PENGENALAN MASALAH FEKETE-SZEGÖ UNTUK FUNGSI UNIVALEN *CONCAVE*

SKRIPSI

Oleh :

AWALUDDIN FAJAR
125090401111005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

PENGENALAN MASALAH FEKETE-SZEGÖ UNTUK FUNGSI UNIVALEN *CONCAVE*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Oleh :

AWALUDDIN FAJAR
125090401111005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENGENALAN MASALAH FEKETE-SZEGÖ UNTUK FUNGSI UNIVALEN *CONCAVE*

oleh

AWALUDDIN FAJAR
125090401111005

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 30 Desember 2019
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Dosen Pembimbing

Prof. Dr. Marjono, M.Phil
NIP. 196211161988031004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S. Si, M. Si, Ph. D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**Awaluddin Fajar**
NIM	**:**	**125090401111005**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Pengenalan Masalah Fekete-Szegö untuk Fungsi Univalen *Concave***

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 30 Desember 2019
yang menyatakan,

Awaluddin Fajar
NIM 125090401111005

PENGENALAN MASALAH FEKETE-SZEGÖ UNTUK FUNGSI UNIVALEN *CONCAVE*

ABSTRAK

Misalkan S adalah kelas dari fungsi f yang univalen di dalam cakram satuan $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ dan setiap $f \in S$ memiliki deret Taylor dalam bentuk $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Teorema Fekete-Szegö adalah sebuah teorema untuk mencari nilai maksimum dari koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk fungsi univalen. Telah banyak penelitian dilakukan untuk mencari nilai maksimum dari koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk kelas fungsi lain yang disebut masalah Fekete-Szegö. Misalkan fungsi univalen *concave* adalah pemetaan konformal $f: \mathbb{D} \to G$ di mana $\mathbb{C} \backslash G$ konveks. Pada Skripsi ini mengkaji kembali masalah Fekete-Szegö untuk fungsi univalen *concave* berdasarkan penelitian Bhowmik, dkk.

Kata Kunci: fungsi univalen, deret Taylor, fungsi univalen *concave*, masalah Fekete- Szegö.

INTRODUCTION TO THE FEKETE-SZEGÖ PROBLEM FOR CONCAVE UNIVALENT FUNCTION

ABSTRACT

Let S denote the class of function f univalent on the unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ and $f \in S$ has the Taylor series in the form of $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. The Fekete-Szegö theorem is a theorem to find the maximum value of $|a_3 - \mu a_2^2|$ for univalent functions. Several researches have attempted to find the maximum value of $|a_3 - \mu a_2^2|$ for other class of functions called the Fekete-Szegö problem. Let concave univalent functions be a conformal mapping $f: \mathbb{D} \to G$ where $\mathbb{C} \backslash G$ is convex. This final project reviews the Fekete-Szegö problem for concave univalent functions based on the research of Bhowmik et al.

Key word: univalent functions, Taylor series, concave functions, Fekete-Szegö problem.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **PENGENALAN MASALAH FEKETE-SZEGÖ UNTUK FUNGSI UNIVALEN *CONCAVE*** dengan baik.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Prof. Dr. Marjono, M.Phil selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, dan saran yang diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si. selaku dosen penguji dan Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D selaku dosen penguji sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Kwardiniya Andawaningtyas, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
4. Syaiful Anam, S.Si., MT, Ph.D dan Sa'adatul Fitri, S.Si., M.Sc. atas segala bantuan yang diberikan.
5. Kedua orang tua penulis yang selalu mendoakan dan memberikan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Keluarga besar Matematika 2012 yang selalu mendukung dan memberi semangat dalam pengerjaan skripsi ini
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun melalui email penulis awaluddinfajar94@gmail.com, demi perbaikan di masa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 30 Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{C}$	: himpunan semua bilangan kompleks,
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan riil,
$\mathbb{D}$	: cakram satuan,
S	: himpunan semua fungsi univalen,
Ω	: himpunan *starlike*,
S^*	: himpunan semua fungsi *starlike*,
Ψ	: himpunan konveks,
C	: himpunan semua fungsi konveks,
G	: himpunan *concave*,
Co	: himpunan semua fungsi *concave*,
$f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$	: pemetaan dari $\mathbb{D}$ ke $\mathbb{C}$,
μ	: parameter anggota bilangan riil,
α	: alpha,
δ	: delta,
ε	: epsilon,
ζ	: zeta,
θ	: theta,
Λ	: lambda,
π	: pi,
ϕ	: phi,
ω	: omega.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan Analisis Matematika dari tahun ke tahun sangat cepat. Salah satu bagian dari bidang ilmu tersebut yang mengalami perkembangan yang sangat signifikan dalam abad terakhir ini adalah teori fungsi univalen. Lebih khusus lagi para peneliti bekerja pada fungsi analitik yang menyeluruh, pada fungsi holomorfik.

Salah satu bahasan pada fungsi holomorfik diantaranya adalah pemetaan konformal. Fungsi tersebut mempertahankan argumennya. Fungsi yang dikaji mengikuti Teorema Pemetaan Riemann (*Riemann Mapping Theorem)* yang isinya menyatakan bahwa terdapat pemetaan 1-1 dari cakram satuan $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ ke seluruh bidang kompleks $\mathbb{C}$ atau subsetnya.

Oleh karena itu domain dari fungsi yang dikaji diambil cakram satuan, termasuk pada bahasan fungsi univalen. Fungsi univalen pada dasarnya merupakan fungsi injektif. Untuk setiap $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D$ maka $f(z_1) \neq f(z_2)$. Kajian fungsi univalen berkembang sangat cepat dengan diperkenalkannya prinsip area pada tahun 1914 oleh Gronwall yang membuktikan Teorema Area Eksterior. Selanjutnya pada tahun 1916, Bieberbach mengemukakan konjekturnya yang terkenal dengan Konjektur Bieberbach sebagai berikut. Untuk suatu fungsi analitik univalen $f \in S$ yang berbentuk,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (1.1)$$

maka $|a_n| \leq n$ untuk $n \geq 2$.

Terkait dengan konjektur Bieberbach, pada tahun 1933 Fekete dan Szegö mengestimasi batas nilai koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ pada fungsi (1.1) untuk $0 \leq \mu < 1$ yang disebut teorema Fekete-Szegö. Teorema tersebut menyatakan bahwa jika $f(z)$ fungsi analitik univalen pada bidang kompleks dan $0 \leq \mu < 1$ maka

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq 1 + 2exp\left(\frac{-2\mu}{1-\mu}\right)$$

Mencari estimasi serupa untuk kelas fungsi yang berbeda disebut masalah Fekete-Szegö. Beberapa contoh masalah Fekete-Szegö yang pernah diteliti adalah mencari estimasi nilai koefisien pada kelas fungsi *starlike*, fungsi konveks, dan fungsi *close-to-convex*.

Pada tahun 2011, tiga matematikawan bernama Bhowmik, Ponnusamy, dan Wirths menemukan estimasi batas nilai koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk kelas fungsi univalen *concave*. Pada skripsi ini akan dikaji kembali proses dan hasil penelitian untuk mencari batas nilai koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk kelas fungsi univalen *concave* yang telah dilakukan oleh ketiga matematikawan tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana proses dan hasil penelitian yang dilakukan oleh Bhowmik, Ponnusamy, dan Wirths dalam mencari estimasi nilai koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk fungsi univalen *concave*?

1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai pada skripsi ini adalah mengkaji kembali proses dan hasil penelitian yang telah dilakukan oleh Bhowmik, Ponnusamy, dan Wirths dalam mencari estimasi nilai koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk fungsi univalen *concave*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan tinjauan pustaka yang digunakan pada pembahasan skripsi untuk mencari nilai maksimum dari koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk fungsi univalen *concave*.

2.1 Fungsi Kompleks

Definisi 2.1 (Cakram)

Misalkan $\mathbb{C}$ bidang kompleks. Jika $z_0 \in \mathbb{C}$ dan $r > 0$, dengan $r \in \mathbb{R}$, maka himpunan berbentuk

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$$

disebut cakram terbuka dengan jari-jari r yang berpusat di z_0.

Cakram tertutup dengan pusat $z_0 \in \mathbb{C}$ dan jari-jari $r > 0$ dapat dinotasikan dalam bentuk

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}.$$

Cakram terbuka $D(0, r)$ yang berpusat di $z_0 = 0$ dan jari-jari $r > 0$ dapat dinotasikan dalam bentuk

$$D_r = \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}.$$

Cakram satuan D_1 yang berpusat di $z_0 = 0$ dan jari-jari $r = 1$, dapat dinotasikan dalam bentuk

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}.$$

(Graham dan Kohr, 2003)

Definisi 2.2 (Persekitaran)

$D(z_0, r)$ disebut persekitaran (atau r-persekitaran) dari z_0.

(Bak dan Newman, 2010)

Definisi 2.3 (Titik Interior)

Suatu titik w pada suatu set S disebut titik interior dari S jika terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $D(w, r) \subseteq S$.

(Wilde, 2006)

Definisi 2.4 (Titik Batas)

Titik w disebut titik batas dari suatu subset $A \subseteq \mathbb{C}$ jika untuk semua cakram $D(w, r)$, $r > 0$, terdapat titik dari A selain w.

(Wilde, 2006)

Definisi 2.5 (*Disconnected*)

Suatu subset S dari $\mathbb{C}$ disebut *disconnected* jika terdapat himpunan terbuka A dan B dimana $A \cap B = \emptyset$ sedemikian sehingga $A \cap S \neq \emptyset$, $B \cap S \neq \emptyset$, dan $S \subseteq A \cup B$.

(Wilde, 2006)

Definisi 2.6 (*Connected*)

Suatu himpunan disebut *connected* jika himpunan tersebut tidak *disconnected*.

(Wilde, 2006)

Definisi 2.7 (Domain)

Suatu himpunan terbuka disebut domain jika himpunan tersebut *connected*.

(Wilde, 2006)

Definisi 2.8 (Fungsi Kompleks)

Misalkan $D \subseteq \mathbb{C}$. Fungsi kompleks adalah pemetaan fungsi f dari D ke bidang kompleks $\mathbb{C}$. Fungsi kompleks dapat dinotasikan dalam bentuk

$$f: D \to \mathbb{C}.$$

(Wilde, 2006)

Definisi 2.9 (Kontinuitas pada Fungsi Kompleks)

Misalkan $A \subset \mathbb{C}$. Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{C}$ kontinu pada $z_0 \in A$ jika dan hanya jika untuk semua $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

untuk $z \in A$ dan $|z - z_0| < \delta$.

(Wilde, 2006)

Definisi 2.10 (Turunan pada Fungsi Kompleks)

Misalkan D adalah himpunan terbuka dan $f: D \to \mathbb{C}$. f memiliki turunan pada $z_0 \in D$ jika dan hanya jika terdapat $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga untuk semua $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \zeta_0\right| < \varepsilon$$

untuk semua $z \in D$ memenuhi $0 < |z - z_0| < \delta$. Bilangan kompleks ζ_0 adalah turunan dari f pada titik $z_0 \in D$ dan dapat ditulis $f'(z_0) = \zeta_0$.

Jika f memiliki turunan di titik $z_0 \in \mathbb{C}$ maka f kontinu di titik z_0.

(Wilde, 2006)

2.2 Fungsi Analitik

Definisi 2.11 (Fungsi Analitik)

Misalkan D adalah domain dan $f: D \to \mathbb{C}$. Fungsi f dikatakan analitik di titik $z_0 \in D$ jika dan hanya jika terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga fungsi f memiliki turunan di setiap titik di dalam cakram $D(z_0, r)$.

Jika fungsi f analitik di setiap titik di dalam D, maka fungsi f analitik di D. Himpunan fungsi analitik di domain D dapat dinotasikan dengan $H(D)$.

Fungsi analitik juga dapat disebut sebagai fungsi holomorfik.

(Wilde, 2006)

Teorema 2.12 (Fekete-Szegö)

Jika $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ adalah fungsi analitik univalen pada cakram satuan dan $0 \leq \mu < 1$, maka

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq 1 + 2e^{-\frac{2\mu}{1-\mu}}$$

(Duren, 1983)

Lemma 2.13

Misalkan $g(z) = z + b_2z + b_3z^2 + \cdots \in S^*$ adalah fungsi *starlike* maka

$$|b_3 - \mu b_2^2| \leq \max\{1, |3 - 4\mu|\}$$

yang optimal untuk fungsi Koebe $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ jika $|\mu - \frac{3}{4}| \geq \frac{1}{4}$ dan untuk $(k(z^2))^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{1-z^2}$ jika $|\mu - \frac{3}{4}| \leq \frac{1}{4}$.

(Bhowmik, dkk., 2009)

Definisi 2.14 (Fungsi Bernilai Riil Positif)

Fungsi $p \in \mathcal{P}$ adalah fungsi yang memiliki nilai riil positif jika p analitik di dalam cakram satuan $\mathbb{D}$ sedemikian sehingga $p(0) = 1$ dan $Re\, p(z) > 0$ untuk $z \in \mathbb{D}$. Himpunan semua fungsi tersebut dinotasikan dengan $\mathcal{P}$.

Salah satu contoh $\mathcal{P}$ adalah

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

yang memetakan cakram satuan $\mathbb{D}$ secara konformal ke bagian kanan bidang kompleks.

(Graham dan Kohr, 2003)

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas topik penelitian yang telah dilakukan oleh Bhowmik, Ponnusamy, dan Wirths mengenai masalah Fekete-Szegö untuk fungsi univalen *concave*. Terdapat tiga kata kunci pada pembahasan ini, yaitu fungsi univalen, fungsi *concave*, dan masalah Fekete-Szegö.

3.1 Fungsi Univalen

Fungsi analitik f dikatakan univalen (atau *schlicht*) di suatu domain D jika $f(z_1) \neq f(z_2)$ untuk semua $z_1, z_2 \in D$, dengan $z_1 \neq z_2$. Fungsi analitik univalen juga dapat disebut pemetaan konformal.

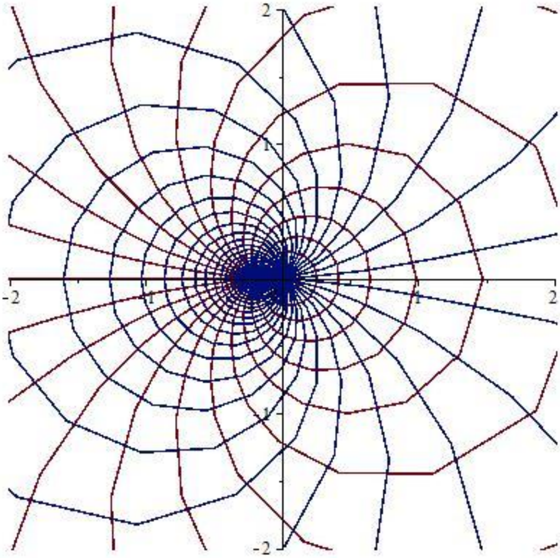
Domain fungsi pada pembahasan fungsi univalen berfokus pada kelas fungsi S. Misalkan S adalah kelas dari fungsi f yang analitik dan univalen di dalam cakram satuan $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, dinormalisasi oleh kondisi $f(0) = 0$ dan $f'(0) = 1$. Sehingga setiap $f \in S$ memiliki perluasan deret Taylor dalam bentuk

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

(Duren, 1983)

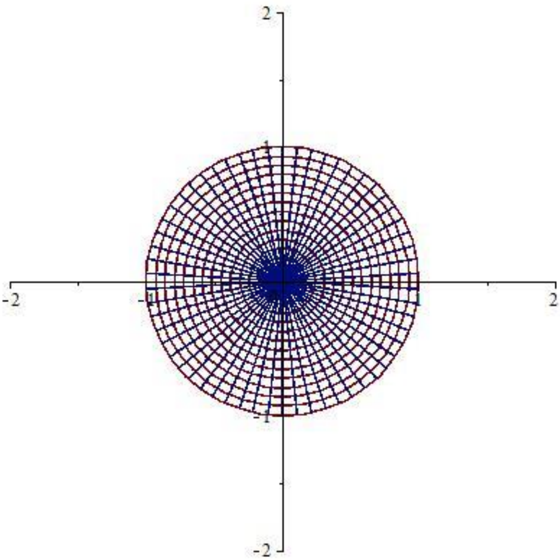
Berikut beberapa contoh fungsi di dalam :

1. $f_1(z) = z(1 - z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$, merupakan fungsi Koebe yang memetakan $\mathbb{D}$ secara konformal ke seluruh bidang kompleks kecuali garis $-\infty < x \leq -1/4$;



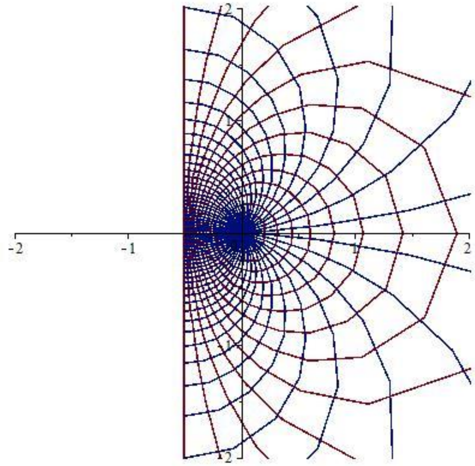
Gambar 3.1 Hasil dari fungsi $f_1(z)$.

2. $f_2(z) = z$, merupakan pemetaan identitas;



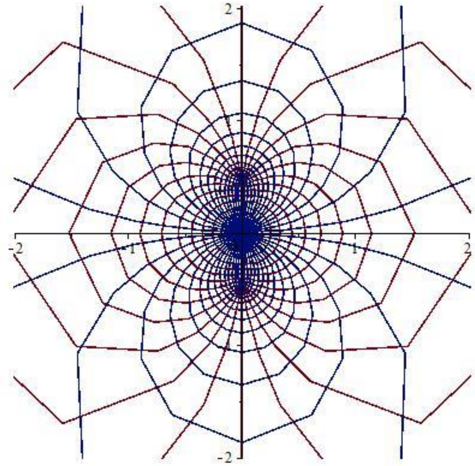
Gambar 3.2 Hasil dari fungsi $f_2(z)$.

3. $f_3(z) = z(1-z)^{-1}$, yang memetakan $\mathbb{D}$ secara konformal ke setengah bidang $Re\{w\} > -{}^{1}/_{2}$;



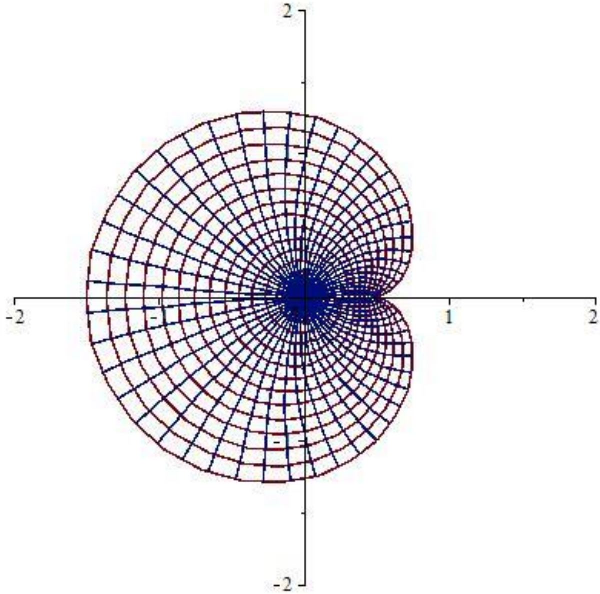
Gambar 3.3 Hasil dari fungsi $f_3(z)$.

4. $f_4(z) = z(1-z^2)^{-1}$, yang memetakan $\mathbb{D}$ ke seluruh bidang kompleks kecuali garis ${}^{1}/_{2} \leq x < \infty$ dan $-\infty < x \leq -{}^{1}/_{2}$;



Gambar 3.4 Hasil dari fungsi $f_4(z)$.

5. $f_5(z) = z - \frac{1}{2}z^2$, yang memetakan $\mathbb{D}$ ke dalam interior *cardioid*.



Gambar 3.5 Hasil dari fungsi $f_5(z)$.

(Duren, 1983)

Beberapa transformasi dasar yang tetap mempertahankan kelas fungsi S sebagai berikut :

1. *Konjugasi*. Jika $f \in S$ dan $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \cdots$, maka $g \in S$.
2. *Rotasi*. Jika $f \in S$ dan $g(z) = e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$, maka $g \in S$.
3. *Dilasi*. Jika $f \in S$ dan $g(z) = r^{-1}f(rz)$, dimana $0 < r < 1$, maka $g \in S$.
4. *Automorfisma Cakram*. Jika $f \in S$ dan

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}, \qquad |\alpha| < 1,$$

maka $g \in S$.

5. *Transformasi Range.* Jika $f \in S$ dan ψ adalah fungsi yang analitik dan univalen pada range f, dengan $\psi(0) = 0$ dan$\psi'(0) = 1$, maka $g = \psi \circ f \in S$
6. *Transformasi Omitted-value.* Jika $f \in S$ dan $f(z) \neq \omega$, maka $g = \frac{\omega f}{\omega - f} \in S$
7. *Transformasi akar kuadrat.* Jika $f \in S$ dan $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$, maka $g \in S$.

(Duren, 1983)

3.1.1 Definisi Himpunan *Starlike*

Misalkan $\Omega \subset \mathbb{C}$. Ω disebut *starlike* terhadap titik pusat $w_0 \in \Omega$ apabila untuk sebarang titik $w \in \Omega$ terdapat ruas garis yang menghubungkan w_0 ke titik w yang terletak sepenuhnya di Ω.

(Graham dan Kohr, 2003)

3.1.2 Definisi Fungsi *Starlike*

Misalkan $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ adalah fungsi analitik, maka fungsi f disebut *starlike* jika dan hanya jika $f'(0) \neq 0$ dan

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Himpunan semua fungsi *starlike* dinotasikan dengan S^*.

(Graham dan Kohr, 2003)

3.1.3 Definisi Himpunan Konveks

Misalkan $\Psi \subset \mathbb{C}$. Ω disebut konveks apabila untuk sebarang titik $w_1, w_2 \in \Psi$ terdapat ruas garis di antara w_1 dan w_2 yang terletak sepenuhnya di Ψ.

(Graham dan Kohr, 2003)

3.1.4 Definisi Fungsi Konveks

Misalkan $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ adalah fungsi analitik maka fungsi f disebut konveks jika dan hanya jika $f'(0) \neq 0$ dan

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \qquad z \in \mathbb{D}$$

Himpunan semua fungsi konveks dinotasikan C.

(Graham dan Kohr, 2003)

Dari definisi fungsi *starlike* dan fungsi konveks, maka dapat disimpulkan bahwa $C \subset S^* \subset S$ (Duren, 1983).

3.2 Fungsi *Concave*

3.2.1 Definisi Fungsi *Concave*

Misalkan $G \subset \mathbb{C}$ adalah domain *concave*, dimana himpunan tertutup $\mathbb{C} \setminus G$ adalah konveks dan tidak memiliki batasan. Lalu himpunan G *connected*. Fungsi univalen *concave* adalah pemetaan konformal f dari cakram satuan $\mathbb{D}$ ke G.

(Cruz dan Pommerenke, 2007)

Definisi Fungsi *Concave* dapat ditulis sebagai berikut:

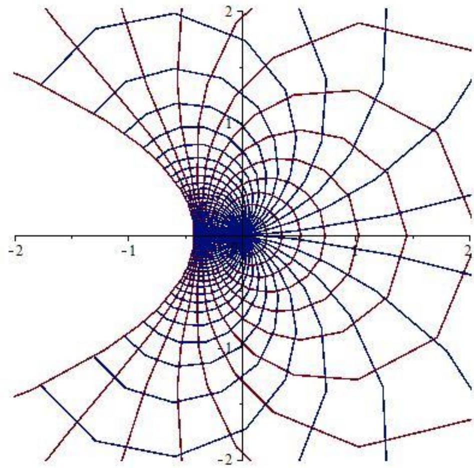
Misalkan $\mathbb{D}$ adalah cakram satuan. Fungsi $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dikatakan termasuk ke dalam kelas fungsi univalen *concave* $Co(\alpha)$ jika f memenuhi kondisi-kondisi berikut:

1. f analitik di $\mathbb{D}$ dengan normalisasi standar $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan memenuhi $f(1) = \infty$.
2. f memetakan $\mathbb{D}$ secara konformal ke suatu set $G \subset \mathbb{C}$ dimana $\mathbb{C} \setminus G$ adalah konveks.
3. Sudut bukaan $f(\mathbb{D})$ di ∞ adalah kurang dari atau sama dengan $\pi\alpha, \alpha \in (1,2]$.

(Bhowmik, dkk., 2009)

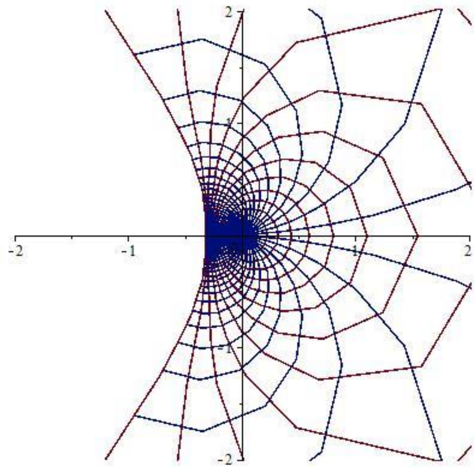
Berikut beberapa contoh fungsi di dalam (α) :

1. $f_6(z) = \frac{2}{3}\left(-1 + \frac{1-z/_2}{(1-z)^2}\right);$



Gambar 3.6 Hasil dari fungsi $f_6(z)$.

2. $f_7(z) = \frac{2}{3}\left(-1 + \frac{1-z/_2}{(1-z)^{3/2}}\right);$



Gambar 3.7 Hasil dari fungsi $f_7(z)$.

(Sim dan Kwon, 2015)

3.2.2 Teorema Fungsi *Concave*

Misalkan $\alpha \in (1,2]$. Fungsi $f \in Co(\alpha)$ jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi *starlike* $\phi \in S^*$ sedemikian sehingga $f(z) = \Lambda_\phi(z)$, dimana

$$\Lambda_\phi(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \left(\frac{t}{\phi(t)}\right)^{(\alpha-1)/2} dt.$$

(Bhowmik, dkk., 2009)

3.3 Masalah Fekete-Szegö

Teorema Fekete-Szegö adalah sebuah teorema untuk mencari estimasi nilai koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk fungsi univalen. Jika

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \qquad |z| < 1$$

adalah fungsi univalen pada cakram satuan dan $0 \le \mu < 1$, maka

$$|a_3 - \mu a_2^2| \le 1 + 2e^{-\frac{2\mu}{1-\mu}}$$

Untuk mencari estimasi serupa pada kelas fungsi yang berbeda disebut masalah Fekete-Szegö.

3.3.1 Teorema Fekete-Szegö untuk Fungsi *Concave*

Jika $f \in Co(\alpha)$ dengan $\alpha \in (1,2]$ memiliki perluasan deret Taylor dalam bentuk $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$, maka

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{2\alpha^2+1}{3}-\mu\alpha^2, & -\infty<\mu\leq\dfrac{2(\alpha-1)}{3\alpha} \\ \dfrac{\alpha(10-9\mu)-(3\mu-2)}{9(2-\mu)+3\alpha(3\mu-2)}, & \dfrac{2(\alpha-1)}{3\alpha}\leq\mu\leq\dfrac{2}{3} \\ \alpha(1-\mu)\sqrt{\dfrac{12(1-\mu)}{(4-3\mu)^2-\alpha^2(3\mu-2)^2}}, & \dfrac{2}{3}\leq\mu\leq\mu_2 \\ \mu\alpha^2-\dfrac{2\alpha^2+1}{3}, & \mu_2\leq\mu<\infty \end{cases}$$

dengan $\mu_2=\frac{4\alpha^2-1+\sqrt{8\alpha^2+1}}{6\alpha^2}$.

(Bhowmik, dkk., 2009)

Bukti

Menurut teorema 3.2.6, Fungsi $f\in Co(\alpha)$ jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi $\phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n z^n\in S^*$ sedemikian hingga

$$f'(z)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{z}{\phi(z)}\right)^{(\alpha-1)/_2} \tag{3.1}$$

di mana $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$. Dengan membandingkan koefisien dari z dan z^2 di kedua sisi perluasan deret dari persamaan (3.1), didapatkan

$$a_2=\frac{\alpha+1}{2}-\frac{\alpha-1}{4}\phi_2$$

dan

$$a_3=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}-\frac{\alpha^2-1}{6}\phi_2-\frac{\alpha-1}{6}\phi_3+\frac{\alpha^2-1}{24}\phi_2^2.$$

Selanjutnya substitusikan a_2 dan a_3 ke dalam $a_3-\mu a_2^2$ sehingga menghasilkan

$$
\begin{aligned}
a_3 - \mu a_2^2 = {} & \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \mu\right) + \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\mu - \frac{2}{3}\right)\phi_2 \\
& - \frac{\alpha-1}{6}\left[\phi_3 - \left(\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{8}\right)\phi_2^2\right]
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Dari hasil persamaan tersebut, maka parameter μ dapat dibagi menjadi tiga interval, yaitu $\mu \le \frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}$ agar suku pertama pada persamaan (3.2) bernilai tidak negatif, $\mu \ge \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}$ agar suku pertama pada persamaan (3.2) bernilai tidak positif, dan $\frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)} < \mu < \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}$.

Kasus (1.1). Misalkan $-\infty < \mu \le \frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}$, maka

$$
\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{8} \ge 1
$$

dan suku pertama pada persamaan (3.2) bernilai tidak negatif. Oleh sebab itu, dengan menggunakan lemma 2.13 untuk suku terakhir pada persamaan (3.2) dengan $|\phi_n| \le n$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
|a_3 - \mu a_2^2| \le {} & \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \mu\right) + \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\frac{2}{3} - \mu\right)|\phi_2| \\
& + \frac{\alpha-1}{6}\left|\phi_3 - \left(\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{8}\right)\phi_2^2\right| \\
\le {} & \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \mu\right) + \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\frac{2}{3} - \mu\right) \\
& + \frac{\alpha-1}{6}\left(\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{2} - 3\right)
\end{aligned}
$$

Jadi, dengan menyederhanakan ekspresi bagian kanan diperoleh

$$
|a_3 - \mu a_2^2| \le \frac{2\alpha^2+1}{3} - \mu\alpha^2 \quad \text{, untuk} \quad \mu \in \left(-\infty, \frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}\right]
$$

Untuk mendapatkan hasil yang lengkap dari teorema Fekete–Szegö, perlu dipertimbangkan interval

$$\mu \in \left(\frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right).$$

Misalkan $\phi \in S^*$, maka

$$\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{1+z\omega(z)}{1-z\omega(z)},$$

di mana $\omega: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ analitik pada $\mathbb{D}$ dengan deret Taylor

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

Dengan mensubstitusikan hasil persamaan

$$\phi_2 = 2c_0 \quad \text{dan} \quad \phi_3 = c_1 + 3c_0^2$$

ke dalam persamaan (3.2) maka diperoleh

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \mu\right) + \frac{\alpha^2-1}{2}\left(\mu - \frac{2}{3}\right)c_0 \\ &\quad - \frac{\alpha-1}{6}\left[c_1 + \left(\frac{4-2\alpha+3\mu(\alpha-1)}{2}\right)c_0^2\right] \\ &=: A + Bc_0 + Cc_0^2 + Dc_1 , \end{aligned}$$

di mana

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} - \mu\frac{(\alpha+1)^2}{4}, \\ B &= (\alpha^2-1)\left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{3}\right), \\ C &= -\frac{(\alpha-1)\big(4-2\alpha+3\mu(\alpha-1)\big)}{12}, \end{aligned}$$

$$D = -\frac{\alpha - 1}{6}.$$

Terlihat bahwa $|c_0| \leq 1$ dan $|c_1| \leq 1 - |c_0|^2$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &= |A + Bc_0 + Cc_0^2 + Dc_1| \\ &\leq |A + Bc_0 + Cc_0^2| + |D||c_1| \\ &\leq |A + Bc_0 + Cc_0^2| + |D|(1 - |c_0|^2). \end{aligned}$$

Misalkan $c_0 = re^{i\theta}$. Pertama, cari nilai maksimum dari $|A + Bc_0 + Cc_0^2|$ di mana r tetap dan θ berbeda. Untuk itu digunakan persamaan berikut

$$\begin{aligned} |A + Bc_0 + Cc_0^2|^2 &= |A + Bre^{i\theta} + Cr^2e^{2i\theta}|^2 \\ &= (A - Cr^2)^2 + B^2r^2 + (2ABr + 2BCr^3)cos\theta \\ &\qquad + 4ACr^2(cos\theta)^2 \\ &=: f(r,\theta). \end{aligned}$$

Selanjutnya, cari nilai terbesar dari fungsi maksimum $f(r,\theta)$ jika r berbeda pada interval $(0,1]$. Untuk itu, bagi kembali kasus (2) menjadi beberapa kasus.

Kasus (1.2). Misalkan $\mu \in \left(\frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}\right)$, maka $C > 0$, $B < 0$, dan $A + Cr^2 > 0$ untuk $r \in [0,1]$. Oleh sebab itu nilai maksimum dari fungsi kuadrat

$$h(x) = (A - Cr^2)^2 + B^2r^2 + 2Br(A + Cr^2)x + 4ACr^2x^2$$

untuk $x \in [-1,1]$ dan $r \in (0,1]$ diperoleh pada titik $x = -1$. Selanjutnya adalah mencari nilai maksimum dari

$$g(r) = A - Br + Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2).$$

Untuk $\mu < \frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}$ maka $g'(0) = -B$ dan

$$g'(1) = -B + 2C - \frac{\alpha - 1}{3} = \frac{\alpha - 1}{6}\big(-6\mu + 4(\alpha - 1)\big) > 0\,.$$

Oleh sebab itu,

$$g(r) \le g(1) = A - B + C = \frac{2\alpha^2 + 1}{3} - \mu\alpha^2\,.$$

Kasus (1.3). Jika $\mu = \frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}$, maka $C = 0$ dan h adalah fungsi linier yang memiliki nilai maksimum pada titik $x = -1$. Perhitungan pada kasus (2.1) berlaku sehingga nilai maksimum dari $g(1)$ diperoleh seperti di atas.

Kasus (1.4). Misalkan $\mu \in \left(\frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}\right)$. Pertama-tama, buktikan bahwa pada interval tersebut fungsi kuadrat h monoton turun untuk $x \in [-1,1]$. Nilai maksimum dari fungsi $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diperoleh pada titik

$$x(r) = \frac{-B(A + Cr^2)}{4ACr} = \frac{-B}{4}\left(\frac{1}{Cr} + \frac{r}{A}\right)$$

menunjukkan bahwa $x(r)$ monoton naik dan $x(1) < -1$. Karena $x(1) < -1$ maka

$$j(\mu) = \alpha^2(3\mu - 2)^2 - 4 + 3\mu > 0\,.$$

Pertidaksamaan tersebut jelas terbukti. Oleh sebab itu, didapatkan batas atas yang sama dengan yang terjadi pada kasus (1.2) dan (1.3).

Kesimpulan dari kasus (1.1), (1.2), (1.3) dan (1.4) diperoleh

$$|a_3 - \mu a_2^2| \le \frac{2\alpha^2 + 1}{3} - \mu\alpha^2 \quad \text{, untuk} \quad -\infty < \mu < \frac{2(\alpha - 1)}{3\alpha}$$

Kasus (2.1). Misalkan $\mu \in \left[\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \frac{2}{3}\right)$. $j(\mu)$ dapat difaktorisasi sebagai

$$j(\mu) = 9\alpha^2(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\,,$$

di mana

$$\mu_1 = \frac{4\alpha^2 - 1 - \sqrt{8\alpha^2 + 1}}{6\alpha^2} \quad \text{dan} \quad \mu_2 = \frac{4\alpha^2 - 1 + \sqrt{8\alpha^2 + 1}}{6\alpha^2}$$

Terlihat bahwa $\mu_2 > \mu_1$.

Untuk $\mu \in \left[\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \mu_1\right)$, nilai maksimum dari fungsi h diperoleh pada titik $x = -1$ dan nilai maksimum dari fungsi g diperoleh pada titik

$$r_m = \frac{-B}{-2C + \frac{\alpha - 1}{3}} \in (0,1]\,.$$

Oleh sebab itu, nilai maksimum dari $|a_3 - \mu a_2^2|$ adalah

$$g(r_m) = \frac{\alpha(10 - 9\mu) - (3\mu - 2)}{9(2 - \mu) + 3\alpha(3\mu - 2)}\,.$$

Untuk $\mu \in \left[\mu_1, \frac{2}{3}\right)$, titik

$$r_0 = \frac{B}{2C\left(1 + \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)} \in (0,1]$$

adalah solusi tunggal dari persamaan $x(r) = -1$ pada interval $(0,1]$. Terlihat bahwa $r_m < r_0$ untuk $\mu > \frac{2}{3}$. Lalu,

$$k(r) = \sqrt{h(x(r)) + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)}$$

$$= (A - Cr^2)\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC} + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)}$$

monoton turun untuk $r \geq r_0$. Oleh sebab itu, nilai maksimum dari $|a_3 - \mu a_2^2|$ juga adalah $g(r_m)$.

Kasus (2.2). Untuk $\mu = \frac{2}{3}$, maka $B = 0$ dan $C = -\frac{\alpha-1}{6}$. Oleh sebab itu nilai maksimum diperoleh pada titik $cos\theta = 0$ dan sebarang titik $r \in (0,1]$. Dari semua titik tersebut diperoleh

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{\alpha}{3}$$

sebagai batas atas yang optimal.

Kesimpulan dari kasus (2.1) dan (2.2) diperoleh

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{\alpha(10 - 9\mu) - (3\mu - 2)}{9(2 - \mu) + 3\alpha(3\mu - 2)}, \text{ untuk } \quad \mu \in \left(\frac{2(\alpha - 1)}{3\alpha}, \frac{2}{3}\right]$$

Kasus (3). Misalkan $\mu \in \left(\frac{2}{3}, \mu_2\right]$. Karena $B > 0$, fungsi $x(r)$ monoton turun. Titik

$$r_1 = \frac{B}{-2C\left(1 + \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)} \in (0,1]$$

adalah solusi tunggal dari persamaan $x(r) = 1$ pada interval $(0,1]$. Untuk $r < r_1$, maka $h(x) \leq h(1)$. Misalkan fungsi

$$l(r) = A + Br + Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2),$$

nilai maksimum dari fungsi tersebut diperoleh pada titik

$$r_n = \frac{B}{-2C + \frac{\alpha - 1}{3}}.$$

Jelas terlihat bahwa $r_n > r_1$. Karena $k(r)$ monoton naik, nilai maksimum dari $|a_3 - \mu a_2^2|$ adalah

$$k(1) = (A - C)\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}} = \alpha(1 - \mu)\sqrt{\frac{12(1 - \mu)}{(4 - 3\mu)^2 - \alpha^2(3\mu - 2)^2}},$$

Yang diperoleh pada titik $c_0 = e^{i\theta_0}$, di mana

$$cos\theta_0 = \frac{-B(A + C)}{4AC}.$$

Pada kasus ini, fungsi extremal f didefinisikan oleh solusi dari persamaan diferensial kompleks berikut

$$f'(z) = \frac{\left(1 - ze^{i\theta_0}\right)^{\alpha - 1}}{(1 - z)^{\alpha - 1}}.$$

Kesimpulan dari kasus (3) diperoleh

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \alpha(1 - \mu)\sqrt{\frac{12(1 - \mu)}{(4 - 3\mu)^2 - \alpha^2(3\mu - 2)^2}}$$

untuk $\mu \in \left(\frac{2}{3}, \mu_2\right]$.

Kasus (4.1). Misalkan $\mu \in \left(\mu_2, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right)$. Karena $x(1) < -1$ maka titik

$$r_2 = \frac{B}{-2C\left(1 - \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)}$$

memenuhi $x(r_2) = -1$ dan $r_2 \in (0,1)$.

Untuk kondisi $r \leq r_2$, untuk $r \leq r_1$, fungsi maksimumnya adalah $l(r)$ dan untuk $r \in (r_1, r_2]$, fungsi maksimumnya adalah $k(r)$ seperti pada kasus sebelumnya.

Untuk $r > r_2$, titik $x(r)$ tidak berada pada interval $[-1,1]$. Oleh sebab itu, nilai maksimum diperoleh pada titik $x = -1$ atau $x = 1$. Terlihat bahwa $A + C < 0$ dan $-A - Cr^2 > 0$, nilai maksimum dari persamaan (7) diperoleh pada titik $x = -1$, yakni untuk $c_0 = -r$. Oleh sebab itu, untuk $r \in (r_2, 1]$ fungsi maksimumnya adalah

$$n(r) = -A + Br - Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)\,.$$

Karena

$$-C > \frac{\alpha - 1}{6} \quad \text{dan} \quad B > 0\,,$$

maka $n(r) \leq n(1)$.
Dari kasus (4.1) diperoleh

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq n(1) = -A + B - C = \mu\alpha^2 - \frac{2\alpha^2 + 1}{3}$$

untuk $\in \left(\mu_2, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right)$.

Kasus (4.2). Misalkan $\mu \geq \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}$ agar suku pertama pada persamaan (3.2) tidak positif. Pada kondisi μ tersebut didapat $\mu > 2/3$. Maka dari itu

$$\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{8}<\frac{1}{2}.$$

Dengan menggunakan lemma 2.13 diperoleh

$$\left|\phi_3-\left(\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{8}\right)\phi_2^2\right|\leq 3-\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{2}.$$

Substitusikan pertidaksamaan tersebut ke persamaan (3.2) dengan $|\phi_n| \leq n$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}|a_3-\mu a_2^2| \leq & -\frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}-\mu\right)-\frac{\alpha^2-1}{2}\left(\frac{2}{3}-\mu\right)\\ &+\frac{\alpha-1}{6}\left(3-\frac{2(\alpha+1)-3\mu(\alpha-1)}{2}\right).\end{aligned}$$

Jadi, dengan menyederhanakan ekspresi bagian kanan didapatkan

$$|a_3-\mu a_2^2| \leq \mu\alpha^2-\frac{2\alpha^2+1}{3} \quad \text{, untuk} \quad \mu \geq \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}$$

Kesimpulan dari kasus (4.1) dan (4.2) diperoleh

$$|a_3-\mu a_2^2| \leq \mu\alpha^2-\frac{2\alpha^2+1}{3} \quad \text{, untuk} \quad \mu_2<\mu<\infty.$$

∴ Teorema 3.3.1 terbukti.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan oleh Bhowmik, Ponnusamy, dan Wirths dalam mencari estimasi nilai $|a_3 - \mu a_2^2|$ untuk fungsi univalen *concave* adalah seperti yang tertera pada teorema 3.3.1, yaitu :

1. untuk $-\infty < \mu \leq \frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}$,
$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{2\alpha^2+1}{3} - \mu\alpha^2$$
2. untuk $\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$,
$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{\alpha(10-9\mu)-(3\mu-2)}{9(2-\mu)+3\alpha(3\mu-2)}$$
3. untuk $\frac{2}{3} \leq \mu \leq \mu_2$,
$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \alpha(1-\mu)\sqrt{\frac{12(1-\mu)}{(4-3\mu)^2-\alpha^2(3\mu-2)^2}}$$
4. untuk $\mu_2 \leq \mu < \infty$,
$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \mu\alpha^2 - \frac{2\alpha^2+1}{3}$$

dengan $\mu_2 = \frac{4\alpha^2-1+\sqrt{8\alpha^2+1}}{6\alpha^2}$.

4.2 Saran

Penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian dengan mencari batas nilai koefisien $|a_3 - \mu a_2^2|$ pada kelas fungsi yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Bak, J. dan Donald J. N. 2010. *Univalent Functions*. Third Edition. Springer Science+Bussiness Media, LLC. Ney Work.

Bhowmik, B. Ponnusamy, S. dan Wirths, K.-J. 2011. On the Fekete-Szegö probem for Concave Univalent Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 373:2, 432-438.

Cruz, L. dan Pommerenke, Ch. 2007. On Concave Univalent Functions. *Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal*, 52:2-3, 153-159.

Duren, P. L. 1983. *Univalent Functions*. Springer-Verlag. New York.

Graham, I. dan Gabriela K. 2003. *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*. Marcel Dekker, Inc. New York.

Sim, Y. J. dan Kwon, O. S. 2015. The Pre-Schwarzian Norm Estimate for Analytic Concave Functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2015, 1-6.

Wilde, I. F. 2006. *Lecture Notes on Complex Analysis*. Imperial College Press. London.