ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI

SKRIPSI

oleh
Asri Dwi Lestari
155090407111018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh
ASRI DWI LESTARI
155090407111018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI

oleh

ASRI DWI LESTARI
155090407111018

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 8 April 2019
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing

Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.
NIP. 196607281993032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Asri Dwi Lestari
NIM	:	155090407111018
Jurusan	:	Matematika
Penulis skripsi berjudul	:	Analisis Dinamik Model Epidemi SEIRS dengan Laju Penularan dan Pengobatan Tersaturasi

dengan ini menyatakan bahwa:

1. skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 8 April 2019
yang menyatakan,

Asri Dwi Lestari
NIM. 155090407111018

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis dinamik model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu sembuh memiliki kekebalan sementara sehingga dapat kembali menjadi rentan. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$), syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang selalu ada dan titik kesetimbangan endemik yang eksistensinya ditentukan oleh syarat tertentu. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

Kata kunci: model epidemi SEIRS, laju penularan tersaturasi, laju pengobatan tersaturasi, angka reproduksi dasar, kestabilan lokal.

DYNAMICAL ANALYSIS OF SEIRS EPIDEMIC MODEL WITH SATURATED INCIDENCE AND TREATMENT RATE

ABSTRACT

This final project discussed the construction and dynamical analysis of SEIRS epidemic model with saturated incidence and treatment rate. In the model, it is assumed that recovering individuals have temporary immunity so that they can return to being susceptible. Dynamical analysis includes the determination of equlibrium point, the basic reproduction number ($\mathcal{R}_0$), conditions for the existence of equilibrium point, and the local stability analysis. Based on the analysis results, two equilibrium points are obtained, namely disease free equilibrium point which always exists and endemic equilibrium points which exist under certain conditions. The disease free equilibrium is local asymptotically stable when $\mathcal{R}_0 < 1$, while the endemic equilibrium point is local asymptotically stable if it satisfies the Routh-Hurwitz criteria. The performed numerical simulation supports the results of the dynamical analysis.

Kata kunci: SEIRS epidemic model, saturated incidence rate, saturated treatment rate, basic reproduction number, local stability.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, karunia, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Model Epidemi SEIRS dengan Laju Penularan dan Pengobatan Tersaturasi* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar,
2. Indah Yanti, S.Si., M.Si. dan Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku dosen penasihat akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini tepat waktu,
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan,
5. Bapak Shobari, Ibu Sutimah, Fitri Meyyani, Ragil Wuri H, dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini,
6. Gandis Lelly, Erlina Narulita, Fitri Kurniawati, Rizky Saprianto, dan Irawan Gifachri atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini,

7. keluarga besar Matematika 2015, Griyakost E-220, dan organisasi UAKI UB atas dukungan dan kebersamaan selama menjalankan proses perkuliahan,
8. dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan berkah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email *asridwilestari6@gmail.com*, untuk perbaikan pada masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 8 April 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit menular seperti influenza, difteri, tuberkulosis, dan campak masih menjadi ancaman bagi manusia. Hal ini mendorong para ahli melakukan penelitian untuk mengendalikan penyebaran penyakit menular. Selain para ahli di bidang biologi dan kedokteran, matematikawan juga turut mengembangkan model matematika untuk masalah penyebaran penyakit yang sering disebut model epidemi. Pada model epidemi dilakukan analisis untuk mengetahui sifat-sifat penyebaran penyakit agar ditemukan cara pengendalian penyakit tersebut.

Model epidemi pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendric pada tahun 1927. Mereka mengonstruksi model epidemi yang terdiri dari tiga kelas, yaitu kelas individu rentan (*Susceptible*), kelas individu terinfeksi (*Infective*), dan kelas individu sembuh (*Recovered*). Model yang dikenal sebagai model SIR tersebut telah banyak dikembangkan untuk memahami permasalahan penyakit yang semakin kompleks.

Salah satu komponen yang memiliki peran penting dalam model epidemi adalah laju penularan. Laju penularan yang sering digunakan pada model epidemi adalah laju penularan bilinear dan laju penularan standar. Pada tahun 1978, Cappaso dan Serio memperkenalkan laju penularan tersaturasi pada model SIR, yaitu laju penularan yang mempertimbangkan efek penghambatan sebagai akibat adanya pencegahan yang dilakukan individu rentan ketika banyak individu yang terinfeksi.

Pada tahun 1994, Li dan Muldowney mengonstruksi model epidemi yang terdiri dari empat kelas, yaitu dengan menambahkan kelas individu terpapar atau terinfeksi tetapi belum mampu menulari individu lain (*Exposed*) pada model SIR. Model ini dikenal sebagai model SEIR. Pada model SIR dan SEIR, diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen terhadap suatu penyakit sehingga individu tersebut akan tetap berada pada kelas individu sembuh.

Pengobatan merupakan salah satu metode efektif untuk mencegah dan mengendalikan penyebaran penyakit menular. Pada tahun 2004, Wang dan Ruan memperkenalkan laju pengobatan konstan pada model SIR, yang kemudian dikembangkan oleh Wang (2006) menjadi laju pengobatan bertahap. Secara umum, laju pengobatan bergantung pada sumber daya medis, seperti obat-obatan, tenaga medis, fasilitas rumah sakit, dan tempat isolasi. Setiap kota atau negara memiliki kapasitas medis yang terbatas untuk pengobatan. Hal ini menyebabkan melambatnya penanganan individu terinfeksi ketika jumlah individu terinfeksi banyak. Berdasarkan hal tersebut, Zhang dan Liu (2008) mengonstruksi model SIR dengan laju pengobatan tersaturasi yang mempertimbangkan efek melambatnya pengobatan individu terinfeksi ketika kapasitas medis terbatas dan jumlah individu terinfeksi banyak.

Beberapa penelitian mengenai model epidemi dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi telah dilakukan. Pada tahun 2014, Zhang, dkk. membahas model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Selanjutnya, Jana, dkk. (2016) membahas model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Pada model Jana, dkk. (2016) diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan sementara terhadap suatu penyakit sehingga individu tersebut dapat kembali menjadi rentan.

Pada skripsi ini dibahas model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi yang merujuk artikel Khan, dkk. (2017). Analisis dinamik yang dilakukan pada model ini meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal. Setelah itu, dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana konstruksi model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi?

2. Bagaimana titik kesetimbangan model tersebut?
3. Bagaimana kestabilan lokal titik kesetimbangan model?
4. Bagaimana kesesuaian hasil simulasi numerik dengan hasil analisis yang diperoleh?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan pembahasan skripsi ini adalah

1. menjelaskan konstruksi model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi,
2. menentukan titik kesetimbangan model,
3. mengetahui kestabilan lokal titik kesetimbangan model, dan
4. memverifikasi kesesuaian hasil simulasi numerik dengan hasil analisis yang diperoleh.

BAB II
DASAR TEORI

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang senantiasa berubah dan dapat diprediksi kondisinya pada masa yang akan datang apabila diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu (Nagle, 2012). Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\tfrac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, sedangkan sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai persamaan diferensial.

(Alligood, dkk., 2000)

2.1.1 Sistem otonomus

Pada bagian ini, definisi-definisi yang dibahas merujuk pada Finizio dan Ladas (1982). Secara khusus, sistem persamaan diferensial yang memiliki bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

dengan $f(\vec{x})$ tidak bergantung terhadap variabel bebas t secara eksplisit dinamakan sistem otonomus.

Definisi 2.1.1 (Titik kesetimbangan).
Titik $\vec{x}^*$ yang memenuhi kondisi $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ disebut titik kritis atau titik kesetimbangan sistem (2.1). Titik kritis $\vec{x}^*$ merupakan solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$.

Definisi 2.1.2 (Kestabilan titik kesetimbangan).
Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ sistem (2.1) dikatakan

1. stabil, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) yang memenuhi
$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$
ada dan memenuhi
$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$
2. stabil asimtotik, jika $\vec{x}^*$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) yang memenuhi
$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$
ada dan memenuhi
$$\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*, \forall t \geq 0,$$
3. tidak stabil, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

2.1.2 Sistem otonomous linear

Sistem otonomus linear n persamaan secara umum dinyatakan dalam bentuk
$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \cdots + h_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= h_{n1}x_1 + h_{n2}x_2 + \cdots + h_{nn}x_n
\end{aligned} \tag{2.2}$$
dengan $h_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$. Sistem (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{x}, \tag{2.3}$$
dengan

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Jika $det(H) \neq 0$, maka $\vec{x^*} = \vec{0}$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.2).

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan dengan menggunakan definisi (2.1.2) tidak mudah, sehingga digunakan teorema berikut untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2).

Teorema 2.1.3 (**Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear**).

Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear bergantung pada nilai eigen matriks H. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks H. Titik kesetimbangan $\vec{x^*} = \vec{0}$ sistem (2.2) bersifat,

1. stabil asimtotik, jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,
2. tidak stabil, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif.

Khusus untuk sistem (2.2) dua dimensi, titik $\vec{x^*} = \vec{0}$ bersifat stabil tetapi tidak stabil asimtotik, jika $Re(\lambda_i) = 0$ untuk $i = 1, 2$ atau salah satu nilai eigen bernilai 0 dan lainnya negatif.

(Robinson, 2004)

2.1.3 Sistem otonomous nonlinear

Sistem otonomus nonlinear berdimensi n dapat ditulis seperti sistem (2.1) dengan $f_i(\vec{x})$ merupakan fungsi nonlinear yang memiliki turunan parsial dan kontinu di titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekspansi deret Taylor fungsi f_i di sekitar titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ adalah

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j}(x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), \qquad (2.4)$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ adalah suku sisa hasil hampiran orde satu. $\eta_i(\vec{x})$ memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{||\vec{q}\,||} = 0,$$

dengan $\vec{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)^T = \vec{x} - \vec{x}^*$.

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2.4) dan mengingat $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}$ diperoleh

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Karena $f_i(\vec{x}^*) = 0$ maka persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

atau

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = J\vec{q} + \vec{\eta},$$

dengan

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x^*})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x^*})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x^*})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x^*})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x^*})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x^*})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x^*})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x^*})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x^*})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

disebut matriks Jacobi. Jika $\vec{x}$ berada dekat dengan $\vec{x}^*$, maka $\vec{\eta}$ bernilai kecil, sehingga $\vec{\eta} \to 0$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem otonomus nonlinear dapat dihampiri oleh sistem otonomus linear

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = J\vec{q}. \tag{2.6}$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, maka $\vec{q}^* = \vec{0}$ sehingga sistem (2.6) mirip dengan sistem otonomus linear (2.3) dengan matriks J berperan seperti matriks H. Proses penghampiran sistem otonomus nonlinear oleh sistem linear dinamakan proses linearisasi.

Teorema 2.1.4 (**Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear**).
Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi, yaitu bersifat

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat stabil asimtotik

2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat tidak stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.1.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bergantung pada nilai eigen matriks Jacobi sistem (2.6). Persamaan karakteristik untuk memperoleh nilai eigen adalah

$$| J - \lambda I |= 0 \tag{2.7}$$

dengan λ adalah nilai eigen dan J adalah matriks Jacobi. Bentuk umum persamaan (2.7) adalah

$$\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \cdots + A_n = 0, A_n \neq 0. \tag{2.8}$$

Titik kesetimbangan sistem (2.6) stabil asimtotik jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Namun, penentuan tanda akar-akar karakteristik tidak selalu mudah, sehingga kriteria Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan tanpa menentukan akar-akar karakteristiknya.

Akar-akar karakteristik persamaan (2.8) mempunyai bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = |A_1| > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ 1 & A_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ 1 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & A_7 \\ 1 & A_2 & A_4 & A_6 \\ 0 & A_1 & A_3 & A_5 \\ 0 & 1 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} > 0, \quad D_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & \cdots & A_{2n-1} \\ 1 & A_2 & \cdots & A_{2n-2} \\ 0 & A_1 & \cdots & A_{2n-3} \\ 0 & 1 & \cdots & A_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan $k = 1, 2, ..., n$.

Misalkan diberikan persamaan (2.8) dengan $n = 4$ yaitu

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0. \tag{2.9}$$

Pada persamaan (2.9), $Re(\lambda_i) < 0$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ jika dan hanya jika

1. $D_1 = |A_1| = A_1 > 0,$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ 1 & A_2 \end{vmatrix} = A_1A_2 - A_3 > 0,$

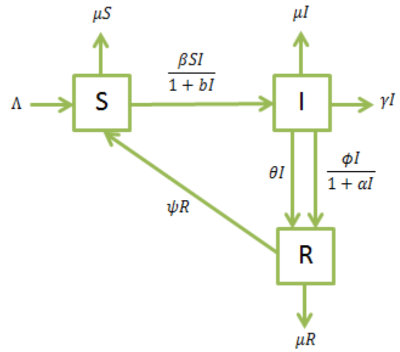
3. $D_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ 1 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = A_1A_2A_3 - A_1^2A_4 - A_3^2 > 0,$

4. $D_4 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & A_7 \\ 1 & A_2 & A_4 & A_6 \\ 0 & A_1 & A_3 & A_5 \\ 0 & 1 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} = A_1A_2A_3A_4 - A_1^2A_4^2 - A_3^2A_4 >$
   0, sehingga $A_4 > 0$.

(Murray, 2002)

2.2 Model SIRS dengan Laju Penularan dan Pengobatan Tersaturasi

Jana, dkk. (2016) mengembangkan model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Model SIRS terdiri dari tiga kelas, yaitu kelas individu rentan (*Susceptible*), kelas individu terinfeksi (*Infective*), dan kelas individu sembuh (*Recovered*). Model ini menggunakan laju penularan tersaturasi, yaitu laju penularan dengan mempertimbangkan efek penghambatan sebagai akibat adanya pencegahan yang dilakukan individu rentan ketika banyak individu yang terinfeksi. Model ini juga menggunakan laju pengobatan tersaturasi, yaitu laju pengobatan yang mempertimbangkan efek melambatnya pengobatan individu terinfeksi ketika kapasitas medis terbatas dan jumlah individu terinfeksi banyak. Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan sementara terhadap suatu penyakit sehingga individu tersebut dapat kembali rentan. Selanjutnya, diagram kompartemen model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi digambarkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1: Diagram kompartemen model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi

Model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi diperoleh dengan menerjemahkan diagram kompartemen pada Gambar 2.1 dalam bentuk model matematika. Terdapat sembilan parameter yang memengaruhi laju perpindahan masing-masing kelas, yaitu Λ, β, b, μ, θ, γ, ϕ, α, dan ψ. Parameter Λ menyatakan laju kelahiran, β menyatakan laju kontak langsung, b menyatakan faktor saturasi yang mengukur efek penghambat penyebaran penyakit, μ menyatakan laju kematian alami, θ menyatakan laju kesembuhan alami, γ menyatakan laju kematian karena penyakit, ϕ menyatakan laju pengobatan, α menyatakan faktor saturasi yang mengukur efek tunda dari individu terinfeksi dalam pengobatan, dan ψ merupakan laju individu sembuh menjadi rentan kembali. Konstruksi model epidemi SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi dijelaskan secara rinci berikut ini.

2.2.1 Laju perubahan kelas individu rentan (*Susceptible*)

Misalkan $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ berturut-turut menyatakan jumlah individu rentan, terinfeksi, dan sembuh setiap saat. Individu yang baru lahir akan masuk ke dalam kelas rentan, sehingga jumlah individu pada kelas rentan bertambah dengan laju Λ. Jumlah individu pada kelas rentan juga bertambah karena perubahan individu yang telah sembuh menjadi rentan kembali dengan laju ψ.

Interaksi secara langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi menyebabkan berkurangnya jumlah individu pada kelas rentan karena terjadinya proses penularan. Laju penularan pada model ini merupakan laju penularan tersaturasi yang dinyatakan sebagai $g(I) = \frac{\beta I}{1+bI}$ dengan βI menyatakan kekuatan penyebaran penyakit dan $\frac{1}{1+bI}$ menyatakan efek penghambatan penyebaran penyakit. Berkurangnya jumlah individu pada kelas rentan juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ. Dengan demikian, laju perubahan kelas rentan dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1+bI} - \mu S + \psi R. \tag{2.10}$$

2.2.2 Laju perubahan kelas individu terinfeksi (*Infective*)

Interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi menyebabkan terjadinya infeksi pada individu rentan. Hal ini menyebabkan bertambahnya jumlah individu pada kelas terinfeksi dengan laju $\frac{\beta I}{1+bI}$.

Jumlah individu pada kelas terinfeksi menurun disebabkan adanya pengobatan pada individu terinfeksi. Laju pengobatan pada model ini merupakan laju pengobatan tersaturasi yang dinyatakan sebagai $T(I) = \frac{\phi I}{(1+\alpha I)}$ dengan ϕI menyatakan efisiensi pengobatan dan $\frac{1}{1+\alpha I}$ menyatakan efek terlambatnya individu terinfeksi untuk mendapatkan pengobatan. Jumlah individu pada kelas terinfeksi juga menurun disebabkan individu pada kelas ini mengalami kesembuhan alami dengan laju θ. Selain itu, berkurangnya jumlah individu pada kelas ini juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ dan kematian akibat penyakit dengan laju γ. Dengan demikian, laju perubahan kelas terinfeksi per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1+bI} - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu I - \gamma I - \theta I. \tag{2.11}$$

2.2.3 Laju perubahan kelas individu sembuh (*Recovered*)

Jumlah individu pada kelas sembuh bertambah karena adanya pengobatan pada individu terinfeksi dengan laju $T(I) = \frac{\phi I}{(1+\alpha I)}$ dan kesembuhan alami pada individu terinfeksi dengan laju θ. Jumlah individu pada kelas ini berkurang disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ dan perubahan individu sembuh menjadi rentan kembali karena kekebalan yang sementara dengan laju ψ. Dengan demikian, laju perubahan kelas sembuh per satuan waktu dapat dinyatakan

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu R - \psi R + \theta I. \tag{2.12}$$

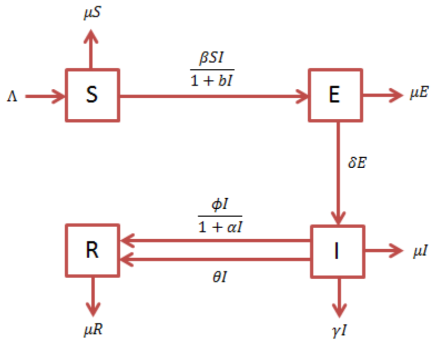
Berdasarkan persamaan (2.10)-(2.12) diperoleh sistem otonomus nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta SI}{1+bI} - \mu S + \psi R, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1+bI} - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu I - \gamma I - \theta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu R - \psi R + \theta I, \end{aligned} \tag{2.13}$$

dengan kondisi awal $S(0), I(0), R(0) \geq 0$. Λ, β, μ, θ, γ, ϕ, ψ bernilai positif, dan b, α bernilai non negatif. Titik kesetimbangan bebas penyakit model (2.13) adalah $Q_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik adalah $Q_* = (S_*, I_*, R_*)$ (Jana, dkk., 2016).

2.3 Model SEIR dengan Laju Penularan dan Pengobatan Tersaturasi

Berbeda dengan Jana, dkk. (2016), Zhang, dkk. (2012) menggunakan laju penularan dan pengobatan tersaturasi pada model epidemi SEIR. Model SEIR terdiri dari empat kelas, yaitu kelas individu rentan (*Susceptible*), kelas individu terpapar atau terinfeksi tetapi belum mampu menulari individu lain (*Exposed*), kelas individu terinfeksi dan dapat menulari individu lain (*Infectious*), dan kelas individu sembuh (*Recovered*). Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen. Selanjutnya, diagram kompartemen model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi digambarkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2: Diagram kompartemen model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi

Model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi diperoleh dengan menerjemahkan diagram kompartemen pada Gambar 2.2 dalam bentuk model matematika. Terdapat sembilan parameter yang memengaruhi laju perpindahan masing-masing kelas, yaitu Λ, β, b, μ, θ, γ, ϕ, α yang mewakili hal yang sama seperti pada model (2.13), dan δ merupakan laju individu terpapar menjadi terinfeksi. Konstruksi model epidemi SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi dijelaskan secara rinci berikut ini.

2.3.1 Laju perubahan kelas individu rentan (*Susceptible*)

Misalkan $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ berturut-turut menyatakan jumlah individu rentan, terpapar, terinfeksi, dan sembuh setiap saat. Laju perubahan kelas rentan pada model ini hampir sama dengan persamaan (2.10), perbedaannya jumlah individu rentan tidak bertambah akibat perubahan individu yang telah sembuh menjadi rentan kembali dengan laju ψ. Dengan demikian, laju perubahan kelas rentan per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1+bI} - \mu S. \tag{2.14}$$

2.3.2 Laju perubahan kelas individu terpapar (*Exposed*)

Jumlah individu pada kelas terpapar bertambah dengan laju $\frac{\beta I}{1+bI}$ akibat interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Jumlah individu pada kelas terpapar berkurang karena individu pada kelas ini berubah menjadi individu terinfeksi dan menulari individu lain dengan laju δ. Berkurangnya jumlah individu pada kelas terpapar juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ. Dengan demikian, laju perubahan kelas terpapar per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1+bI} - \mu E - \delta E. \tag{2.15}$$

2.3.3 Laju perubahan kelas individu terinfeksi (*Infectious*)

Laju perubahan kelas terinfeksi pada model ini hampir sama dengan persamaan (2.11), perbedaannya jumlah individu pada kelas terinfeksi bertambah akibat perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi dan menulari individu lain dengan laju δ. Dengan demikian, laju perubahan kelas terinfeksi per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu I - \gamma I - \theta I. \tag{2.16}$$

2.3.4 Laju perubahan kelas individu sembuh (*Recovered*)

Laju perubahan kelas sembuh pada model ini hampir sama dengan persamaan (2.12), perbedaannya jumlah individu pada kelas sembuh tidak berkurang akibat perubahan individu sembuh menjadi rentan kembali karena kekebalan yang sementara dengan laju ψ. Dengan demikian, laju perubahan kelas sembuh per satuan waktu dapat dinyatakan

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu R + \theta I. \tag{2.17}$$

Berdasarkan persamaan (2.14)-(2.17) diperoleh sistem otonomus nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta SI}{1+bI} - \mu S, \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{1+bI} - \mu E - \delta E, \\
\frac{dI}{dt} &= \delta E - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \gamma I - \theta I - \mu I, \\
\frac{dR}{dt} &= \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu R + \theta I,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

dengan kondisi awal $S(0), E(0), I(0), R(0) \geq 0$. Λ, β, μ, θ, γ, ϕ, δ bernilai positif, dan b, α bernilai non negatif.

2.4 Angka Reproduksi Dasar

Dalam epidemiologi, angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) merupakan angka yang menyatakan jumlah individu baru yang terinfeksi oleh satu individu yang telah terinfeksi sebelumnya selama masa penyebaran penyakit pada populasi rentan. $\mathcal{R}_0$ merupakan salah satu komponen penting dalam model epidemi penyakit karena dapat menentukan terjadi atau tidaknya wabah penyakit dalam suatu populasi. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka satu individu yang terinfeksi menyebabkan rata-rata kurang dari satu individu baru yang terinfeksi, sehingga nantinya suatu populasi bisa bebas dari penyakit. Sebaliknya, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka satu individu yang terinfeksi menyebabkan rata-rata lebih dari satu individu baru yang terinfeksi, sehingga nantinya terjadi wabah penyakit dalam suatu populasi (Heffernan, 2005).

Angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) dapat ditentukan dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya. Konstruksi matriks generasi selanjutnya hanya melibatkan kelas terinfeksi, baik yang mampu menulari penyakit maupun yang belum mampu menulari penyakit. Diberikan $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$ dengan $x_i \geq 0$ menyatakan jumlah individu pada kelas ke-i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pada saat t. Misalkan kelas yang terinfeksi sebanyak m dengan $m \leq n$. Model kompartemen dengan kelas terinfeksi dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x_i' = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i, i = 1, 2, \ldots, m.$$

dengan $\mathcal{F}_i$ menyatakan tingkat kemunculan infeksi baru dari suatu penyakit pada kelas ke-i dan bernilai positif, sedangkan $\mathcal{V}_i$ menyatakan transfer keluar dan masuk pada kelas ke-i dan masing-masing bernilai positif dan negatif. $\mathcal{F}_i$ merupakan komponen vektor $\mathcal{F}$ dengan $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_m)^T$ dan $\mathcal{V}_i$ merupakan komponen vektor $\mathcal{V}$ dengan $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_m)^T$.

Matriks F dan V adalah matriks berukuran $m \times m$ yang didefinisikan sebagai

$$F(Q_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(Q_0)}{\partial x_j}\right) \text{ dan } V(Q_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i(Q_0)}{\partial x_j}\right)$$

dengan $i, j = 1, 2, \ldots, m$ dan Q_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai

$$K = [F(Q_0)][V(Q_0)]^{-1}.$$

Angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) dapat diperoleh dari

$$\mathcal{R}_0 = \rho(K)$$

dengan $\rho(K)$ merupakan radius *spectral* matriks K, yaitu modulus maksimal nilai eigen matriks K (Brauer dan Chavez, 2010).

Contoh

Perhatikan model (2.13), terdapat satu kelas terinfeksi yaitu kelas I sehingga $m = 1$. Titik kesetimbangan bebas penyakit model (2.13) adalah $Q_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$. Berdasarkan definisi sebelumnya, komponen $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ dapat disusun sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\beta SI}{1+bI} \right) \text{ dan } \mathcal{V} = \left(\frac{\phi I}{1+\alpha I} + \mu I + \gamma I + \theta I \right).$$

Selanjutnya setiap entri komponen $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ dicari turunan parsialnya terhadap I sehingga diperoleh matriks F dan V yaitu

$$F = \left(\frac{\beta S}{1+bI} - \frac{\beta bSI}{(1+bI)^2} \right) \text{ dan}$$
$$V = \left(\frac{\phi}{(1+\alpha I)} - \frac{\phi\alpha I}{(1+\alpha I)^2} + (\mu + \gamma + \theta) \right).$$

Matriks F dan V disubstitusi dengan Q_0 sehingga diperoleh

$$F(Q_0) = \left(\frac{\beta\Lambda}{\mu} \right) \text{ dan } V(Q_0) = \left(\phi + \mu + \gamma + \theta \right).$$

Kemudian dilakukan pencarian invers matriks $V(Q_0)$ sehingga diperoleh

$$V^{-1}(Q_0) = \left(\frac{1}{\phi+\mu+\gamma+\theta} \right).$$

Dimisalkan $K = F(Q_0)V^{-1}(Q_0)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{\beta\Lambda}{\mu} \right) \left(\frac{1}{\phi+\mu+\gamma+\theta} \right) \\ &= \left(\frac{\beta\Lambda}{\mu(\phi+\mu+\gamma+\theta)} \right). \end{aligned}$$

Matriks K merupakan matriks generasi selanjutnya berukuran 1×1. Nilai eigen dari matriks K yaitu

$$\lambda = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\phi + \mu + \gamma + \theta)}.$$

Angka reproduksi dasar $(\mathcal{R}_0)$ diperoleh dari radius *spectral* matriks K atau modulus maksimal nilai eigen, yaitu

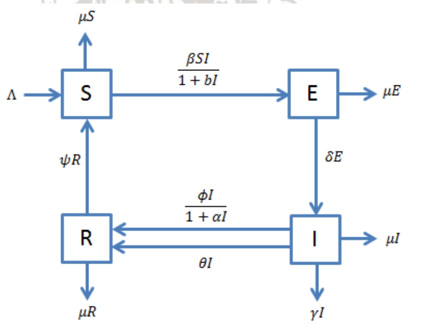
$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\phi + \mu + \gamma + \theta)}.$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit model (2.13) bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemiknya bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 > 1$ (Jana, dkk., 2016).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model

Pada skripsi ini dibahas model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi yang merujuk artikel Khan, dkk. (2017). Model SEIRS terdiri dari empat kelas, yaitu kelas individu rentan (*Susceptible*), kelas individu terpapar atau terinfeksi tetapi belum mampu menulari individu lain (*Exposed*), kelas individu terinfeksi dan dapat menulari individu lain (*Infectious*), dan kelas individu sembuh (*Recovered*). Model ini menggunakan laju penularan dan pengobatan tersaturasi seperti pada subbab 2.2 dan 2.3. Pada model ini diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan sementara sehingga dapat kembali menjadi rentan. Diagram kompartemen model SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Diagram kompartemen model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi

Konstruksi model SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi mirip dengan model (2.18). Perbedaannya terletak pada adanya aliran perpindahan individu sembuh menjadi rentan kembali seperti pada model (2.13). Terdapat sepuluh parameter yang memengaruhi laju perpindahan masing-masing kelas, yaitu Λ, β, b, μ, θ, γ, ϕ, α, δ, dan ψ yang mewakili hal yang sama seperti pada model (2.13) atau (2.18). Berdasarkan hal tersebut, sistem otonomus nonlinear untuk model ini dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - (\frac{\beta I}{1+bI} + \mu)S + \psi R,\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{1+bI} - (\mu+\delta)E,\\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - (\mu+\gamma+\theta)I,\\ \frac{dR}{dt} &= \frac{\phi I}{1+\alpha I} + \theta I - (\mu+\psi)R,\end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan kondisi awal $S(0), E(0), I(0), R(0) \geq 0$. Λ, β, μ, δ, ϕ, γ, θ, ψ bernilai positif, dan b, α bernilai non negatif.

3.2 Titik Kesetimbangan Model

Titik kesetimbangan sistem (3.1) diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$, yaitu

$$\Lambda - (\frac{\beta I}{1+bI} + \mu)S + \psi R = 0, \tag{3.2a}$$

$$\frac{\beta SI}{1+bI} - (\mu+\delta)E = 0, \tag{3.2b}$$

$$\delta E - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - (\mu+\gamma+\theta)I = 0, \tag{3.2c}$$

$$\frac{\phi I}{1+\alpha I} + \theta I - (\mu+\psi)R = 0. \tag{3.2d}$$

Misalkan $a_1 = \mu+\delta$, $a_2 = \mu+\psi$, dan $a_3 = \mu+\gamma+\theta$, maka persamaan (3.2b), (3.2c), dan (3.2d) menjadi

$$\frac{\beta SI}{1+bI} - a_1 E = 0, \tag{3.3}$$

$$\delta E - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - a_3 I = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\phi I}{1+\alpha I} + \theta I - a_2 R = 0. \tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan (3.4) dan (3.5), diperoleh

$$E = \frac{[\phi + a_3(1 + \alpha I)]I}{\delta(1 + \alpha I)} \tag{3.6}$$

dan

$$R = \frac{[\phi + \theta(1 + \alpha I)]I}{a_2(1 + \alpha I)}. \tag{3.7}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.3) diperoleh

$$\frac{\beta SI}{1 + bI} = \frac{a_1[\phi + a_3(1 + \alpha I)]I}{\delta(1 + \alpha I)},$$

sehingga

$$S = \frac{a_1(1 + bI)[\phi + a_3(1 + \alpha I)]I}{\beta\delta I(1 + \alpha I)}. \tag{3.8}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) dan (3.8) ke persamaan (3.2a) diperoleh

$$\begin{aligned}(1 + bI)I\{a_2\beta\delta\Lambda(1 + \alpha I) + \psi\beta\delta[\phi + \theta(1 + \alpha I)]I\\ -a_1a_2[\phi + a_3(1 + \alpha I)][\beta I + \mu(1 + bI)]\} = 0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Berdasarkan persamaan (3.9) diperoleh dua kemungkinan yaitu

$$I = 0$$

atau

$$\begin{aligned}a_2\beta\delta\Lambda(1 + \alpha I) + \psi\beta\delta[\phi + \theta(1 + \alpha I)]I\\ -a_1a_2[\phi + a_3(1 + \alpha I)][\beta I + \mu(1 + bI)] = 0.\end{aligned}$$

Jika $I = 0$ maka menurut persamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh $E = 0$ dan $R = 0$. Setelah itu, dengan mensubstitusikan $I = 0$ dan $R = 0$ ke persamaan (3.2a) diperoleh

$$\Lambda - \mu S = 0$$

sehingga

$$S = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang pertama, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit,

$$Q_0 = (S_0, E_0, I_0, R_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right).$$

Titik kesetimbangan yang kedua diperoleh jika $I \neq 0$. Berdasarkan persamaan (3.9) jika $I \neq 0$ maka

$$a_2\beta\delta\Lambda(1+\alpha I) + \psi\beta\delta[\phi + \theta(1+\alpha I)]I$$
$$-a_1a_2[\phi + a_3(1+\alpha I)][\beta I + \mu(1+bI)] = 0.$$

Persamaan tersebut ekuivalen dengan

$$AI^2 + BI + C = 0, I_2 \geq I_1 \tag{3.10}$$

dengan
$A = \alpha[a_1a_2a_3(\beta + \mu b) - \delta\psi\theta\beta](> 0)$
$B = a_1a_2[(\beta + \mu b)(\phi + a_3) + a_3\alpha\mu] - \beta\delta[a_2\alpha\Lambda + \psi(\phi + \theta)]$
$C = a_2[a_1\mu(\phi + a_3) - \beta\delta\Lambda].$
Kemudian berdasarkan persamaan (3.8), (3.6), dan (3.7) diperoleh

$$\begin{aligned} S_* &= \frac{a_1(1+bI_*)[\phi + a_3(1+\alpha I_*)]}{\beta\delta(1+\alpha I_*)}, \\ E_* &= \frac{[\phi + a_3(1+\alpha I_*)]I_*}{\delta(1+\alpha I_*)}, \\ R_* &= \frac{[\phi + \theta(1+\alpha I_*)]I_*}{a_2(1+\alpha I_*)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

dengan I_* merupakan akar-akar riil positif persamaan (3.10). Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang kedua, yaitu titik kesetimbangan endemik $Q_* = (S_*, E_*, I_*, R_*)$. Penurunan persamaan (3.9) dan (3.10) secara rinci dapat dilihat pada Lampiran 1 dan 2.

3.2.1 Angka reproduksi dasar

Angka reproduksi dasar $(\mathcal{R}_0)$ ditentukan dengan metode matriks generasi selanjutnya. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai $K = [F(Q_0)][V(Q_0)]^{-1}$. Kemudian dapat ditentukan angka reproduksi dasar $(\mathcal{R}_0)$, yaitu radius *spectral* matriks K.

Langkah awal untuk mendapatkan $(\mathcal{R}_0)$ yaitu membentuk matriks Jacobi F dan V. Komponen pembentuk matriks F dan V terdiri dari kelas yang terinfeksi, yaitu kelas terpapar (E) dan kelas terinfeksi (I) sehingga $m = 2$. Matriks F dan V adalah matriks yang masing-masing terbentuk dari komponen $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ dan $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$. Berdasarkan definisi, komponen $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ dapat disusun sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta SI}{1+bI} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} a_1 E \\ -\delta E + \frac{\phi I}{1+\alpha I} + a_3 I \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya membentuk matriks F dan V dengan cara mendiferensialkan setiap entri komponen $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ terhadap E dan I sehingga

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta S}{1+bI} - \frac{\beta bSI}{(1+bI)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan}$$
$$V = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ -\delta & \frac{\phi}{(1+\alpha I)} - \frac{\phi\alpha I}{(1+\alpha I)^2} + a_3 \end{pmatrix}.$$

Langkah selanjutnya yaitu membentuk matriks K berukuran 2×2. Pertama, mensubstitusi matriks F dan V dengan Q_0 sehingga diperoleh

$$F(Q_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } V(Q_0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ -\delta & \phi + a_3 \end{pmatrix}.$$

Kemudian matriks $V(Q_0)$ diinverskan sehingga diperoleh

$$V^{-1}(Q_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ \frac{\delta}{a_1(\phi+a_3)} & \frac{1}{\phi+a_3} \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan matriks $F(Q_0)$ dan $V(Q_0)$, kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya, yaitu

$$\begin{aligned}
K &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ \frac{\delta}{a_1(\phi+a_3)} & \frac{1}{\phi+a_3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi+a_3)} & \frac{\beta\Lambda}{\mu(\phi+a_3)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah nilai eigen dari matriks K.

$$|K - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi+a_3)} & \frac{\beta\Lambda}{\mu(\phi+a_3)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left(\frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi + a_3)} - \lambda \right) (-\lambda) = 0.$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks K yaitu

$$\lambda_1 = \frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi+a_3)} \text{ dan } \lambda_2 = 0.$$

Kemudian menentukan angka reproduksi dasar yang merupakan radius *spectral* matriks K.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0 &= \rho(K) \\
&= max \left\{ \lambda_1 = \frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi + a_3)}, \lambda_2 = 0 \right\} \\
&= \frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi + a_3)}.
\end{aligned}$$

3.2.2 Eksistensi titik kesetimbangan

Setelah $\mathcal{R}_0$ diketahui, persamaan (3.10) dapat ditulis sebagai berikut

$$AI^2 + BI + C = 0, I_2 \geq I_1 \quad (3.12)$$

dengan

$$A = \alpha[a_1a_2a_3(\beta + \mu b) - \delta\psi\theta\beta](> 0)$$
$$B = a_1a_2[(\beta + \mu b)(\phi + a_3) + a_3\alpha\mu] - \beta\delta[a_2\alpha\Lambda + \psi(\phi + \theta)]$$
$$\begin{aligned} C &= a_2[a_1\mu(\phi + a_3) - \beta\delta\Lambda] \\ &= a_2[a_1\mu(\phi + a_3) - a_1\mu(\phi + a_3)R_0] \\ &= a_1a_2\mu(\phi + a_3)(1 - \mathcal{R}_0). \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.12), terdapat dua kasus yang perlu ditinjau, yaitu ketika $\alpha = 0$ dan $\alpha > 0$.

Ketika $\alpha = 0$, maka $A = 0$ dan

$$B = a_1a_2(\beta + \mu b)(\phi + a_3) - \delta\psi\beta(\phi + \theta) > 0$$

sehingga persamaan (3.12) menjadi persamaan linear dengan satu-satunya solusi, yaitu $I_* = \frac{-C}{B}$ yang akan bernilai positif jika $C < 0$. Kondisi $C < 0$ terpenuhi apabila $\mathcal{R}_0 > 1$. Jadi, jika $\alpha = 0$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_* = (S_*, E_*, I_*, R_*)$.

Ketika $\alpha > 0$, akar-akar persamaan (3.12) akan bernilai riil apabila nilai diskriminan $\Delta = B^2 - 4AC \geq 0$. Oleh karena itu, perlu ditinjau dua kasus, yaitu $\Delta > 0$ dan $\Delta = 0$. Nilai $\Delta > 0$ ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &> 0 \\ B^2 - 4A[a_1a_2\mu(\phi + a_3)(1 - \mathcal{R}_0)] &> 0 \\ 4A[a_1a_2\mu(\phi + a_3)(1 - \mathcal{R}_0)] &< B^2 \\ (1 - \mathcal{R}_0) &< \frac{B^2}{4Aa_1a_2\mu(\phi + a_3)} \\ \mathcal{R}_0 &> 1 - \frac{B^2}{4Aa_1a_2\mu(\phi + a_3)}, \end{aligned}$$

atau $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0$ dengan

$$\mathcal{R}^* = 1 - \frac{B^2}{4Aa_1a_2\mu(\phi + a_3)} < 1.$$

Hal ini juga berlaku untuk $\Delta = 0$, sehingga nilai $\Delta = 0$ ekuivalen dengan $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0$.

Pada kasus $\Delta > 0$, jika berlaku $C < 0$ maka $\frac{C}{A} < 0$ sehingga persamaan (3.12) pasti memiliki satu akar riil positif, yaitu I_2. Kondisi $C < 0$ terpenuhi apabila $\mathcal{R}_0 > 1$. Jadi, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$.

Pada kasus $\Delta > 0$, jika berlaku $C > 0$ dan $B < 0$ maka $-\frac{B}{A} > 0$ dan $\frac{C}{A} > 0$ sehingga persamaan (3.12) memiliki dua akar riil positif, yaitu

$$I_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Kondisi $C > 0$ terpenuhi jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan nilai $\Delta > 0$ ekuivalen dengan $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa jika $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$ dan $B < 0$ maka terdapat dua titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_{1,2} = (S_{1,2}, E_{1,2}, I_{1,2}, R_{1,2})$.

Selanjutnya jika $C = 0$, persamaan (3.12) menjadi $AI^2 + BI = 0$. Sehingga persamaan tersebut mempunyai dua akar, yaitu $I_1 = 0$ atau $I_2 = \frac{-B}{A}$. Kondisi $C = 0$ terpenuhi jika $\mathcal{R}_0 = 1$. Jadi, jika $\mathcal{R}_0 = 1$ dan $B < 0$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$.

Jika $\Delta = 0$ maka persamaan (3.12) memiliki dua akar yang kembar, yaitu $I_1 = I_2 = \frac{-B}{2A}$. Nilai $\Delta = 0$ ekuivalen dengan $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0$ sehingga jika $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0$ dan $B < 0$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_1 = Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$.

Hasil analisis tersebut dirangkum dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.2.1 (Eksistensi titik kesetimbangan).
Sistem (3.1) memiliki dua macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0 yang selalu ada dan titik kesetimbangan endemik yang eksistensinya ditentukan oleh syarat berikut.

1. Jika $\alpha = 0$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_* = (S_*, E_*, I_*, R_*)$ dengan $I_* = \frac{-C}{B}$ dan S_*, E_*, R_* dinyatakan dalam persamaan (3.11).
2. Jika $\alpha > 0$ dan
   - $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$,
   - $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$, serta $B < 0$ maka terdapat dua titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_{1,2} = (S_{1,2}, E_{1,2}, I_{1,2}, R_{1,2})$ dengan $I_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ dan $S_{1,2}, E_{1,2}, R_{1,2}$ dinyatakan dalam persamaan (3.11),
   - $\mathcal{R}_0 = 1$, serta $B < 0$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$ dengan $I_2 = \frac{-B}{A}$ dan S_2, E_2, R_2 dinyatakan dalam persamaan (3.11),
   - $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0$, serta $B < 0$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_1 = Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$ dengan $I_2 = \frac{-B}{2A}$ dan S_2, E_2, R_2 dinyatakan dalam persamaan (3.11),

dengan $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi + a_3)}$, $\mathcal{R}^* = 1 - \frac{B^2}{4Aa_1a_2\mu(\phi + a_3)}$ dan A, B, C seperti pada persamaan (3.12).

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem otonomus nonlinear (3.1) di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan proses linearisasi, hal pertama yang dilakukan adalah menentukan matriks Jacobi. Matriks Jacobi sistem (3.1) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I}{1+bI} - \mu & 0 & -\frac{\beta S}{(1+bI)^2} & \psi \\ \frac{\beta I}{1+bI} & -a_1 & \frac{\beta S}{(1+bI)^2} & 0 \\ 0 & \delta & -\frac{\phi}{(1+\alpha I)^2} - a_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\phi}{(1+\alpha I)^2} + \theta & -a_2 \end{pmatrix}.$$

3.3.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit

Matriks Jacobi sistem (3.1) pada titik kesetimbangan $Q_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ adalah

$$J(Q_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta\Lambda}{\mu} & \psi \\ 0 & -a_1 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \delta & -\phi - a_3 & 0 \\ 0 & 0 & \phi + \theta & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks $J(Q_0)$ diperoleh dari penyelesaian persamaan $|J(Q_0) - \lambda I| = 0$ yang dipaparkan pada Lampiran 3, yaitu

$$(-\mu - \lambda)(-a_2 - \lambda)\left(\lambda^2 + k\lambda + l\right) = 0, \qquad (3.13)$$

dengan

$k = a_1 + \phi + a_3$

$l = a_1(\phi + a_3)(1 - \mathcal{R}_0)$.

Akar-akar persamaan karakteristik (3.13) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika $l > 0$. Hal ini ekuivalen dengan $\mathcal{R}_0 < 1$. Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.3.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik

Matriks Jacobi sistem (3.1) pada titik kesetimbangan Q_* adalah sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I_*}{1+bI_*} - \mu & 0 & -\frac{\beta a_1(1+bI_*)[\phi+a_3(1+\alpha I_*)]}{\beta\delta(1+bI_*)^2(1+\alpha I_*)} & \psi \\ \frac{\beta I_*}{1+bI_*} & -a_1 & \frac{\beta a_1(1+bI_*)[\phi+a_3(1+\alpha I_*)]}{\beta\delta(1+bI_*)^2(1+\alpha I_*)} & 0 \\ 0 & \delta & -\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)_2} - a_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + \theta & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks $J(Q_*)$ diperoleh dari penyelesaian persamaan $|J(Q_*) - \lambda I| = 0$ yang dipaparkan pada Lampiran 4, yaitu

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0, \tag{3.14}$$

dengan

$$A_1 = \mu + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2}$$

$$A_2 = a_2(\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu) + (\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu + a_2)(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_1 + a_3)$$
$$+ a_1(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_3) - \frac{a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)(1+\alpha I_*)}$$

$$A_3 = a_2(\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu)(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_1 + a_3)$$
$$+ (\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu + a_2)[a_1(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_3) - \frac{a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)(1+\alpha I_*)}]$$
$$+ \frac{\beta I_* a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)^2(1+\alpha I_*)}$$

$$A_4 = a_2(\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu)[a_1(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_3) - \frac{a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)(1+\alpha I_*)}]$$
$$+ \frac{\beta a_1 a_2(\phi + a_3(1+\alpha I_*))I_*}{(1+bI_*)^2(1+\alpha I_*)} - (\frac{\beta\delta I_*}{1+bI_*})(\frac{\phi\psi}{(1+\alpha I_*)^2} + \theta\psi).$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan karakteristik (3.14) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika $A_1 > 0$, $A_4 > 0$, $A_1A_2 - A_3 > 0$, dan $A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 > 0$. Karena sulitnya ekspresi dari A_1, A_2, A_3, dan A_4, kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik tidak dibuktikan secara analitik, tetapi dibuktikan secara numerik.

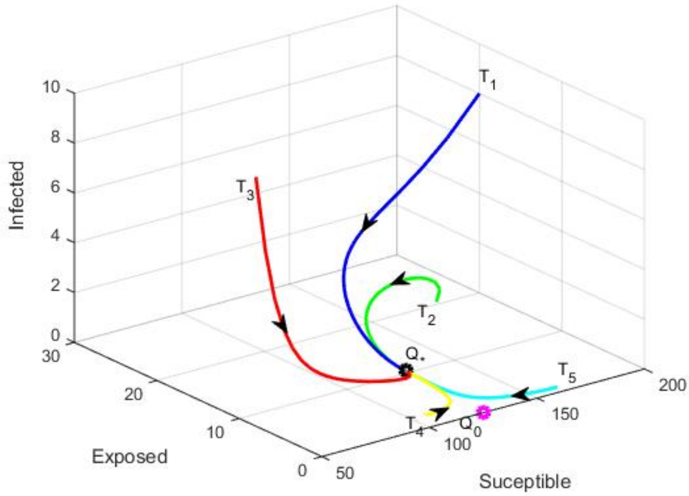
3.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini ditunjukkan simulasi numerik sistem (3.1) untuk mengilustrasikan hasil analisis pada subbab sebelumnya. Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Simulasi dilakukan untuk kasus-kasus sesuai dengan Teorema 3.2.1. Hasil simulasi numerik disajikan sebagai potret fase di ruang tiga dimensi (S, E, I) dengan beberapa nilai awal yang berbeda.

3.4.1 Simulasi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\alpha = 0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda = 100$, $\beta = 0.12$, $b = 0.4$, $\mu = 0.8$, $\psi = 0.3$, $\delta = 0.6$, $\phi = 2$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0.8$, dan $\theta = 0.7$. Nilai parameter tersebut memenuhi nilai $\mathcal{R}_0 = 1.4950 > 1$ sehingga terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu $Q_0 = (125, 0, 0, 0)$ dan $Q_* = (114.33, 6.5820, 0.9184, 2.2543)$. Nilai parameter yang diberikan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik Q_*, yaitu $A_1 = 7.6806 > 0$, $A_4 = 1.9179 > 0$, $A_1A_2 - A_3 = 97.5 > 0$, dan $A_1^2A_4 + A_1A_2A_3 - A_3^2 = 772.11 > 0$. Simulasi numerik dilakukan dengan beberapa nilai awal, yaitu $T_1 = (200, 20, 8)$, $T_2 = (180, 20, 0.1)$, $T_3 = (50, 8, 10)$, $T_4 = (100, 0.5, 0.5)$, dan $T_5 = (160, 0.1, 0.2)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.2.

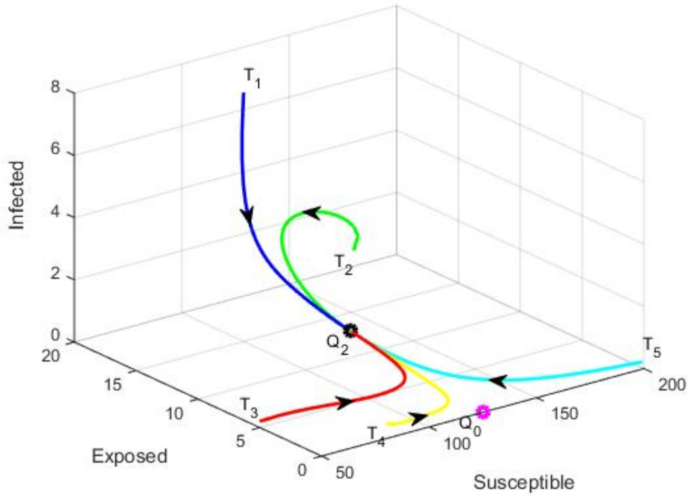
Gambar 3.2 menunjukkan bahwa orbit semua solusi dengan berbagai nilai awal menuju titik kesetimbangan endemik Q_* dan tidak ada orbit solusi yang bergerak menuju titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0. Hal ini berarti titik Q_* bersifat stabil asimtotik lokal dan titik Q_0 bersifat tidak stabil. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil.



Gambar 3.2: Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\alpha = 0$

3.4.2 Simulasi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\alpha > 0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda = 100$, $\beta = 0.12$, $b = 0.4$, $\mu = 0.8$, $\psi = 0.3$, $\delta = 0.6$, $\phi = 2$, $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.8$, dan $\theta = 0.7$. Nilai parameter tersebut memenuhi nilai $\mathcal{R}_0 = 1.4950 > 1$ sehingga terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu $Q_0 = (125, 0, 0, 0)$ dan $Q_2 = (111.373, 8.3428, 1.3437, 2.5963)$. Nilai parameter yang diberikan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik Q_2, yaitu $A_1 = 6.7208 > 0$, $A_4 = 1.6034 > 0$, $A_1A_2 - A_3 = 71.077 > 0$, dan $A_1^2A_4 + A_1A_2A_3 - A_3^2 = 464.66 > 0$. Simulasi numerik dilakukan dengan beberapa nilai awal, yaitu $T_1 = (100, 15, 8)$, $T_2 = (180, 20, 0.5)$, $T_3 = (50, 5, 0.2)$, $T_4 = (80, 0, 0.5)$, dan $T_5 = (200, 0.1, 0.2)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.3.



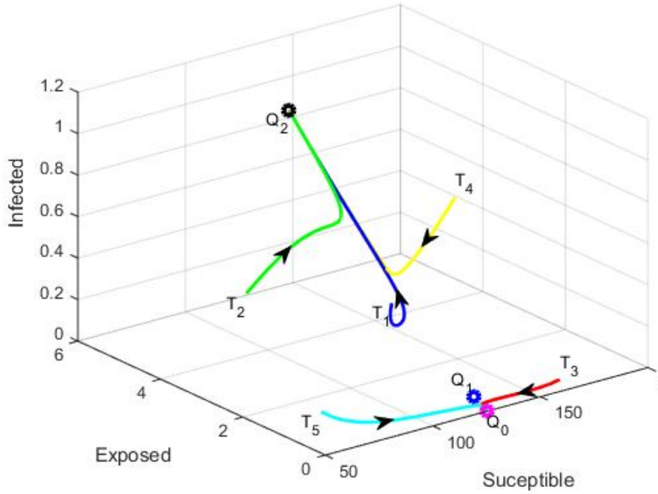
Gambar 3.3: Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\alpha > 0$

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa orbit semua solusi dengan berbagai nilai awal menuju titik kesetimbangan endemik Q_2 dan tidak ada orbit solusi yang bergerak menuju titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0. Hal ini berarti titik Q_2 bersifat stabil asimtotik lokal dan titik Q_0 bersifat tidak stabil. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil.

3.4.3 Simulasi untuk $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$, $\alpha > 0$, dan $B < 0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda = 100$, $\beta = 0.07$, $b = 0.4$, $\mu = 0.8$, $\psi = 0.3$, $\delta = 0.6$, $\phi = 2$, $\alpha = 10$, $\gamma = 0.8$, dan $\theta = 0.7$. Nilai parameter tersebut memenuhi nilai $\mathcal{R}^* = 0.1936 < \mathcal{R}_0 = 0.8721 < 1$ dan $B = -15.315$ sehingga terdapat tiga titik kesetimbangan, yaitu $Q_0 = (125, 0, 0, 0)$, $Q_1 = (124.54, 0.2822, 0.0462, 0.0868)$, dan

$Q_2 = (117.6064, 4.4051, 1.0696, 0.8469)$. Nilai parameter yang diberikan tidak memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik Q_1 karena $A_4 = -0.4353 < 0$. Nilai parameter yang diberikan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik Q_2, yaitu $A_1 = 5.6670 > 0$, $A_4 = 0.8996 > 0$, $A_1A_2 - A_3 = 45.841 > 0$, dan $A_1^2A_4 + A_1A_2A_3 - A_3^2 = 209.77 > 0$. Simulasi numerik dilakukan dengan beberapa nilai awal, yaitu $T_1 = (100, 1, 0.5)$, $T_2 = (90, 4, 0.3)$, $T_3 = (160, 0.05, 0.05)$, $T_4 = (120, 0.5, 1)$, dan $T_5 = (50, 0.1, 0.2)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4: Potret fase untuk $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$, $\alpha > 0$, dan $B < 0$

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa orbit sebagian solusi menuju titik kesetimbangan endemik Q_2, sebagian lain menuju titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0, dan tidak ada orbit solusi yang menuju titik kesetimbangan endemik Q_1. Hal ini berarti terdapat dua titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik lokal, yaitu titik Q_0 dan Q_2, sedangkan titik Q_1 bersifat tidak stabil. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut

1. Model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi berbentuk sistem otonomus nonlinear empat dimensi yang menyatakan perubahan jumlah individu rentan (*Susceptible*), terpapar (*Exposed*), terinfeksi (*Infectious*), dan sembuh (*Recovered*). Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu sembuh memiliki kekebalan sementara sehingga dapat kembali menjadi rentan.

2. Pada model tersebut terdapat dua macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan eksistensi titik kesetimbangan endemik ditentukan oleh syarat tertentu.

3. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz.

4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

4.2 Saran

Pada skripsi ini hanya dibahas analisis kestabilan lokal pada model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Pada pembahasan selanjutnya disarankan untuk menambahkan analisis kestabilan global pada model epidemi ini.

DAFTAR PUSTAKA

Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Spinger-Verlag. New York.

Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley Sons, Inc. United State of America.

Brauer, F. dan C. C. Chavez. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer Science+Business Media. New York.

Cappaso, V dan G. Serio. 1978. A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model. *Mathematical Bioscience*. 42: 41-61.

Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equations*. Wadsworth, Inc. California.

Heffernan, J.M, R.J. Smith, dan L.M. Wahl. 2005. Perspective on the Basic Reproductive Ratio. *The Royal Society Interface*. Vol. 2. Hal. 281-293.

Jana, S., S. K. Nandi, dan T.K. Kar. 2016. Complex Dynamics of an SIR Epidemic Model with Saturated Incidence Rate and Treatment. *Acta Biotheor*. Vol. 64. Hal. 6584.

Kermack, W. O. dan A. G. McKendrick. 1927. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*. Vol. 115. No. 772. Hal. 700-721.

Khan, M. A., K. Yasir, dan S. Islam. 2017. Complex Dynamics of an SEIR Epidemic Model with Saturated Incidence Rate and Treatment. ***Physica A: Statistical Mechanics and its***

Applications. Vol. 493. Hal. 210-227.

Li, M. Y. dan J. S. Muldowney. 1994. Global Stability for the SEIR Model in Epidemiology. *Mathematical Biosciences*. Vol. 125. Hal. 155-164.

Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology: An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.

Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.

Robinson, J. C. 2004. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. First Edition. Cambridge Univesity Press.

Wang, W. D. 2006. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment. *Mathematical Biosciences*. Vol. 201. Hal. 5871.

Wang, W. and S. Ruan. 2004. Bifurcation in an Epidemic Model with Constant Removal Rate of the Infectives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 291. Hal. 775793.

Zhang, J., J. Jia, dan X. Song. 2014. Analysis of an SEIR Epidemic Model with Saturated Incidence and Saturated Treatment Function. *The Scientific World Journal*. Vol. 2014.

Zhang, X. dan X. N. Liu. 2008. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 348. Hal. 433443.