

ANALISIS DINAMIK MODEL LAJU OBESITAS MELALUI KONTAK SOSIAL

SKRIPSI

oleh:
YULIA KODRIANTI
155090407111007

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019







ANALISIS DINAMIK MODEL LAJU OBESITAS MELALUI KONTAK SOSIAL

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:
YULIA KODRIANTI
155090407111007



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Analisis Dinamik Model Laju Obesitas Melalui Kontak Sosial

oleh:

Yulia Kodrianti

155090407111007

**Setelah dipertahankan di depan majelis pengujian
pada tanggal
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika**

Pembimbing

Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si

NIP. 196607281993032001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.

NIP. 197509082000031003



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yulia Kodrianti

NIM : 155090407111007

Jurusan : Matematika

Penulis Skripsi berjudul : **ANALISIS DINAMIK MODEL LAJU OBESITAS MELALUI KONTAK SOSIAL**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi yang saya buat adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko sebagai akibat dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang,
yang menyatakan,

Yulia Kodrianti
NIM. 155090407111007



ANALISIS DINAMIK MODEL LAJU OBESITAS MELALUI KONTAK SOSIAL

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model laju obesitas melalui kontak sosial, dengan memandangi dua kasus, yaitu kasus obesitas yang dipengaruhi oleh faktor sosial saja dan kasus obesitas yang dipengaruhi oleh faktor sosial maupun nonsosial. Karena obesitas dipandang sebagai epidemi sosial, maka model yang dibahas mengadopsi model epidemi. Analisis dinamik yang dilakukan pada model ini meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa terdapat angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dan dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Kasus obesitas yang dipengaruhi oleh faktor sosial saja ($\epsilon = 0$), titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan stabil asimtotik global ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan sebaliknya. Titik endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan global ketika memenuhi syarat tertentu. Analisis secara geometri dilakukan pada kasus obesitas yang dipengaruhi oleh faktor sosial dan nonsosial ($\epsilon > 0$) dengan menggunakan *nullcline* dan analisis medan arah. Hasil simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis yang diperoleh.

Kata Kunci: laju obesitas, kontak sosial, angka reproduksi dasar, kestabilan global, *nullcline*.





DYNAMICAL ANALYSIS OF AN OBESITY MODEL THROUGH SOCIAL CONTACT

ABSTRACT

This final project discusses an obesity model through social contact by considering two cases, namely obesity case that affected by social factor only and obesity case that affected by both social and nonsocial factor. Since obesity can be considered as a social epidemic, the discussed model adopts epidemic model. A dynamical analysis is performed by finding the basic reproduction number, equilibrium points and then local and global stability properties. Dynamical analysis shows that there is a basic reproduction number (\mathcal{R}_0) and two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium. For the first case $\epsilon = 0$, the disease-free equilibrium is local asymptotically stable when $\mathcal{R}_0 < 1$ and vice versa. The endemic equilibrium is local and global asymptotically stable under some conditions. Geometrical analysis is performed for the second case $\epsilon > 0$ by using nullcline and direction field. Numerical simulation supports the results of dynamical analysis.

Keywords: obesity model, social contact, basic reproduction number, global stability, nullcline.





KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala limpahan berkat dan kasih karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Dinamik Model Laju Obesitas melalui Kontak Sosial dengan baik dan lancar.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahu, M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D selaku dosen pembimbing akademik.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahu, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
5. Aba, mama, kakak, dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Bagus Mahardika, Elsa Dita, Regina Claudia, Ceki atas kritik, saran, dukungan, kerja sama dalam suka maupun duka selama menjalani proses perkuliahan.
7. Keluarga Besar Matematika 2015 dan keluarga besar Putra Putri Brawijaya 2017 atas kebersamaan dan dukungan selama menjalani proses perkuliahan.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Kritik dan saran dapat dikirim



melalui email yuliamahardika3131@gmail.com, untuk perbaikan pada masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 2019

Penulis



DAFTAR ISI

Halaman

JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
BAB II DASAR TEORI	5
2.1 Sistem Dinamik	5
2.1.1 Sistem <i>autonomous</i> linear	6
2.1.2 Sistem <i>autonomous</i> nonlinear	8
2.2 Kestabilan Global	10
2.2.1 Kriteria Dulac	10
2.2.2 Fungsi Lyapunov	11
2.3 Sifat Ketaksamaan Rata-rata Aritmetika dan Geometri	142
2.4 <i>Nullcline</i> dan Medan Arah	144
2.5 Model Epidemi	16
2.6 Angka Reproduksi Dasar	17
BAB III PEMBAHASAN	21
3.1 Konstruksi Model	21
3.1.1 Laju perubahan subpopulasi rentan (<i>S</i>)	22
3.1.2 Laju perubahan subpopulasi dengan obesitas (<i>I</i>)	22
3.1.3 Laju perubahan subpopulasi sembuh (<i>R</i>)	23
3.2 Analisis Dinamik Kasus $\epsilon = 0$	24
3.2.1 Titik kesetimbangan	24



3.2.2	Analisis kestabilan titik kesetimbangan	27
3.2.2.1	Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas obesitas	27
3.2.2.2	Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik	27
3.2.2.3	Analisis kestabilan global menggunakan Kriteria Dulac	29
3.2.2.4	Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik menggunakan fungsi Lyapunov	30
3.3	Analisis Dinamik Kasus $\epsilon > 0$	33
3.3.1	Titik kesetimbangan	33
3.3.2	Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik menggunakan Kriteria Dulac	37
3.4	Simulasi Numerik	38
3.4.1	Simulasi numerik kasus $\epsilon = 0$	38
3.4.1.1	Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	38
3.4.1.2	Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$	39
3.4.1.3	Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 = 1$	40
3.4.2	Simulasi numerik kasus $\epsilon > 0$	41
PENUTUP		43
4.1	Kesimpulan	43
4.2	Saran	43



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Orbit x -nullcline 14

Gambar 2.2 Orbit y -nullcline 15

Gambar 2.3 Perpotongan nullcline dan resultan arah orbit 15

Gambar 2.4 Model kompartemen Kim, dkk.(2013) 16

Gambar 3.1 Diagram kompartemen model matematika laju obesitas 21

Gambar 3.2 Skema perpotongan $G_1(I)$ dan $G_2(I)$ 35

Gambar 3.3 Resultan medan arah x -nullcline dan y -nullcline 36

Gambar 3.4 Potret fase $\mathcal{R}_0 < 1$ kasus $\epsilon = 0$ 39

Gambar 3.5 Potret fase $\mathcal{R}_0 > 1$ kasus $\epsilon = 0$ 40

Gambar 3.6 Potret fase $\mathcal{R}_0 = 1$ kasus $\epsilon = 0$ 41

Gambar 3.7 Potret fase sistem (3.4) untuk kasus $\epsilon > 0$ 42





DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1 Titik kesetimbangan endemik kasus $\epsilon = 0$	47
Lampiran 2 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik kasus $\epsilon = 0$ dengan fungsi Lyapunov.....	49
Lampiran 3 Analisis geometri kasus $\epsilon > 0$	51





BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berat badan berlebih dibedakan menjadi dua kategori, yaitu kelebihan berat badan (*overweight*) dan obesitas. *Overweight* dan obesitas merupakan dua hal yang berbeda. *Overweight* adalah berat badan yang melebihi berat badan normal, sedangkan obesitas adalah kelebihan akumulasi lemak dalam tubuh. Untuk mengklasifikasikan berat badan berlebih dapat digunakan acuan IMT (Indeks Massa Tubuh) yaitu suatu ukuran yang menunjukkan jumlah lemak yang terdapat di dalam tubuh berdasarkan rasio antara berat badan dan kuadrat tinggi badan. Menurut WHO (1999), seseorang dikatakan *overweight* apabila memiliki $IMT \geq 25 \text{ kg/m}^2$ dan dikatakan obesitas apabila memiliki $IMT \geq 30 \text{ kg/m}^2$. Beberapa ahli berpendapat bahwa obesitas dapat memberikan dampak yang berbeda pada kesehatan individu. Kelebihan berat badan telah menjadi masalah kesehatan masyarakat yang serius karena dianggap memberi dampak yang berbahaya bagi kesehatan. Berdasarkan penelitian terbaru Pusat Pengendalian dan Pencegahan Penyakit (CDC), 69% orang dewasa di Amerika Serikat mengalami kelebihan berat badan dan lebih dari 35% dari semua orang dewasa mengalami obesitas. Bukan hanya Amerika Serikat saja, melainkan hampir semua negara maju dan berkembang sedang mengalami masalah laju pertumbuhan populasi kelebihan berat badan.

Pada Juni 2013, *American Medical Association (AMA)* secara resmi mengklasifikasikan obesitas sebagai penyakit. Obesitas terjadi karena adanya ketidakseimbangan antara energi yang masuk dengan energi yang keluar. Obesitas dapat menyebabkan masalah kesehatan fisik dan psikis. Masalah kesehatan fisik yang diakibatkan obesitas, yaitu asma, diabetes, hipertensi, dan jantung koroner. Sementara itu, masalah kesehatan psikis akibat obesitas adalah menurunnya rasa percaya diri dalam berinteraksi sosial. Dewasa ini, kelebihan berat badan dan obesitas telah diakui sebagai epidemi sosial. Studi menunjukkan bahwa orang cenderung menghabiskan waktu dengan orang-orang dengan berat badan yang sama. Bersosialisasi dengan



orang gemuk mempengaruhi persepsi individu terhadap obesitas dan kebiasaan hidup. Akibatnya, obesitas dapat dipandang seperti penyakit menular.

Model matematika telah banyak digunakan dalam memodelkan penyakit obesitas di masyarakat. Pada tahun 2010, Gonzales-Parra, dkk. memodelkan masalah obesitas dengan memperhatikan kelompok usia. Dalam artikel tersebut model hanya mempertimbangkan jumlah populasi individu dengan kelebihan berat badan dan obesitas di setiap usia. Pada tahun yang sama Santonja, dkk. memodelkan masalah obesitas sebagai penyakit sosial dengan mengambil studi kasus di Valencia, Spanyol. Artikel ini mengajukan model matematika baru untuk memprediksi hal-hal yang dapat menyebabkan penambahan berat badan pada tahun yang akan datang dengan menggunakan analisis sensitivitas. Artikel tersebut menyatakan bahwa strategi mencegah obesitas lebih efektif daripada pengobatan terhadap masyarakat obesitas. Kemudian model matematika obesitas milik Santonja, dkk. dikembangkan pada tahun 2017 oleh Sun. Model matematika obesitas tersebut digunakan untuk mengoptimalkan pengobatan dan pembedahan pada subpopulasi obesitas. Pada artikel tersebut dibahas mengenai kontrol optimum pada model matematika obesitas yang diberikan.

Pada skripsi ini dibahas konstruksi model matematika penyebaran penyakit obesitas melalui kontak sosial yang mengkaji ulang dari artikel Lozano-Ochoa dkk. pada tahun 2017. Analisis yang dilakukan terhadap model ini meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0), dan analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan yang diperoleh. Angka reproduksi dasar ditentukan dengan metode matriks generasi selanjutnya, analisis kestabilan lokal dilakukan dengan melakukan proses linearisasi, sedangkan analisis kestabilan global dilakukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov dan kriteria Bendixon Dulac. Untuk memverifikasi hasil analisis, dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4.



1.2 Rumusan Masalah

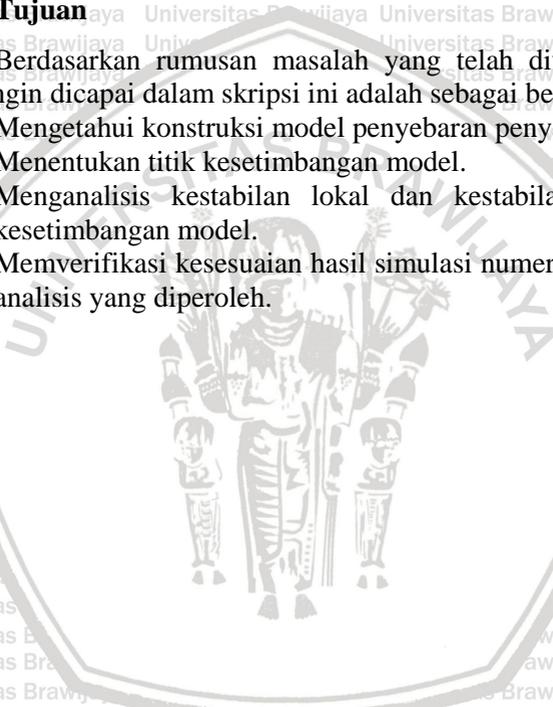
Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut

1. Bagaimana konstruksi model penyebaran penyakit obesitas?
2. Bagaimana titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana kestabilan lokal dan kestabilan global titik kesetimbangan model?
4. Bagaimana hasil simulasi numerik model?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah sebagai berikut

1. Mengetahui konstruksi model penyebaran penyakit obesitas.
2. Menentukan titik kesetimbangan model.
3. Menganalisis kestabilan lokal dan kestabilan global titik kesetimbangan model.
4. Memverifikasi kesesuaian hasil simulasi numerik dengan hasil analisis yang diperoleh.





BAB II

DASAR TEORI

Pada bab ini dijelaskan teori-teori yang akan digunakan untuk memahami dan menyelesaikan permasalahan pada skripsi ini. Teori-teori yang akan digunakan meliputi sistem dinamik, kestabilan lokal, kestabilan global, *nullcline* dan medan arah, angka reproduksi dasar dan model penyebaran penyakit. Pada sistem dinamik digunakan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan titik kesetimbangan untuk mengetahui perilaku solusi. Kestabilan global titik kesetimbangan ditentukan dengan menggunakan kriteria Dulac dan fungsi Lyapunov. Selanjutnya, teori *nullcline* dan medan arah digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan secara geometris. Untuk mengkonstruksi penyebaran penyakit obesitas, dipelajari model penyebaran penyakit secara umum dan angka reproduksi dasar.

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang selalu berubah dan dapat ditentukan kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisi pada masa kini atau pada masa lampau (Nagle, dkk., 2012). Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik kontinu dan sistem dinamik diskret. Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } t \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

sedangkan sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai persamaan diferensial dengan bentuk umum

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{Alligood, dkk., 2000})$$

Sistem dinamik kontinu dibedakan menjadi sistem *autonomous* dan sistem *nonautonomous*. Sistem *autonomous* adalah suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk



$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

dengan $\vec{f}(\vec{x})$ fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t .

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Definisi 2.1 (Titik kesetimbangan sistem *autonomous*)

Suatu titik \vec{x}^* yang memenuhi $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$ disebut titik kritis sistem *autonomous* (2.1). Titik kritis \vec{x}^* bernilai konstan karena $\dot{\vec{x}} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\dot{\vec{x}} = 0$ disebut keadaan setimbang sehingga titik kritis disebut juga sebagai titik kesetimbangan.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Definisi 2.2 (Kestabilan titik kesetimbangan)

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem *autonomous* (2.1) dikatakan

1. **stabil**, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1), yang ketika $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

ada untuk setiap $t > 0$ dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon$$

untuk setiap $t \geq 0$,

2. **stabil asimtotik**, jika \vec{x}^* stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika solusi $\vec{x}(t)$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. **tidak stabil**, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.1.1 Sistem *autonomous* linear

Perhatikan sistem *autonomous* linear dengan n persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

6



Sistem persamaan (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, dan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Jika $\det A \neq 0$, maka $\vec{x}^* = \vec{0}$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.2). Kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Teorema 2.1 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous linear*)

Kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous linear* bergantung pada nilai eigen matriks A. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks A. Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem (2.2) bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$,
2. **tidak stabil**, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif.

Khusus untuk sistem (2.2) dua dimensi, titik $\vec{x}^* = \vec{0}$ bersifat stabil tetapi tidak stabil asimtotik, jika $Re(\lambda_i) = 0$ untuk $i = 1, 2$ atau salah satu nilai eigen bernilai 0 dan lainnya negatif.

(Robinson, 2004)

Misalkan diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan matriks identitas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Persamaan karakteristik matriks A diperoleh dengan menyeleksi persamaan $|A - \lambda I| = 0$, yaitu

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \tag{2.3}$$

Akar-akar persamaan karakteristik (2.3) adalah



$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{trace}(A) \pm \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}, \quad (2.4)$$

dengan $\text{trace}(A) = a + d$ dan $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Nilai-nilai λ_1 dan λ_2 pada persamaan (2.4) bergantung kepada nilai $\text{trace}(A)$ dan $\det(A)$. Sifat kestabilan setiap kriteria diberikan pada Tabel 2.1 sebagai berikut.

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan sistem berdasarkan nilai $\text{trace}(A)$ dan $\det(A)$.

$\det(A)$	$\text{trace}(A)$	$\text{trace}(A)^2 - 4 \det(A)$	Nilai eigen	Jenis kestabilan	
> 0	> 0	≥ 0	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	
		< 0	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha > 0$	Tidak stabil	
	$= 0$	< 0	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	Stabil	
	< 0	< 0	≥ 0	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik
			< 0	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha < 0$	Stabil asimtotik
		> 0	> 0	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Tidak stabil
< 0	$= 0$	> 0	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Tidak stabil	
	< 0	> 0	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Tidak stabil	

(Panfilov, 2010)

2.1.2 Sistem *autonomous* nonlinear

Misal sistem (2.1) adalah sistem *autonomous* nonlinear dengan n persamaan dan fungsi \vec{f} merupakan fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik \vec{x}^* . Deret Taylor fungsi f_i di sekitar \vec{x}^* untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah



$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_i - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), \quad (2.5)$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ adalah suku sisa pada hampiran orde satu yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) = \vec{x} - \vec{x}^*$, sehingga diperoleh

$$\vec{w}' = (\vec{x} - \vec{x}^*)' = \vec{x}'.$$

karena $f_i(\vec{x}) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka sistem persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\vec{w}' = J\vec{w} + \vec{\eta}, \quad (2.6)$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}_i^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}_i^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}_i^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}_i^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi. $\vec{\eta}$ bernilai sangat kecil untuk \vec{x} yang berada dekat dengan \vec{x}^* , sehingga $\|\vec{\eta}\| \ll \|\vec{w}\|$ atau $\vec{\eta} \rightarrow 0$. Oleh karena itu, nilai $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem (2.6) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\vec{w}' = J\vec{w}. \quad (2.7)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, maka $\vec{w}^* = 0$, sehingga titik kesetimbangan sistem (2.7) adalah $\vec{w}^* = 0$. Proses ini dinamakan dengan linearisasi.

Kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan sistem hasil

linearisasi, seperti yang dinyatakan pada teorema 2.2 (Boyce dan DiPrima, 2012)

Teorema 2.2 (Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous Nonlinear)

Titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi stabil asimtotik,
2. **tak stabil**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi tak stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.2 Kestabilan Global

Untuk menentukan kestabilan global suatu titik kesetimbangan, dapat ditentukan dengan Kriteria Bendixon-Dulac dan fungsi Lyapunov.

2.2.1 Kriteria Dulac

Teorema 2.3 (Kriteria Dulac)

Diberikan

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

dimana f dan g berada di C^1 . Misalkan $\Phi(x, y)$ adalah suatu fungsi yang berada pada C^1 dan terhubung sederhana pada $D \subset \mathbb{R}^2$. Jika $\frac{\partial(\Phi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi g)}{\partial y} \neq 0$ dan tidak berubah tanda pada daerah D , maka sistem (2.6) tidak memiliki orbit periodik pada daerah D .

(Wiggins, 2003)

Teorema 2.4 (Poincare)

Misalkan D adalah daerah terbatas pada bidang $x - y$ dan sistem *autonomous* dua dimensi (2.8) adalah sistem dinamik dengan f dan g kontinu dan diferensiabel. Jika trayektori sistem dinamik selalu berada pada D untuk semua $t \geq 0$, maka trayektori dapat berupa salah satu di antara berikut.

1. Orbit periodik.
2. Menuju orbit periodik.



3. Menuju titik kesetimbangan jika $t \rightarrow \infty$.

Jadi berdasarkan kedua teorema tersebut, jika sistem dinamik yang solusinya terbatas pada daerah D tidak memiliki orbit periodik, maka orbit solusi akan menuju titik kesetimbangan yang stabil lokal, sehingga titik kesetimbangan tersebut merupakan titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik global.

(Richard, 2002)

2.2.2 Fungsi Lyapunov

Definisi 2.3 (Fungsi Lyapunov lemah)

Misalkan \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1) suatu fungsi $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi berikut.

1. $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W,$
2. $\mathcal{L}'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W.$

(Alligood, dkk., 2000)

Definisi 2.4 (Fungsi Lyapunov kuat)

Fungsi \mathcal{L} disebut fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3 dan $\mathcal{L}'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$ dengan $\vec{x}^* \in W.$

(Alligood, dkk., 2000)

Teorema 2.5 (Kestabilan global dengan fungsi Lyapunov)

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat

1. stabil global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* ,
2. stabil asimtotik global, jika terdapat fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* .

(Alligood, dkk., 2000)



2.3 Sifat Ketaksamaan Rata-rata Aritmetika dan Geometri

Pada Skripsi ini, untuk menyelesaikan kestabilan global titik kesetimbangan dengan fungsi Lyapunov digunakan sifat Ketaksamaan Rata-Rata Aritmetika dan Geometri. Misal

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Rata-rata aritmetika yang diberikan adalah

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j,$$

dan rata-rata geometri yang diberikan adalah

$$G = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = \left(\left(\prod_{j=1}^n a_j \right) \right)^{1/n}$$

(Mercer, 2014).

Teorema 2.6 (Ketaksamaan Rata-Rata Aritmetika dan Geometri)

Misal $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ dengan $n \geq 2$, maka

$$A \geq G, \tag{2.9}$$

dan persamaan (2.9) menjadi sebuah persamaan jika dan hanya jika

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman, misal $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, maka $a_1 \leq A \leq a_n$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} A(a_1 + a_n - A) - a_1 a_n &= (a_1 - A)(A - a_n) \geq 0, \\ a_1 + a_n - A &\geq \frac{a_1 a_n}{A}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ketika $n = 2$, maka $A = \frac{a_1 + a_2}{2}$, diperoleh

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - A &\geq \frac{a_1 a_2}{A}, \\ 2A - A &\geq \frac{a_1 a_2}{A}, \\ A^2 &\geq a_1 a_2. \end{aligned}$$

Jadi sifat benar untuk $n = 2$.



Andaikan sifat benar untuk $n = k$, yaitu $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^{\frac{1}{k}}$. Akan dibuktikan bahwa sifat benar untuk $n = k + 1$, yaitu

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1}}{k + 1} \geq (a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}$$

Ketaksamaan Rata-Rata Aritmetika A memenuhi

$$(k + 1)A = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1}.$$

Jika $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ maka $A = a_i = a$ sehingga $A = G$.

Jika terdapat beberapa nilai $a_i \neq A$ maka harus ada satu bilangan yang lebih besar dari A dan satu bilangan yang kurang dari A . Tanpa mengurangi keumuman sifat, misalkan $a_k > A > a_{k+1}$, sehingga $a_k - A > 0$, $A - a_{k+1} > 0$, dan diperoleh

$$(a_k - A)(A - a_{k+1}) > 0 \tag{2.11}$$

Didefinisikan $y \equiv a_k + a_{k+1} - A \geq a_k - A > 0$, sehingga

$$\begin{aligned} (k + 1)A &= a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1}, \\ kA &= a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} - A, \\ kA &= a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + y, \end{aligned}$$

dan diperoleh

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \geq a_1 a_2 \dots a_{k-1} y A, \\ A^{k+1} &\geq a_1 a_2 \dots a_{k-1} y A. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.11) diperoleh

$$\begin{aligned} (a_k + a_{k+1} - A)A - a_k a_{k+1} &> 0, \\ yA &> a_k a_{k+1}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $A^{k+1} \geq a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1}$ dan Teorema 2.2 terbukti.

(Mercer, 2014)

2.4 Nullcline dan Medan Arah

Nullcline dapat ditentukan dengan menetapkan sistem persamaan diferensial $x' = 0$ dan $y' = 0$. Titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial tak linear diperoleh dengan menentukan titik potong antara *nullcline*.

(Robinson, 2004)

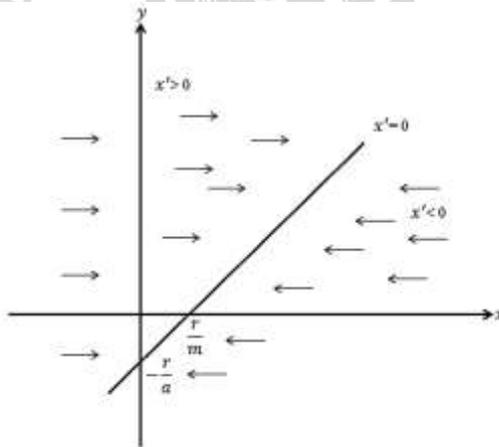
Pada sistem persamaan diferensial nonlinear akan diperoleh dua *nullcline* yaitu *x-nullcline* untuk x' dan *y-nullcline* untuk y' . Sebagai contoh, perhatikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} x' &= ay - mx + r, \\ y' &= bx - ny + s, \end{aligned} \quad (2.12)$$

dengan $a, b, m, n, r, s \in \mathbb{R}^+$.

Dari sistem (2.12) diperoleh *x-nullcline* dan *y-nullcline* berturut-turut

$$y = \frac{m}{a}x - \frac{r}{a}, \quad \text{dan} \quad y = \frac{b}{n}x + \frac{s}{n}$$

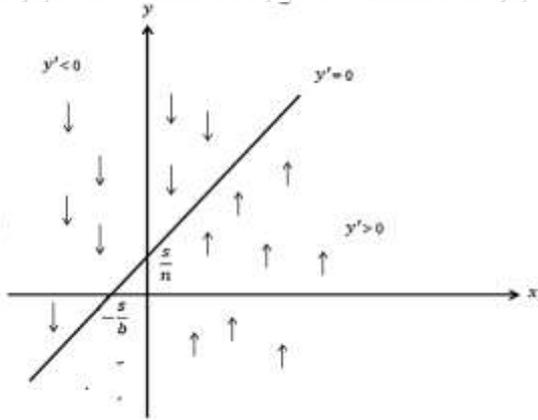


Gambar 2.1 Orbit *x-nullcline*

Pada *x-nullcline*, orbit memiliki arah gerak horizontal, sedangkan pada *y-nullcline*, orbit memiliki arah gerak vertikal. Jika *x-nullcline* telah diperoleh, maka nilai x' bernilai negatif disatu sisi

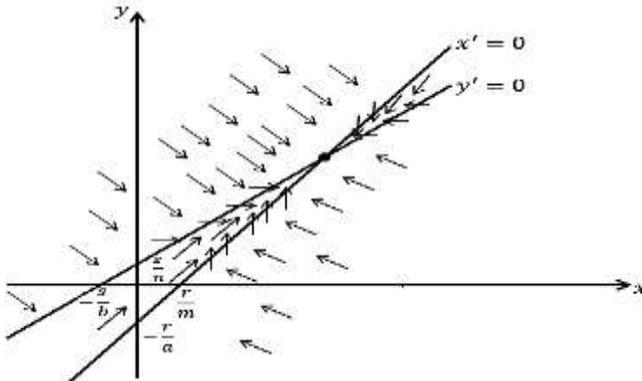


dan akan bernilai positif di sisi lainnya. Oleh karena itu gerak orbit dapat dinyatakan dengan anak panah horizontal, yang mengarah ke kanan apabila $x' > 0$ dan mengarah ke kiri apabila $x' < 0$. (Gambar 2.1)



Gambar 2.2 Orbit y -nullcline

Demikian pula dengan y -nullcline, nilai y' bernilai negatif di satu sisi dan bernilai positif di sisi lainnya. Arah orbit dapat dinyatakan dengan anak panah vertikal, yang mengarah ke atas apabila $y' > 0$ dan mengarah ke bawah apabila $y' < 0$. (Gambar 2.2). Dengan menggunakan resultan kedua anak panah tersebut dapat diketahui arah orbit pada suatu bidang fase seperti gambar berikut.

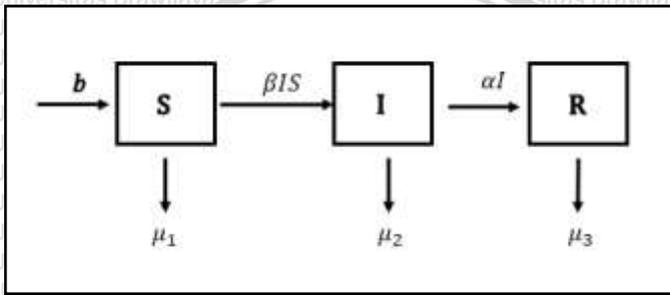


Gambar 2.3 Perpotongan nullclines dan resultan arah orbit (Hasibuan, 1989)



2.5 Model Epidemi

Pada umumnya, model matematika penyebaran penyakit menular dimulai dengan dasar pemikiran yang sama, yaitu dengan membagi populasi menjadi beberapa subpopulasi. Salah satu model yang cukup populer adalah model *SIR*. Model *SIR* membagi populasi menjadi subpopulasi rentan (*S*), terinfeksi (*I*), dan sembuh (*R*). Jumlah individu rentan, terinfeksi, dan sembuh pada waktu *t* secara berturut-turut dapat dituliskan dalam bentuk fungsi *S(t)*, *I(t)*, dan *R(t)*. Kim, dkk. (2013) mengambil model *SIR* untuk mengetahui laju perpindahan penyakit tuberkulosis seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.4 Model kompartemen Kim, dkk. (2013)

Model *SIR* diperoleh dengan menerjemahkan diagram kompartemen pada Gambar 2.1 dalam bentuk model matematika. Model tersebut memiliki enam parameter yang memengaruhi laju pertumbuhan setiap subpopulasi, yaitu $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha, b, \beta$. Parameter μ_1, μ_2, μ_3 menyatakan laju kematian alami pada setiap subpopulasi, parameter α menyatakan laju kesembuhan alami, parameter b menyatakan laju kelahiran, dan parameter β menyatakan laju perpindahan dari subpopulasi rentan menjadi terinfeksi.

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 2.1, diperoleh persamaan model sebagai berikut

$$\begin{aligned} S' &= b - \beta SI - \mu_1 S \\ I' &= \beta SI - \mu_2 I - \alpha I \\ R' &= \alpha I - \mu_3 R, \end{aligned} \tag{2.13}$$



2.6 Angka Reproduksi Dasar

Model epidemi biasanya memiliki nilai batas parameter atau yang biasa dikenal dengan angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Angka reproduksi dasar menyatakan rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi akibat tertular oleh satu individu terinfeksi. Oleh karena itu, angka reproduksi dasar dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu penyakit menyebar atau tidak dalam suatu populasi.

Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka rata-rata individu terinfeksi baru yang disebabkan oleh individu terinfeksi dalam satu periode infeksi adalah kurang dari satu, sehingga infeksi tidak akan menyebar dan perlahan menghilang. Sebaliknya, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ artinya rata-rata individu terinfeksi baru yang tertular oleh individu terinfeksi dalam satu periode infeksi adalah lebih dari satu, sehingga infeksi dapat menyebar.

(Driessche dan Watmough, 2002)

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dapat ditentukan dengan suatu metode yang disebut Matriks Generasi Selanjutnya (*Next Generation Matrix*). Dalam mengonstruksi matriks generasi selanjutnya dilibatkan sub-subpopulasi yang menyebabkan infeksi.

Diberikan $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan $x_i \geq 0$ menyatakan kepadatan individu pada kelas ke- i , $i = 1, 2, \dots, n$ pada saat t . Misalkan proporsi kelas terinfeksi sebesar m dengan $m \leq n$. Didefinisikan \mathcal{F}_i merupakan laju terjadinya infeksi baru pada kelas ke- i dan \mathcal{V}_i menyatakan selisih laju perpindahan individu dari kelas satu ke kelas lain. \mathcal{F}_i merupakan komponen matriks \mathcal{F} dengan $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m)^T$ dan \mathcal{V}_i merupakan komponen matriks \mathcal{V} dengan $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m)^T$.

Matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} merupakan matriks berukuran $m \times m$ yang dinyatakan sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}_i(E^0)}{\partial x_j}, \mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{V}_i(E^0)}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \dots, m$$

dan E^0 adalah titik kesetimbangan bebas infeksi. Matriks generasi selanjutnya dinyatakan sebagai



$$K = FV^{-1}$$

selanjutnya, \mathcal{R}_0 diperoleh dari perhitungan

$$\mathcal{R}_0 = \rho(K)$$

dengan $\rho(K)$ merupakan radius *spectral* matriks K , yaitu modulus maksimal nilai eigen matriks K .

(Breauer dan Chavez, 2010)

Contoh :

Diberikan model epidemik *SIR* dengan S adalah kelas rentan penyakit. I adalah kelas terinfeksi, dan R adalah kelas yang telah sembuh dari penyakit. Model epidemik *SIR* tersebut adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} S' &= b - \beta SI - \mu_1 S \\ I' &= \beta SI - \mu_2 I - \alpha I \\ R' &= \alpha I - \mu_3 R \end{aligned} \quad (2.13)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit model (2.13) adalah $E^0 = \left(\frac{b}{\mu_1}, 0, 0\right)$. Untuk menentukan angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) sistem (2.6), terlebih dahulu disusun \mathcal{F} , yang menyatakan infeksi baru, dan \mathcal{V} , yang menyatakan selisih laju perpindahan individu dari kelas satu ke kelas lain, yaitu

$$\mathcal{F} = [\beta SI], \mathcal{V} = [\mu_2 I + \alpha I].$$

Kelas infeksi adalah I , dengan kata lain $m = 1$. Selanjutnya, diperoleh matriks F dan V dengan mencari turunan parsial entri \mathcal{F}_i dan \mathcal{V}_i yang dinyatakan sebagai berikut

$$F(E^0) = \left[\frac{\beta b}{\mu_1}\right], \quad V(E^0) = [\mu_2 + \alpha].$$

Kemudian, dilakukan pencarian invers matriks $V(E^0)$ sehingga diperoleh

$$V^{-1}(E^0) = \left[\frac{1}{\mu_2 + \alpha}\right].$$



Setelah itu, dilakukan perhitungan matriks generasi selanjutnya

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} \beta b \\ \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 + \alpha \end{bmatrix},$$

$$K = \frac{\beta b}{\mu_1(\mu_2 + \alpha)}$$

Matriks K merupakan matriks generasi selanjutnya berukuran 1 x 1.

Nilai eigen dari matriks K yaitu

$$\lambda = \frac{\beta b}{\mu_1(\mu_2 + \alpha)}$$

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) diperoleh dari radius *spectral* matriks K, yaitu modulus maksimal nilai eigen matriks K, yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta b}{\mu_1(\mu_2 + \alpha)}$$

(Kim, dkk., 2013)

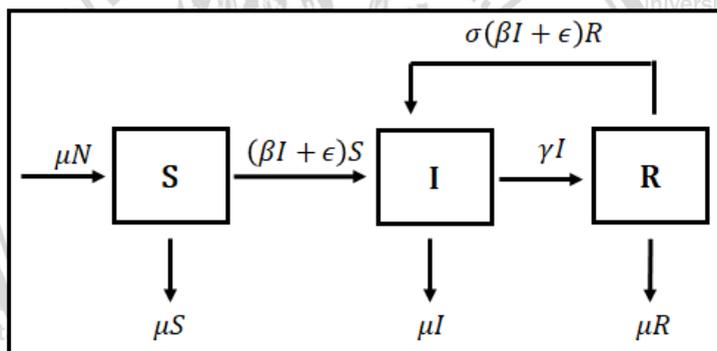


BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model matematika laju penyakit obesitas. Selanjutnya dilakukan analisis dinamik model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dan interpretasinya.

3.1 Konstruksi Model

Model laju obesitas terdiri dari tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi dengan obesitas (I), dan subpopulasi sembuh (R). Model matematika laju obesitas digambarkan dalam diagram kompartemen pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model matematika laju obesitas

Terdapat 5 parameter yang memengaruhi laju pertumbuhan masing-masing subpopulasi, yaitu :

β : laju kontak penularan obesitas karena faktor sosial,

μ : laju individu baru yang mengalami obesitas dan laju individu yang mengalami kematian alami,

ϵ : laju kontak penularan obesitas karena faktor nonsosial,

γ : laju individu terinfeksi obesitas yang mengalami kesembuhan,

σ : faktor relatif individu sembuh kembali menjadi individu terinfeksi obesitas



3.1.1 Laju perubahan subpopulasi rentan (S)

Berdasarkan Gambar 3.1 bertambahnya jumlah subpopulasi rentan (S) dipengaruhi oleh individu yang memasuki subpopulasi rentan dengan laju μN . Adanya interaksi sosial antara individu rentan dengan individu terinfeksi menyebabkan individu pada subpopulasi rentan (S) berkurang dengan laju transmisi $-\beta IS$. Selain itu, berkurangnya subpopulasi rentan (S) juga dipengaruhi oleh faktor nonsosial dengan laju $-\epsilon S$. Selanjutnya, berkurangnya subpopulasi rentan dikarenakan individu yang mengalami kematian alami dengan laju sebesar $-\mu S$.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi rentan per satuan waktu adalah

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - (\beta I + \epsilon)S. \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju perubahan subpopulasi dengan obesitas (I)

Pada skripsi ini, individu yang telah mengalami perubahan berat badan menjadi obesitas sesuai perhitungan IMT dipandang sebagai individu berstatus terinfeksi. Berdasarkan Gambar 3.1, bertambahnya jumlah subpopulasi terinfeksi (I) dipengaruhi oleh perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi obesitas akibat faktor sosial dengan laju βIS dan faktor nonsosial dengan laju ϵS . Selain itu, bertambahnya jumlah subpopulasi terinfeksi dipengaruhi oleh individu sembuh yang kembali menjadi individu terinfeksi obesitas akibat faktor sosial dengan laju $\sigma \beta IR$ dan faktor nonsosial dengan laju $\sigma \epsilon R$.

Individu terinfeksi obesitas yang mengalami kesembuhan menyebabkan berkurangnya subpopulasi terinfeksi dengan laju $-\gamma I$. Selanjutnya, laju berkurangnya subpopulasi terinfeksi dikarenakan individu yang mengalami kematian alami adalah $-\mu I$.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi terinfeksi per satuan waktu adalah

$$\frac{dI}{dt} = (\beta I + \epsilon)S + \sigma(\beta I + \epsilon)R - \gamma I - \mu I. \quad (3.2)$$



3.1.3 Laju perubahan subpopulasi sembuh (R)

Berdasarkan Gambar 3.1 bertambahnya jumlah subpopulasi sembuh (R) dipengaruhi oleh perubahan individu terinfeksi yang mengalami kesembuhan dengan laju γI . Adanya individu sembuh yang kembali menjadi individu terinfeksi menyebabkan berkurangnya subpopulasi sembuh yang diakibatkan faktor sosial dengan laju $-\sigma\beta IR$ dan faktor nonsosial dengan laju $-\sigma\epsilon R$. Selanjutnya, laju berkurangnya subpopulasi sembuh dikarenakan individu yang mengalami kematian alami adalah $-\mu R$.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi sembuh per satuan waktu adalah

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \sigma(\beta I + \epsilon)R - \mu R. \quad (3.3)$$

Berdasarkan uraian tersebut, model berbentuk sistem *autonomous* nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S' &= \mu N - \mu S - (\beta I + \epsilon)S, \\ I' &= (\beta I + \epsilon)S + \sigma(\beta I + \epsilon)R - \gamma I - \mu I, \\ R' &= \gamma I - \sigma(\beta I + \epsilon)R - \mu R, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan $S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0$, semua parameter bernilai positif, $\sigma > 1$ karena resiko untuk kembali menjadi individu obesitas sangat tinggi, dan total individu dalam populasi dinyatakan sebagai $N = S + I + R$.

Sistem (3.4) dapat direduksi menjadi sistem dua dimensi dengan mengeliminasi subpopulasi S . Dengan menggunakan $N = S + I + R$, maka diperoleh sistem dua dimensi dalam variabel IR yaitu

$$I' = (\beta I + \epsilon)(N - I - R) + \sigma(\beta I + \epsilon)R - (\gamma + \mu)I, \quad (3.5a)$$

$$R' = \gamma I - \sigma(\beta I + \epsilon)R - \mu R. \quad (3.5b)$$

Daerah invarian positif untuk persamaan (3.5) adalah

$$\Delta = \{(I, R) \in \mathbb{R}_+^2 : I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N\}.$$



Pada skripsi ini dilakukan analisis terhadap sistem (3.5) dengan memandang dua kasus, yaitu

1. Kasus ketika laju penularan obesitas hanya dipengaruhi oleh faktor sosial ($\epsilon = 0$), dan
2. Kasus ketika laju penularan obesitas dipengaruhi oleh faktor sosial dan faktor nonsosial ($\epsilon > 0$).

3.2 Analisis Dinamik Kasus $\epsilon = 0$

Pada kasus ini, sistem (3.5) menjadi

$$I' = \beta I(N - I - R) + \sigma \beta IR - (\gamma + \mu)I, \quad (3.6a)$$

$$R' = \gamma I - \sigma \beta IR - \mu R. \quad (3.6b)$$

3.2.1 Titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (3.6) diperoleh ketika

$$I' = R' = 0,$$

yaitu

$$I[\beta(N - I - R) + \sigma \beta R - (\gamma + \mu)] = 0, \quad (3.7a)$$

$$\gamma I - \sigma \beta IR - \mu R = 0. \quad (3.7b)$$

Dari persamaan (3.7a) diperoleh dua kemungkinan, yaitu $I = 0$ atau

$$\beta(N - I - R) + \sigma \beta R - (\gamma + \mu) = 0. \quad (3.8)$$

Jika $I = 0$, maka dari persamaan (3.7b) diperoleh $R = 0$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan

$$E_0 = (I_0, R_0) = (0, 0).$$

Titik kesetimbangan E_0 merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit.

Berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit yang telah diperoleh, selanjutnya ditentukan angka reproduksi dasar dengan menggunakan matriks yang disusun dari \mathcal{F} , yang menyatakan infeksi baru, dan \mathcal{V} , yang menyatakan selisih laju perpindahan individu dari kelas satu ke kelas lain, yaitu



$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta I(N - I - R) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\gamma + \mu)I - \sigma \beta IR \\ \sigma \beta IR + \mu R - \gamma I \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, diperoleh matriks F dan V dengan mencari turunan parsial entri \mathcal{F}_i dan \mathcal{V}_i di titik E_0 , yaitu

$$F(E_0) = \begin{bmatrix} \beta N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dan

$$V(E_0) = \begin{bmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \mu \end{bmatrix}.$$

Kemudian, ditentukan invers matriks $V(E_0)$, yaitu

$$V^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma + \mu} & 0 \\ \frac{\gamma}{\mu(\gamma + \mu)} & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}.$$

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) diperoleh dari radius spektral matriks K , dengan

$$\begin{aligned} K &= FV^{-1}, \\ &= \begin{bmatrix} \beta N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma + \mu} & 0 \\ \frac{\gamma}{\mu(\gamma + \mu)} & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \beta N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nilai eigen matriks K adalah

$$\lambda_1 = \frac{\beta N}{\gamma + \mu} \text{ dan } \lambda_2 = 0,$$

sehingga radius spektral matriks K adalah λ_1 . Dengan demikian

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma + \mu}.$$



Jika $I \neq 0$, maka dari persamaan (3.8) diperoleh

$$R(\sigma\beta - \beta) = \gamma + \mu - \beta(N - I),$$

$$R = \frac{\gamma + \mu - \beta(N - I)}{\beta(\sigma - 1)}.$$

Dari persamaan (3.7b) diperoleh

$$R = \frac{\gamma I}{\sigma\beta I + \mu} \quad (3.9)$$

Akibatnya

$$\frac{\gamma + \mu - \beta(N - I)}{\beta(\sigma - 1)} = \frac{\gamma I}{\sigma\beta I + \mu},$$

$$[\gamma + \mu - \beta(N - I)][\sigma\beta I + \mu] = \gamma I\beta(\sigma - 1),$$

$$[\gamma + \mu - \beta N + \beta I][\sigma\beta I + \mu] - \gamma I\beta(\sigma - 1) = 0.$$

Perhitungan titik kesetimbangan endemik dapat dilihat lebih detail pada Lampiran 1. Berdasarkan Lampiran 1, diperoleh persamaan kuadrat

$$aI^2 + bI + c = 0, \quad (3.10)$$

dengan

$$a = \sigma\beta^2,$$

$$b = \sigma\beta(\gamma + \mu) \left(\frac{\mu}{\gamma + \mu} + \frac{1}{\sigma} - \mathcal{R}_0 \right), \quad (3.11)$$

$$c = \mu(\gamma + \mu)(1 - \mathcal{R}_0).$$

Persamaan (3.10) memiliki akar real jika $D = b^2 - 4ac \geq 0$

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$= \sigma^2\beta^2(\gamma + \mu)^2 \left(\frac{\mu}{\gamma + \mu} + \frac{1}{\sigma} - \mathcal{R}_0 \right)^2 - 4\sigma\beta^2\mu(\gamma + \mu)(1 - \mathcal{R}_0) \geq 0.$$

Jika $\mathcal{R}_0 \geq 1$, maka $D \geq 0$. Apabila $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $c < 0$, sehingga diperoleh satu akar real positif $E_1^* = (I_1^*, R_1^*)$ karena $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{c}{a} <$

0 . Jika $\mathcal{R}_0 = 1$ maka diperoleh $I = 0$ atau $= -\frac{b}{a}$. Jika $I = 0$ maka diperoleh titik E_0 , sedangkan jika $I = -\frac{b}{a}$ maka $I > 0$ ketika $b < 0$



dan b bernilai negatif apabila $\mathcal{R}_0 > \frac{\mu}{\gamma + \mu} + \frac{1}{\sigma}$ ekuivalen dengan $\frac{\mu}{\gamma + \mu} + \frac{1}{\sigma} < 1$. Diperoleh titik endemik $E_2^* = (I_2^*, R_2^*)$ untuk kasus $\mathcal{R}_0 = 1$. Jadi, jika $\mathcal{R}_0 \geq 1$ maka persamaan (3.10) memiliki dua akar real positif I_1^* dan I_2^* . Jadi, diperoleh titik endemik $E_1^* = (I_1^*, R_1^*)$ dan $E_2^* = (I_2^*, R_2^*)$ dengan I^* merupakan akar real positif persamaan (3.10) dan R^* diperoleh dari persamaan (3.9).

3.2.2 Analisis kestabilan titik kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dilakukan melalui proses linearisasi terhadap sistem (3.6) dan dihasilkan matriks Jacobi

$$J(I, R) = \begin{bmatrix} \beta N - (\gamma + \mu) - 2\beta I + (\sigma - 1)\beta R & (\sigma - 1)\beta I \\ \gamma - \sigma\beta R & -\sigma\beta I - \mu \end{bmatrix}$$

3.2.2.1 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas obesitas

Matriks Jacobi di titik $E_0 = (0, 0)$ adalah

$$J_0 = \begin{bmatrix} \beta N - (\gamma + \mu) & 0 \\ \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

yang memiliki nilai eigen

$$\lambda_1 = -\mu < 0 \text{ dan } \lambda_2 = \beta N - (\gamma + \mu) = -(\gamma + \mu)(1 - \mathcal{R}_0).$$

Perhatikan bahwa λ_2 bernilai negatif jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas obesitas sistem (3.6) bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

3.2.2.2 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik

Titik kesetimbangan endemik $E^* = (I^*, R^*)$ diperoleh dari persamaan (3.8) dan (3.7b) sehingga

$$(\sigma - 1)\beta R^* = \beta I^* - \beta N + (\gamma + \mu), \quad (3.12a)$$

$$\mu R^* = \gamma I^* - \sigma\beta I R^*. \quad (3.12b)$$



Persamaan (3.12a) dapat ditulis sebagai

$$\beta N - (\gamma + \mu) - 2\beta I^* + (\sigma - 1)\beta R^* = -\beta I^*.$$

Selain itu, bila persamaan (3.12) dikalikan dengan $\frac{I^*}{R^*}$ diperoleh

$$(\sigma - 1)\beta I^* = \frac{I^*}{R^*}(\beta I^* - \beta N + \gamma + \mu).$$

Berdasarkan persamaan (3.12b) diperoleh

$$\gamma - \sigma\beta R = \mu \frac{R^*}{I^*}.$$

Akibatnya, matriks Jacobi di titik $E^* = (I^*, R^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J^* = \begin{bmatrix} -\beta I^* & (\beta I^* + (\gamma + \mu)(1 - \mathcal{R}_0)) \frac{I^*}{R^*} \\ \mu \frac{R^*}{I^*} & -\sigma\beta I^* - \mu \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [Tr(J^*) \pm \sqrt{(Tr(J^*))^2 - 4 \det(J^*)}], \quad (3.13)$$

dengan

$$Tr(J^*) \equiv -[\beta(\sigma + 1)I^* + \mu], \quad (3.14)$$

dan

$$\det(J^*) \equiv aI^* - c. \quad (3.15)$$

Karena I^* eksis ketika $\mathcal{R}_0 \geq 1$, maka $c \leq 0$, sehingga

$$\det(J^*) \equiv aI^* - c \geq 0.$$

Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ $Tr(J^*) < 0$ dan $\det(J^*) > 0$, maka titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik lokal. Ketika $\mathcal{R}_0 = 1$ atau



$\det(J^*) = 0$ menunjukkan bahwa ada nilai eigen bernilai 0, dengan demikian analisis kestabilan linearisasi belum memberikan kesimpulan dan kestabilan dapat dilihat secara numerik.

3.2.2.3 Analisis kestabilan global menggunakan Kriteria Dulac

Untuk melakukan analisis kestabilan global titik kesetimbangan E_0 , dapat dilakukan dengan memperhatikan keberadaan orbit periodik yang dapat diperiksa dengan menggunakan Kriteria Dulac. Didefinisikan fungsi Dulac untuk sistem (3.6)

$$\Phi(I, R) = \frac{1}{IR}.$$

Dalam hal ini, $P(I, R) = \beta I(N - I - R) + \sigma \beta IR - (\gamma + \mu)I$ dan $Q(I, R) = \gamma I - \sigma \beta IR - \mu R$, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Phi P(I, R))}{\partial I} &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta I(N - I - R) + \sigma \beta IR - (\gamma + \mu)I}{IR} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta N - \beta I - \beta R + \sigma \beta R - (\gamma + \mu)}{R} \right), \\ &= -\frac{\beta}{R} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Phi Q(I, R))}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\gamma I - \sigma \beta IR - \mu R}{IR} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\gamma}{R} - \sigma \beta - \frac{\mu}{I} \right), \\ &= -\frac{\gamma}{R^2} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{\partial(\Phi P(I, R))}{\partial I} + \frac{\partial(\Phi Q(I, R))}{\partial R} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\gamma}{R^2}.$$



Oleh karena $\frac{\partial(\Phi P(I,R))}{\partial I} + \frac{\partial(\Phi Q(I,R))}{\partial R} < 0$ berada pada daerah Δ , maka berdasarkan Kriteria Dulac, sistem (3.12) tidak memiliki orbit periodik pada daerah tersebut. Pada kasus $\mathcal{R}_0 < 1$, E^* tidak eksis sehingga satu-satunya titik kesetimbangan adalah E_0 . Karena tidak ada orbit periodik pada daerah Δ , maka berdasarkan teorema Poincare Bendixson Dulac, E_0 stabil asimtotik global.

3.2.2.4 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik menggunakan fungsi Lyapunov

Untuk melakukan analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik $E^* = (I^*, R^*)$, didefinisikan suatu fungsi Lyapunov

$$V(I, R) = \mu \left(\ln \frac{I}{I^*} + \frac{I^*}{I} - 1 \right) + \beta(\sigma - 1) \left(R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*} \right),$$

pada $\Omega = \{(I, R) \in \mathbb{R}_0^2 : I > 0, R > 0\}$. Akan ditunjukkan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat untuk titik $E^* = (I^*, R^*)$ dengan memeriksa apakah $V(t)$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.3.

- i. $V(\vec{x}^*) = 0$,
 Jelas bahwa pada titik $E^* = (I^*, R^*)$ diperoleh $V(E^*) = 0$.
- ii. $V(\vec{x}) > 0, \forall(\vec{x}) \neq \vec{x}^* \in W$.
 Akan diperiksa apakah $V(I, R) > 0, \forall(I, R) \neq (I^*, R^*)$.

Misal $g(I) = \ln \frac{I}{I^*} + \frac{I^*}{I} - 1$ dan $g(I)$ terdefinisi pada $I \in \mathbb{R}^+$. Turunan pertama $g(I)$ adalah $g'(I) = \frac{1}{I} - \frac{I^*}{I^2} = \frac{I - I^*}{I^2}$, dengan $I \in (0, \infty)$. Titik stasioner $g(I)$ diperoleh ketika $g'(I) = 0$, yaitu ketika $I = I^*$, dengan $g(I^*) = 0$. Jika $I \in (0, I^*)$ maka $g'(I) < 0$, sedangkan jika $I \in (I^*, \infty)$ maka $g'(I) > 0$. Hal ini berarti, $g(I)$ monoton turun pada selang $(0, I^*)$ dan monoton naik pada selang (I^*, ∞) . Berdasarkan uraian tersebut, jelas bahwa titik $(I^*, 0)$ merupakan titik minimum $g(I)$. Karena 0 merupakan nilai minimum $g(I)$ maka $g(I) > 0, \forall I \neq I^* \in W$.

Kemudian, misal $g(R) = R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*}$ dan $g(R)$ terdefinisi pada $R \in \mathbb{R}^+$. Turunan pertama $g(R)$ yaitu $g'(R) = 1 -$



$\frac{R^*}{R}$, dengan $R \in (0, \infty)$. Titik stasioner $g(R)$ diperoleh ketika $g'(R) = 0$. Nilai x yang memenuhi adalah ketika $R = R^*$, dengan $g(R^*) = 0$. Jika $R \in (0, R^*)$ maka berlaku $g'(R^*) < 0$, sedangkan jika $R \in (R^*, \infty)$ maka berlaku $g'(R^*) > 0$. Hal ini berarti, $g(R)$ monoton turun pada selang $(0, R^*)$ dan monoton naik pada selang (R^*, ∞) . Berdasarkan uraian tersebut, jelas bahwa titik $(R^*, 0)$ merupakan titik minimum $g(R)$. Karena 0 merupakan nilai minimum $g(R)$ maka pasti berlaku $g(R) > 0, \forall R \neq R^* \in W$.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat dibuktikan bahwa $V(I, R) > 0$, dan berdasarkan i dan ii dapat ditunjukkan bahwa $V(t)$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.3. Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah $V(t)$ memenuhi Definisi 2.4, yaitu $V'(\vec{x}) < 0, \forall(\vec{x}) \neq \vec{x}^*$. Turunan fungsi Lyapunov V terhadap t adalah

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dI} \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dR} \frac{dR}{dt}, \\ &= \frac{dV_i}{dt} + \frac{dV_r}{dt}. \end{aligned}$$

Misalkan $V_i = \ln \frac{I}{I^*} + \frac{I^*}{I} - 1$, dan dengan menggunakan $\beta N - (\gamma + \mu) = \beta I^* - \beta(\sigma - 1)R^*$ dari persamaan (3.12a), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &= \frac{dV}{dI} \frac{dI}{dt} \\ &= \left[\frac{d}{dI} \left(\ln \frac{I}{I^*} + \frac{I^*}{I} - 1 \right) \right] [\beta I(N - I - R) + \sigma \beta I R - (\gamma + \mu)I], \\ &= \left[\frac{1}{I} - \frac{I^*}{I^2} \right] [I(\beta N - \beta I + \beta(\sigma - 1)R - (\gamma + \mu))], \\ &= \left[1 - \frac{I^*}{I} \right] [I(\beta I^* - \beta(\sigma - 1)R^* - \beta I + \beta(\sigma - 1)R)], \\ &= \beta I^* \left[1 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} + 1 \right] + \beta(\sigma - 1)R^* \left[-1 + \frac{R}{R^*} + \frac{I^*}{I} - \frac{RI^*}{R^*I} \right], \\ &= \beta I^* \left[2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right] + \beta(\sigma - 1)R^* \left[\frac{R}{R^*} - 1 - \frac{I^*R}{IR^*} + \frac{I^*}{I} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Kemudian, misalkan $V_r = R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*}$, dan dengan menggunakan $\gamma = \sigma \beta R^* + \mu \left(\frac{R^*}{I^*} \right)$ dari persamaan (3.12b) maka diperoleh



$$\begin{aligned}
 \frac{dV_r}{dt} &= \frac{dV}{dR} \frac{dR}{dt}, \\
 &= \left[\frac{d}{dR} (R - R^* - R^* \ln R + R^* \ln R^*) \right] [\gamma I - \sigma \beta IR - \mu R], \\
 &= \left[1 - \frac{R^*}{R} \right] [\gamma I - \sigma \beta IR - \mu R], \\
 &= \left[1 - \frac{R^*}{R} \right] \left[I \left(\sigma \beta R^* + \mu \left(\frac{R^*}{R} \right) \right) - \sigma \beta IR - \mu R \right], \\
 &= \left[1 - \frac{R^*}{R} \right] \left[\sigma \beta IR^* + \mu \left(\frac{R^* I}{R} \right) - \sigma \beta IR - \mu R \right], \\
 &= 2\sigma \beta IR^* - \sigma \beta IR - \mu R + \mu R^* + \mu \frac{R^* I}{R} - \frac{\sigma \beta IR^* I}{R} - \frac{\mu R^* I}{R}, \\
 &= \sigma \beta IR^* \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \mu R^* \left(1 - \frac{R}{R^*} + \frac{I}{R^*} - \frac{R^* I}{R^* R} \right). \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Perhitungan analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik untuk kasus $\epsilon = 0$ dapat dilihat pada Lampiran 1. Berdasarkan persamaan (3.16) dan (3.17) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \mu \frac{dV_i}{dt} + \beta(\sigma - 1) \frac{dV_r}{dt}, \\
 &= \mu(\gamma + \mu)(\mathcal{R}_0 - 1) \left(2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right) + \sigma \beta^2 IR^*(\sigma - 1) \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \mu \beta R^*(\sigma - 1) \left[2 - \frac{RI^*}{R^* I} - \frac{R^* I}{I^* R} \right]. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $(I - I^*)^2 = I^2 - 2II^* + I^{*2} \geq 0$, sehingga $I^2 + I^{*2} \geq 2II^*$, akibatnya $\frac{I^2 + I^{*2}}{II^*} \geq 2$ ekuivalen dengan $2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \leq 0$,

Selanjutnya, perhatikan bahwa $(R^* - R)^2 = R^{*2} - 2RR^* + R^2 \geq 0$, sehingga $R^2 + R^{*2} \geq 2RR^*$, akibatnya $\frac{R^2 + R^{*2}}{RR^*} \geq 2$ ekuivalen dengan $2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \leq 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan $2 - \frac{RI^*}{R^* I} - \frac{R^* I}{I^* R} \leq 0$ dengan menggunakan Ketaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri seperti pada subbab 2.3. Dimisalkan

$$\frac{I}{I^*} = x \text{ dan } \frac{R}{R^*} = y,$$



sehingga diperoleh

$$2 - \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right).$$

Berdasarkan Teorema 2.2 dapat diperoleh

$$\frac{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}},$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2.$$

sehingga jelas terbukti $2 - \frac{RI^*}{R^*I} - \frac{R^*I}{I^*R} \leq 0$.

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $\frac{dV}{dt} < 0, \forall (I, R) \neq (I^*, R^*)$. Oleh karena itu, $V(t)$ memenuhi Definisi 2.4 dan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat, sehingga titik kesetimbangan endemik E^* bersifat stabil asimtotik global pada daerah Δ .

3.3 Analisis Dinamik Kasus $\epsilon > 0$

Pada kasus ini, penularan obesitas hanya dipengaruhi faktor sosial dan nonsosial, untuk itu $\epsilon > 0$.

3.3.1 Titik kesetimbangan

Pada kasus $\epsilon > 0$, sulit dilakukan perhitungan titik kesetimbangan secara analitik. Untuk itu, dilakukan analisis geometri untuk memperoleh titik kesetimbangan berdasarkan titik potong *nullcline* sistem (3.5). Perhitungan mencari *nullcline* sistem (3.5) dapat dilihat pada Lampiran 2. Berdasarkan sistem (3.5) diperoleh *nullcline*

$$G_1(I) = \frac{\beta I^2 - (\beta N - \epsilon - \gamma - \mu)I - \epsilon N}{\beta(\sigma - 1)I + \epsilon(\sigma - 1)}, \quad (3.19)$$

$$G_2(I) = \frac{\gamma I}{\sigma \beta I + \sigma \epsilon + \mu}. \quad (3.20)$$



Persamaan (3.19) dapat ditulis sebagai

$$G_1(I) = \frac{\beta I^2 - (\beta N - \epsilon - \gamma - \mu)I - \epsilon N}{(\sigma - 1)(\beta I + \epsilon)},$$

sehingga dapat ditentukan bahwa asimtot tegak dari persamaan tersebut adalah $I = -\frac{\epsilon}{\beta}$. Kemudian, persamaan (3.20) memiliki pangkat pembilang dan penyebut yang sama, sehingga dapat ditentukan bahwa asimtot datar dari persamaan tersebut adalah $R = \frac{\gamma}{\sigma\beta}$. Selanjutnya, dilakukan analisis kemonotonan dan kecekungan persamaan (3.19) dan (3.20).

Perhitungan analisis kemonotonan dan kecekungan persamaan (3.19) dan (3.20) dapat dilihat pada Lampiran 2. Berdasarkan persamaan (3.19) diperoleh

$$G_1'(I) = \frac{1}{(\sigma-1)} \frac{\beta^2 I^2 + 2\epsilon\beta I + \epsilon + \gamma + \mu}{(\beta I + \epsilon)^2}, \quad (3.21)$$

$$G_1''(I) = -\frac{2}{(\sigma-1)} \frac{[\epsilon\beta(1-\epsilon) + \beta\gamma + \beta\mu]}{(\beta I + \epsilon)^3}. \quad (3.22)$$

Pada persamaan (3.21) ditunjukkan bahwa $G_1'(I)$ bernilai positif atau $G_1'(I) > 0$. Hal ini berarti kurva $G_1(I)$ monoton naik. Kemudian pada persamaan (3.22) ditunjukkan bahwa $G_1''(I)$ bernilai negatif atau $G_1''(I) < 0$. Hal ini berarti bahwa kurva $G_1(I)$ cekung ke bawah.

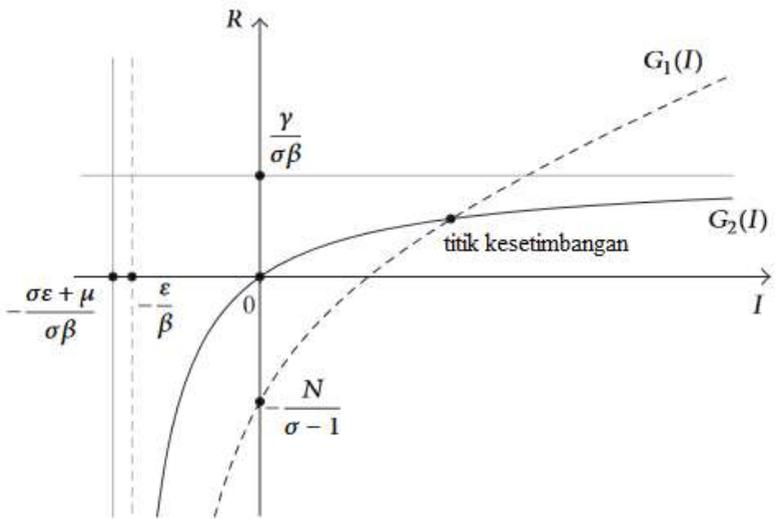
Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.22) diperoleh

$$G_2'(I) = \frac{\gamma\sigma\epsilon + \gamma\mu}{(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)^2}, \quad (3.23)$$

$$G_2''(I) = -\frac{\gamma\sigma\epsilon + \gamma\mu(2(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)(\sigma\beta))}{(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)^4}. \quad (3.24)$$

Pada persamaan (3.23) ditunjukkan bahwa $G_2'(I)$ bernilai positif atau $G_2'(I) > 0$. Hal ini berarti kurva $G_2(I)$ monoton naik. Kemudian pada persamaan (3.24) ditunjukkan bahwa $G_2''(I)$ bernilai negatif atau $G_2''(I) < 0$. Hal ini berarti bahwa kurva $G_2(I)$ cekung ke bawah.





Gambar 3.2 Skema perpotongan $G_1(I)$ dan $G_2(I)$

Berdasarkan analisis kemonotonan dan kecekungan persamaan (3.19) dan (3.20), diperoleh bahwa $G_1(I)$ dan $G_2(I)$ berpotongan pada satu titik kesetimbangan pada kuadran pertama yang ditunjukkan seperti pada Gambar 3.2. Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik ada dan bersifat unik pada daerah Δ .

Selanjutnya, dilakukan analisis medan arah untuk menunjukkan bahwa titik hasil perpotongan *nullcline* $G_1(I)$ dan $G_2(I)$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan persamaan (3.19)

$$R = G_1(I) = \frac{\beta I^2 - (\beta N - \epsilon - \gamma - \mu)I - \epsilon N}{\beta(\sigma - 1)I + \epsilon(\sigma - 1)},$$

$$\frac{dI}{dt} = -\beta I^2 + (\beta N - \epsilon - \gamma - \mu)I + \epsilon N + \beta(\sigma - 1)IR + \epsilon(\sigma - 1)R.$$



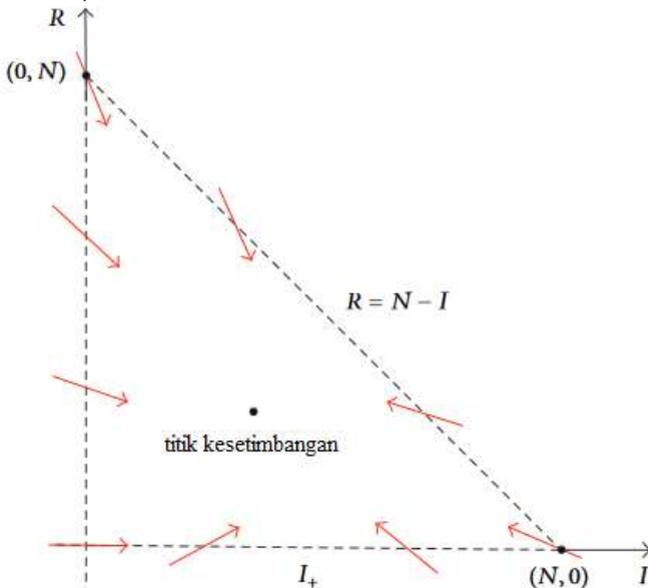
Pada sumbu R , $I = 0$ maka $\frac{dI}{dt} = \epsilon(N + (\sigma - 1)R)$, yang bernilai positif saat $R > -\frac{N}{\sigma-1}$, dan negatif saat $R < -\frac{N}{\sigma-1}$. Dengan demikian, $\frac{dR}{dt}$ menuju arah horizontal ke kanan saat $R > -\frac{N}{\sigma-1}$, dan horizontal ke kiri saat $R < -\frac{N}{\sigma-1}$.

Berdasarkan persamaan (3.20)

$$R = G_2(I) = \frac{\gamma I}{\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu'}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \sigma(\beta I + \epsilon)R - \mu R.$$

Pada sumbu I , $R = 0$ maka $\frac{dR}{dt} = \gamma I$, yang bernilai positif saat $I > 0$, dan negatif saat $I < 0$. Dengan demikian, $\frac{dR}{dt}$ menuju vertikal ke atas saat $I > 0$, dan vertikal ke bawah saat $I < 0$.



Gambar 3.3 Resultan medan arah x -nullcline dan y -nullcline

Berdasarkan analisis kemonotonan dan kecekungan persamaan (3.19) dan (3.20), diperoleh bahwa $G_1(I)$ dan $G_2(I)$ berpotongan pada satu titik kesetimbangan pada kuadran pertama yang



ditunjukkan seperti pada Gambar 3.2. Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik ada dan bersifat unik pada daerah Δ .

3.3.2 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik menggunakan Kriteria Dulac

Untuk melakukan analisis kestabilan global sistem (3.5) dapat dilakukan dengan memperhatikan orbit periodik. Keberadaan orbit periodik dapat ditunjukkan dengan menggunakan Kriteria Dulac, dengan fungsi Dulac

$$\Phi(I, R) = \frac{1}{I}$$

Diambil $P(I, R) = (\beta I + \epsilon)(N - I - R) + \sigma(\beta I + \epsilon)R - (\gamma + \mu)I$ dan $Q(I, R) = \gamma I - \sigma(\beta I + \epsilon)R - \mu R$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Phi P(I, R))}{\partial I} &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{(\beta I + \epsilon)(N - I - R) + \sigma(\beta I + \epsilon)R - (\gamma + \mu)I}{I} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta I(N - (I + R)) + \epsilon(N - (I + R)) + \sigma(\beta I + \epsilon)R - (\gamma + \mu)I}{I} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\beta(N - (I + R)) + \frac{\epsilon(N - (I + R))}{I} + \sigma\beta R + \frac{\epsilon R}{I} - (\gamma + \mu) \right), \\ &= -\frac{\epsilon(N - (I + R))}{I^2} - \left(\beta + \frac{\epsilon}{I} \right) - \frac{\sigma\epsilon R}{I^2}, \\ \frac{\partial(\Phi Q(I, R))}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\gamma I - \sigma(\beta I + \epsilon)R - \mu R}{I} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\gamma - \sigma\beta R - \frac{\sigma\epsilon R - \mu R}{I} \right), \\ &= -\sigma \left(\beta + \frac{\epsilon}{I} \right) - \frac{\mu}{I}. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{\partial(\Phi P(I, R))}{\partial I} + \frac{\partial(\Phi Q(I, R))}{\partial R} = -\frac{\epsilon(N - (I + R))}{I^2} - \left(\beta + \frac{\epsilon}{I} \right) - \frac{\sigma\epsilon R}{I^2} - \sigma \left(\beta + \frac{\epsilon}{I} \right) - \frac{\mu}{I}.$$



Oleh karena $\frac{\partial(\Phi P(I,R))}{\partial I} + \frac{\partial(\Phi Q(I,R))}{\partial R} < 0$ berada pada daerah Δ , maka berdasarkan Kriteria Dulac, sistem (3.5) tidak memiliki orbit periodik pada daerah tersebut. Maka dari itu, sistem (3.5) bersifat stabil asimtotik global pada daerah Δ .

3.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini ditunjukkan hasil simulasi yang diperoleh menggunakan metode Runge Kutta orde 4 untuk mengilustrasikan hasil analisis yang diperoleh. Hasil simulasi ditunjukkan dengan potret fase.

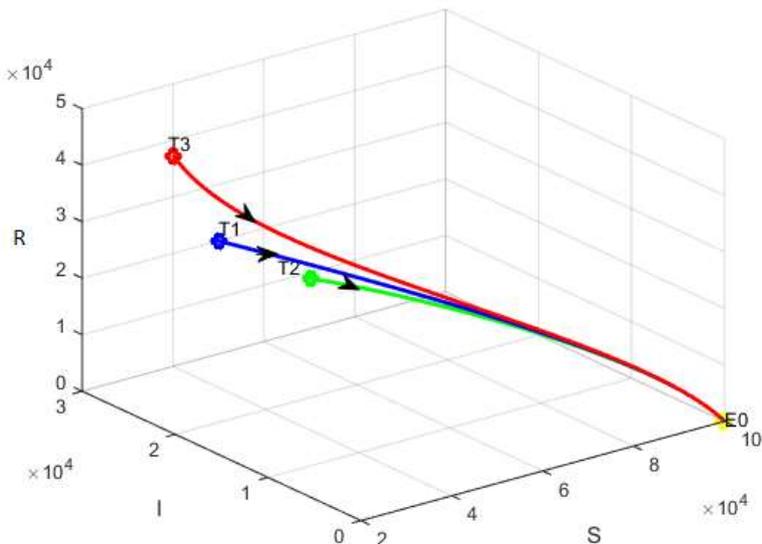
3.4.1 Simulasi numerik kasus $\epsilon = 0$

3.4.1.1 Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $N = 100000$, $\mu = \frac{1}{69.4}$, $\beta = 1.27 \times 10^{-7}$, $\epsilon = 0$, $\sigma = 8$, dan $\gamma = \frac{1}{35.8}$, sehingga diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0.3$. Dengan menggunakan $N = S + I + R$, maka diperoleh $S_0 = 100000$. Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan bebas obesitas $E_0 = (100000, 0, 0)$. Titik kesetimbangan endemik E^* tidak eksis karena tidak memenuhi kondisi $D > 0$. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa nilai awal, yaitu $T1 = (50000, 30000, 20000)$, $T2 = (60000, 25000, 15000)$, dan $T3 = (32000, 26000, 42000)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.4.

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa dengan nilai-nilai awal yang diberikan, orbit solusi menuju titik kesetimbangan bebas obesitas E_0 . Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa titik kesetimbangan bebas obesitas $E_0 = (100000, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal karena $\mathcal{R}_0 < 1$.





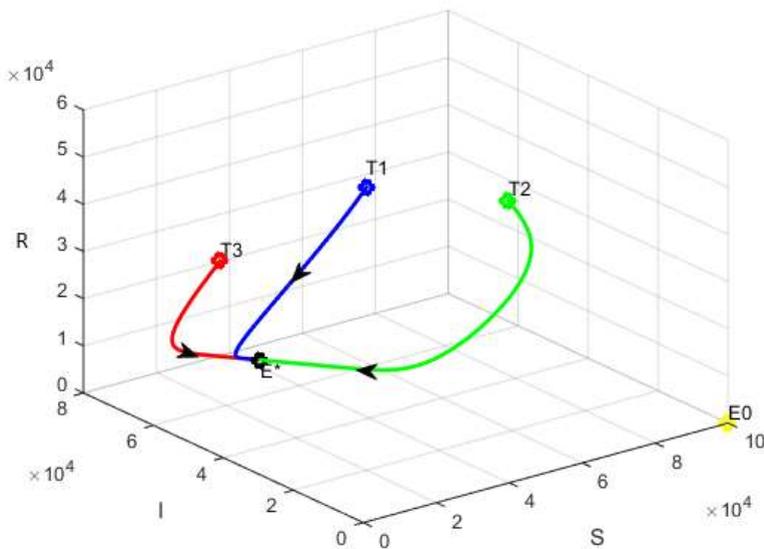
Gambar 3.4 Potret fase $\mathcal{R}_0 < 1$ kasus $\epsilon = 0$

3.4.1.2 Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $N = 100000$, $\mu = \frac{1}{69.4}$, $\beta = 5.08 \times 10^{-7}$, $\epsilon = 0$, $\sigma = 8$, dan $\gamma = \frac{1}{35.8}$, sehingga diperoleh $\mathcal{R}_0 = 1.2$. Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan bebas obesitas $E_0 = (100000, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (31331.47, 62166.12, 6502.41)$. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa nilai awal, yaitu $T1 = (50000, 30000, 20000)$, $T2 = (40000, 300, 59700)$, dan $T3 = (12000, 53489, 34511)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.5.

Gambar 3.5 menunjukkan bahwa dengan nilai-nilai awal yang diberikan, orbit solusi menuju titik ketimbangan endemik E_1^* . Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (31331.47, 62166.12, 6502.41)$ bersifat stabil asimtotik global karena $\mathcal{R}_0 > 1$.





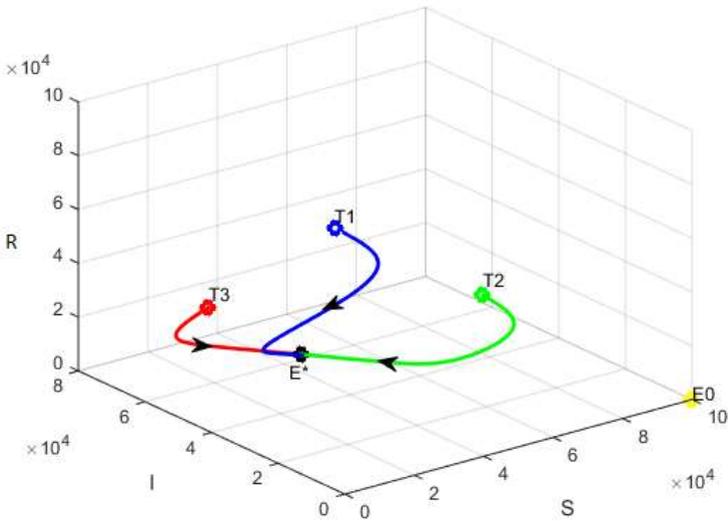
Gambar 3.5 Potret fase $\mathcal{R}_0 > 1$ kasus $\epsilon = 0$

3.4.1.3 Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 = 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $N = 100000$, $\mu = \frac{1}{69.4}$, $\beta = \frac{105.2}{248452000}$, $\epsilon = 0$, $\sigma = 8$, dan $\gamma = \frac{1}{35.8}$, sehingga diperoleh $\mathcal{R}_0 = 1$. Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan bebas obesitas $E_0 = (100000, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik $E_2^* = (38891.91, 53469.58, 7638.51)$. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa nilai awal, yaitu $T1 = (50000, 30000, 20000)$, $T2 = (40000, 300, 59700)$, dan $T3 = (12000, 53489, 34511)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.6.

Gambar 3.6 menunjukkan bahwa orbit semua solusi dengan berbagai nilai awal menuju titik kesetimbangan endemik $E_2^* = (38891.91, 53469.58, 7638.51)$ dan tidak ada orbit solusi yang bergerak menuju titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 . Hal ini berarti titik E_2^* bersifat stabil asimtotik dan titik E_0 bersifat tidak stabil.





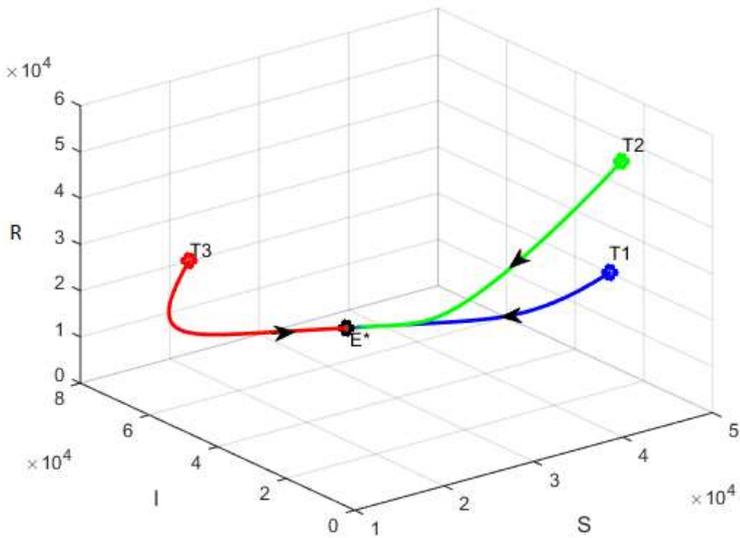
Gambar 3.6 Potret fase $\mathcal{R}_0 = 1$ kasus $\epsilon = 0$

3.4.2 Simulasi numerik kasus $\epsilon > 0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $N = 100000$, $\mu = \frac{1}{69.4}$, $\beta = 2.96 \times 10^{-7}$, $\epsilon = 0.012$, $\sigma = 8$, dan $\gamma = \frac{1}{35.8}$. Berdasarkan nilai parameter tersebut, *nullclines* persamaan (3.19) dan (3.20) berpotongan hanya pada titik kesetimbangan endemik $E^* = (32429.5, 60890, 6680.5)$. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa nilai awal, yaitu $T1 = (50000, 30000, 20000)$, $T2 = (40000, 300, 59700)$, dan $T3 = (12000, 53489, 34511)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.7.

Gambar 3.7 menunjukkan bahwa dengan nilai-nilai awal yang diberikan, orbit solusi menuju titik ketimbangan endemik E^* . Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa *nullclines* hanya berpotongan pada satu titik kesetimbangan endemik $E^* = (32429.5, 60890, 6680.5)$ yang bersifat stabil asimtotik global.





Gambar 3.7 Potret fase sistem (3.4) kasus $\epsilon > 0$



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pembahasan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model laju obesitas berbentuk sistem *autonomous* nonlinear dengan tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi dengan obesitas (I), dan subpopulasi sembuh (R).
2. Model laju obesitas melalui kontak sosial memiliki angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dan dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya, berdasarkan analisis kestabilan titik kesetimbangan, untuk kasus $\epsilon = 0$, jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global; jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan global. Kemudian, berdasarkan analisis geometri, untuk kasus $\epsilon > 0$, titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global.
3. Simulasi numerik mendukung hasil analisis yang diperoleh.

4.2 Saran

Berdasarkan skripsi yang telah dikerjakan, untuk pembahasan selanjutnya disarankan agar dapat menyelesaikan permasalahan berikut.

1. Pada kasus $\epsilon = 0$ perlu dikaji lebih lanjut tentang penentuan titik kesetimbangan endemik.
2. Pada kasus $\epsilon > 0$, perlu dilakukan analisis medan arah secara detail dan jelas.



3. Pada kasus $\mathcal{R}_0 = 1$, perlu dikaji secara analitik tentang kestabilan titik kesetimbangan.



DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Brauer, F. dan C. C. Chavez. 2010. *Mathematical Model in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer-Verlag, New York.
- Driessche, P.V. D. dan J. Wathmough. 2002. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. Vol. 180. Hal. 29-48.
- Gonzalez-Parra, G., R. Villanueva, dan A. Arenas. 2010. An age structured model for obesity prevalence dynamics in populations. *Rev.MVZ Cordoba*. Vo. 15. Hal. 2.
- Hasibuan, K. M. 1989. *Pemodelan Matematika*. PAU Ilmu Hayat IPB. Bogor.
- Kim, K. I., Z. Lin dan Q. Zhang. 2013. An SIR epidemic model with free boundary. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. Hal. 790-784.
- Lozano-Ochoa, E., J. F. Camacho, dan C. Vargas-De-Leon. 2017. Qualitative stability analysis of an obesity epidemic model with social contagion. *Discrete Dynamics in Nature Society*. Vol. 2017.
- Mercer, P. R. 2014. *More Calculus of a Single Variable*. Springer. New York.



Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eight Edition. Pearson Education, Inc. Boston.

Panfilov, A. 2010. *Qualitative Analysis of Differential Equation*. Utrecht University. Utrecht.

Richard, D. 2002. *Advanced Mathematical Methods with Maple*. Cambridge University Press: UK.

Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. Pearson Prentice Hall. Amerika Serikat.

Santonja, F. J., R. J. Villanueva, L. Jodar, dan G. Gonzales-Parra. 2010. Mathematical modeling of social obesity epidemic in the region of Valencia, Spain. *Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences*. Vol. 16.

Sun, R. 2017. Adopting epidemic model to optimize medication and surgical intervention of excess weight. *Physics Letters A*. Vol. 381. Hal. 19-23.

WHO. 1999. *Obesity: preventing and managing the global epidemic*. Geneva. Switzerland.

Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition. Springer-Verlag. New York.



LAMPIRAN

Lampiran 1 Titik kesetimbangan endemik kasus $\epsilon = 0$

Dari persamaan (3.8) diperoleh $R = \frac{\gamma + \mu - \beta(N-I)}{\beta(\sigma-1)}$ dan dari persamaan (3.7b) diperoleh $R = \frac{\gamma I}{\sigma\beta I + \mu}$.

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma + \mu - \beta(N-I)}{\beta(\sigma-1)} &= \frac{\gamma I}{\sigma\beta I + \mu}, \\ [\gamma + \mu - \beta(N-I)][\sigma\beta I + \mu] &= \gamma I\beta(\sigma-1), \\ [\gamma + \mu - \beta N + \beta I][\sigma\beta I + \mu] - \gamma I\beta(\sigma-1) &= 0 \\ \sigma\beta^2 I^2 + [\sigma\beta(\mu + \gamma) - \beta^2\sigma N + \mu\beta - \gamma\beta(\sigma-1)]I + \mu(\mu + \gamma) - \mu\beta N &= 0, \\ \sigma\beta^2 I^2 + \left[\sigma\beta(\mu + \gamma) \left(1 - \frac{\gamma}{(\mu+\gamma)} + \frac{1}{\sigma} - \frac{\beta N}{(\mu+\gamma)}\right)\right]I + \mu(\mu + \gamma) \left(1 - \frac{\beta N}{(\mu+\gamma)}\right) &= 0, \\ \sigma\beta^2 I^2 + \left[\sigma\beta(\mu + \gamma) \left(\frac{\mu}{(\mu+\gamma)} + \frac{1}{\sigma} - \frac{\beta N}{(\mu+\gamma)}\right)\right]I + \mu(\mu + \gamma) \left(1 - \frac{\beta N}{(\mu+\gamma)}\right) &= 0. \\ \sigma\beta^2 I^2 + \left[\sigma\beta(\mu + \gamma) \left(\frac{\mu}{(\mu+\gamma)} + \frac{1}{\sigma} - \mathcal{R}_0\right)\right]I + \mu(\mu + \gamma)(1 - \mathcal{R}_0) &= 0. \end{aligned}$$

Lampiran 2 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik kasus $\epsilon = 0$ dengan fungsi Lyapunov

Berdasarkan persamaan (3.16) dan (3.17) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \mu \frac{dV_i}{dt} + \beta(\sigma - 1) \frac{dV_r}{dt}, \\
 &= \mu \left[\beta I^* \left(2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right) + \beta(\sigma - 1) R^* \left(-1 + \frac{R}{R^*} + \frac{I^*}{I} - \frac{RI^*}{R^*I} \right) \right] + \beta(\sigma - 1) \left[\sigma \beta I R^* \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \mu R^* \left(1 - \frac{R}{R^*} + \frac{I}{I^*} - \frac{R^*I}{I^*R} \right) \right], \\
 &= \mu \beta I^* \left(2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right) + \sigma \beta^2 I R^* (\sigma - 1) \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \mu \beta R^* (\sigma - 1) \left[-1 + \frac{R}{R^*} + \frac{I^*}{I} - \frac{RI^*}{R^*I} + 1 - \frac{R}{R^*} + \frac{I}{I^*} - \frac{R^*I}{I^*R} \right], \\
 &= \mu \beta I^* \left(2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right) + \sigma \beta^2 I R^* (\sigma - 1) \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \mu \beta R^* (\sigma - 1) \left[\frac{I^*}{I} + \frac{I}{I^*} - \frac{RI^*}{R^*I} - \frac{R^*I}{I^*R} \right]. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

$\beta I^* = \beta N - (\gamma + \mu) + \beta(\sigma - 1)R^*$ dari persamaan (3.12a) disubstitusi ke persamaan (3.18), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \mu(\beta N - (\gamma + \mu) + \beta(\sigma - 1)R^*) \left(2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right) + \sigma \beta^2 I R^* (\sigma - 1) \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \mu \beta R^* (\sigma - 1) \left[\frac{I^*}{I} + \frac{I}{I^*} - \frac{RI^*}{R^*I} - \frac{R^*I}{I^*R} \right], \\
 &= \mu(\gamma + \mu) \left(\frac{\beta N}{\gamma + \mu} - 1 \right) \left(2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right) + \sigma \beta^2 I R^* (\sigma - 1) \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \mu \beta R^* (\sigma - 1) \left[2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} + \frac{I^*}{I} + \frac{I}{I^*} - \frac{RI^*}{R^*I} - \frac{R^*I}{I^*R} \right], \\
 &= \mu(\gamma + \mu) (\mathcal{R}_0 - 1) \left(2 - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \right) + \sigma \beta^2 I R^* (\sigma - 1) \left(2 - \frac{R^*}{R} - \frac{R}{R^*} \right) + \mu \beta R^* (\sigma - 1) \left[2 - \frac{RI^*}{R^*I} - \frac{R^*I}{I^*R} \right]. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Lampiran 3 Analisis geometri kasus $\epsilon > 0$

a. Titik kesetimbangan kasus $\epsilon > 0$

Berdasarkan persamaan (3.5a) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{dt} &= 0, \\
 (\beta I + \epsilon)(N - I - R) + \sigma(\beta I + \epsilon)R - (\gamma + \mu)I &= 0, \\
 R &= \frac{(\gamma + \mu)I - (\beta I + \epsilon)(N - I)}{(\beta I + \epsilon)(\sigma - 1)}, \\
 R &= \frac{(\gamma + \mu)I - (-\beta I^2 + \beta N I + \epsilon N - \epsilon I)}{(\beta I + \epsilon)(\sigma - 1)}, \\
 R &= \frac{\beta I^2 - (\beta N - \epsilon - \gamma - \mu)I - \epsilon N}{\beta(\sigma - 1)I + \epsilon(\sigma - 1)}, \\
 G_1(I) &= \frac{\beta I^2 - (\beta N - \epsilon - \gamma - \mu)I - \epsilon N}{\beta(\sigma - 1)I + \epsilon(\sigma - 1)},
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

dan berdasarkan persamaan (3.5b) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dR}{dt} &= 0, \\
 \gamma I - \sigma(\beta I + \epsilon)R - \mu R &= 0, \\
 R &= \frac{\gamma I}{\sigma \beta I + \sigma \epsilon + \mu}, \\
 G_2(I) &= \frac{\gamma I}{\sigma \beta I + \sigma \epsilon + \mu}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

b. Kemonotonan dan kecekungan

Berdasarkan persamaan (3.20), dimisalkan $K = \beta N - \epsilon - \gamma - \mu$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 G_1(I)' &= \frac{1}{(\sigma-1)} \frac{(2\beta I - K)(\beta I + \epsilon) - (\beta I^2 - KI - \epsilon N)\beta}{(\beta I + \epsilon)^2}, \\
 &= \frac{1}{(\sigma-1)} \frac{\beta^2 I^2 + 2\epsilon\beta I + \beta\epsilon N - \epsilon K}{(\beta I + \epsilon)^2}, \\
 &= \frac{1}{(\sigma-1)} \frac{\beta^2 I^2 + 2\epsilon\beta I + \epsilon + \gamma + \mu}{(\beta I + \epsilon)^2},
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

dan

$$\begin{aligned}
 G_1(I)'' &= \frac{1}{(\sigma-1)} \frac{(2\beta^2 I + 2\epsilon\beta)(\beta I + \epsilon)^2 - 2\beta(\beta^2 I^2 + \epsilon\beta I + \epsilon + \gamma + \mu)(\beta I + \epsilon)}{(\beta I + \epsilon)^4}, \\
 &= \frac{1}{(\sigma-1)} \frac{(2\beta^2 I + 2\epsilon\beta)(\beta I + \epsilon) - 2\beta^3 I^2 - 4\epsilon\beta^2 I - 2\epsilon\beta - 2\beta\gamma - 2\beta\mu}{(\beta I + \epsilon)^3}, \\
 &= \frac{1}{(\sigma-1)} \frac{2\epsilon^2\beta - 2\epsilon\beta - 2\beta\gamma - 2\beta\mu}{(\beta I + \epsilon)^3}, \\
 &= -\frac{2}{(\sigma-1)} \frac{[\epsilon\beta(1-\epsilon) + \beta\gamma + \beta\mu]}{(\beta I + \epsilon)^3}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.21) diperoleh

dan

$$\begin{aligned}
 G_2(I)' &= \frac{\gamma(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu) - \gamma I(\sigma\beta)}{(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)^2}, \\
 &= \frac{\gamma\sigma\epsilon + \gamma\mu}{(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 G_2(I)'' &= \frac{0 - \gamma\sigma\epsilon + \gamma\mu(2(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)(\sigma\beta))}{(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)^4}, \\
 &= -\frac{\gamma\sigma\epsilon + \gamma\mu(2(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)(\sigma\beta))}{(\sigma\beta I + \sigma\epsilon + \mu)^4}.
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

