\ln(\mu\Lambda - \mu N(t) - a_1A(t) - a_2R(t))} = e^{-\mu(t+k_1)}$$

$$\mu\Lambda - \mu N(t) - a_1A(t) - a_2R(t) = e^{-\mu(t+k_1)}$$

$$\mu\Lambda - \mu N(t) - a_1A(t) - a_2R(t) = e^{-\mu t}K, \text{ dengan } K = e^{-\mu k_1}$$

$$\mu N(t) = \mu\Lambda - a_1A(t) - a_2R(t) - e^{-\mu t}K$$

$$N(t) = \Lambda - \frac{a_1A(t)}{\mu} - \frac{a_2R(t)}{\mu} - \frac{e^{-\mu t}K}{\mu}$$

Diperoleh solusinya yaitu $N(t) = \Lambda - \frac{a_1A(t)}{\mu} - \frac{a_2R(t)}{\mu} - \frac{e^{-\mu t}K}{\mu}$.

Ketika $t = 0$, diperoleh

$$N(0) = \Lambda - \frac{a_1A(0)}{\mu} - \frac{a_2R(0)}{\mu} - \frac{e^{-0}K}{\mu} = \Lambda - \frac{a_1A(0)}{\mu} - \frac{a_2R(0)}{\mu} - \frac{K}{\mu}$$

Solusi $S(t), E(t), A(t), R(t), Q(t)$ bernilai positif untuk setiap $t > 0$, jika $S(0) > 0, E(0) > 0, A(0) > 0, R(0) > 0, Q(0) > 0$. Oleh karena itu, dimisalkan nilai $A(0) = R(0) = 1$, maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$N(0) = \Lambda - \frac{a_1}{\mu} - \frac{a_2}{\mu} - \frac{K}{\mu}$$

sehingga

$$\frac{K}{\mu} = \Lambda - \frac{a_1}{\mu} - \frac{a_2}{\mu} - N(0)$$

$$K = \Lambda\mu - N(0)\mu - a_1 - a_2$$

Dengan demikian, solusi khususnya dapat dituliskan sebagai berikut.

$$N(t) = \Lambda - \frac{a_1A(t)}{\mu} - \frac{a_2R(t)}{\mu} - \frac{e^{-\mu t}(\Lambda\mu - N(0)\mu - a_1 - a_2)}{\mu}$$

Untuk $t \to \infty$, berlaku

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \Lambda - \lim_{t\to\infty} \frac{a_1 A(t)}{\mu} - \lim_{t\to\infty} \frac{a_2 R(t)}{\mu}$$
$$- \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\mu t}(\Lambda\mu - N(0)\mu - a_1 - a_2)}{\mu}$$
$$= \Lambda - 0 - 0 - 0$$
$$= \Lambda$$

Jadi, $\lim_{t\to\infty} N(t) = \Lambda$. Dengan kata lain, ketika $t \to \infty$ maka solusi $S, E, A, R,$ dan $Q$ menuju titik kesetimbangan.

## 3.2 Titik Kesetimbangan Model dan Angka Reproduksi Dasar

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.6) diperoleh ketika $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dA}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dQ}{dt} = 0$, sehingga diperoleh

$$q\mu\Lambda - \beta SA - (p + \mu)S = 0, \tag{3.8a}$$
$$(1 - q)\mu\Lambda + pS - \beta\sigma EA - (\mu + \varepsilon)E = 0, \tag{3.8b}$$
$$\beta SA + \beta\sigma EA + \delta R - (\mu + a_1 + \gamma)A = 0, \tag{3.8c}$$
$$\gamma A - (\delta + \xi + \mu + a_2)R = 0, \tag{3.8d}$$
$$\xi R + \varepsilon E - \mu Q = 0, \tag{3.8e}$$

Berdasarkan persamaan (3.8a) diperoleh

$$q\mu\Lambda - \beta SA - (p + \mu)S = 0$$
$$q\mu\Lambda - S(\beta A + p + \mu) = 0$$
$$S = \frac{q\mu\Lambda}{\beta A + p + \mu} \tag{3.9}$$

Berdasarkan persamaan (3.8b) diperoleh

$$(1 - q)\mu\Lambda + pS - \beta\sigma EA - (\mu + \varepsilon)E = 0$$
$$pS = \beta\sigma EA + (\mu + \varepsilon)E - (1 - q)\mu\Lambda$$
$$S = \frac{\beta\sigma EA + (\mu + \varepsilon)E - (1 - q)\mu\Lambda}{p} \tag{3.10}$$

Kemudian persamaan (3.9) dan (3.10) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{q\mu\Lambda}{\beta A + p + \mu} = \frac{\beta\sigma EA + (\mu + \varepsilon)E - (1 - q)\mu\Lambda}{p}$$
$$pq\mu\Lambda = (\beta A + p + \mu)(\beta\sigma EA + (\mu + \varepsilon)E - (1 - q)\mu\Lambda)$$

$$\beta^2\sigma EA^2 + \beta\mu EA + \beta\varepsilon EA - \beta\mu\Lambda A + \beta q\mu\Lambda A + \beta\sigma pEA + p\mu E + p\varepsilon E - p\mu\Lambda + pq\mu\Lambda + \beta\sigma\mu EA + \mu^2 E + \mu\varepsilon E - \mu^2\Lambda + q\mu^2\Lambda - pq\mu\Lambda = 0$$

$$A(\beta^2\sigma EA + \beta\mu E + \beta\varepsilon E - \beta\mu\Lambda + \beta q\mu\Lambda + \beta\sigma pE + \frac{p\mu E}{A} + \frac{p\varepsilon E}{A} - \frac{p\mu\Lambda}{A} + \beta\sigma\mu E + \frac{\mu^2 E}{A} + \frac{\mu\varepsilon E}{A} - \frac{\mu^2\Lambda}{A} + \frac{q\mu^2\Lambda}{A}) = 0 \quad (3.11)$$

Berdasarkan persamaan (3.11) diperoleh dua kemungkinan, yaitu

1. $A = 0$, atau
2. $M = 0$ dengan $M = \beta^2\sigma EA + \beta\mu E + \beta\varepsilon E - \beta\mu\Lambda + \beta q\mu\Lambda + \beta\sigma pE + \frac{p\mu E}{A} + \frac{p\varepsilon E}{A} - \frac{p\mu\Lambda}{A} + \beta\sigma\mu E + \frac{\mu^2 E}{A} + \frac{\mu\varepsilon E}{A} - \frac{\mu^2\Lambda}{A} + \frac{q\mu^2\Lambda}{A}$.

Pada kemungkinan pertama, yaitu $A = 0$ maka persamaan (3.8d) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\gamma A - (\delta + \xi + \mu + a_2)R = 0$$
$$(\delta + \xi + \mu + a_2)R = \gamma A$$
$$R = \frac{\gamma A}{\delta + \xi + \mu + a_2}$$
$$R_0 = 0 \quad (3.12)$$

Dengan mensubstitusikan $A = 0$ ke persamaan (3.8a) maka diperoleh

$$q\mu\Lambda - \beta SA - (p + \mu)S = 0$$
$$q\mu\Lambda - 0 - (p + \mu)S = 0$$
$$S_0 = \frac{q\mu\Lambda}{(p + \mu)} \quad (3.13)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.13) dan $A = 0$ ke dalam persamaan (3.8b) maka diperoleh

$$(1 - q)\mu\Lambda + pS - \beta\sigma EA - (\mu + \varepsilon)E = 0$$
$$(1 - q)\mu\Lambda + \frac{pq\mu\Lambda}{(p + \mu)} - 0 - (\mu + \varepsilon)E = 0$$
$$(\mu + \varepsilon)E = (1 - q)\mu\Lambda + \frac{pq\mu\Lambda}{(p + \mu)}$$
$$(\mu + \varepsilon)E = \frac{(p + \mu)(1 - q)\mu\Lambda + pq\mu\Lambda}{(p + \mu)}$$

$$E = \frac{(p+\mu)(1-q)\mu\Lambda + pq\mu\Lambda}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}$$

$$E_0 = \frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} \tag{3.14}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.14) dan $R = 0$ ke dalam persamaan (3.8e) maka diperoleh

$$\xi R + \varepsilon E - \mu Q = 0$$

$$0 + \frac{\varepsilon\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} - \mu Q = 0$$

$$\mu Q = \frac{\varepsilon\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}$$

$$Q_0 = \frac{\varepsilon\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} \tag{3.15}$$

Dari perhitungan di atas maka diperoleh titik kesetimbangan bebas alkohol $P_0 = (S_0, E_0, A_0, R_0, Q_0)$ atau dapat dinyatakan sebagai berikut

$$P_0 = \left(\frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)}, \frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}, 0, 0, \frac{\varepsilon\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}\right) \tag{3.16}$$

Oleh karena semua nilai parameter bernilai positif dan $0 < q < 1$, maka nilai $S_0, E_0$, dan $Q_0$ bernilai positif. Dengan demikian, titik kesetimbangan $P_0$ selalu eksis.

Selanjutnya menentukan titik kesetimbangan ada alkohol dengan menggunakan kemungkinan kedua, yaitu $M = 0$

dengan $M = \beta^2\sigma EA + \beta\mu E + \beta\varepsilon E - \beta\mu\Lambda + \beta q\mu\Lambda + \beta\sigma pE + \frac{p\mu E}{A} + \frac{p\varepsilon E}{A} - \frac{p\mu\Lambda}{A} + \beta\sigma\mu E + \frac{\mu^2 E}{A} + \frac{\mu\varepsilon E}{A} - \frac{\mu^2\Lambda}{A} + \frac{q\mu^2\Lambda}{A} = 0$, maka diperoleh

$$\beta^2\sigma EA + \beta\mu E + \beta\varepsilon E - \beta\mu\Lambda + \beta q\mu\Lambda + \beta\sigma pE + \frac{p\mu E}{A} + \frac{p\varepsilon E}{A} - \frac{p\mu\Lambda}{A} + \beta\sigma\mu E + \frac{\mu^2 E}{A} + \frac{\mu\varepsilon E}{A} - \frac{\mu^2\Lambda}{A} + \frac{q\mu^2\Lambda}{A} = 0$$

$$E\left(\beta^2\sigma A + \beta\mu + \beta\varepsilon + \beta\sigma p + \frac{p\mu}{A} + \frac{p\varepsilon}{A} + \beta\sigma\mu + \frac{\mu^2}{A} + \frac{\mu\varepsilon}{A}\right) = \beta\mu\Lambda - \beta q\mu\Lambda + \frac{p\mu\Lambda}{A} + \frac{\mu^2\Lambda}{A} - \frac{q\mu^2\Lambda}{A}$$

$$E\left[(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)\left(\frac{\beta A}{A}+\frac{\mu}{A}+\frac{p}{A}\right)\right]=\frac{\mu\Lambda}{A}[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A)]$$

$$\frac{E}{A}[(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(\beta A+\mu+p)]=\frac{\mu\Lambda}{A}[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A)]$$

$$E^*=\frac{\mu\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A)]}{(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)} \tag{3.17}$$

Berdasarkan persamaan (3.8d) diperoleh

$$\gamma A-(\delta+\xi+\mu+a_2)R=0$$

$$(\delta+\xi+\mu+a_2)R=\gamma A$$

$$R^*=\frac{\gamma A}{\delta+\xi+\mu+a_2} \tag{3.18}$$

Berdasarkan persamaan (3.8a) diperoleh

$$q\mu\Lambda-\beta SA-(p+\mu)S=0$$

$$(p+\mu)S+\beta SA=q\mu\Lambda$$

$$S(p+\mu+\beta A)=q\mu\Lambda$$

$$S^*=\frac{q\mu\Lambda}{p+\mu+\beta A} \tag{3.19}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.17) dan (3.18) ke dalam persamaan (3.8e) maka diperoleh

$$\xi R+\varepsilon E-\mu Q=0$$

$$\frac{\xi\gamma A}{\delta+\xi+\mu+a_2}+\frac{\varepsilon\mu\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A)]}{(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)}-\mu Q=0$$

$$\mu Q=\frac{\xi\gamma A(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)+(\delta+\xi+\mu+a_2)\varepsilon\mu\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A)]}{(\delta+\xi+\mu+a_2)(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)}$$

$$Q=\frac{\xi\gamma A(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)+(\delta+\xi+\mu+a_2)\varepsilon\mu\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A)]}{\mu(\delta+\xi+\mu+a_2)(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)}$$

$$Q^*=\frac{\xi\gamma A}{\mu(\delta+\xi+\mu+a_2)}+\frac{\varepsilon\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A)]}{(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)} \tag{3.20}$$

Dari perhitungan di atas maka diperoleh titik kesetimbangan bebas alkohol $P^*=(S^*,E^*,A^*,R^*,Q^*)$ atau dapat dinyatakan sebagai berikut

$$S^*=\frac{q\mu\Lambda}{p+\mu+\beta A^*}$$

$$E^*=\frac{\mu\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A^*)]}{(\beta\sigma A^*+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A^*)}$$

$$R^* = \frac{\gamma A^*}{\delta + \xi + \mu + a_2}$$

$$Q^* = \frac{\xi \gamma A^*}{\mu(\delta + \xi + \mu + a_2)} + \frac{\varepsilon \Lambda[pq + (1-q)(p + \mu + \beta A^*)]}{(\beta \sigma A^* + \mu + \varepsilon)(p + \mu + \beta A^*)}$$

Eksistensi $P^*$ bergantung pada $A^*$. Untuk menunjukkan $P^*$ eksis, maka hanya perlu menunjukkan $A^*$ positif sebagai berikut.

Untuk nilai $A \neq 0$, maka dilakukan substitusi persamaan (3.18) ke dalam persamaan (3.8c) diperoleh

$$\beta SA + \beta \sigma EA + \delta R - (\mu + a_1 + \gamma)A = 0$$

$$\beta SA + \beta \sigma EA + \delta \frac{\gamma A}{\delta + \xi + \mu + a_2} - (\mu + a_1 + \gamma)A = 0$$

$$\beta SA + \beta \sigma EA = (\mu + a_1 + \gamma)A - \delta \frac{\gamma A}{\delta + \xi + \mu + a_2}$$

$$\beta(SA + \sigma EA) = \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma)A - \delta \gamma A}{(\delta + \xi + \mu + a_2)}$$

$$SA + \sigma EA = \frac{1}{\beta} \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma)A - \delta \gamma A}{(\delta + \xi + \mu + a_2)}$$

$$S + \sigma E = \frac{1}{\beta} \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma) - \delta \gamma}{(\delta + \xi + \mu + a_2)} \tag{3.21}$$

Selanjutnya mensubstitusi persamaan (3.17) dan (3.19) ke dalam persamaan (3.21), maka diperoleh

$$\frac{q\mu\Lambda}{p + \mu + \beta A} + \frac{\sigma\mu\Lambda[pq + (1-q)(p + \mu + \beta A)]}{(\beta\sigma A + \mu + \varepsilon)(p + \mu + \beta A)} = \frac{1}{\beta} \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma) - \delta\gamma}{(\delta + \xi + \mu + a_2)}$$

$$\frac{q\mu\Lambda(\beta\sigma A + \mu + \varepsilon) + \sigma\mu\Lambda[pq + (1-q)(p + \mu + \beta A)]}{(\beta\sigma A + \mu + \varepsilon)(p + \mu + \beta A)} = \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma) - \delta\gamma}{\beta(\delta + \xi + \mu + a_2)}$$

$$\frac{q(\beta\sigma A + \mu + \varepsilon) + \sigma[pq + (1-q)(p + \mu + \beta A)]}{(\beta\sigma A + \mu + \varepsilon)(p + \mu + \beta A)} = \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma) - \delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta + \xi + \mu + a_2)}$$

$$\frac{\beta\sigma A + q(\mu + \varepsilon) + \sigma[p + (1-q)\mu]}{(\beta\sigma A + \mu + \varepsilon)(p + \mu + \beta A)} = \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma) - \delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta + \xi + \mu + a_2)}$$

$$\frac{\beta\sigma A + q(\mu + \varepsilon) + \sigma[p + (1-q)\mu]}{(\beta\sigma A + \mu + \varepsilon)(p + \mu + \beta A)} - \frac{(\delta + \xi + \mu + a_2)(\mu + a_1 + \gamma) - \delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta + \xi + \mu + a_2)} = 0 \tag{3.22}$$

Persamaan (3.22) disebut dengan fungsi $H(A)$.

Selanjutnya dihitung turunan dari fungsi $H(A)$ untuk mengetahui apakah fungsi $H(A)$ merupakan fungsi monton turun atau monoton naik, diperoleh seperti pada Lampiran 3 sebagai berikut.

$$H'(A) = -\frac{\beta[(\beta\sigma A)^2 + 2\beta\sigma A[q(\mu+\varepsilon)+\sigma[p+(1-q)\mu]] + \sigma_0]}{(\beta\sigma A+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A)^2}$$

dengan $\sigma_0 = (p+\mu)[p+(1-q)\mu]\sigma^2 + pq(\mu+\varepsilon)\sigma + q(\mu+\varepsilon)^2$

Diperoleh bahwa turunan dari fungsi $H(A)$ bernilai negatif, hal tersebut berarti bahwa fungsi $H(A)$ monoton turun untuk $A$ yang bernilai positif.

Untuk membuktikan $A$ positif, maka perlu dibuktikan bahwa terdapat akar positif dari fungsi $H(A)$ pada interval $(0,\Lambda)$.

$$\begin{aligned}
H(0) &= \frac{q(\mu+\varepsilon)+\sigma[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} - \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&= \frac{q(\mu+\varepsilon)}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} + \frac{\sigma[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} - \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&= \frac{q}{p+\mu} + \frac{\sigma[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} - \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&= \frac{S_0}{\mu\Lambda} + \frac{\sigma E_0}{\mu\Lambda} - \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&= \frac{(S_0+\sigma E_0)}{\mu\Lambda} - \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&= \frac{(S_0+\sigma E_0)}{\mu\Lambda}\frac{\beta((\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma)(\delta+\xi+\mu+a_2)}{\beta((\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma)(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&\quad - \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&= \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)}\frac{\beta(S_0+\sigma E_0)(\delta+\xi+\mu+a_2)}{((\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma)} \\
&\quad - \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)} \\
&= \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)}\left(\frac{\beta(S_0+\sigma E_0)(\delta+\xi+\mu+a_2)}{((\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma)} - 1\right) \\
&= \frac{(\gamma+\mu+a_1)(\delta+\xi+\mu+a_2)-\delta\gamma}{\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)}(R_0-1)
\end{aligned}$$

$H(0)$ bernilai positif saat $R_0 > 1$.

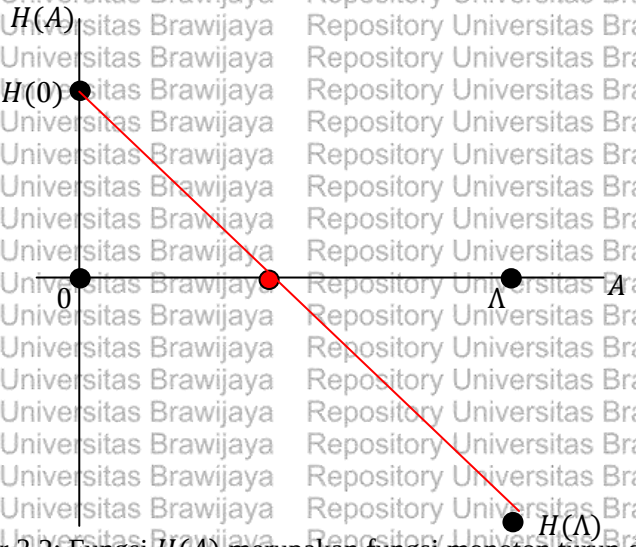
Selanjutnya, mensubstitusikan $\Lambda$ ke dalam fungsi $H(A)$ diperoleh seperti pada Lampiran 4 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
H(\Lambda) = &-(\beta\mu^2\Lambda\delta(1-q) + \beta\mu^2\Lambda\xi(1-q) + \beta\mu^3\Lambda(1-q) + \mu^2 a_2\beta\Lambda(1-q) \\
&+\mu\delta\varepsilon\beta\Lambda(1-q) + \mu\xi\varepsilon\beta\Lambda(1-q) + \mu^2\varepsilon\beta\Lambda(1-q) + \mu a_2\varepsilon\beta\Lambda(1-q)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu^2\xi\beta\Lambda(1-\sigma)+\beta\mu^2\Lambda a_2(1-\sigma)+\beta\mu^2\sigma q\Lambda\delta+\beta\mu^2\sigma q\Lambda\xi+\beta\mu^3\sigma q\Lambda\\
&+\beta\mu^2\sigma q\Lambda a_2+\gamma\xi\mu p+\gamma\xi\mu^2+\gamma\xi\mu\beta\Lambda+\gamma\xi\varepsilon p+\gamma\xi\varepsilon\mu+\gamma\xi\varepsilon\beta\Lambda+\gamma\xi\beta\sigma\Lambda p\\
&+\gamma\xi\beta\sigma\Lambda\mu+\gamma\xi\beta^2\sigma\Lambda^2+\gamma\mu^2 p+\gamma\mu^3+\gamma\mu^2\beta\Lambda+\gamma\mu\varepsilon p+\gamma\mu^2\varepsilon+\gamma\mu\varepsilon\beta\Lambda\\
&+\gamma\mu\beta\sigma\Lambda p+\gamma\mu^2\beta\sigma\Lambda+\gamma\mu\beta^2\sigma\Lambda^2+\gamma a_2\mu p+\gamma a_2\mu^2+\gamma a_2\mu\beta\Lambda+\gamma a_2\varepsilon p\\
&+\gamma a_2\varepsilon\mu+\gamma a_2\varepsilon\beta\Lambda+\gamma a_2\beta\sigma\Lambda p+\gamma a_2\beta\sigma\Lambda\mu+\gamma a_2\beta^2\sigma\Lambda^2+\mu^2\delta p+\mu^3\delta\\
&+\mu\delta\varepsilon p+\mu^2\delta\varepsilon+\mu^2\xi p+\mu^3\xi+\mu\xi\varepsilon p+\mu^2\xi\varepsilon+\mu^3 p+\mu^4+\mu^2\varepsilon p+\varepsilon\mu^3\\
&+\mu^2 a_2 p+\mu^3 a_2+\mu a_2\varepsilon p+\mu^2 a_2\varepsilon+a_1\delta\mu p+a_1\delta\mu^2+a_1\delta\mu\beta\Lambda+a_1\delta\varepsilon p\\
&+a_1\delta\varepsilon\mu+a_1\delta\varepsilon\beta\Lambda+a_1\delta\beta\sigma\Lambda p+a_1\delta\beta\sigma\Lambda\mu+a_1\delta\beta^2\sigma\Lambda^2+a_1\xi\mu p+a_1\xi\mu^2\\
&+a_1\xi\mu\beta\Lambda+a_1\xi\varepsilon p+a_1\xi\varepsilon\mu+a_1\xi\varepsilon\beta\Lambda+a_1\xi\beta\sigma\Lambda p+a_1\xi\beta\sigma\Lambda\mu+a_1\xi\beta^2\sigma\Lambda^2\\
&+a_1\mu^2 p+a_1\mu^3+a_1\mu^2\beta\Lambda+a_1\mu\varepsilon p+a_1\mu^2\varepsilon+a_1\mu\varepsilon\beta\Lambda+a_1\mu\beta\sigma\Lambda p\\
&+a_1\mu\beta^2\sigma\Lambda^2+a_2 a_1\mu p+a_2 a_1\mu^2+a_2 a_1\mu\beta\Lambda+a_2 a_1\varepsilon p+a_2 a_1\varepsilon\mu+a_2 a_1\varepsilon\beta\Lambda\\
&+a_2 a_1\beta\sigma\Lambda p+a_2 a_1\beta\sigma\Lambda\mu+a_2 a_1\beta^2\sigma\Lambda^2)/\beta\mu\Lambda(\delta+\xi+\mu+a_2)\\
&(\beta\sigma\Lambda+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta\Lambda)
\end{aligned}
$$

Diketahui bahwa nilai $0<q<1$ dan $0<\sigma<1$, serta semua nilai parameter bernilai positif. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa fungsi $H(\Lambda)$ bernilai negatif.

Untuk mempermudah penjelasan, digambarkan ilustrasi sebagai berikut.




Gambar 3.2: Fungsi $H(A)$ merupakan fungsi monoton turun dan terdapat satu akar positif $A$ dari fungsi $H(A)$

Pada gambar ilustrasi di atas, terlihat bahwa terdapat satu titik yang berpotongan dengan sumbu $A$ yang bertanda lingkaran berwarna merah.

Dengan kata lain terdapat satu akar positif $A$ dari fungsi $H(A)$ pada interval $(0, \Lambda)$. Dari uraian di atas, terbukti bahwa $P^*$ eksis.

Setelah memperoleh titik kesetimbangan bebas alkohol $(P_0)$ dan titik kesetimbangan ada alkohol $(P^*)$, selanjutnya menghitung angka reproduksi dasar $(R_0)$ sebagai berikut.

Angka reproduksi dasar $(R_0)$ diperoleh dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Selanjutnya, sistem persamaan (3.6) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix}$$

dengan $x_1$ adalah subpopulasi $A$, $x_2$ adalah subpopulasi $R$. Komponen pembentuk matriks $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ terdiri dari subpopulasi individu terpengaruh minuman beralkohol. $\mathcal{F}_i$ menyatakan laju munculnya pengaruh minuman beralkohol baru yang masuk pada kompartemen ke-$i$ dan $\mathcal{V}_i$ menyatakan laju transfer keluar atau masuk dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya.

Berdasarkan persamaan (3.6), diperoleh matriks $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$. Matriks $\mathcal{F}$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta SA + \beta\sigma EA \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, turunan parsial matriks $\mathcal{F}$ adalah sebagai berikut.

$$D\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial A} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial R} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial A} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta S + \beta\sigma E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian diperoleh $D\mathcal{F}$ pada titik $P_0$, yaitu

$$D\mathcal{F}(P_0) = \begin{pmatrix} \beta S_0 + \beta\sigma E_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks $\mathcal{V}$ dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + a_1 + \gamma)A - \delta R \\ (\mu + a_2 + \delta + \xi)R - \gamma A \end{pmatrix}$$

Turunan parsial matriks $\mathcal{V}$ adalah sebagai berikut.

$$D\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial R} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + a_1 + \gamma & -\delta \\ -\gamma & \mu + a_2 + \delta + \xi \end{pmatrix}.$$

Kemudian diperoleh $D\mathcal{V}$ di titik $P_0$, yaitu

$$D\mathcal{V}(P_0) = \begin{pmatrix} \mu + a_1 + \gamma & -\delta \\ -\gamma & \mu + a_2 + \delta + \xi \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, diperoleh invers dari matriks $D\mathcal{V}(P_0)$ adalah sebagai berikut.

$$\left(D\mathcal{V}(P_0)\right)^{-1} = \frac{1}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} \begin{pmatrix} \mu + a_2 + \delta + \xi & \delta \\ \gamma & \mu + a_1 + \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\mu + a_2 + \delta + \xi}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} & \frac{\delta}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} \\ \frac{\gamma}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} & \frac{\mu + a_1 + \gamma}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} \end{pmatrix}.$$

Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai berikut.

$$K = \left(D\mathcal{F}(P_0)\right)\left(D\mathcal{V}(P_0)\right)^{-1}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{(\beta S_0 + \beta\sigma E_0)(\mu + a_2 + \delta + \xi)}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} & \frac{(\beta S_0 + \beta\sigma E_0)\delta}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, nilai eigen matriks $K$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|K - \lambda I| = 0$, yaitu

$$|K - \lambda I| = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(\beta S_0 + \beta\sigma E_0)(\mu + a_2 + \delta + \xi)}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} - \lambda & \frac{(\beta S_0 + \beta\sigma E_0)\delta}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik, diperoleh nilai eigen matriks $K$ adalah

$$\lambda_1 = 0 \text{ dan } \lambda_2 = \frac{\beta(S_0 + \sigma E_0)(\mu + a_2 + \delta + \xi)}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta}.$$

Angka reproduksi dasar ($R_0$) diperoleh dari radius spektral dari matriks $K$ atau nilai absolut terbesar dari nilai eigen matriks $K$, yaitu

$$R_0 = \frac{\beta(S_0 + \sigma E_0)(\mu + a_2 + \delta + \xi)}{(\mu + a_1 + \gamma)(\mu + a_2 + \delta + \xi) - \gamma\delta}.$$

## 3.3 Analisis Kestabilan Global

Sifat kestabilan global titik kesetimbangan dapat diketahui dengan menggunakan fungsi Lyapunov.

### 3.3.1 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Alkohol

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V_1 = \left(S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0}\right) + \left(E - E_0 - E_0 \ln \frac{E}{E_0}\right) + A + \frac{\delta R}{\delta + \xi + \mu + a_2}$$

Selanjutnya, perlu dibuktikan apakah fungsi $V_1$ tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah untuk $P_0$, perlu diperiksa apakah fungsi $V_1$ tersebut memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.4.1.

a. $V_1(\vec{x}^*) = 0$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1(S_0, E_0, A_0, R_0, Q_0) \\ &= V_1\left(\frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)}, \frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}, 0, 0, \frac{\varepsilon\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}\right) \\ &= \left(\frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)} - \frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)} - \frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)} \ln \frac{\frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)}}{\frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} - \frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} - \frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)} \ln \frac{\frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}}{\frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}}\right) \\ &\quad + 0 + \frac{\delta(0)}{\delta + \xi + \mu + a_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $V_1(\vec{x}^*) = 0$.

b. $V_1(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$

$$\begin{aligned} V_1(\vec{x}) &= V_1(S, E, A, R, Q) \\ &= \left(S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0}\right) + \left(E - E_0 - E_0 \ln \frac{E}{E_0}\right) + A + \frac{\delta R}{\delta + \xi + \mu + a_2} \end{aligned}$$

Misal $g(S) = S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0}$ dan $g(S)$ terdefinisi pada domain $S \in \mathbb{R}^+$. Turunan pertama $g(S)$ diperoleh ketika $g'(S) = 1 - \frac{S_0}{S}$, dengan $S \in (0, \infty)$. Titik stasioner $g(S)$ diperoleh ketika $g'(S) = 0$. Nilai $x$ yang memenuhi $g'(S) = 0$ adalah ketika $S = S_0$, dengan $g(S_0) = 0$. Jika

$S \in (0, S_0)$, maka berlaku $g'(S) < 0$. Oleh karena itu, $g(S)$ monoton turun pada selang $(0, S_0)$ dan monoton naik pada selang $(S_0, \infty)$. Berdasarkan uraian tersebut jelas bahwa $(S_0, 0)$ merupakan titik minimum $g(S)$. Oleh karena 0 merupakan nilai minimum $g(S)$ maka pasti berlaku $g(S) > 0$ untuk $S \neq S_0 \in W$. Hal ini juga berlaku untuk membuktikan $g(E) = E - E_0 - E_0 \ln \frac{E}{E_0}$. Semua nilai variabel dan parameter positif, sehingga nilai $A$ dan $\frac{\delta R}{\delta + \xi + \mu + a_2}$ juga pasti bernilai positif. Jadi, terbukti bahwa $V_1(\vec{x}) > 0$.

Dengan demikian dapat dibuktikan bahwa $V_1$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.4.1. Setelah itu, dilakukan pemeriksaan bahwa kondisi $V_1$ memenuhi kondisi 2 Definisi 2.4.1.

$\dot{V}_1 < 0$

Seperti pada Lampiran 1 diperoleh turunan dari $V_1$ adalah sebagai berikut.

$$\dot{V}_1 = \frac{A[(\gamma + \mu + a_1)(\xi + \delta + \mu + a_2) - \delta\gamma]}{\xi + \delta + \mu + a_2}(R_0 - 1) + F(S, A)$$

dengan

$$F(S, A) = q\mu\Lambda\left(2 - \frac{S}{S_0} - \frac{S_0}{S}\right) + (1 - q)\mu\Lambda\left(2 - \frac{E}{E_0} - \frac{E_0}{E}\right) + pS_0\left(\frac{S}{S_0} - \frac{E}{E_0} - \frac{SE_0}{S_0 E} + 1\right)$$

Misalkan $x = \frac{S}{S_0}$, $y = \frac{E}{E_0}$, maka diperoleh

$$\bar{F}(x, y) = q\mu\Lambda\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) + (1 - q)\mu\Lambda\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) + pS_0\left(x - y - \frac{x}{y} + 1\right)$$

$$= \mu S_0\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) + (1 - q)\mu\Lambda\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) + pS_0\left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y}\right)$$

Akan dibuktikan:

1. $\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) \leq 0$,
2. $\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) \leq 0$, dan
3. $\left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y}\right) \leq 0$.

Bukti :

1. Akan dibuktikan: $\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) \leq 0$

Diambil $x \in \mathbb{R}^+$.

Misalkan $a_1 = x$ dan $a_2 = \frac{1}{x}$ dengan $n = 2$. Menggunakan Teorema Pertaksamaan Aritmetika dan Geometri (2.7), maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt[2]{a_1 . a_2}$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2} \geq \left(x . \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2} \geq \sqrt{1}$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2} \geq 1$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Oleh karena $x + \frac{1}{x} \geq 2$ maka terbukti bahwa $\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) \leq 0$

2. Akan dibuktikan: $\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) \leq 0$

Diambil $y \in \mathbb{R}^+$.

Misalkan $a_1 = y$ dan $a_2 = \frac{1}{y}$ dengan $n = 2$. Menggunakan Teorema Pertaksamaan Aritmetika dan Geometri (2.7), maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt[2]{a_1 . a_2}$$

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geq \left(y . \frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{1}$$

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geq 1$$

$$y + \frac{1}{y} \geq 2$$

Oleh karena $y + \frac{1}{y} \geq 2$ maka terbukti bahwa $\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) \leq 0$.

3. Akan dibuktikan: $\left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y}\right) \leq 0$

Diambil $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Misalkan $a_1 = \frac{1}{x}, a_2 = y$, dan $a_3 = \frac{x}{y}$ dengan $n = 3$. Menggunakan Teorema Pertaksamaan Aritmetika dan Geometri (2.7), maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 . a_2 . a_3}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y}\right)}{3} \geq \left(\frac{1}{x} . y . \frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y}\right)}{3} \geq \sqrt[3]{1}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y}\right)}{3} \geq 1$$

$$\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y} \geq 3$$

Oleh karena $\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y} \geq 3$ maka terbukti bahwa $\left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y}\right) \leq 0$.

Berdasarkan perhitungan di atas terbukti bahwa $\dot{V}_1 < 0$ untuk setiap $(S_0, E_0, A_0, R_0) \neq (S, E, A, R)$ dan $\dot{V}_1 = 0$ apabila $S = S_0, E = E_0$. Fungsi Lyapunov $V_1(P_0)$ memenuhi Definisi 2.4.1. Dengan demikian, $V_1(P_0)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat sehingga titik kesetimbangan bebas alkohol $P_0$ bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 \leq 1$.

### 3.3.2 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Ada Alkohol

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V_2 = S^*(x - 1 - \ln x) + E^*(y - 1 - \ln y) + A^*(z - 1 - \ln z) + \frac{\delta}{\xi + \delta + \mu + a_2} R^*(u - 1 - \ln u)$$

Dimisalkan bahwa $x = \frac{S}{S^*}, y = \frac{E}{E^*}, z = \frac{A}{A^*}, u = \frac{R}{R^*}$, maka $V_2$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$V_2 = S^*\left(\frac{S}{S^*} - 1 - \ln\frac{S}{S^*}\right) + E^*\left(\frac{E}{E^*} - 1 - \ln\frac{E}{E^*}\right) + A^*\left(\frac{A}{A^*} - 1 - \ln\frac{A}{A^*}\right) + \frac{\delta}{\xi + \delta + \mu + a_2}R^*\left(\frac{R}{R^*} - 1 - \ln\frac{R}{R^*}\right)$$

Selanjutnya, perlu dibuktikan apakah fungsi $V_2$ tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah untuk $P^*$, perlu diperiksa apakah fungsi $V_2$ tersebut memenudi kondisi 1 pada Definisi 2.4.1.

a. $V_2(\vec{x}^*) = 0$

$$\begin{aligned} V_2(\vec{x}^*) &= V_2(S^*, E^*, A^*, R^*, Q^*) \\ &= S^*\left(\frac{S^*}{S^*} - 1 - \ln\frac{S^*}{S^*}\right) + E^*\left(\frac{E^*}{E^*} - 1 - \ln\frac{E^*}{E^*}\right) + A^*\left(\frac{A^*}{A^*} - 1 - \ln\frac{A^*}{A^*}\right) \\ &\quad + \frac{\delta}{\xi + \delta + \mu + a_2}R^*\left(\frac{R^*}{R^*} - 1 - \ln\frac{R^*}{R^*}\right) \\ &= S^*(1 - 1 - \ln 1) + E^*(1 - 1 - \ln 1) + A^*(1 - 1 - \ln 1) \\ &\quad + \frac{\delta}{\xi + \delta + \mu + a_2}R^*(1 - 1 - \ln 1) \\ &= S^*(0) + E^*(0) + A^*(0) + \frac{\delta}{\xi + \delta + \mu + a_2}R^*(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $V_2(\vec{x}^*) = 0$.

b. $V_2(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$

$$\begin{aligned} V_2(\vec{x}) &= V_2(S^*, E^*, A^*, R^*, Q^*) \\ &= S^*\left(\frac{S}{S^*} - 1 - \ln\frac{S}{S^*}\right) + E^*\left(\frac{E}{E^*} - 1 - \ln\frac{E}{E^*}\right) + A^*\left(\frac{A}{A^*} - 1 - \ln\frac{A}{A^*}\right) \\ &\quad + \frac{\delta}{\xi + \delta + \mu + a_2}R^*\left(\frac{R}{R^*} - 1 - \ln\frac{R}{R^*}\right) \end{aligned}$$

Misal $h(S) = S^*\left(\frac{S}{S^*} - 1 - \ln\frac{S}{S^*}\right)$ dan $h(S)$ terdefinisi pada domain $S \in \mathbb{R}^+$. Turunan pertama $h(S)$ diperoleh ketika $h'(S) = 1 - \frac{S^*}{S}$, dengan $S \in (0, \infty)$. Titik stasioner $h(S)$ diperoleh ketika $h'(S) = 0$. Nilai $x$ yang memenuhi $h'(S) = 0$ adalah ketika $S = S^*$, dengan $h(S^*) = 0$. Jika $S \in (0, S^*)$, maka berlaku $h'(S) < 0$. Oleh karena itu, $h(S)$ monoton turun pada selang $(0, S^*)$ dan monoton naik pada selang $(S^*, \infty)$. Berdasarkan uraian tersebut jelas bahwa $(S^*, 0)$ merupakan titik

minimum $h(S)$. Oleh karena 0 merupakan nilai minimum $h(S)$ maka pasti berlaku $h(S) > 0$ untuk $S \neq S^* \in W$. Hal ini juga berlaku untuk membuktikan $h(E) = E^*\left(\frac{E}{E^*} - 1 - \ln\frac{E}{E^*}\right), h(A) = A^*\left(\frac{A}{A^*} - 1 - \ln\frac{A}{A^*}\right)$, dan $h(R) = R^*\left(\frac{R}{R^*} - 1 - \ln\frac{R}{R^*}\right)$. Semua nilai variabel dan parameter positif, sehingga nilai $A^*$ dan $\frac{\delta R^*}{\xi+\delta+\mu+a_2}$ juga pasti bernilai positif. Jadi, terbukti bahwa $V_2(\vec{x}) > 0$.

Dengan demikian dapat dibuktikan bahwa $V_2$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.4.1. Setelah itu, dilakukan pemeriksaan bahwa kondisi $V_2$ memenuhi kondisi 2 Definisi 2.4.1.

$\dot{V}_2 < 0$

Seperti pada Lampiran 2 diperoleh turunan dari $V_2$ adalah sebagai berikut.

$$\dot{V}_2 = \frac{\delta\gamma A^*}{\xi+\delta+\mu+a_2}\left(2 - \frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right) + \beta S^* A^*\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) + \mu S^*\left(2 - x - \frac{1}{x}\right)$$
$$+(1-q)\mu\Lambda\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) + pS^*\left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y}\right)$$

Akan dibuktikan :

1. $\left(2 - \frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right) \leq 0$,
2. $\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) \leq 0$,
3. $\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) \leq 0$, dan
4. $\left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y}\right) \leq 0$.

Bukti :

1. Akan dibuktikan: $\left(2 - \frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right) \leq 0$

   Diambil $u, z \in \mathbb{R}^+$.

   Misalkan $a_1 = \frac{u}{z}$ dan $a_2 = \frac{z}{u}$ dengan $n = 2$. Menggunakan Teorema Pertaksamaan Aritmetika dan Geometri (2.7), maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt[2]{a_1 . a_2}.$$

$$\frac{\left(\frac{u}{z} + \frac{z}{u}\right)}{2} \geq \left(\frac{u}{z} . \frac{z}{u}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(\frac{u}{z} + \frac{z}{u}\right)}{2} \geq \sqrt{1}$$

$$\frac{\left(\frac{u}{z} + \frac{z}{u}\right)}{2} \geq 1$$

$$\left(\frac{u}{z} + \frac{z}{u}\right) \geq 2$$

Oleh karena $\frac{u}{z} + \frac{z}{u} \geq 2$ maka terbukti bahwa $\left(2 - \frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right) \leq 0$.

2. Akan dibuktikan: $\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) \leq 0$

   Diambil $x \in \mathbb{R}^+$.

   Misalkan $a_1 = x$ dan $a_2 = \frac{1}{x}$ dengan $n = 2$. Menggunakan Teorema Pertaksamaan Aritmetika dan Geometri (2.7), maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt[2]{a_1 . a_2}$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2} \geq \left(x . \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2} \geq \sqrt{1}$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2} \geq 1$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

   Oleh karena $x + \frac{1}{x} \geq 2$ maka terbukti bahwa $\left(2 - x - \frac{1}{x}\right) \leq 0$.

3. Akan dibuktikan: $\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) \leq 0$

   Diambil $y \in \mathbb{R}^+$.

Misalkan $a_1 = y$ dan $a_2 = \frac{1}{y}$ dengan $n = 2$. Menggunakan Teorema Pertaksamaan Aritmetika dan Geometri (2.7), maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt[2]{a_1 . a_2}$$

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geq \left(y . \frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{1}$$

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geq 1$$

$$y + \frac{1}{y} \geq 2$$

Oleh karena $y + \frac{1}{y} \geq 2$ maka terbukti bahwa $\left(2 - y - \frac{1}{y}\right) \leq 0$.

4. Akan dibuktikan: $\left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y}\right) \leq 0$

Diambil $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Misalkan $a_1 = \frac{1}{x}, a_2 = y$, dan $a_3 = \frac{x}{y}$ dengan $n = 3$. Menggunakan Teorema Pertaksamaan Aritmetika dan Geometri (2.7), maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 . a_2 . a_3}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y}\right)}{3} \geq \left(\frac{1}{x} . y . \frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y}\right)}{3} \geq \sqrt[3]{1}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y}\right)}{3} \geq 1$$

$$\frac{1}{x} + y + \frac{x}{y} \geq 3$$

Oleh karena $\frac{1}{x}+y+\frac{x}{y}\geq 3$ maka terbukti bahwa $\left(3-\frac{1}{x}-y-\frac{x}{y}\right)\leq 0$.

Berdasarkan perhitungan di atas terbukti bahwa $\dot{V}_2<0$ untuk setiap $(S,E,A,R)\neq(S^*,E^*,A^*,R^*)$ dan $\dot{V}_2=0$ apabila $x=y=1, u=z$. Fungsi Lyapunov $V_2(P^*)$ memenuhi Definisi 2.4.1. Dengan demikian, $V_2(P^*)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat sehingga titik kesetimbangan ada alkohol $P^*$ bersifat stabil asimtotik global jika $R_0>1$.

Berdasarkan uraian sebelumnya, eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.6) dirangkum pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem

| Titik Kesetimbangan | Syarat Eksistensi | Kestabilan | Syarat Kestabilan |
|---|---|---|---|
| $P_0$ | Selalu eksis | Stabil asimtotik global | $R_0\leq 1$ |
| $P^*$ | Eksis jika $A^*$ positif | Stabil asimtotik global | $R_0>1$ |

## 3.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini disajikan simulasi numerik model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol. Simulasi dilakukan menggunakan *software* Matlab dengan metode Runge-Kutta orde empat.

### 3.4.1 Kestabilan titik kesetimbangan $R_0<1$

Pada simulasi I digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1, sehingga diperoleh

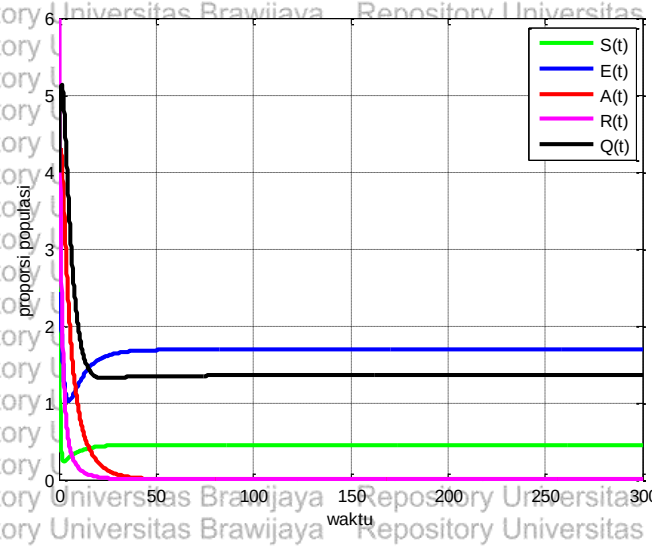
$$R_0=0.6866<1.$$

Berdasarkan syarat eksistensi untuk $R_0<1$ hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas alkohol. Pada Gambar 3.3, dapat diketahui bahwa kurva solusi $S(t), E(t), A(t), R(t)$ dan $Q(t)$ dengan nilai awal (3.5,2,3,6,4) akan menuju titik kesetimbangan $P_0=(0.456,1.688,0,0,1.351)$. . Potret fase perilaku solusi dapat dilihat pada Gambar 3.4.

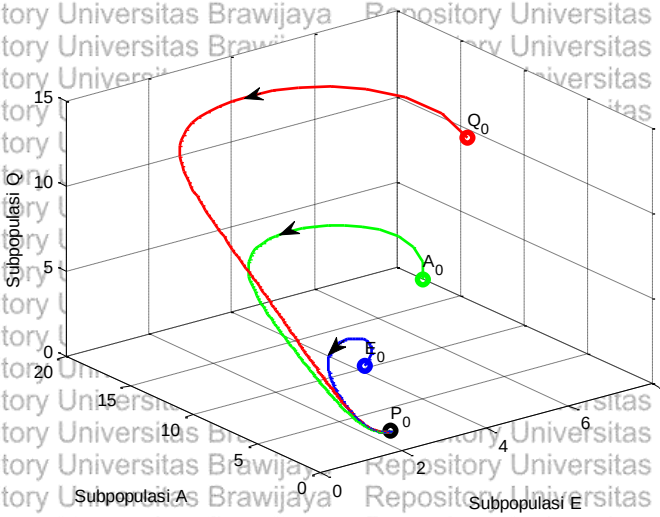
Gambar 3.4 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu (3.5,2,3,6,4), (10,4,5,9,7), dan (12,6,8,11,13), titik kesetimbangan bebas alkohol bersifat stabil, karena solusi sistem konvergen ke $P_0 = (0.456,1.688,0,0,1.351)$. Artinya, pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa tidak ada individu yang terpengaruh mengonsumsi minuman alkohol.

Tabel 3.2 Nilai parameter simulasi I

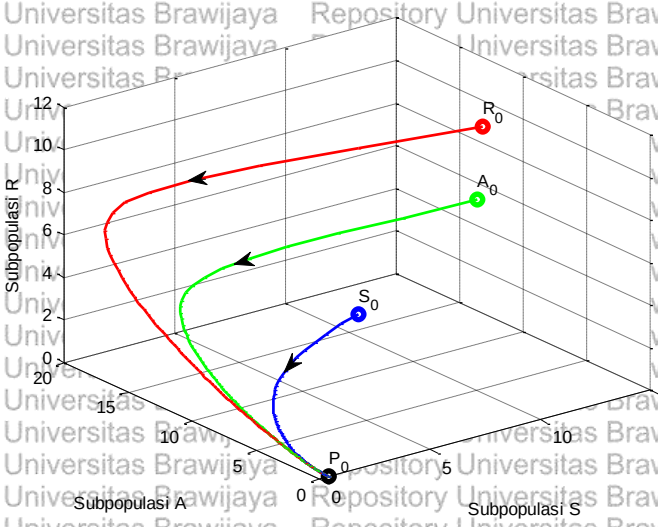
| Parameter | Nilai |
|---|---|
| $q$ | 0.6 |
| $\mu$ | 0.25 $day^{-1}$ |
| $\Lambda$ | 3.496 $day^{-1}$ |
| $\beta$ | 0.3 $person^{-1}$ $day^{-1}$ |
| $p$ | 0.9 |
| $\sigma$ | 0.2 |
| $\varepsilon$ | 0.2 $day^{-1}$ |
| $\delta$ | 0.1 $day^{-1}$ |
| $\gamma$ | 0.1 $day^{-1}$ |
| $a_1$ | 0.01 $day^{-1}$ |
| $a_2$ | 0.01 $day^{-1}$ |
| $\xi$ | 0.4 $day^{-1}$ |



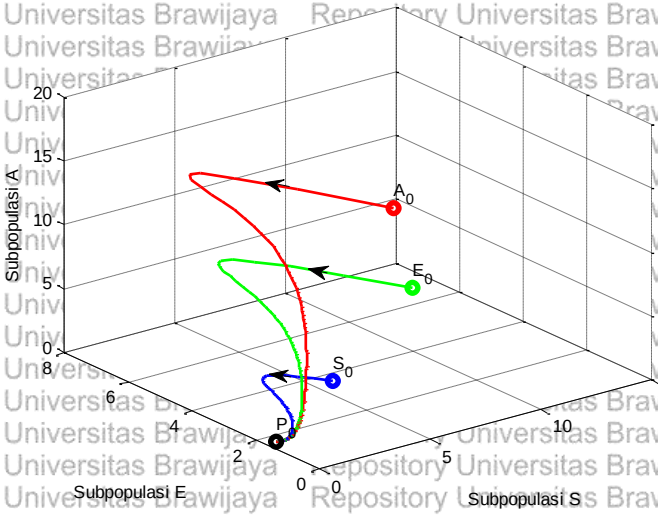

Gambar 3.3: Kestabilan titik kesetimbangan bebas alkohol ($P_0$) ketika $R_0 < 1$




(a)




(b)




(c)

Gambar 3.4 Potret fase untuk kestabilan $P_0$ ketika $R_0 < 1$

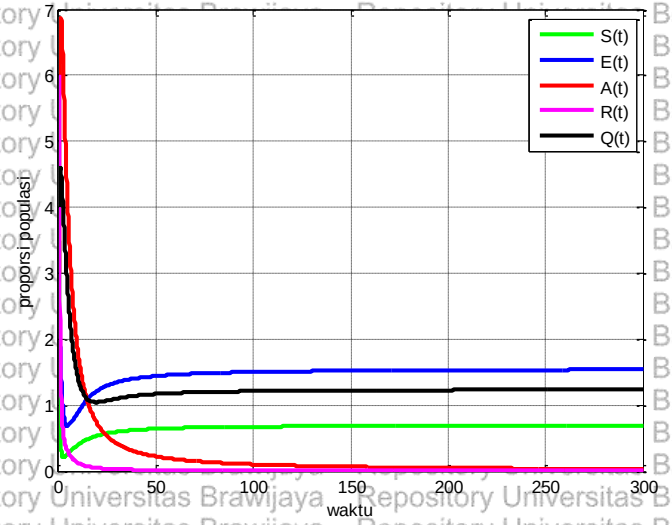
### 3.4.2 Kestabilan titik kesetimbangan $R_0 = 1$

Pada simulasi II digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dengan perubahan pada nilai $p$ dan $\delta$, yaitu $p = 0.5$ dan $\delta = 0.875$, sehingga diperoleh

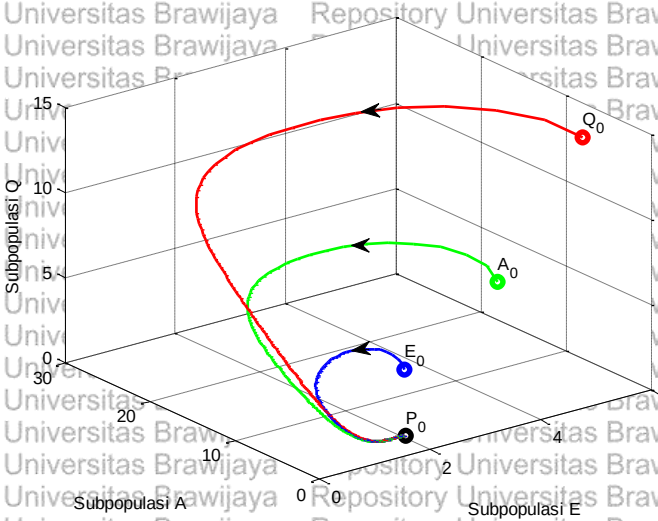
$$R_0 = 1.$$

Berdasarkan syarat eksistensi untuk $R_0 = 1$ terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas alkohol. Pada Gambar 3.5, dapat diketahui bahwa kurva solusi $S(t), E(t), A(t), R(t)$ dan $Q(t)$ dengan nilai awal $(3.5,2,3,6,4)$ akan menuju titik kesetimbangan $P_0 = (0.699,1.553,0,0,1.243)$. Potret fase perilaku solusi dapat dilihat pada Gambar 3.6.

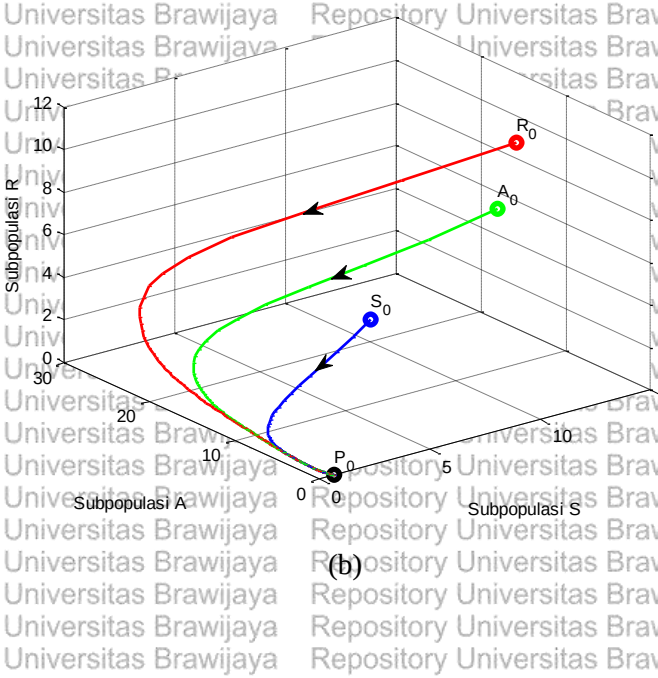
Gambar 3.6 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu $(3.5,2,3,6,4)$, $(10,4,5,9,7)$, dan $(12,6,8,11,13)$, titik kesetimbangan bebas alkohol bersifat stabil, karena solusi sistem konvergen ke $P_0 = (0.699,1.553,0,0,1.243)$. Artinya, pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa tidak ada individu yang terpengaruh mengonsumsi minuman alkohol.



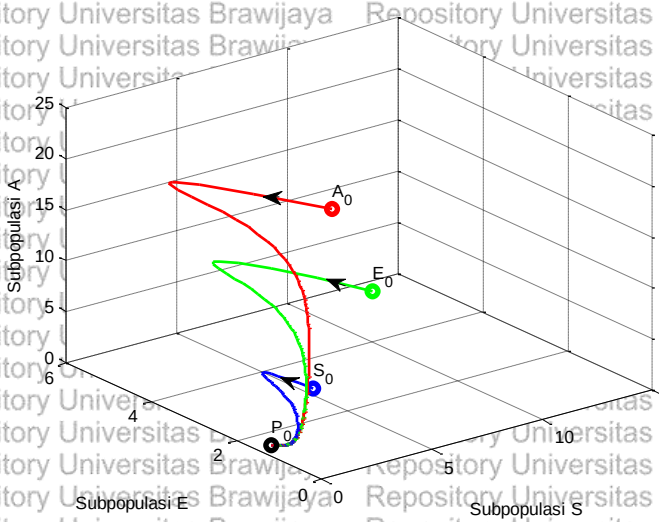

Gambar 3.5: Kestabilan titik kesetimbangan bebas alkohol ($P_0$) ketika $R_0 = 1$


Subpopulasi Q
Subpopulasi A
Subpopulasi E
$Q_0$
$A_0$
$E_0$
$P_0$

(a)


Subpopulasi R
Subpopulasi A
Subpopulasi S
$R_0$
$A_0$
$S_0$
$P_0$

(b)




(c)

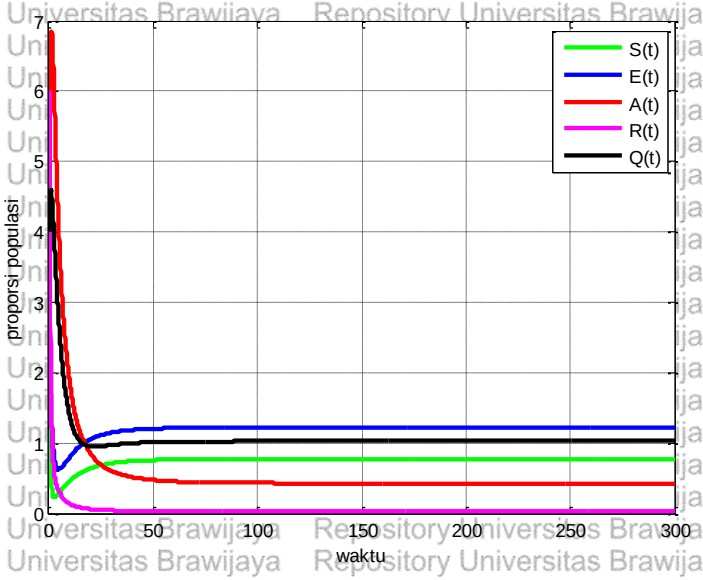
Gambar 3.6 Potret fase untuk kestabilan $P_0$ ketika $R_0 = 1$

### 3.4.3 Kestabilan titik kesetimbangan $R_0 > 1$

Pada simulasi III digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dengan perubahan pada nilai $p$ dan $\delta$, yaitu $p = 0.3$ dan $\delta = 0.8$, sehingga diperoleh

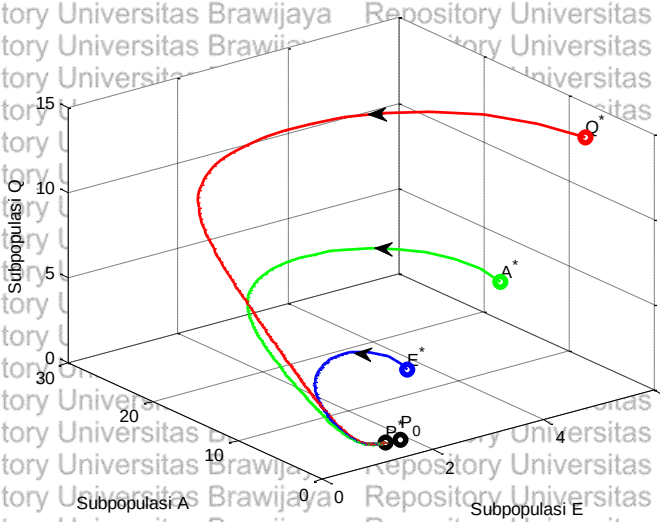
$$R_0 = 1.2149 > 1.$$

Berdasarkan syarat eksistensi untuk $R_0 > 1$ terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas alkohol dan titik kesetimbangan ada alkohol. Pada Gambar 3.7, dapat diketahui bahwa kurva solusi $S(t), E(t), A(t), R(t)$ dan $Q(t)$ dengan nilai awal $(3.5,2,3,6,4)$ akan menuju titik kesetimbangan $P^* = (0.7729,1.2223,0.4283,0.0293,1.0248)$. Potret fase perilaku solusi dapat dilihat pada Gambar 3.8.

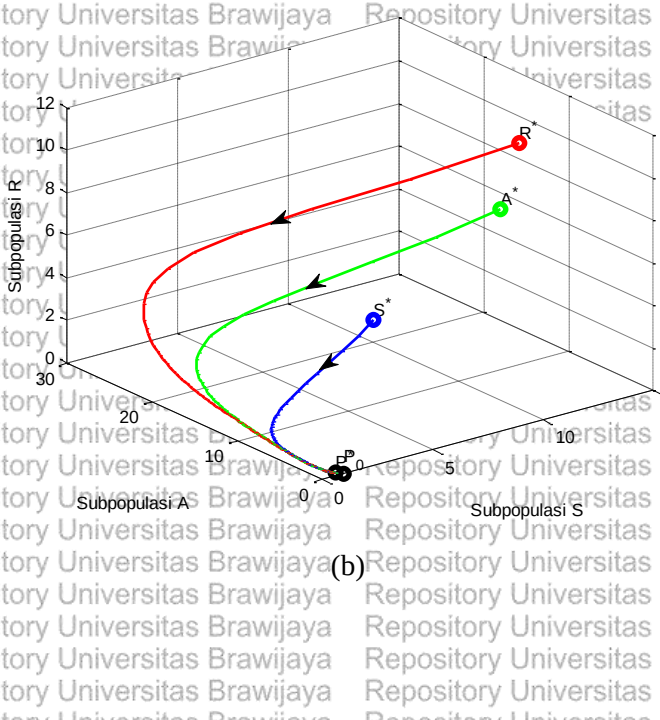



Gambar 3.7: Kestabilan titik kesetimbangan ada alkohol $(P^*)$ ketika $R_0 > 1$

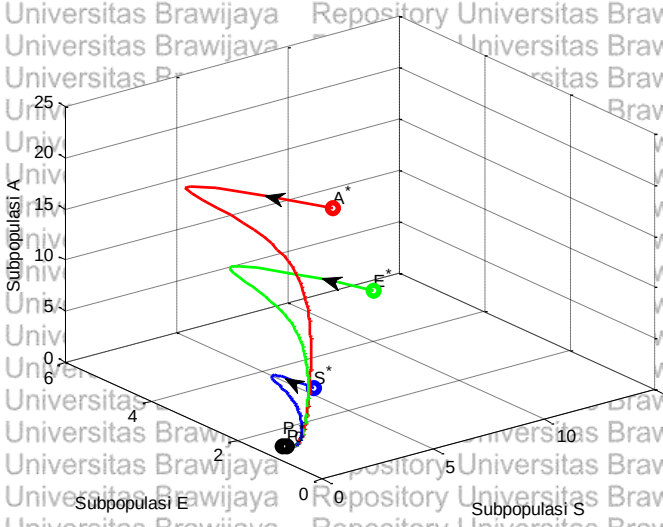
Gambar 3.8 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu (3.5,2,3,6,4), 10,4,5,9,7), dan 12,6,8,11,13), titik kesetimbangan ada alkohol bersifat stabil, karena solusi sistem konvergen ke $P^* = (0.7729, 1.2223, 0.4283, 0.0293, 1.0248)$. Artinya, pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa terdapat individu yang terpengaruh mengonsumsi minuman alkohol.


Subpopulasi Q
Subpopulasi A
Subpopulasi E
Q*
A*
E*
P*
P0

(a)


Subpopulasi R
Subpopulasi A
Subpopulasi S
R*
A*
S*
P*
P0

(b)




(c)

Gambar 3.8 Potret fase untuk kestabilan $P^*$ ketika $R_0 > 1$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

# BAB IV
# KESIMPULAN DAN SARAN

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut

1. Model pengaruh sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat terhadap peminum minuman beralkohol merupakan persamaan diferensial biasa nonlinear dengan lima variabel tak bebas, yaitu subpopulasi rentan yang tidak menerima sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(S)$, subpopulasi rentan yang menerima sosialisasi pendidikan kesehatan masyarakat $(E)$, subpopulasi pecandu minuman beralkohol $(A)$, subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang sedang memasuki masa pemulihan sementara $(R)$, dan subpopulasi pecandu minuman beralkohol yang berhenti minum secara permanen $(Q)$.
2. Model tersebut mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu
   a) titik kesetimbangan bebas alkohol $P_0 = \left(\frac{q\mu\Lambda}{(p+\mu)}, \frac{\mu\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}, 0, 0, \frac{\varepsilon\Lambda[p+(1-q)\mu]}{(\mu+\varepsilon)(p+\mu)}\right)$ yang selalu eksis dan
   b) titik kesetimbangan ada alkohol $P^* = (S^*, E^*, A^*, R^*, Q^*)$ atau dapat dinyatakan sebagai berikut

$$S^* = \frac{q\mu\Lambda}{p+\mu+\beta A^*}$$

$$E^* = \frac{\mu\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A^*)]}{(\beta\sigma A^*+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A^*)}$$

$$R^* = \frac{\gamma A^*}{\delta+\xi+\mu+a_2}$$

$$Q^* = \frac{\xi\gamma A^*}{\mu(\delta+\xi+\mu+a_2)} + \frac{\varepsilon\Lambda[pq+(1-q)(p+\mu+\beta A^*)]}{(\beta\sigma A^*+\mu+\varepsilon)(p+\mu+\beta A^*)}$$

$P^*$ eksis apabila $A^*$ positif . Titik kesetimbangan bebas alkohol $(P_0)$ bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 \leq 1$ dan titik kesetimbangan ada alkohol $(P^*)$ bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$.

3. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Pada simulasi I, yaitu kestabilan titik kesetimbangan saat $R_0 < 1$ menghasilkan titik kesetimbangan bebas alkohol $P_0 = (0.456,1.688,0,0,1.351)$ dan diberikan tiga nilai awal yang menuju titik kesetimbangan tersebut. Pada simulasi II, yaitu kestabilan titik kesetimbangan saat $R_0 = 1$ menghasilkan titik kesetimbangan bebas alkohol $P_0 = (0.699,1.553,0,0,1.243)$ dan diberikan tiga nilai awal yang menuju titik kesetimbangan tersebut. Pada simulasi III, yaitu kestabilan titik kesetimbangan saat $R_0 > 1$ menghasilkan titik kesetimbangan ada alkohol $P^* = (0.7729,1.2223,0.4283,0.0293,1.0248)$ dan diberikan tiga nilai awal yang menuju titik kesetimbangan tersebut. Jadi, titik kesetimbangan bebas alkohol $(P_0)$ bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 \leq 1$ dan titik kesetimbangan ada alkohol $(P^*)$ bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$. Pada simulasi numerik juga menunjukkan bahwa $P_0$ selalu eksis dan saat $A^*$ positif maka $P^*$ eksis.

## 4.2 Saran

Pada penelitian berikutnya dapat diteliti kembali untuk memodifikasi model dengan mengasumsikan bahwa individu yang sembuh secara permanen dapat menjadi individu rentan kembali. Pada perhitungan analisis dapat ditambahkan analisis sensitivitas. Serta penambahan kontrol pada model yang dilanjutkan dengan analisis efektivitas biaya.

# DAFTAR PUSTAKA


Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Spinger. New York.

Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth Edition. John Wiley Sons Inc. United State of America.

Brauer, F. dan C.C. Chavez. 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer-Verlag, New York.

Del Valle, S., A.M. Evangelista, M.C. Velasco, C.M. Kribs-Zaleta, dan S.F. Hsu Schmitz. 2004. Effects of education, vaccination, and treatment on HIV transmission in homosexuals with genetic heterogeneity. *Mathematical Biosciences*. 187: 111-133.

Driessche, P. V. D. dan J. Watmough. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*. 180: 29-48.

Giuseppe, M. Dan S. Brian. 2012. Modeling binge drinking. *International Journal of Biomathematics*.

Heffernan, J.M, R.J. Smith, dan L.M. Wahl. 2005. Perspectives on the basic reproduction ratio. *The Royal Society Interface*. 2: 281-293.

Mercer, P. R. 2014. *More Calculus of a Single Variable*. Springer. New York.

Mubayi, A., P.E. Greenwood, C. Castillo-Chavez, P.J. Gruenewald, dan D.M. Gorman. 2010. The impact of relative residence times on the distribution of heavy drinkers in highly distinct environments. *Socio-Economic Planning Sciences*. 44(1): 45-56.

Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.

Notoatmodjo, Soekidjo. 2003. Pendidikan dan perilaku kesehatan. Rineka Cipta. Jakarta.

Nurjanah, L., F. Ilahi, dan D. Suandi. 2018. Analisis kestabilan global dengan menggunakan fungsi lyapunov pada model dinamik epidemik SIR. Jurnal Kubik. 3(1): 70-72.

Rori, P.L.P. 2015. Pengaruh penggunaan minuman keras pada kehidupan remaja di desa kali kecamatan pineleng kabupaten minahasa. *Jurnal Holistik*.

Xiang, H., N.N. Song, dan H.F. Huo. 2015. Modelling effects of public health educational campaigns on drinking dynamics. *Journal of Biological Dynamics*. 10(1): 164-178.