# Ring dan Anti Ring Fuzzy Dengan Operator

## SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh
**SRI NURHAYATI**
**155090400111037**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2019**

# LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

## RING DAN ANTI RING FUZZY DENGAN OPERATOR

Oleh
**SRI NURHAYATI**
**155090401111037**

**Setelah dipertahankan di depan majelis penguji**
**pada tanggal 27 Mei 2019**
**dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar**
**Sarjana Matematika dalam bidang Matematika**

**Pembimbing**

**Dr. Noor Hidayat, M.Si.**
**NIP. 196112041988021001**

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.**
**NIP. 197509082000031003**

# LEMBAR PERNYATAAN

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini:**

| | |
|---|---|
| **Nama** | **: Sri Nurhayati** |
| **NIM** | **: 155090401111037** |
| **Jurusan** | **: Matematika** |
| **Penulis Skripsi Berjudul** | **: Ring dan Anti Ring Fuzzy Dengan Operator** |

**dengan ini menyatakan bahwa:**

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.**
2. **Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran**

**Malang, 27 Mei 2019**
**Yang menyatakan,**

**<u>Sri Nurhayati</u>**
**NIM. 155090401111037**

# Ring dan Anti Ring Fuzzy Dengan Operator


## ABSTRAK

Seiring berkembangnya konsep grup, teori ring juga mengalami perkembangan, salah satunya adalah ring fuzzy dengan operator. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai teori dari ring fuzzy dan anti ring fuzzy dengan operator, ideal fuzzy dan anti ideal fuzzy dengan operator, homomorfisma fuzzy dengan operator dan beberapa sifatnya.



**Kata Kunci**: ring fuzzy, ring fuzzy dengan operator, ideal fuzzy dengan operator, anti ideal fuzzy, dan homomorfisma.

**Ring and Anti Fuzzy Ring With Operators**

## ABSTRACT

As the group concept evolved, ring theory also developed, one of which was a fuzzy ring with operators. In this final project, we studied the theory of fuzzy ring and anti fuzzy ring with operators, fuzzy ideal and anti fuzzy ideal with operators, fuzzy homomorphism with operators etc., and their some elementary properties.

**Keywords**: fuzzy rings, fuzzy ring with operators, fuzzy ideal with operators, anti fuzzy ideal, and homomorphism.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul *Ring dan Anti Ring Fuzzy dengan Operator* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terimah kasih kepada

1. Dr. Noor Hidayat, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi sekaligus dosen pembimbing akademik atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan Skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Dra. Ari Andari ,M.S selaku dosen penguji segala kritik dan saran, serta motivasi yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran, serta motivasi yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematka, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Ayah (Tatak Ngadiono), Ibu (Siti Rochmah), adik (Diono Novanto), tante (Erna Gunawati) dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan Skripsi ini.
6. Astika Putri Devi Wulandari, Rizka ‘Abid Fadhiilah, dan Prisca Armensiana Soru Sey atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan Skripsi ini.

7. Hesti May Wulansari, Ika Widya Palupi, Rahilah, dan Teman atas motivasi dalam penulisan skripsi ini.

8. Keluarga Besar Matematika 2015 atas kebersamaan selama menikmati proses perkuliahan.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan guna perbaikan pada penulisan selajutnya. Semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 4 Januari 2019

Penulis

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR SIMBOL

| Simbol | Keterangan |
|---|---|
| $f: A \rightarrow B$ | pemetaan dari $A$ ke $B$ |
| $\mu: X \rightarrow [0,1]$ | pemetaan dari $X$ ke interval tertutup 0 sampai 1 |
| $\mathbb{Z}_n$ | himpunan bilangan bulat modulo $n$ |
| $\mu^c$ | komplemen himpunan fuzzy $\mu$ |
| max | nilai terbesar |
| min | nilai terkecil |
| Sup | supremum (batas atas terkecil) |
| Inf | infimum (batas bawah terkecil) |

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan salah satu ilmu matematika yang mengalami perkembangan pesat. Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada struktur aljabar dibahas grup dan ring. Grup adalah suatu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner, sedangkan ring adalah himpunan tak kosong yang disertai dengan dua operasi biner yang masing-masing memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam ring terdapat subring dan ideal.

Himpunan fuzzy adalah sebuah himpunan yang anggotanya memiliki derajat keanggotaan tertentu yang ditentukan oleh fungsi keanggotaan. Derajat keanggotaan tersebut adalah bilangan real pada interval 0 sampai dengan 1. Himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Karena konsep ini, teori himpunan fuzzy terus berkembang dan diterapkan di berbagai bidang. Rosenfeld (1971) menerapkan konsep ini ke teori grupoid dan grup. Pada tahun 1982, Liu memperkenalkan konsep dari ring fuzzy. Ren (1985) membahas ideal fuzzy dan ring faktor.

Pada skripsi ini dibahas kembali teori dari ring fuzzy dan konsep dari ring fuzzy dengan operator, ideal fuzzy, dan anti ideal fuzzy dengan operator, homomorfisma dan sifat dasar yang terkait yang merujuk pada artikel yang berjudul *Fuzzy Rings and Anti Fuzzy Rings With Operators* yang ditulis oleh M. Z. Alam (2015).

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang akan dibahas pada skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat ring fuzzy dan anti ring fuzzy dengan operator?

## 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk membahas sifat-sifat ring fuzzy dan anti ring fuzzy dengan operator

# BAB II
# DASAR TEORI

Pada bab ini akan diuraikan dasar teori yang berkaitan dengan pembahasan skripsi yaitu relasi, pemetaan, grup, ring, ring dengan operator, himpunan fuzzy, dan penerapan himpunan fuzzy pada struktur aljabar.

## 2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Konsep dasar pertama yang diberikan adalah teori pemetaan dan operasi biner. Masing-masing definisi dan contoh yang diberikan dirujuk dari Bhattacharya, dkk (1995).

**Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesius)**
Misalkan $A$ dan $B$ masing-masing adalah himpunan tak kosong. Himpunan pasangan terurut $(x, y)$ dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesius dari $A$ dan $B$, dinotasikan sebagai berikut

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

**Contoh 2.1.2**
Diberikan himpunan $A = \{0,1\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Hasil kali kartesius dari $A$ dan $B$ adalah

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$$

**Definisi 2.1.3 (Relasi)**
Misalkan $A$ dan $B$ masing-masing adalah himpunan tak kosong. $\mathcal{R}$ disebut relasi dari $A$ ke $B$ jika $\mathcal{R}$ merupakan himpunan bagian dari $A \times B$.
Jika $(x, y) \in \mathcal{R}$, maka $x$ disebut berelasi $\mathcal{R}$ dengan $y$, dinotasikan $x\mathcal{R}y$, ditulis sebagai berikut

$$\mathcal{R} = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

**Contoh 2.1.4**
Diberikan himpunan $A$ dan $B$ berdasarkan Contoh 2.1.2. Akan dibuktikan $\mathcal{R} = \{(a, 0), (c, 1)\}$ adalah relasi $B \times A$.

**Bukti :**
Berdasakan pada Contoh 2.1.2 yang telah diberikan, himpunan $\mathcal{R} = \{(a, 0), (c, 1)\} \subset B \times A$. Jadi terbkti $\mathcal{R}$ adalah relasi dari $B \times A$.

**Definisi 2.1.5 (Pemetaan )**

Misalkan $A$ dan $B$ masing-masing adalah himpunan tak kosong. $(x, y) \in f$ dari $A$ ke $B$ disebut pemetaan (fungsi) dari $A$ ke $B$ jika untuk setiap $x \in A$ berelasi dengan tepat satu $y \in B$ sedemikian sehingga $y = f(x)$. Pemetaan $f$ dari himpunan $A$ ke himpunan $B$, dapat ditulis,

$$f : A \rightarrow B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Jika $x_1 = x_2$, maka $f(x_1) = f(x_2)$. Dan jika $f(x_1) \neq f(x_2)$, maka $x_1 \neq x_2$ , $x_1, x_2 \in A$.

**Contoh 2.1.6**

Diberikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Didefinisikan relasi

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto f(x) = y = x^3.$$

Akan dibuktikan $f$ merupakan pemetaan.

**Bukti:**

Akan ditunjukkan $f$ adalah pemetaan .

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$,

$$x_1 = x_2$$
$${x_1}^3 = {x_2}^3$$
$$f(x_1) = f(x_2)$$

Sehingga terbukti $f$ adalah pemetaan.

**Definisi 2.1.7 (Operasi Biner)**

Misalkan $A$ adalah suatu himpunan tidak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan $A$ adalah pemetaan dari $A \times A$ ke $A$. Operasi biner $*$ pada $A$ dinotasikan sebagai berikut

$$* : A \times A \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

**Contoh 2.1.8**

Diberikan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli yang disertai operasi penjumlahan. Akan dibuktikan bahwa operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$ merupakan operasi biner.

**Bukti :**

$$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b$$

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ , terdapat $a + b \in \mathbb{N}$, sehingga operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$ merupakan operasi biner.

## 2.2 Himpunan Terbatas

Himpunan adalah kumpulan benda-benda dan unsur-unsur yang didefinisikan dengan jelas. Suatu himpunan dikatakan terbatas jika himpunan tersebut memiliki batas atas dan batas bawah. Berikut diberikan definisi himpunan terbatas, supremum dan infimum yang dikutip dari Hunter (2014).

**Definisi 2.2.1 (Himpunan Terbatas)**
Suatu himpunan $A \subset \mathbb{R}$ dari bilangan real adalah terbatas ke atas jika terdapat suatu bilangan real $M \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga $x \leq M$ untuk setiap $x \in A$. Bilangan $M$ demikian disebut batas atas dari $A$. Demikian pula jika terdapat suatu bilangan real $m \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga $x \geq m$ untuk setiap $x \in A$, maka A disebut terbatas ke bawah dan $m$ disebut batas bawah dari $A$. Suatu himpunan dikatakan terbatas jika himpunan tersebut terbatas ke atas dan ke bawah.

**Contoh 2.2.2**
Diberikan himpunan $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$. Semua bilangan real $M \geq 1$ adalah batas atas dari $A$ dan semua bilangan real $m \leq 0$ merupakan batas bawah dari $A$. Sehingga $A$ merupakan himpunan terbatas.

**Definisi 2.2.3 (Supremum dan Infimum)**
Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan $A \subset \mathbb{R}$.

I. Jika $M \in \mathbb{R}$ adalah batas atas dari $A$ sedemikian sehingga $M \leq M'$ untuk setiap batas atas $M'$ dari $A$, maka $M$ disebut batas atas terkecil atau supremum dari $A$, dinotasikan

$$M = \sup A$$

II. Jika $m \in \mathbb{R}$ adalah batas bawah dari $A$ sedemikian sehingga $m \geq m'$ untuk setiap batas bawah $m'$ dari $A$, maka $m$ disebut batas bawah terbesar atau infimum dari $A$, dinotasikan

$$m = \inf A$$

**Contoh 2.2.4**
Diberikan himpunan $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$ sesuai dengan Contoh 2.2.2. Diketahui semua bilangan real $M \geq 1$ adalah batas atas dari $A$ dan yang terkecil adalah 1 sehingga supremum dari $A$ adalah 1. Diketahui pula semua bilangan real $m \leq 0$ merupakan batas bawah dari $A$ dan yang terbesar adalah 0 sehingga infimum dari $A$ adalah 0.

## 2.3 Grup

Grupoid adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner dan bersifat tertutup. Sedangkan semigrup adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Berikut akan diberikan definisi semigrup, grup, grup komutatif, subgrup dan teorema subgrup yang dikutip dari Bhattacharya, dkk (1995).

**Definisi 2.3.1 (Grupoid)**
Misalkan $D$ adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$. $(D,*)$ disebut grupoid jika untuk setiap $a, b \in D, a * b \in D$.

**Contoh 2.3.2**
Misalkan didefinisikan operasi biner $a * b = a + b + ab$ dengan $a, b$ merupakan himpunan bilangan asli $N$. Akan dibuktikan bahwa $(N,*)$ adalah grupoid.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan bahwa $(N,*)$ adalah grupoid.
Ambil sebarang $a, b \in N$. Berdasarkan operasi biner $*$ yang didefinisikan diperoleh

$$a * b = a + b + ab \in N$$

Terbukti bahwa $(N,*)$ adalah grupoid.

**Contoh 2.3.3**
Misalkan $J = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ dengan operasi $\cdot$ yang didefinisikan seperti pada tabel berikut.

**Tabel 2.1**

| $\cdot$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_3$ | $a_4$ | $a_4$ | $a_4$ | $a_4$ |
| $a_4$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ |

Akan dibuktikan $J$ adalah grupoid.

**Bukti:**
Dapat dilihat pada Tabel 2.1 bahwa berlaku sifat tertutup terhadap operasi pergandaan yaitu untuk setiap $a, b \in J, a * b \in J$.

$\therefore$Terbukti bahwa $(J,*)$ adalah grupoid.

**Definisi 2.3.4 (Subgrupoid)**
Misalkan $(D,*)$ adalah grupoid dan $E$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari $D$. $E$ disebut subgrupoid dari $D$ jika terhadap operasi biner yang sama, $E$ juga merupakan grupoid.

**Contoh 2.3.5**
Diberikan $(N,*)$ adalah grupoid berdasarkan Contoh 2.3.2. Akan dibuktikan bahwa $E$ yang merupakan himpunan bilangan genap positif adalah subgrupoid dari $N$ dengan operasi biner

$$a * b = a + b + ab,\ a, b \in E.$$

**Bukti**:
Untuk menunjukkan bahwa $E$ merupakan subgrupoid, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $E$ juga merupakan grupoid.
Akan ditunjukkan bahwa $(E,*)$ adalah grupoid.
Ambil sebarang $a, b \in E$. Berdasarkan operasi biner $*$ yang didefinisikan diperoleh

$$a * b = a + b + ab \in E$$

Terbukti bahwa $(E,*)$ adalah grupoid.
Karena $E$ merupakan grupoid dan $E$ himpunan bagian dari $N$, maka $E$ merupakan subgrupoid dari $N$.

**Contoh 2.3.6**

Diberikan $(J,\cdot)$ adalah grupoid berdasarkan Contoh 2.3.3 dan $K \subset J$. Akan dibuktikan bahwa $K = \{a_1, a_2\}$ dengan operasi $\cdot$ yang didefinisikan seperti pada tabel berikut

**Tabel 2.2 Operasi pergandaan pada *G***

| $\cdot$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_2$ |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_1$ |

adalah subgrupoid.

**Bukti:**

Untuk menunjukkan bahwa $K$ merupakan subgrupoid, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $G$ juga merupakan grupoid.
Akan ditunjukkan bahwa $(K,\cdot)$ adalah grupoid.

Dapat dilihat pada Tabel 2.2 bahwa berlaku sifat tertutup terhadap operasi pergandaan yaitu untuk setiap $a, b \in K, a * b \in K$.

Terbukti bahwa $(K,\cdot)$ adalah sugrupoid.
Karena $K$ merupakan grupoid dan $K$ himpunan bagian dari $J$, maka $K$ merupakan subgrupoid dari $J$.

**Definisi 2.3.7 (Semigrup)**

Misalkan $C$ adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$. $(C,*)$ disebut semigrup jika berlaku sifat tertutup dan asosiatif.

**Contoh 2.3.8**

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan operasi pergandaan yang didefinisikan pada Tabel 2.3. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_6,\cdot)$ merupakan semigrup.

**Bukti :**

Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_6, k_1, k_2, k_3, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{a} = a + 6k_1, \qquad \bar{b} = b + 6k_2, \qquad \bar{c} = c + 6k_3$$

**Tabel 2.3** Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_6$

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi $\cdot$

$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b} &= (a+6k_1)(b+6k_2)\\ &= ab + a6k_2 + 6k_1b + 6k_16k_2\\ &= (ab) + 6(ak_2 + bk_1 + k_15k_2)\\ &= c + 6k \in \mathbb{Z}_6\end{aligned}$$

dengan $c = ab$

$k = ak_2 + bk_1 + k_16k_2$

$\therefore$ $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi $\cdot$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ bersifat asosiatif terhadap operasi $\cdot$

$$\begin{aligned}(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c} &= \big((a+6k_1)(b+6k_2)\big)(c+6k_3)\\ &= \big((ab) + 6(ak_2 + bk_1 + k_16k_2)\big)(c+6k_3)\\ &= abc + ab6k_3 + 6(ak_2 + bk_1 + k_16k_2)c +\\ &\quad 6\,(ak_2 + bk_1 + k_16k_2)6k_3\\ &= abc + ab6k_3 + 6ak_2c + 6bk_1c + 6k_16k_2c +\\ &\quad 6ak_26k_3 + 6bk_16k_3 + 5k_15k_26k_3\\ &= abc + a6bk_3 + a6k_2c + a6k_26k_3 + 6k_1bc +\\ &\quad 6k_16bk_3 + 6k_16k_2c + 6k_16k_26k_3\\ &= abc + a6(bk_3 + k_2c + k_26k_3) + 6k_1bc +\\ &\quad 6k_16(bk_3 + k_2c + k_26k_3)\\ &= (a+6k_1)\big((b+6k_2)(c+6k_3)\big)\\ &= \bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c}).\end{aligned}$$

$\therefore$ Sifat asosiatif tepenuhi.

Karena $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi $\cdot$ dan bersifat asosiatif maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan semigrup.

**Contoh 2.3.9**

Diberikan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ dengan operasi pergandaan yang didefinisikan pada Tabel 2.4. Akan dibuktikan $(G,\cdot)$ merupakan semigrup.

**Tabel 2.4 Operasi pergandaan pada *G***

| $\cdot$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |

**Bukti:**

Akan ditunjukkan $(G,\cdot)$ merupakan semigrup.

1. Pada Tabel 2.4 dapat dilihat bahwa berlaku sifat tertutup terhadap operasi pergandaan.
2. Berlaku sifat asosiatif, yaitu $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $\forall x, y, z \in G$.
3. Ambil sebarang $x, y, z \in G$. Untuk $x = a_1$, $y = a_2$, $z = a_3$ diperoleh

$$a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = a_1 \cdot a_3 = a_1$$

dan

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot a_3 = a_1$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Jadi $(G,\cdot)$ merupakan semigrup.

**Definisi.2.3.10 (Grup)**

Misalkan $G$ adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut.

i. Berlaku sifat tertutup, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$, $a * b = c$

ii. Berlaku sifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$

iii. Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$, $e * a = a * e = a$

iv. Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1}$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

**Contoh 2.3.11**

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ dengan operasi penjumlahan yang didefinisikan pada Tabel 2.5. Akan dibuktikan bahwa $G = (\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup.

**Tabel 2.5** Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

| $+$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{5}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |

**Bukti :**

Akan ditunjukkan bahwa $G = (\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup.

Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_6, k_1, k_2, k_3, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3$$

i. Berlaku sifat tertutup.

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (a + 6k_1) + (b + 6k_2) \\ &= (a + b) + 6(k_1 + k_2) \\ &= c + 6k \in \mathbb{Z}_6 \end{aligned}$$

dengan $c = a + b$

$k = k_1 + k_2$

ii. Berlaku sifat assosiatif.

$$\begin{aligned} \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} &= \big((a + 6k_1) + (b + 6k_2)\big) + (c + 6k_3) \\ &= \big((a + b) + 6(k_1 + k_2)\big) + (c + 6k_3) \\ &= (a + b + c) + 6(k_1 + k_2 + k_3) \\ &= (a + 6k_1) + \big((b + c) + 6(k_2 + k_3)\big) \\ &= (a + 6k_1) + \big((b + 6k_2) + (c + 6k_3)\big) \\ &= \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right). \end{aligned}$$

iii. Terdapat elemen netral yaitu $\overline{0}$, dimana $\bar{a} + \overline{0} = \bar{a}$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$. Dapat dilihat pada Tabel 2.5 bahwa untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$, $\overline{0}$ merupakan elemen netral.

iv. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$, yaitu

- Untuk $a = \bar{0}$ terdapat $a^{-1} = \bar{0}$ sehingga $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.
- Untuk $a = \bar{1}$ terdapat $a^{-1} = \bar{5}$sehingga $\bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$.
- Untuk $a = \bar{2}$ terdapat $a^{-1} = \bar{4}$ sehingga $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$.
- Untuk $a = \bar{3}$ terdapat $a^{-1} = \bar{3}$ sehingga $\bar{\bar{3}} + \bar{3} = \bar{0}$.
- Untuk $a = \bar{4}$ terdapat $a^{-1} = \bar{2}$ sehingga $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$.
- Untuk $a = \bar{5}$ terdapat $a^{-1} = \bar{1}$ sehingga $\bar{5} + \bar{1} = \bar{0}$.

Dengan demikian invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{5}$, invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$, invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{3}$, invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$, dan invers dari $\bar{5}$ adalah $\bar{1}$. Jadi Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}_6$.

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ memenuhi Definisi 2.3.10, sehingga terbukti $\mathbb{Z}_6$ adalah grup.

**Contoh 2.3.12**
Misalkan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ dengan operasi $+$, didefinisikan seperti pada Tabel 2.6

**Tabel 2.6** Operasi penjumlahan pada $G$

| $+$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_4$ | $a_3$ |
| $a_3$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_1$ |
| $a_4$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ |

Akan dibuktikan bahwa $(G, +)$ adalah grup.

**Bukti :**
Akan ditunjukkan $(G, +)$ merupakan grup.

1) Sifat tertutup jelas terpenuhi sesuai dengan Tabel 2.6.
2) Berlaku sifat asosiatif yaitu $\forall x, y, z \in G$,
   $x + (y + z) = (x + y) + z$.
   Ambil sebarang $x, y, z \in G$. Untuk $x = a_1$, $y = a_3$, $z = a_4$ diperoleh
   $a_1 + (a_3 + a_4) = a_1 + a_1 = a_1$ dan

$(a_1 + a_3) + a_4 = a_3 + a_4 = a_1$
Dengan cara yang sama $\forall x, y, z \in G$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$.

3) Terdapat elemen identitas $e = a_1 \in G$ sedemikian sehingga $\forall x \in G$ berlaku $e + x = x + e = x$. Ambil sebarang $x \in G$, untuk $x = a_2$, diperoleh $a_1 + a_2 = a_2 + a_1 = a_2$. Dengan cara yang sama untuk setiap $x \in G$ berlaku $e + x = x + e = x$.
4) Untuk setiap $x \in G$ terdapat $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga
$x + x^{-1} = x^{-1} + x = e$, yaitu
   - Untuk $x = a_1$ terdapat $x^{-1} = a_1$ sehingga $a_1 + a_1 = a_1$.
   - Untuk $x = a_2$ terdapat $x^{-1} = a_2$ sehingga $a_2 + a_2 = a_1$.
   - Untuk $x = a_3$ terdapat $x^{-1} = a_4$ sehingga $a_3 + a_4 = a_1$.
   - Untuk $x = a_4$ terdapat $x^{-1} = a_3$ sehingga $a_4 + a_3 = a_1$.

$\therefore (G, +)$ merupakan grup.

**Definisi 2.3.13 (Grup Komutatif)**
Misalkan $(G,*)$ adalah grup. Jika operasi $*$ memenuhi sifat komutatif yaitu

$$a * b = b * a$$

untuk setiap $a, b \in G$, maka $(G,*)$ disebut grup komutatif (*abelian*).

**Contoh 2.3.14**
Diberikan grup $\mathbb{Z}_6$ seperti pada Contoh 2.3.4. Akan dibuktikan bahwa $G = (\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif.

**Bukti :**
Berdasarkan Tabel 2.2, ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_6$, $k_1, k_2, k_3, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3$$

Akan ditunjukkan bahwa $G = (\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif.

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (a + 6k_1) + (b + 6k_2) \\ &= (a + b) + 6(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

$$= (b + a) + 6(k_2 + k_1)$$
$$= \bar{b} + \bar{a}$$

∴ Berlaku sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_6$. Jadi $\mathbb{Z}_6$ merupakan grup komutatif.

**Definisi 2.3.15 (Subgrup)**
Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan $H$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari $G$. $H$ disebut subgrup dari $G$, ditulis $H < G$, jika terhadap operasi biner $*$, $H$ juga merupakan grup.

**Contoh 2.3.16**
Diberikan $G = (\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup berdasarkan Contoh 2.3.11 dan Tabel 2.7 akan dibuktikan bahwa $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah subgrup dari $G$.
**Bukti :**

**Tabel 2.7** Operasi penjumlahan pada $H$

| + | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ |

Untuk membuktikan bahwa $H$ adalah subgrup dari $G$ maka akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $H$ adalah grup terhadap operasi biner yang sama pada $G$.
Akan ditunjukkan bahwa $H$ adalah subgrup.
Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in H$, $k_1, k_2, k_3, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3$$

i. Berlaku sifat tertutup.

$$\bar{a} + \bar{b} = (a + 6k_1) + (b + 6k_2)$$
$$= (a + b) + 6(k_1 + k_2)$$
$$= c + 6k \in H$$

dengan $c = a + b$
$k = k_1 + k_2$

ii. Berlaku sifat assosiatif.

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \big((a + 6k_1) + (b + 6k_2)\big) + (c + 6k_3)$$
$$= \big((a + b) + 6(k_1 + k_2)\big) + (c + 6k_3)$$
$$= (a + b + c) + 6(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$= (a + 6k_1) + \big((b + c) + 6(k_2 + k_3)\big)$$
$$= (a + 6k_1) + \big((b + 6k_2) + (c + 6k_3)\big)$$
$$= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

iii. Terdapat elemen netral yaitu $\bar{0}$, dimana $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ untuk setiap $\bar{a} \in H$. Dapat dilihat pada Tabel 2.7 bahwa untuk setiap $a \in H$, $\bar{0}$ merupakan elemen netral.

iv. Untuk setiap $a \in H$ terdapat $a^{-1} \in H$ sedemikian sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$, yaitu

- Untuk $a = \bar{0}$ terdapat $a^{-1} = \bar{0}$ sehingga $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$. .
- Untuk $a = \bar{2}$ terdapat $a^{-1} = \bar{4}$ sehingga $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$.
- Untuk $a = \bar{4}$ terdapat $a^{-1} = \bar{2}$ sehingga $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$.

Dengan demikian invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$ dan invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$. Jadi Untuk setiap $a \in H$ terdapat $a^{-1} \in H$ .

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv dapat disimpulkan bahwa $H$ memenuhi Definisi 2.3.10, sehingga terbukti $H$ adalah grup. Karena $H \subset \mathbb{Z}_6$ adalah grup maka $H$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

**Teorema 2.3.17 (Subgrup)**
Misalkan $G$ adalah grup dan $H$ himpunan bagian tak kosong dari $G$. $H$ merupakan subgrup dari $G$ jika dan hanya jika

(i) $\forall a, b \in H, ab \in H$
(ii) $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$

**Bukti :**

($\Rightarrow$) Diketahui $H$ adalah subgrup dari $G$. Akan dibuktikan berlaku sifat i dan ii.
Karena $H$ adalah subgrup, berarti $H$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen idrntitas dan setiap elemennya memiliki invers.

($\Leftarrow$) Diketahui i dan ii. Akan dibuktikan $H$ adalah subgrup.

- Sifat tertutp telah dipenuhi oleh ketentuan i.

- Karena $H$ merupakan himpunan bagian dari grup $G$ maka setiap elemen di $H$ juga bersifat asosiatif.
- Mempunyai elemen identitas.
  Ambil $a \in H$ dari ketentuan ii maka $a^{-1} \in H$. $a$ dan $a^{-1}$ merupakan elemen dari $H$. Karena $aa^{-1} \in H$ dan berlaku sifat tertutup, maka $aa^{-1} = e \in H$. Sehingga diperoleh $e \in H$.
  Setiap elemen mempunyai invers dipenuhi oleh ketentuan ii.
  Jadi $H$ merupakan subgrup.

**Contoh 2.3.18**
Misalkan $G$ adalah grup sesuai dengan Contoh 2.3.12. Akan dibuktikan bahwa himpunan $H = \{a_1, a_2\}$ dengan operasi pada Tabel 2.8 merupakan subgrup dari $G$.

**Tabel 2.8** Operasi penjumlahan pada $H$

| $+$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $a_1$ |

**Bukti :**
Akan ditunjukkan bahwa himpunan $H = \{a_1, a_2\}$ merupakan subgrup dari $G$.

i. $\forall a, b \in H, ab \in H$ .
   Jelas terlihat pada Tabel 2.8 bahwa untuk setiap $a, b \in H$, $ab \in H$
ii. $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$.
   Terlihat pada Tabel 2.8 invers dari $a_1$ adalah $a_1$ karena $a_1 + a_1 = a_1$dan invers dari $a_2$ adalah $a_2$ karena $a_2 + a_2 = a_1$.

Berdasarkan i dan ii terbukti bahwa $H$ merupakan subgrup dari $G$.

## 2.4 Ring

Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasin biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut diberikan definisi dari ring, subring, dan ideal yang dikutip dari Bhattacharya, dkk(1995).

**Definisi 2.4.1 (Ring)**
Misalkan $R$ adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$. $(R,+,\cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut

i. $(R,+)$ merupakan grup komutatif
ii. $(R,\cdot)$ merupakan semigrup
iii. Berlaku sifat distributif $\forall a,b,c \in R$ yaitu

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \text{ dan } (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

**Contoh 2.4.2**
Diberikan $\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5}\}$. Akan dibuktikan $G=(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ adalah ring.

**Bukti :**

i. $(\mathbb{Z}_6,+)$ merupakan grup komutatif. Telah dibuktikan pada Contoh 2.3.14
ii. $(\mathbb{Z}_6,\cdot)$ merupakan semigrup. Telah dibuktikan pada pada Contoh 2.3.8
iii. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ memenuhi sifat distributif yaitu,untuk setiap $a,b,c \in (\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ berlaku $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ dan $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.
Ambil $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\mathbb{Z}_6$, $k_1,k_2,k_3,a,b,c\in\mathbb{Z}$.

$$\bar{a}=a+6k_1, \bar{b}=b+6k_2, \bar{c}=c+6k_3$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) &= (a+6k_1)\big((b+6k_2)+(c+6k_3)\big)\\
&= (a+6k_1)\big((b+c)+6(k_2+k_3)\big)\\
&= a(b+c)+a6(k_2+k_3)+6k_1(b+c)\\
&\quad +5k_16(k_2+k_3)\\
&= ab+ac+6ak_2+6ak_3+6k_1b+\\
&\quad 6k_1c+6k_16k_2+6k_16k_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (ab + 6ak_2 + 6k_1b + 6k_16k_2) \\
&\quad +(ac + 6ak_3 + 6k_1c + 6k_16k_3) \\
&= \big((a + 6k_1)(b + 6k_2)\big) + \big((a + 6k_1)(c + 6k_3)\big) \\
&= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} &= \big((a + 6k_1) + (b + 6k_2)\big)(c + 6k_3) \\
&= \big((a + b) + 6(k_1 + k_2)\big)(c + 6k_3) \\
&= (a + b)c + (a + b)6k_3 + 6(k_1 + k_2)c \\
&\quad +6(k_1 + k_2)6k_3 \\
&= ac + bc + a6k_3 + b6k_3 + 6k_1c \\
&\quad +6k_2c + 6k_16k_3 + 6k_26k_3 \\
&= (ac + a6k_3 + 6k_1c + 6k_16k_3) + \\
&\quad (bc + b6k_3 + 6k_2c + 6k_26k_3) \\
&= \big((a + 6k_1)(c + 6k_3)\big) \\
&\quad +\big((b + 6k_2)(c + 6k_3)\big) \\
&= \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}
\end{aligned}$$

Terbukti untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ berlaku sifat distributif yaitu $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Jadi berdasarkan i, ii, dan iii, terbukti $(\mathbb{Z}_6, +,\cdot)$ adalah ring.

**Contoh 2.4.3**

Misal $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah grup dengan operasi $+$ sesuai dengan Contoh 2.3.12. Akan dibuktikan $(G, +,\cdot)$ dengan operasi $\cdot$ sesuai dengan Tabel 2.9 adalah ring.

**Tabel 2.9** Operasi pergandaan pada $G$

| $\cdot$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |

**Bukti :**

i. $(G,+)$ merupakan grup. Telah dibuktikan pada pada Contoh 2.3.12. Akan ditunjukkan $(G,+)$ merupakan grup komutatif yaitu $\forall x,y \in G$ berlaku $x+y=y+x$.
Ambil sebarang $x,y,\in G$. Untuk $x=a_3$, $y=a_4$ sesuai dengan Tabel 2.9 diperoleh $a_3+a_4=a_4+a_3=a_1$. Dengan cara yang sama $\forall x,y \in G$ berlaku $x+y=y+x$.
Jadi $(G,+)$ merupakan grup komutatif.

ii. Akan ditunjukkan $(G,\cdot)$ merupakan semigrup.
1) Pada Tabel 2.9 dapat dilihat bahwa berlaku sifat tertutup terhadap operasi pergandaan.
2) Berlaku sifat asosiatif, yaitu $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$, $\forall x,y,z \in G$.
3) Ambil sebarang $x,y,z \in G$. Untuk $x=a_1$, $y=a_2$, $z=a_3$ diperoleh
$$a_1\cdot(a_2\cdot a_3)=a_1\cdot a_3=a_1$$
dan
$$(a_1\cdot a_2)\cdot a_3=a_1\cdot a_3=a_1$$
Dengan cara yang sama untuk setiap $x,y,z \in G$ berlaku $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.
Jadi $(G,\cdot)$ merupakan semigrup.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $(G,+,\cdot)$ memenuhi sifat distributif yaitu, untuk setiap $x,y,z \in (G,+,\cdot)$ berlaku
$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ dan $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ .
Ambil sebarang $x,y,z \in G$. Untuk $x=a_1$, $y=a_2$, dan $z=a_3$, berdasarkan **Tabel 2.3** dan Tabel 2.9 diperoleh
$$a_1\cdot(a_2+a_3)=a_1\cdot a_2+a_1\cdot a_3$$
$$a_1\cdot a_4=a_1+a_1$$
$$a_1=a_1$$
dan
$$(a_1+a_2)\cdot a_3=a_1\cdot a_3+a_2\cdot a_3$$
$$a_2\cdot a_3=a_1+a_3$$
$$a_3=a_3$$
Dengan cara yang sama untuk setiap $x,y,z \in (G,+,\cdot)$ berlaku sifat distributif, yaitu
$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ dan $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ .

Jadi, terbukti $(G,+,\cdot)$ adalah ring.

**Definisi 2.4.4 (Subring)**
Misalkan $R$ adalah ring dan $S$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari $R. S$ disebut subring dari $R$ jika terhadap operasi biner yag sama, $S$ juga merupakan ring.
**Contoh 2.4.5**
Diberikan $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah Ring berdasarkan Contoh 2.4.2 dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_6$. Akan dibuktikan $(H, +, \cdot)$ adalah subring dari $\mathbb{Z}_6$.

**Bukti :**
Untuk membuktikan bahwa $H$ adalah subring dari $\mathbb{Z}_6$ maka akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $H$ adalag ring dengan operasi biner yang sama pada $\mathbb{Z}_6$.
$(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup komutatif . Berdasarkan Contoh 2.3.16 telah dibuktikan bahwa $(H, +)$ merupakan grup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(H, +)$ merupakan grup komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in H$ berlaku sifat komutatif.

$$a + b = b + a.$$

i. Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in H, k_1, k_2, k_3, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3$$

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (a + 6k_1) + (b + 6k_2)\\ &= (a + b) + 6(k_1 + k_2)\\ &= (b + a) + 6(k_2 + k_1)\\ &= \bar{b} + \bar{a}\end{aligned}$$

$\therefore$ Berlaku sifat komutatif pada $H$. Jadi $H$ merupakan grup komutatif.

ii. $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ merupakan semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(H, \cdot)$ merupakan semigrup.

**Tabel 2.10** Operasi pergandaan pada $H$

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |

Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in H, k_1, k_2, k_3, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{a} = a \cdot 6k_1, \qquad \bar{b} = b \cdot 6k_2, \bar{c} = c \cdot 6k_3$$

Akan ditunjukkan bahwa $H$ tertutup terhadap operasi $\cdot$

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (a + 6k_1)(b + 6k_2) \\ &= ab + a6k_2 + 6k_1 b + 6k_1 6k_2 \\ &= (ab) + 6(ak_2 + bk_1 + k_1 5k_2) \\ &= c + 6k \in H \end{aligned}$$

dengan $c = ab$

$$k = ak_2 + bk_1 + k_1 6k_2$$

$\therefore H$ tertutup terhadap operasi $\cdot$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $H$ bersifat asosiatif terhadap operasi $\cdot$

$$\begin{aligned} (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} &= \big((a + 6k_1)(b + 6k_2)\big)(c + 6k_3) \\ &= \big((ab) + 6(ak_2 + bk_1 + k_1 6k_2)\big)(c + 6k_3) \\ &= abc + ab6k_3 + 6(ak_2 + bk_1 + k_1 6k_2)c + \\ &\quad 6\,(ak_2 + bk_1 + k_1 6k_2)6k_3 \\ &= abc + ab6k_3 + 6ak_2 c + 6bk_1 c + \\ &\quad 6k_1 6k_2 c + \\ &\quad 6ak_2 6k_3 + 6bk_1 6k_3 + 5k_1 5k_2 6k_3 \\ &= abc + a6bk_3 + a6k_2 c + a6k_2 6k_3 + \\ &\quad 6k_1 bc + \\ &\quad 6k_1 6bk_3 + 6k_1 6k_2 c + 6k_1 6k_2 6k_3 \\ &= abc + a6(bk_3 + k_2 c + k_2 6k_3) + 6k_1 bc + \\ &\quad 6k_1 6(bk_3 + k_2 c + k_2 6k_3) \\ &= (a + 6k_1)\big((b + 6k_2)(c + 6k_3)\big) \\ &= \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}). \end{aligned}$$

$\therefore$ Sifat asosiatif tepenuhi.

Karena $H$ tertutup terhadap operasi $\cdot$ dan bersifat asosiatif maka terbukti bahwa $H$ merupakan semigrup.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $(H, +, \cdot)$ memenuhi sifat distributif yaitu

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in H, k_1, k_2, k_3, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3$$

$$\begin{aligned}
\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) &= (a + 6k_1)\big((b + 6k_2) + (c + 6k_3)\big) \\
&= (a + 6k_1)\big((b + c) + 6(k_2 + k_3)\big) \\
&= a(b + c) + a6(k_2 + k_3) + 6k_1(b + c) \\
&\quad +5k_1 6(k_2 + k_3) \\
&= ab + ac + 6ak_2 + 6ak_3 + 6k_1 b + \\
&\quad 6k_1 c + 6k_1 6k_2 + 6k_1 6k_3 \\
&= (ab + 6ak_2 + 6k_1 b + 6k_1 6k_2) \\
&\quad +(ac + 6ak_3 + 6k_1 c + 6k_1 6k_3) \\
&= \big((a + 6k_1)(b + 6k_2)\big) + \big((a + 6k_1)(c + 6k_3)\big) \\
&= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} &= \big((a + 6k_1) + (b + 6k_2)\big)(c + 6k_3) \\
&= \big((a + b) + 6(k_1 + k_2)\big)(c + 6k_3) \\
&= (a + b)c + (a + b)6k_3 + 6(k_1 + k_2)c \\
&\quad +6(k_1 + k_2)6k_3 \\
&= ac + bc + a6k_3 + b6k_3 + 6k_1 c \\
&\quad + 6k_2 c + 6k_1 6k_3 + 6k_2 6k_3 \\
&= (ac + a6k_3 + 6k_1 c + 6k_1 6k_3) + \\
&\quad (bc + b6k_3 + 6k_2 c + 6k_2 6k_3) \\
&= \big((a + 6k_1)(c + 6k_3)\big) \\
&\quad +\big((b + 6k_2)(c + 6k_3)\big) \\
&= \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}
\end{aligned}$$

Terbukti untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku sifat distributif yaitu

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Jadi berdasarkan i, ii, dan iii, terbukti $(H +,\cdot)$ adalah ring. Karena $H \subset \mathbb{Z}_6$ merupakan ring maka $H$ adalah subring dari $\mathbb{Z}_6$.

**Contoh 2.4.6**

Diberikan $(G,+,\cdot)$ adalah Ring berdasarkan Contoh 2.4.3 dan $H=\{a_1,a_2\}$ adalah himpunan bagian dari $G$. Akan dibuktikan $(H,+,\cdot)$ adalah subring dari $G$.

**Tabel 2.11** Operasi pergandaan pada $H$

| . | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ |

**Bukti:**

Pada Contoh 2.3.18 telah dibuktikan bahwa $(H,+\cdot)$ adalah grup. Untuk membuktikan $(H,+,\cdot)$ adalah subring terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $(H,+)$ adalah grup komutatif dan $(H,\cdot)$ adalah semigrup.

- Akan ditunjukkan bahwa $(H,+)$ adalah grup komutatif.
  Ambil sebarang $a,b\in H$. Untuk $a=a_1$ dan $b=a_2$ diperoleh
  $$\begin{aligned} a+b &= a_1+a_2 \\ &= a_2 \end{aligned}$$
  dan
  $$\begin{aligned} b+a &= a_2+a_1 \\ &= a_2 \end{aligned}$$
  $(H,+)$ adalah grup komutatif.
- Akan ditunjukkan $(H,\cdot)$ adalah semigrup.
  - Jelas terlihat pada Tabel 2.11 bahwa sifat tertutup berlaku yaitu untuk setiap $a,b\in H, a\cdot b\in H$.
  - Ambil sebarang $a,b,c\in H$. Untuk $a=a_1$, $b=a_2$ dan $c=a_2$ diperoleh
    $$\begin{aligned} a\cdot(b\cdot c) &= a_1\cdot(a_1\cdot a_2) \\ &= a_1\cdot a_1 \\ &= a_1 \end{aligned}$$
    dan
    $$\begin{aligned} (a\cdot b)\cdot c &= (a_1\cdot a_1)\cdot a_2 \\ &= a_1\cdot a_2 \\ &= a_1. \end{aligned}$$

  Terbukti $H$ merupakan semigrup.

Karena $(H,+)$ adalah grup komutatif dan $(H,\cdot)$ adalah semigrup, maka terbukti $(H,+,\cdot)$ adalah subring dari $G$.

**Teorema 2.4.7 (Subring)**
Himpunan bagian tidak kosong $S$ dari ring $R$ merupakan subring jika dan hanya jika memenuhi

i. $\forall a, b \in S$ berlaku $a - b \in S$
ii. $\forall a, b \in S$ berlaku $ab \in S$

**Bukti :**
($\Rightarrow$) Diketahui $S$ subring dari ring $R$. Akan dibuktikan kondisi i dan ii terpenuhi.
Karena $S$ subring dari ring $R$ dan $a, b \in S$, maka $S$ subgrup dari $R$ dengan operasi penjumlahan. Sehingga

$$b \in S \Rightarrow -b \in S$$

dan

$$\begin{aligned} a \in S, b \in S &\Rightarrow a \in S, -b \in S \\ &\Rightarrow a + (-b) \in S \\ &\Rightarrow a - b \in S. \end{aligned}$$

Dan karena $S$ subring dari ring $R$, maka $S$ semigroup dari $R$ dengan operasi pergandaan. Sehingga jelas $\forall a, b \in S$ berlaku $ab \in S$.
($\Leftarrow$) Diketahui kondisi i dan ii. Akan dibuktikan $S$ subring dari ring $R$.
Dari kondisi i diperoleh

$$a \in S \Rightarrow a - a \in S \Rightarrow 0 \in S$$

Karena terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan di $S$, maka

$$\begin{aligned} 0 \in S, a \in S &\Rightarrow 0 - a \in S \\ &\Rightarrow -a \in S \end{aligned}$$

yaitu untuk setiap elemen dari $S$ memiliki invers dalam operasi penjumlahan.
Misal $a, b \in S$, maka $-b \in S$ dan berdasarkan kondisi i diperoleh

$$\begin{aligned} 0 \in S, -b \in S &\Rightarrow a - (-b) \in S \\ &\Rightarrow a + b \in S. \end{aligned}$$

Karena $S$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan $S$ himpunan bagian dari $R$, hukum assosiatif dan komutatif terhadap pergandaan terpenuhi di $S$. Jadi $S$ adalah subring dari ring $R$.

**Definisi 2.4.8 (Ideal)**
Misalkan $R$ adalah ring dan $I$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari $R$.

- $I$ disebut ideal kiri jika
  (i) untuk setiap $a, b \in I, a - b \in I$
  (ii) untuk setiap $a \in I, r \in R, ra \in I$
- $I$ disebut ideal kanan jika
  (i) untuk setiap $a, b \in I, a - b \in I$
  (ii) untuk setiap $a \in I, r \in R, ar \in I$

Jika $a \in I, r \in R, ra \in I$ dan $ar \in I$, maka $I$ disebut ideal dua sisi.

**Contoh 2.4.9**
Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ berdasarkan Contoh 2.4.2 dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan $(H, +, \cdot)$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$ .

**Bukti :**
i. untuk setiap $a, b \in H, a - b \in H$

**Tabel 2.12** Operasi pengurangan pada $H$

| - | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ |

Berdasarkan Tabel 2.12, untuk setiap $a, b \in H, a - b \in H.$

ii. untuk setiap $a \in H, r \in \mathbb{Z}_6, ra \in H$

**Tabel 2.13** Operasi $ar, a \in H, r \in \mathbb{Z}_6$

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |

**Tabel 2.14** Operasi $ra, a \in H, r \in \mathbb{Z}_6$

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |

Berdasarkan Tabel 2.13 dan Tabel 2.14 untuk setiap $a \in H, r \in \mathbb{Z}_6$ , $ra \in H$ dan $ar \in H$. Jadi , $H$ ideal dari $\mathbb{Z}_6$ .

**Contoh 2.4.10**

Diberikan $(G, +, \cdot)$ adalah Ring berdasarkan Contoh 2.4.3 dan $H = \{a_1, a_2\}$ adalah subring dari $G$. Akan dibuktikan $H$ bukan merupakan ideal dari $G$.

**Bukti:**

a) untuk setiap $a, b \in H, a - b \in H$

**Tabel 2.15** Operasi pengurangan pada $H$

| $-$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $a_1$ |

Berdasarkan Tabel 2.15, untuk setiap $a, b \in H, a - b \in H$.

b) untuk setiap $a \in H, r \in G$ , $ra \in H$

**Tabel 2.16** Operasi $ar, a \in H, r \in G$

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ |

**Tabel 2.17** Operasi $ra, a \in H, r \in G$

| $\cdot$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ |

Berdasarkan Tabel 2.16 untuk setiap $a \in H, r \in G$ , $ra \notin H$. Jadi , $H$ Bukan merupakan ideal dari $G$ .

## 2.5 Ring Dengan Operator

Ring dengan operator adalah suatu ring dengan suatu himpunan yang memenuhi aksioma tertentu. Definisi dan contoh dari ring dengan operator dirujuk dari Massa'deh (2016) dan homomorfisma dengan operator Massa'deh (2012).

**Definisi 2.5.1 (Ring Dengan Operator)**

Misalkan $R$ adalah ring. $M$ adalah suatu himpunan tak kosong.

$$\cdot : M \times R \longrightarrow R$$
$$(m, x) \longmapsto m \cdot x$$

$R$ disebut ring dengan operator ($R$ adalah M-ring) jika dipenuhi

a) $mx \in R,\ \forall x \in R$ dan $m \in M$
b) $m(x + y) = mx + my,\ \forall x, y \in R$ dan $m \in M$
c) $m(xy) = (mx)y = x(my), \forall x, y \in R$ dan $m \in M,$

**Contoh 2.5.2**

Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ berdasarkan Contoh 2.4.2 dan himpunan $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_6$ adalah ring dengan operator.

**Bukti :**

a) Akan ditunjukkan $m\bar{x} \in \mathbb{Z}_6,\ \forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in M$.
Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6, k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

$$\bar{x} = x + 6k_1, \bar{y} = y + 6k_2$$

$$m\bar{x} = m(x + 6k_1)$$
$$= mx + 6mk_1, \in \mathbb{Z}_6$$

untuk $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in M,\ m\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$.

**Tabel 2. 18** Operasi $mx,\ \forall x \in R$ dan $m \in M$

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |
| 2 | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
| 3 | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ |
| 4 | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |

b) Akan ditunjukkan $m(\bar{x}+\bar{y}) = m\bar{x}+m\bar{y},\ \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in M$.

Ambil $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{Z}_6, k_1,k_2,k_3,x,y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

$$\bar{x} = x+6k_1, \bar{y} = y+6k_2$$

$$\begin{aligned} m(\bar{x}+\bar{y}) &= m\big((x+6k_1)+(y+6k_2)\big) \\ &= m\big((x+y)+6(k_1k_2)\big) \\ &= m(x+y)+6m(k_1k_2) \\ &= mx+my+6mk_1+6mk_2 \\ &= (mx+6mk_1)+(my+6mk_2) \\ &= m(x+6k_1)+m(y+6k_2) \\ &= m\bar{x}+m\bar{y} \end{aligned}$$

Terbukti untuk setiap $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in M$ berlaku

$$m(\bar{x}+\bar{y}) = m\bar{x}+m\bar{y}.$$

c) Akan ditunjukkan $m(\bar{x}\bar{y}) = (m\bar{x})\bar{y} = \bar{x}(m\bar{y})$, $\forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in M$.

Ambil $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{Z}_6, k_1,k_2,k_3,x,y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

- $$\begin{aligned} m(\bar{x}\bar{y}) &= m\big((x+6k_1)(y+6k_2)\big) \\ &= m\big(xy+6yk_1+6xk_2+6k_1(6k_2)\big) \\ &= m\big(xy+6\,(yk_1+xk_2+6k_1k_2)\big) \\ &= mxy+6m(yk_1+xk_2+6k_1k_2) \end{aligned}$$

`

- $$\begin{aligned} (m\bar{x})\bar{y} &= \big(m(x+6k_1)\big)(y+6k_2) \\ &= (mx+6mk_1)(y+6k_2) \\ &= mxy+6mxk_2+6myk_1+6mk_1(6k_2) \\ &= mxy+6m(xk_2+yk_1+6k_1k_2) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \bar{x}(m\bar{y}) &= (x+6k_1)\Big(m\big((y+6k_2)\big)\Big) \\ &= (x+6k_1)(my+6mk_2) \\ &= mxy+6mxk_2+6myk_1+6k_1(6mk_2) \end{aligned}$$

$$= mxy + 6m(xk_2 + yk_1 + 6k_1k_2)$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in M$ berlaku $m(\bar{x}\bar{y}) = (m\bar{x})\bar{y} = \bar{x}(m\bar{y})$.

Karena a), b), c) terpenuhi maka $\mathbb{Z}_6$ sesuai dengan Definisi 2.5.1 dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah ring dengan operator.

**Contoh 2.5.3**

Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ berdasarkan Contoh 2.4.2 dan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ .Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_6$ adalah ring dengan operator.

**Bukti :**

a. Akan ditunjukkan $m\bar{x} \in \mathbb{Z}_6,\ \forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in \mathbb{Z}$.
   Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6, k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}$

$$\bar{x} = x + 6k_1, \bar{y} = y + 6k_2$$

$$\begin{aligned} m\bar{x} &= m(x + 6k_1) \\ &= mx + 6mk_1 \end{aligned}$$

   Karena $m, x \in \mathbb{Z}$ maka $mx \in \mathbb{Z}$ dan $mx + 6mk_1 \in \mathbb{Z}_6$.
   Terbukti untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in \mathbb{Z},\ m\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$.

b. Akan ditunjukkan $m(\bar{x} + \bar{y}) = m\bar{x} + m\bar{y},\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in \mathbb{Z}$.
   Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6, k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{x} = x + 6k_1, \bar{y} = y + 6k_2$$

$$\begin{aligned} m(\bar{x} + \bar{y}) &= m\big((x + 6k_1) + (y + 6k_2)\big) \\ &= m\big((x + y) + 6(k_1k_2)\big) \\ &= m(x + y) + 6m(k_1k_2) \\ &= mx + my + 6mk_1 + 6mk_2 \\ &= (mx + 6mk_1) + (my + 6mk_2) \\ &= m(x + 6k_1) + m(y + 6k_2) \\ &= m\bar{x} + m\bar{y} \end{aligned}$$

   Karena $m, x, y \in \mathbb{Z}$ maka berlaku sifat distributif dan komutatif .
   Terbukti untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$m(\bar{x}+\bar{y}) = m\bar{x} + m\bar{y}.$$

c. Akan ditunjukkan $m(\bar{x}\bar{y}) = (m\bar{x})\bar{y} = \bar{x}(m\bar{y})$,
$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in \mathbb{Z}$.
Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, $k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}$.

- $m(\bar{x}\bar{y}) = m\big((x+6k_1)(y+6k_2)\big)$

$$= m\big(xy + 6yk_1 + 6xk_2 + 6k_1(6k_2)\big)$$

$$= m\big(xy + 6\,(yk_1 + xk_2 + 6k_1k_2)\big)$$

`

$$= mxy + 6m(yk_1 + xk_2 + 6k_1k_2)$$

- $(m\bar{x})\bar{y} = \big(m(x+6k_1)\big)(y+6k_2)$

$$= (mx + 6mk_1)(y+6k_2)$$

$$= mxy + 6mxk_2 + 6myk_1 + 6mk_1(6k_2)$$

$$= mxy + 6m(xk_2 + yk_1 + 6k_1k_2)$$

- $\bar{x}(m\bar{y}) = (x+6k_1)\Big(m\big((y+6k_2)\big)\Big)$

$$= (x+6k_1)(my + 6mk_2)$$

$$= mxy + 6mxk_2 + 6myk_1 + 6k_1(6mk_2)$$

$$= mxy + 6m(xk_2 + yk_1 + 6k_1k_2)$$

Karena $m, x, y \in \mathbb{Z}$ maka berlaku sifat distributif.
Terbukti bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $m \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$m(\bar{x}\bar{y}) = (m\bar{x})\bar{y} = \bar{x}(m\bar{y}).$$

Karena a, b, c terpenuhi maka $\mathbb{Z}_6$ sesuai dengan Definisi 2.5.1 dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah ring dengan operator.

**Contoh 2.5.4**

Misalkan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah ring berdasarkan Contoh 2.4.3 dan himpunan $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Akan dibuktikan $G$ bukan merupakan ring dengan operator.

**Bukti:**

Pertama akan ditunjukkan bahwa $mx \in G,\ \forall x \in G$ dan $m \in M$.

Ambil $a \in G$ dan $m \in M$.

Misal $a = a_1$ dan $m = 2$, diperoleh

$$ma = 2(a_1)$$
$$= 2a_1 \notin G$$

Karena $mx \notin G, \forall x \in G$ dan $m \in M$ maka terbukti bahwa $G$ bukan merupakan ring dengan operator.

**Definisi 2.5.5 (Subring Dengan Operator)**

Misalkan $R$ adalah M-ring dan $S$ subring dari $R$. $S$ disebut M-subring dari $R$ (subring operator dari $R$) jika $S$ juga merupakan M-ring.

**Contoh 2.5.6**

Diberikan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ subring berdasarkan Contoh 2.4.4 dan himpunan $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Akan dibuktikan $H$ adalah subring dengan operator.

**Bukti :**

a) Akan ditunjukkan $m\bar{x} \in H,\ \forall \bar{x} \in H$ dan $m \in M$.
   Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in H$, $k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

$$\bar{x} = x + 6k_1, \bar{y} = y + 6k_2$$
$$m\bar{x} = m(x + 6k_1)$$
$$= mx + 6mk_1, \in H$$

   untuk $\forall \bar{x} \in H$ dan $m \in M,\ m\bar{x} \in H$.

b) Akan ditunjukkan $m(\bar{x} + \bar{y}) = m\bar{x} + m\bar{y},\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in H$ dan $m \in M$.
   Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in H$, $k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

$$\bar{x} = x + 6k_1, \bar{y} = y + 6k_2$$
$$m(\bar{x} + \bar{y}) = m\big((x + 6k_1) + (y + 6k_2)\big)$$
$$= m\big((x + y) + 6(k_1 k_2)\big)$$
$$= m(x + y) + 6m(k_1 k_2)$$
$$= mx + my + 6mk_1 + 6mk_2$$

$$= (mx + 6mk_1) + (my + 6mk_2)$$
$$= m(x + 6k_1) + m(y + 6k_2)$$
$$= m\bar{x} + m\bar{y}$$

Terbukti $\forall \bar{x}, \bar{y} \in H$ dan $m \in M$ berlaku $m(\bar{x} + \bar{y}) = m\bar{x} + m\bar{y}$.

**Tabel 2. 19** Operasi $m\bar{x}$, $\forall \bar{x} \in H$ dan $m \in M$

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
| 2 | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| 3 | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| 4 | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |

c) Akan ditunjukkan $m(\bar{x}\bar{y}) = (m\bar{x})\bar{y} = \bar{x}(m\bar{y})$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in H$ dan $m \in M$.
Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in H$ $k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

- $m(\bar{x}\bar{y}) = m\big((x + 6k_1)(y + 6k_2)\big)$

$$= m\big(xy + 6yk_1 + 6xk_2 + 6k_1(6k_2)\big)$$
$$= m\big(xy + 6\,(yk_1 + xk_2 + 6k_1k_2)\big)$$
`
$$= mxy + 6m(yk_1 + xk_2 + 6k_1k_2)$$

- $(m\bar{x})\bar{y} = \big(m(x + 6k_1)\big)(y + 6k_2)$

$$= (mx + 6mk_1)(y + 6k_2)$$
$$= mxy + 6mxk_2 + 6myk_1 + 6mk_1(6k_2)$$
$$= mxy + 6m(xk_2 + yk_1 + 6k_1k_2)$$

- $\bar{x}(m\bar{y}) = (x + 6k_1)\Big(m\big((y + 6k_2)\big)\Big)$

$$= (x + 6k_1)(my + 6mk_2)$$
$$= mxy + 6mxk_2 + 6myk_1 + 6k_1(6mk_2)$$

$$= mxy + 6m(xk_2 + yk_1 + 6k_1k_2)$$

Terbukti bahwa untuk $\forall \bar{x}, \bar{y} \in H$ dan $m \in M$ berlaku

$$m(\bar{x}\bar{y}) = (m\bar{x})\bar{y} = \bar{x}(m\bar{y})$$

Karena ketiga aksioam terpenuhi maka $H$ sesuai dengan Definisi 2.5.5 dapat disimpulkan bahwa $H$ adalah subring dengan operator.

**Definisi 2.5.7 (Homomorfisma dengan Operator)**
Misal $(R_1, \oplus, \odot)$ dan $(R_2, +, \cdot)$ masing-masing adalah ring dengan operator. Pemetaan $\theta: R_1 \to R_2$ disebut homomorfisma dengan operator jika dipenuhi.

*(i)* $\theta(x \odot y) = \theta(x) \cdot \theta(y), \forall x, y \in R_1$
*(ii)* $\theta(x \oplus y) = \theta(x) + \theta(y), \forall x, y \in R_1$
*(iii)* $\theta(m \odot x) = m \cdot \theta(x), x \in R_1, m \in M$

**Contoh 2.5.8**
Berdasarkan Contoh 2.5.2, diberikan ring $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ merupakan ring dengan operator dan $M = \{1,2,3,4\}$ dengan pemetaan yang didefinisikan sebagai berikut

$$\theta: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$$
$$x \longmapsto \theta(x) = x$$

Akan dibuktikan pemetaan $\theta$ merupakan suatu homorfisma dengan operator.

**Bukti**:
Akan ditunjukkan $\theta$ merupakan suatu homorfisma dengan operator.
Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, $k_1, k_2, k_3, x, y \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

$$\bar{x} = x + 6k_1, \bar{y} = y + 6k_2$$

a. Akan dibuktikan $\theta(\bar{x}\bar{y}) = \theta\ (\bar{x})\ \theta\ (\bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$.

$$\begin{aligned} \theta(\bar{x}\bar{y}) &= \theta((x + 6k_1)(y + 6k_2)) \\ &= \theta\big(xy + 6yk_1 + 6xk_2 + 6k_1(6k_2)\big) \\ &= \theta\big(xy + 6\ (yk_1 + xk_2 + 6k_1k_2)\big) \\ &= xy + 6\ (yk_1 + xk_2 + 6k_1k_2) \\ &= xy + 6yk_1 + 6xk_2 + 6k_1(6k_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x + 6k_1)(y + 6k_2) \\
&= \theta(x + 6k_1)\theta(y + 6k_2) \\
&= \theta\,(\bar{x})\,\theta\,(\bar{y})
\end{aligned}
$$

Terbukti $\theta(\bar{x}\bar{y}) = \theta\,(\bar{x})\,\theta\,(\bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$.

b. Akan dibuktikan $\theta(x + y) = \theta\,(\bar{x}) + \theta\,(\bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$.

$$
\begin{aligned}
\theta(\bar{x} + \bar{y}) &= \theta\big((x + 6k_1) + (y + 6k_2)\big) \\
&= \theta\big((x + y) + 6(k_1 k_2)\big) \\
&= \big((x + y) + 6(k_1 k_2)\big) \\
&= (x + 6k_1)(y + 6k_2) \\
&= \theta(x + 6k_1) + \theta(y + 6k_2) \\
&= \theta\,(\bar{x}) + \theta\,(\bar{y})
\end{aligned}
$$

Terbukti $\theta(x + y) = \theta\,(\bar{x}) + \theta\,(\bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$.

c. Akan dibuktikan $\theta(\mathrm{mx}) = \mathrm{m} \cdot \theta(\mathrm{x}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$.

$$
\begin{aligned}
\theta(m\bar{x}) &= \theta\big(m(x + 6k_1)\big) \\
&= \theta(mx + 6mk_1) \\
&= mx + 6mk_1 \\
&= m(x + 6k_1) \\
&= m\theta\big((x + 6k_1)\big) \\
&= m\theta(\bar{x})
\end{aligned}
$$

Terbukti $\theta(\mathrm{mx}) = \mathrm{m} \cdot \theta(\mathrm{x}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6, \mathrm{m} \in \mathrm{M}$.

Berdasarkan a, b, c terbukti bahwa $\theta$ merupakan homorfisma dengan operator.

## 2.6 Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy adalah himpunan yang setiap unsurnya memiliki nilai derajat keanggotaan tertentu. Nilai derajat keanggotaan pada himpunan fuzzy terletak pada bilangan real di interval [0,1]. Berikut diberikan definisi himpunan fuzzy, komplemen himpunan fuzzy dan operasi standar pada himpunan fuzzy yaitu irisan dan gabungan yang dirujuk dari Kandasamy (2003) dan Zadeh (1965).

**Definisi 2.6.1(Himpunan Fuzzy)**
Misalkan $X$ adalah suatu himpunan tak kosong. Himpunan (subhimpunan) fuzzy pada $X$ adalah suatu pemetaan $\mu: X \to [0,1]$.

Karena $\mu$ adalah pemetaan, $\mu$ dapat ditulis dalam himpunan terurut, dalam hal ini

$$\mu = \{(x, \mu(x)) | x \in X\}$$

**Contoh 2.6.2**
Diberikan suatu himpunan $X = \{0, 1, 2, 3, 4{,}5\}$ dan pemetaan $\mu$ yang didefinisikan $\mu : X \to [0,1]$ sedemikian sehingga $\mu(0) = 0$; $\mu(1) = 0.2$; $\mu(2) = 0.4$; $\mu(3) = 0.6$; $\mu(4) = 0{,}8$ dan $\mu(5) = 1$. Himpunan $\mu = \{(0,0), (1,0.2), (2,0.4), (3,0.6), (4,0.8), (5,1)\}$ disebut himpunan fuzzy atau himpunan bagian fuzzy pada $X$.

**Definisi 2.6.3 (Himpunan Kosong Fuzzy)**
Misalkan $X$ adalah suatu himpunan tak kosong dan $\mu$ adalah himpunan fuzzy pada $X$. Himpunan fuzzy $\mu$ disebut himpunan kosong fuzzy jika derajat keanggotaan untuk setiap $x \in X$ adalah nol.

**Contoh 2.6.4**
Diberikan suatu himpunan $X = \{2, 3, 5, 7\}$ dan pemetaan $\mu$ yang didefinisikan $\mu : X \to [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\mu(2) = 0; \mu(3) = 0; \mu(5) = 0 \text{ dan } \mu(7) = 0.$$

Himpunan fuzzy $\mu = \{(2,0), (3,0), (5,0), (7,0)\}$ disebut himpunan kosong fuzzy karena derajat keanggotaan untuk setiap $x \in X$ adalah nol.

**Definisi 2.6.5 (Kesamaan Himpunan Fuzzy)**
Misalkan $X$ adalah suatu himpunan tak kosong. $\lambda$ dan $\mu$ adalah himpunan fuzzy pada $X$ dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\lambda(x)$ dan $\mu(x)$. Himpunan fuzzy $\lambda$ dan $\mu$ adalah sama, ditulis $\lambda = \mu$, jika $\lambda(x) = \mu(x)$ untuk setiap $x \in X$.

**Contoh 2.6.6**
Diberikan suatu himpunan $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ serta pemetaan $\lambda$ dan $\mu$

$$\lambda : X \to [0,1]$$
$$\mu : X \to [0,1]$$

sedemikian sehingga

$$\lambda(0) = 0; \lambda(1) = 0.25; \lambda(2) = 0.5; \lambda(3) = 0.75; \lambda(4) = 1$$
$$\mu(0) = 0; \mu(1) = 0.25; \mu(2) = 0.5; \mu(3) = 0.75; \mu(4) = 1.$$

Himpunan fuzzy $\lambda = \{(0,0), (1,0.25), (2,0.5), (3,0.75), (4,1)\}$ dan himpunan fuzzy $\mu = \{(0,0), (1,0.25), (2,0.5), (3,0.75), (4,1)\}$. Karena $\lambda(x) = \mu(x)$ untuk setiap $x \in X$, maka $\lambda = \mu$.

**Definisi 2.6.7 (Komplemen Himpunan Fuzzy)**
Misalkan $X$ adalah suatu himpunan tak kosong. Komplemen himpunan fuzzy $\mu$ pada himpunan $X$ dinotasikan dengan $\mu^c$ dan didefinisikan $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ untuk setiap $x \in X$.
Dapat ditulis $\mu^c = \{(x, \mu^c(x)) | x \in X\}$.

**Contoh 2.6.8**
Diberikan suatu himpunan fuzzy seperti pada Contoh 2.6.2. Berdasarkan Definisi 2.6.3 maka komplemen himpunan fuzzy dari $\mu$ adalah

- $\mu^c(0) = 1 - 0 = 1$
- $\mu^c(1) = 1 - 0.2 = 0.8$
- $\mu^c(2) = 1 - 0.4 = 0.6$
- $\mu^c(3) = 1 - 0.6 = 0.4$
- $\mu^c(4) = 1 - 0.8 = 0.2$
- $\mu^c(5) = 1 - 1 = 0$

$$\mu^c = \{(0,1), (1, 0.8), (2, 0.6), (3, 0.4), (4, 0.2), (5, 0)\}$$

**Definisi 2.6.9 (Memuat)**
Misalkan $X$ adalah suatu himpunan tak kosong. $\lambda$ dan $\mu$ adalah himpunan fuzzy pada $X$ dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\lambda(x)$ dan $\mu(x)$. $\mu$ dikatakan memuat $\lambda$, ditulis $\lambda \subset \mu$, jika untuk setiap $x \in X$, $\lambda(x) \leq \mu(x)$.

**Contoh 2.6.10**
Diberikan suatu himpunan $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ serta pemetaan $\lambda$ dan $\mu$

$$\lambda : X \to [0,1]$$
$$\mu : X \to [0,1]$$

sedemikian sehingga

$$\lambda(0) = 0; \lambda(1) = 0.2; \lambda(2) = 0.4; \lambda(3) = 0.6; \lambda(4) = 0.8$$
$$\mu(0) = 0; \mu(1) = 0.25; \mu(2) = 0.5; \mu(3) = 0.75; \mu(4) = 1.$$

$\mu$ memuat $\lambda$.

**Bukti :**
Akan ditunjukkan $\lambda \subset \mu$.

- $\lambda(0) = 0 \leq \mu(0) = 0$
- $\lambda(1) = 0.2 \leq \mu(1) = 0.25$
- $\lambda(2) = 0.4 \leq \mu(2) = 0.5$
- $\lambda(3) = 0.6 \leq \mu(3) = 0.75$
- $\lambda(4) = 0.8 \leq \mu(4) = 1$

Karena $\lambda(x) \leq \mu(x)$ untuk setiap $x \in X$, maka $\lambda \subset \mu$. Terbukti $\mu$ memuat $\lambda$.

**Definisi 2.6.11 (Operasi Standar Fuzzy)**
Misalkan $X$ adalah suatu himpunan tak kosong. $\lambda$ dan $\mu$ adalah himpunan fuzzy pada $X$.

1. Gabungan dari dua himpunan fuzzy $\lambda$ dan $\mu$ pada himpunan $X$, dinotasikan dengan $\lambda \cup \mu$, adalah himpunan bagian fuzzy dari himpunan $X$ yang didefinisikan sebagai
$$(\lambda \cup \mu) = \{(x, (\lambda \cup \mu)(x)) | x \in X\}$$
dengan
$$(\lambda \cup \mu)(x) = \max\{\lambda(x), \mu(x)\}, \forall x \in X.$$

2. Irisan dari dua himpunan fuzzy $\lambda$ dan $\mu$ pada himpunan $X$, dinotasikan dengan $\lambda \cap \mu$, adalah himpunan bagian fuzzy dari himpunan $X$ yang didefinisikan sebagai

$$(\lambda \cap \mu) = \{(x, \quad (\lambda \cap \mu)(x)) | x \in X\}$$

dengan

$$(\lambda \cap \mu)(x) = \min\{\lambda(x), \mu(x)\}, \forall x \in X.$$

**Contoh 2.6.12**

Diberikan suatu himpunan $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ serta himpunan fuzzy $\lambda$ dan $\mu$ dari $X$, sedemikian sehingga

$\lambda(0) = 0; \lambda(1) = 0.25; \lambda(2) = 0.5; \lambda(3) = 0.75; \lambda(4) = 1$

$\mu(0) = 0; \mu(1) = 0.2; \mu(2) = 0.4; \mu(3) = 0.6; \mu(4) = 1$

Akan ditentukan $\lambda(\cup \mu)(1)$, $(\lambda \cup \mu)(3)$,$(\lambda \cap \mu)(1)$, dan $(\lambda \cap \mu)(3)$.

- $(\lambda \cup \mu)(1) = \max\{\lambda(1), \mu(1)\}$
  $= \max\{0.25, 0.2\} = 0.25$
- $(\lambda \cup \mu)(3) = \max\{\lambda(3), \mu(3)\}$
  $= \max\{0.75, 0.6\} = 0.75$
- $(\lambda \cap \mu)(1) = \min\{\lambda(1), \mu(1)\}$
  $= \min\{0.25, 0.2\} = 0.2$
- $(\lambda \cap \mu)(3) = \min\{\lambda(3), \mu(3)\}$
  $= \min\{0.75, 0.6\} = 0.6$

Sehingga diperoleh $(\lambda \cup \mu) = \{(1, 0.25), (3, 0.75)\}$ dan $(\lambda \cap \mu) = \{(1, 0.2), (3, 0.6)\}$.

**Definisi 2.6.13 (*Level Subset*)**

Misalkan $\mu$ adalah himpunan fuzzy pada $X$. Untuk $t \in [0,1]$ tertentu, himpunan $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$ disebut *level subset*.

**Contoh 2.6.14**

Diberikan suatu himpunan $X = \{0, 5, 10, 15, 20\}$ dan pemetaan $\mu$ yang didefinisikan $\mu : X \to [0,1]$ sedemikian sehingga $\mu(0) = 0$; $\mu(5) = 0.25$; $\mu(10) = 0.4$; $\mu(15) = 0.6$; dan $\mu(20) = 0{,}75$. Akan ditunjukkan *level subset* $\mu_{0.5}$.

**Jawab:**

$\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$

$\mu_{0.5} = \{15, 20\}$.

## 2.7 Penerapan Himpunan Fuzzy Pada Struktur Aljabar

Berikut diberikan definisi dan contoh dari subgrupoid fuzzy, subgrup fuzzy, ring fuzzy, anti ring fuzzy, subring fuzzy dan ideal fuzzy yang dirujuk dari Rosenfeld (1971) dan Liu (1982).

**Definisi 2.7.1 (Subgrupoid Fuzzy)**
Misalkan $C$ adalah subgrupoid. $\mu$ disebut subgrupoid fuzzy dari $C$ jika $\forall x, y \in C$ berlaku

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y)).$$

**Contoh 2.7.2**
Diberikaan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah subgrupoid terhadap pergandaan sesuai dengan Contoh 2.4.6. Didefinisikan pemetaan $\mu : G \to [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{a_1, a_2\} \\ 0, & x \in \{a_3, a_4\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.

Akan ditunjukkan $\mu = \{(a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 0), (a_4, 0)\}$ merupakan supgrupoid fuzzy pada $G$.

**Bukti :**
Berikut akan ditunjukkan jika $\mu$ merupakan supgrupoid fuzzy pada $G$.
Berdasarkan Tabel 2.20 diperoleh bahwa $\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$, untuk setiap $x, y \in G$. Sehingga sesuai dengan Definisi 2.7.1, $\mu$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $G$.

**Tabel 2.20** Hasil operasi untuk memeriksa subgrupoid fuzzy pada $G$

| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ | $\mu(x)$ | $\mu(y)$ | $\mu(x \cdot y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 1 | 0 | 1 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 1 | 0 | 1 |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_2$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_3$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_4$ | $a_4$ | 1 | 0 | 0 |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_1$ | 0 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 0 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ | 0 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 0 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |

**Contoh 2.7.3**
Diberikaan $H = \{a_1, a_2\}$ adalah subgrupoid terhadap pergandaan. Didefinisikan pemetaan $\mu : H \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in \{a_1\} \\ 0, & x \in \{a_2\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.

Akan ditunjukkan$\vartheta = \{(a_1, 0.5), (a_2, 0),\}$ merupakan supgrupoid fuzzy pada $G$.

**Bukti :**
Berikut akan ditunjukkan jika $\mu$ merupakan supgrupoid fuzzy pada $G$.

Berdasarkan Tabel 2.21 diperoleh bahwa $\vartheta(xy) \geq \min(\vartheta(x), \vartheta(y))$, untuk setiap $x, y \in H$. Sehingga sesuai dengan Definisi 2.7.1, $\vartheta$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $H$.

**Tabel 2.21** Hasil operasi untuk memeriksa subgrupoid fuzzy pada $H$

| $x$ | $y$ | $xy$ | $\vartheta(x)$ | $\vartheta(y)$ | $\vartheta(xy)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 0.5 | 0 | 0.5 |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_1$ | 0 | 0.5 | 0.5 |
| | $a_2$ | $a_2$ | 0 | 0 | 0 |

**Definisi 2.7.4 (Subgrup Fuzzy)**
Misalkan $G$ adalah grup. Subgrupoid fuzzy $\mu$ dari $G$ disebut subgrup fuzzy dari $G$ jika $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ untuk setiap $x \in G$.

**Contoh 2.7.5**
Diberikaan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah grup terhadap penjumlahan sesuai dengan Contoh 2.3.5 Didefinisikan pemetaan $\mu : G \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{a_1, a_2\} \\ 0, & x \in \{a_3, a_4\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.
Akan ditunjukkan $\mu = \{(a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 0), (a_4, 0)\}$ merupakan subgrup fuzzy pada $G$.

**Bukti :**
Untuk menunjukkan $\mu$ merupakan subgrup fuzzy pada $G$, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\mu$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $G$.
Berdasarkan Tabel 2.22 diperoleh bahwa $\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$, untuk setiap $x, y \in G$. $\mu$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $G$.

**Tabel 2.22** Hasil operasi untuk memeriksa subgrupoid fuzzy pada $G$

| $x$ | $y$ | $x+y$ | $\mu(x)$ | $\mu(y)$ | $\mu(x+y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_2$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_3$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_4$ | $a_4$ | 1 | 0 | 0 |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_4$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_4$ | $a_3$ | 1 | 0 | 0 |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_3$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_2$ | $a_4$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_3$ | $a_2$ | 0 | 0 | 1 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_4$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_2$ | $a_3$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |
| | $a_4$ | $a_2$ | 0 | 0 | 1 |

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\mu$ merupakan subgrup fuzzy pada $G$.

**Tabel 2.23** Hasil pemeriksaan kesamaan $\mu(x)$ dan $\mu(x^{-1})$

| $x$ | $x^{-1}$ | $\mu(x)$ | $\mu(x^{-1})$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | 1 | 1 |
| $a_2$ | $a_2$ | 1 | 1 |
| $a_3$ | $a_4$ | 0 | 0 |
| $a_4$ | $a_3$ | 0 | 0 |

Berdasarkan Tabel 2.23 diperoleh bahwa $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ untuk setiap $x \in G$. Jadi sesuai dengan Definisi 2.7.4 Terbukti $\mu$ merupakan subgrup fuzzy pada $G$.

**Contoh 2.7.6**

Diberikaan $H = \{a_1, a_2\}$ adalah grup terhadap operasi penjumlahan sesuai dengan Contoh 2.3.18 Didefinisikan pemetaan $\vartheta : H \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in \{a_1\} \\ 0, & x \in \{a_2\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in H$.
Akan ditunjukkan $\vartheta = \{(a_1, 0.5), (a_2, 0)\}$ merupakan subgrup fuzzy pada $H$.

**Bukti :**
Untuk menunjukkan $\vartheta$ merupakan subgrup fuzzy pada $H$, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\vartheta$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $H$.
Berdasarkan Tabel 2.24 diperoleh bahwa $\vartheta(xy) \geq \min(\vartheta(x), \vartheta(y))$, untuk setiap $x, y \in H$. $\vartheta$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $H$.

**Tabel 2.24** Hasil operasi untuk memeriksa subgrupoid fuzzy pada $H$

| $x$ | $y$ | $x + y$ | $\vartheta(x)$ | $\vartheta(y)$ | $\vartheta(x + y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| | $a_2$ | $a_2$ | 0.5 | 0 | 0 |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ | 0 | 0.5 | 0 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 0 | 0 | 0.5 |

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\vartheta$ merupakan subgrup fuzzy pada $G$.

**Tabel 2.25** Hasil pemeriksaan kesamaan $\vartheta(x)$ dan $\vartheta(x^{-1})$

| $x$ | $x^{-1}$ | $\vartheta(x)$ | $\vartheta(x^{-1})$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | 0.5 | 0.5 |
| $a_2$ | $a_2$ | 0 | 0 |

Berdasarkan Tabel 2.25 diperoleh bahwa $\vartheta(x^{-1}) \geq \vartheta(x)$ untuk setiap $x \in H$. Jadi sesuai dengan Definisi 2.7.4 Terbukti $\vartheta$ merupakan subgrup fuzzy pada $H$.

**Definisi 2.7.7 (Ring Fuzzy)**
Misalkan $R$ adalah ring. Himpunan fuzzy $\mu$ dari $R$ disebut ring fuzzy dari $R$ jika

(i) $\mu(x-y) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big), \quad \forall x, y \in R$

(ii) $\mu(xy) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big), \quad \forall x, y \in R$

**Contoh 2.7.8**
Diberikan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah ring sesuai dengan Contoh 2.4.3 Didefinisikan pemetaan $\mu : G \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{a_1, a_2\} \\ 0, & x \in \{a_3, a_4\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.
Akan ditunjukkan $\mu = \{(a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 0), (a_4, 0)\}$ merupakan ring fuzzy pada $G$.
**Bukti :**
Akan ditunjukkan $\mu$ merupakan ring fuzzy pada $G$.

(i) $\mu(x-y) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big), \quad \forall x, y \in G$

**Tabel 2.26** Hasil operasi untuk memeriksa $\mu(x-y) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big), \quad \forall x, y \in G$

| $x$ | $y$ | $x-y$ | $\mu(x)$ | $\mu(y)$ | $\mu(x-y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_2$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_4$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_4$ | $a_3$ | 1 | 0 | 0 |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 1 | 1 | 1 |
| | $a_3$ | $a_3$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_4$ | $a_4$ | 1 | 0 | 0 |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_3$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_2$ | $a_4$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |
| | $a_4$ | $a_2$ | 0 | 0 | 1 |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_4$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_2$ | $a_3$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_3$ | $a_2$ | 0 | 0 | 1 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 0 | 0 | 1 |

Pada Tabel 2.26 dapat dilihat bahwa $\mu(x-y) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big)$ untuk setiap $x, y \in G$.

(ii) $\mu(xy) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big), \quad \forall x, y \in G$
Aksioma $\mu(xy) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big), \quad \forall x, y \in G$ telah ditunjukkan pada Contoh 2.7.2.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi maka terbukti bahwa $\mu$ merupakan ring fuzzy pada $G$.

**Contoh 2.7.9**

Diberikaan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5}\}$adalah ring sesuai dengan Contoh 2.4.2 Didefinisikan pemetaan $\alpha : \mathbb{Z}_6 \ \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & x \in \{\overline{1},\ \overline{3},\ \overline{5}\} \\ \dfrac{3}{4}, & x \in \{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{4}\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$. Akan dibuktikan $\alpha = \left\{\left(\overline{0}, \frac{3}{4}\right), \left(\overline{1}, \frac{2}{3}\right), \left(\overline{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\overline{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\overline{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\overline{5}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ merupakan ring fuzzy pada $\mathbb{Z}_6$.

**Bukti:**

Akan ditunjukkan $\mu$ merupakan ring fuzzy pada $\mathbb{Z}_6$.

a. $\alpha(\bar{x} - \bar{y}) \geq \min\big(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\big), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$
Untuk membuktikan aksioma ini, maka harus ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga harus diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi. Misalkan $P = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ dan $Q = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:

- Untuk sebarang $\bar{x}, \in P$ dan $\bar{y} \in Q$,
$$\min\big(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\big) = \tfrac{2}{3}.$$
Karena $\bar{x} - \bar{y} \in Q$ maka,
$$\alpha(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{2}{3}.$$
Sehingga $\alpha(\bar{x} - \bar{y}) \geq \min\ \big(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\big)$ terpenuhi.
- Untuk sebarang $\bar{x} \in Q$ dan $\ \bar{y} \in P$,

$$\min\left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right) = \frac{2}{3}.$$

Karena $\bar{x} - \bar{y} \in Q$ maka,

$$\alpha(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

Sehingga $\alpha(\bar{x} - \bar{y}) \geq \min\ \left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in P$,

$$\min\left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right) = \frac{3}{4}.$$

Karena$\bar{x} - \bar{y} \in P$ maka,

$$\alpha(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{3}{4}.$$

Sehingga $\alpha(\bar{x} - \bar{y}) \geq \min\ \left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in Q$,

$$\min\left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right) = \frac{2}{3}.$$

Karena $\bar{x} - \bar{y} \in P$ maka,

$$\alpha(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{3}{4}.$$

Sehingga $\alpha(\bar{x} - \bar{y}) \geq \min\ \left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

Berdasarkan bukti diatas aksioma pertama ring fuzzy terpenuhi.

b. $\alpha(\bar{x}\bar{y}) \geq \min\ \left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right)$

Untuk membuktikan aksioma kedua ini, maka akan ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga akan diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi. Misalkan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $Q = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:

- Untuk sebarang $\bar{x} \in P$ dan $\bar{y} \in Q$,

$$\min\left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right) = \frac{2}{3}.$$

Karena $\bar{x}\bar{y} \in P$ maka,

$$\alpha(\bar{x}\bar{y}) = \frac{3}{4}.$$

Sehingga $\alpha(\bar{x}\bar{y}) \geq \min\ \left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x} \in Q$ dan $\bar{y} \in P$,

$$\min\left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right) = \frac{2}{3}.$$

Karena $\bar{x}\bar{y} \in P$ maka,

$$\alpha(\bar{x}\bar{y}) = \frac{3}{4}.$$

Sehingga$\alpha(\bar{x}\bar{y}) \geq \min\left(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in P$,
$$\min(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})) = \tfrac{3}{4}.$$

  Karena $\bar{x}\bar{y} \in P$ maka,
$$\alpha(\bar{x}\bar{y}) = \frac{3}{4}.$$
  Sehingga $\alpha(\bar{x}\bar{y}) \geq \min\ (\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y}))$ terpenuhi.
- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in Q$,
$$\min(\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y})) = \tfrac{2}{3}.$$
  Karena $\bar{x}\bar{y} \in Q$ maka,
$$\alpha(\bar{x}\bar{y}) = \frac{2}{3}.$$
  Sehingga $\alpha(\bar{x}\bar{y}) \geq \min\ (\alpha(\bar{x}), \alpha(\bar{y}))$ terpenuhi.
  Berdasarkan bukti diatas aksioma kedua ring fuzzy juga terpenuhi.

Karena aksioma pertama dan kedua terpenuhi maka terbukti $\alpha$ merupakan ring fuzzy dari $\mathbb{Z}_6$.

**Definisi 2.7.10 (Anti Ring Fuzzy)**
Misalkan $R$ adalah ring. Himpunan fuzzy $\mu$ dari $R$ disebut anti ring fuzzy dari $R$ jika

(i) $\mu(x - y) \leq \max\ (\mu(x), \mu(y)), \quad \forall x, y \in R$
(ii) $\mu(xy) \leq \max\ (\mu(x), \mu(y)), \quad \forall x, y \in R$

**Contoh. 2.7.11**
Diberikaan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah ring. Didefinisikan pemetaan $\delta : G \to [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{a_1, a_2\} \\ 1, & x \in \{a_3, a_4\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.
Akan ditunjukkan $\delta = \{(a_1, 0), (a_2, 0), (a_3, 1), (a_4, 1)\}$ merupakan anti ring fuzzy pada $G$.
**Bukti :**
Akan ditunjukkan $\delta$ merupakan anti ring fuzzy pada $G$.

(i) $\delta(x - y) \leq \max\ (\delta(x), \delta(y)), \quad \forall x, y \in G$

Pada Tabel 2.27 dapat dilihat bahwa untuk setiap $x, y \in G$ $\delta(x - y) \leq \max(\delta(x), \delta(y))$.

**Tabel 2.27** Hasil operasi untuk memeriksa
$\delta(x - y) \leq \max\,(\delta(x), \delta(y)), \quad \forall x, y \in G$

| $x$ | $y$ | $x - y$ | $\mu(x)$ | $\mu(y)$ | $\mu(x - y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_2$ | $a_2$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_3$ | $a_4$ | 0 | 1 | 1 |
| | $a_4$ | $a_3$ | 0 | 1 | 1 |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_3$ | $a_3$ | 0 | 1 | 1 |
| | $a_4$ | $a_4$ | 0 | 1 | 1 |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_3$ | 1 | 0 | 1 |
| | $a_2$ | $a_4$ | 1 | 0 | 1 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 1 | 1 | 0 |
| | $a_4$ | $a_2$ | 1 | 1 | 0 |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_4$ | 1 | 0 | 1 |
| | $a_2$ | $a_3$ | 1 | 0 | 1 |
| | $a_3$ | $a_2$ | 1 | 1 | 0 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 1 | 1 | 0 |

(ii) $\delta(xy) \leq \max\,(\delta(x), \delta(y)), \quad \forall x, y \in G$

Pada Tabel 2.18 dapat dilihat bahwa untuk setiap $x, y \in G$ $\delta(xy) \leq \max(\delta(x), \delta(y))$.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi maka terbukti bahwa $\delta$ merupakan anti ring fuzzy pada $G$.

**Contoh 2.7.12**

Diberikaan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah ring sesuai dengan Contoh 2.4.2. Didefinisikan pemetaan $\beta : \mathbb{Z}_6 \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & x \in \{\bar{1},\ \bar{3},\ \bar{5}\} \\ \frac{2}{3}, & x \in \{\bar{0},\ \bar{2},\ \bar{4},\ \} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$. Akan dibuktikan $\beta = \left\{\left(\bar{0}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{1}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{2}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{3}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{4}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{5}, \frac{3}{4}\right)\right\}$ merupakan anti ring fuzzy pada $\mathbb{Z}_6$.

**Tabel 2.28** Hasil operasi untuk memeriksa
$\mu(x \cdot y) \leq \max\left(\mu(x), \mu(y)\right), \quad \forall x, y \in G$

| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ | $\mu(x)$ | $\mu(y)$ | $\mu(x \cdot y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 0 | 1 | 0 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 0 | 1 | 0 |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_1$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_2$ | $a_2$ | 0 | 0 | 0 |
| | $a_3$ | $a_3$ | 0 | 1 | 1 |
| | $a_4$ | $a_4$ | 0 | 1 | 1 |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_1$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 1 | 1 | 0 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 1 | 1 | 0 |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_2$ | $a_1$ | 1 | 0 | 0 |
| | $a_3$ | $a_1$ | 1 | 1 | 0 |
| | $a_4$ | $a_1$ | 1 | 1 | 0 |

**Bukti:**
Akan ditunjukkan $\mu$ merupakan anti ring fuzzy pada $\mathbb{Z}_6$.

(a) $\beta(x - y) \leq \max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$
Untuk membuktikan aksioma ini, maka akan ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga akan diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi.

Misalkan $P = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ dan $Q = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:

- Untuk sebarang $\bar{x} \in P$ dan $\bar{y} \in Q$,

  $$\max\big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big) = \tfrac{3}{4}.$$

  Karena $\bar{x} - \bar{y} \in Q$ maka,

  $$\beta(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{3}{4}.$$

  Sehingga $\mu(\bar{x} - \bar{y}) \leq \max\ \big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x} \in Q$ dan $\bar{y} \in P$,

  $$\max\big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big) = \tfrac{3}{4}.$$

  Karena $\bar{x} - \bar{y} \in Q$ maka,

  $$\beta(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{3}{4}.$$

  Sehingga $\mu(\bar{x} - \bar{y}) \leq \max\ \big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in P$,

  $$\max\big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big) = \tfrac{2}{3}.$$

  Karena $\bar{x} - \bar{y} \in P$ maka,

  $$\beta(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

  Sehingga $\beta(\bar{x} - \bar{y}) \leq \max\big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in Q$,

  $$\max\big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big) = \tfrac{3}{4}.$$

  Karena $\bar{x} - \bar{y} \in P$ maka,

  $$\beta(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

  Sehingga $\beta(\bar{x} - \bar{y}) \leq \max\big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big)$ terpenuhi.

Berdasarkan bukti diatas aksioma pertama anti ring fuzzy terpenuhi.

(b) $\beta(\bar{x}\bar{y}) \leq \max\ \big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big)$.

Untuk membuktikan aksioma kedua ini, maka akan ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga akan diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi. Misalkan $P = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ dan $Q = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:

- Untuk sebarang $\bar{x} \in P$ dan $\bar{y} \in Q$,

  $$\max\big(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\big) = \tfrac{3}{4}.$$

Karena $\bar{x}\bar{y} \in P$ maka,

$$\beta(\bar{x}\bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

Sehingga $\beta(\bar{x}\bar{y}) \leq \max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x} \in Q$ dan $\bar{y} \in P$,

$$\max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right) = \frac{3}{4}.$$

Karena $\bar{x}\bar{y} \in P$ maka,

$$\beta(\bar{x}\bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

Sehingga $\beta(\bar{x}\bar{y}) \leq \max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in P$,

$$\max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right) = \frac{2}{3}.$$

Karena $\bar{x}\bar{y} \in P$ maka,

$$\beta(\bar{x}\bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

Sehingga $\beta(\bar{x}\bar{y}) \leq \max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in Q$,

$$\max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right) = \frac{3}{4}.$$

Karena $\bar{x}\bar{y} \in Q$ maka,

$$\beta(\bar{x}\bar{y}) = \frac{3}{4}.$$

Sehingga $\beta(\bar{x}\bar{y}) \leq \max\left(\beta(\bar{x}), \beta(\bar{y})\right)$ terpenuhi.

Berdasarkan bukti diatas aksioma kedua anti ring fuzzy juga terpenuhi.

Karena aksioma pertama dan kedua terpenuhi maka terbukti $\mu$ merupakan anti ring fuzzy dari $\mathbb{Z}_6$.

**Definisi 2.7.13 (Subring Fuzzy)**
Misalkan $R$ adalah ring. Himpunan fuzzy $\mu$ dari $R$ disebut subring fuzzy dari $R$ jika $\mu$ merupakan subgrup fuzzy terhadap $'+'$ dan $\mu$ merupakan subgrupoid fuzzy terhadap $'\cdot'$.

**Contoh 2.7.15**
Diberikaan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah ring sesuai dengan Contoh 2.4.3 Didefinisikan pemetaan $\mu : G \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{a_1, a_2\} \\ 0, & x \in \{a_3, a_4\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.
Akan ditunjukkan $\mu = \{(a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 0), (a_4, 0)\}$ merupakan subring fuzzy pada $G$.

**Bukti :**
Pada Contoh 2.7.4 telah ditunjukkan bahwa $\mu$ merupakan subgrup fuzzy pada $G$ terhadap operasi penjumlahan dan pada Contoh 2.7.2 telah ditunjukkan bahwa $\mu$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $G$ terhadap operasi pergandaan.
Terbukti $\mu$ merupakan subring fuzzy pada $G$.

**Contoh 2.7.16**
Diberikaan $H = \{a_1, a_2\}$ adalah ring sesuai dengan Contoh 2.4.6 Didefinisikan pemetaan $\vartheta : H \to [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in \{a_1\} \\ 0, & x \in \{a_2\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.
Akan ditunjukkan $\vartheta = \{(a_1, 0.5), (a_2, 0),\}$ merupakan subring fuzzy pada $H$.

**Bukti :**
Pada Contoh 2.7.6 telah ditunjukkan bahwa $\vartheta$ merupakan subgrup fuzzy pada $H$ terhadap operasi penjumlahan dan pada Contoh 2.7.3 telah ditunjukkan bahwa $\vartheta$ merupakan subgrupoid fuzzy pada $H$ terhadap operasi pergandaan.
Terbukti $\vartheta$ merupakan subring fuzzy pada $H$.

**Definisi 2.7.16 (Ideal Fuzzy)**
Misalkan $R$ adalah ring. Subring fuzzy $\mu$ disebut ideal kiri fuzzy dari $R$ jika $\mu(xy) \geq \mu(y), \forall x, y \in R$, ideal kanan fuzzy dari $R$ jika $\mu(xy) \geq \mu(x), \forall x, y \in R$, dan disebut ideal fuzzy dari $R$ jika $\mu$ merupakan ideal kiri dan kanan fuzzy.

**Contoh 2.7.17**

Diberikaan $H = \{a_1, a_2\}$ adalah ring sesuai dengan Contoh 2.4.6 Didefinisikan pemetaan $\vartheta : H \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in \{a_1\} \\ 0, & x \in \{a_2\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in H$. Akan ditunjukkan $\vartheta$ merupakan ideal fuzzy pada $H$.

**Bukti :**

Perhatikan Tabel 2.21 pada Contoh 2.7.3. Dapat dilihat pada Tabel 2.21 bahwa $\mu(xy) \geq \mu(y), \forall x, y \in H$ dan $\mu(xy) \geq \mu(x), \forall x, y \in H$. Sehingga $\vartheta$ merupakan ideal fuzzy dari $H$ karena $\vartheta$ merupakan ideal kiri dan kanan fuzzy.

**Contoh 2.7.18**

Diberikaan $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah ring sesuai dengan Contoh 2.4.3 Didefinisikan pemetaan $\mu : G \rightarrow [0,1]$, sedemikian sehingga:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{a_1, a_2\} \\ 0, & x \in \{a_3, a_4\} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$.

Akan ditunjukkan $\mu = \{(a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 0), (a_4, 0)\}$ bukan merupakan ideal fuzzy pada $G$.

**Bukti :**

Perhatikan Tabel 2.20 pada Contoh 2.7.2. Dapat dilihat pada Tabel 2.20 bahwa untuk $x = a_2$ dan $y = a_3$ , $\mu(xy) \ngeq \mu(x)$. Sehingga $\mu$ bukan merupakan ideal kanan fuzzy dari $G$ .

$\therefore \mu$ bukan merupakan ideal fuzzy dari $G$.

# BAB III
# PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas diberikan definisi dari ring fuzzy dengan operator, anti ring fuzzy dengan operator beserta contoh dan juga sifat-sifatnya.

## 3.1 Ring Fuzzy dengan Operator dan Anti Subring Fuzzy dengan Operator

Pada subbab ini akan diberikan definisi dari ring fuzzy dengan operator dan anti ring fuzzy dengan operator beserta contohnya.

**Definisi 3.1.1 (Ring Fuzzy dengan Operator)**
Misalkan $R$ adalah ring dengan operator dan $\alpha$ adalah ring fuzzy dari $R$. $\alpha$ disebut ring fuzzy dengan operator (M-ring fuzzy) jika untuk setiap $t \in [0,1]$, $\alpha_t$ adalah ring dengan operator dari $R$ (M-ring dari $R$), $\alpha_t \neq \emptyset$.

$$\alpha_t = \{x \in R : \alpha(x) \geq t\}$$

M-ring fuzzy bisa disebut juga sebagai M-subring fuzzy. Namun, dalam skripsi ini hanya akan digunakan istilah M-ring fuzzy.

**Contoh 3.1.2**
Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ dan $\alpha$ merupakan ring fuzzy dari $\mathbb{Z}_6$ berdasarkan Contoh 2.7.7. Akan dibuktikan $\alpha = \left\{\left(\bar{0}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{1}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{5}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ adalah ring fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan $\alpha$ adalah ring fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$.
Untuk membuktikannya akan ditunjukkan terlebih dahulu $\alpha_t$ untuk setiap $t \in [0,1]$ merupakan ring dengan operator.
Berdasarkan Contoh 2.7.7 diperoleh

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & x \in \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ \dfrac{3}{4}, & x \in \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \end{cases}$$

selanjutnya interval $[0,1]$ dibagi menjadi 3 subinterval, yaitu $\left[0, \frac{2}{3}\right)$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ dan $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, sehingga terdapat 3 kasus berikut.

*Kasus 1*. Untuk setiap $t \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$ diperoleh

$$\alpha_{t_1} = \{x \in \mathbb{Z}_6 : \alpha(x) \geq t\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}.$$

*Kasus 2*. Untuk setiap $t \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ diperoleh

$$\alpha_{t_2} = \{x \in \mathbb{Z}_6 : \alpha(x) \geq t\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}.$$

*Kasus 3*. Untuk setiap $t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, diperoleh

$$\alpha_{t_3} = \{x \in \mathbb{Z}_6 : \alpha(x) \geq t\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}.$$

Karena $\alpha_{t_1} = \alpha_{t_2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dan $\alpha_{t_3} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ring dengan operator sesuai dengan Contoh 2.5.2 maka diperoleh $\alpha_t$ adalah ring dengan operator untuk setiap $t \in [0,1]$.
Jadi, terbukti $\alpha$ adalah ring fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$.

**Definisi 3.1.3 (Ideal Fuzzy dengan Operator)**
Misalkan $R$ adalah ring dengan operator dan $\alpha$ adalah M – ring fuzzy dari $R$. $\alpha$ disebut M – ideal fuzzy dari $R$, jika $\alpha$ memenuhi kondisi berikut

(i) $\alpha(y + x - y) \geq \alpha(x)$
(ii) $\alpha(xy) \geq \alpha(y)$
(iii) $\alpha((x + z)y - xy) \geq \alpha(z)$

untuk setiap $x, y, z \in R$.

**Contoh 3.1.4**
Diberikan $\alpha = \left\{\left(\bar{0}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{1}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{5}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ merupakan ring fuzzy dengan operator pada $\mathbb{Z}_6$ sesuai dengan Contoh 3.1.2. Akan dibuktikan $\alpha$ merupakan ideal fuzzy dengan operator.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan $\alpha$ adalah ideal fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$.
Berdasarkan Contoh 3.1.2 diperoleh

- $\alpha(\bar{y} + \bar{x} - \bar{y}) \geq \alpha(\bar{x})$
  Karena $\bar{x}, \bar{y}$ merupakan elemen dari ring $\mathbb{Z}_6$ maka
  $\alpha(\bar{y} + \bar{x} - \bar{y}) = \alpha(\bar{x})$ untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ .

- $\alpha(\bar{x}\,\bar{y}) \geq \alpha(\bar{y})$

Untuk membuktikan aksioma ini, maka harus ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga harus diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi.
Misalkan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $Q = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:

- Untuk sebarang $\bar{x}, \in P$ dan $\bar{y} \in Q$ maka $\bar{x}\bar{y} \in P$.
$\alpha(\bar{x}\,\bar{y}) = \frac{3}{4}$ dan $\alpha(\,\bar{y}) = \frac{2}{3}$ sehingga $\alpha(\bar{x}\,\bar{y}) > \alpha(\bar{y})$.

- Untuk sebarang $\bar{x} \in Q$ dan $\bar{y} \in P$ maka $\bar{x}\bar{y} \in P$.
  sehingga $\alpha(\bar{x}\,\bar{y}) = \alpha(\bar{y}) = \frac{3}{4}$.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in P$ maka $\bar{x}\bar{y} \in P$.
  sehingga $\alpha(\bar{x}\,\bar{y}) = \alpha(\bar{y}) = \frac{3}{4}$.
- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in Q$ maka $\bar{x}\bar{y} \in Q$.
  sehingga $\alpha(\bar{x}\,\bar{y}) = \alpha(\bar{y}) = \frac{2}{3}$.

- $\alpha((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \geq \alpha(\bar{z})$
Untuk membuktikan aksioma ini, maka harus ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga harus diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi.
Misalkan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $Q = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:
  - Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in P$ maka
    $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
    Sehingga $\alpha\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \alpha(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.

  - Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \in P$ dan $\bar{z} \in Q$ maka
    $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
    $\alpha\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \frac{3}{4}$ dan $\alpha(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.
    Sehingga $\alpha((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) > \alpha(\bar{z})$

  - Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{z}, \in P$ dan $\bar{y} \in Q$ maka
    $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
    Sehingga $\alpha\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \alpha(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.

- Untuk sebarang $\bar{y}, \bar{z}, \in P$ dan $\bar{x} \in Q$ maka
  $((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  Sehingga $\alpha\big((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \alpha(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.
- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Q$ maka
  $((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in Q$.
  Sehingga $\alpha\big((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \alpha(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.
- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \in Q$ dan $\bar{z} \in P$ maka
  $((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  Sehingga $\alpha((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) = \alpha(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{z}, \in Q$ dan $\bar{y} \in P$ maka
  $((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  $\alpha\big((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \frac{3}{4}$ dan $\alpha(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.
  Sehingga $\alpha((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) > \alpha(\bar{z})$

- Untuk sebarang $\bar{y}, \bar{z}, \in Q$ dan $\bar{x} \in P$ maka
  $((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in Q$.
  Sehingga $\alpha\big((\bar{x}+\bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \alpha(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.

Karena ketiga aksioma terpenuhi maka terbukti $\alpha$ merupakan ideal fuzzy dengan operator.

**Definisi 3.1.5 (Anti Ring Fuzzy dengan Operator)**
Misalkan $R$ adalah ring dan $\beta$ adalah anti ring fuzzy dari $R$. $\beta$ disebut anti ring fuzzy dengan operator (anti M-ring fuzzy) jika untuk setiap $t \in [0,1]$, $\beta_t$ adalah ring dengan operator dari $R$ (M-ring dari $R$), $\beta \neq \emptyset$.

$$\beta_t = \{x \in R : \beta(x) \leq t\}$$

Anti M-ring fuzzy bisa disebut juga sebagai anti M-subring fuzzy. Namun, dalam skripsi ini hanya akan digunakan istilah anti M-ring fuzzy.

**Contoh 3.1.6**
Diberikan ring $\mathbb{Z}_6$ dan $\beta$ merupakan anti ring fuzzy dari $\mathbb{Z}_6$ berdasarkan Contoh 2.7.10. Akan dibuktikan

$\beta = \left\{\left(\bar{0},\frac{2}{3}\right),\left(\bar{1},\frac{3}{4}\right),\left(\bar{2},\frac{2}{3}\right),\left(\bar{3},\frac{3}{4}\right),\left(\bar{4},\frac{2}{3}\right),\left(\bar{5},\frac{3}{4}\right)\right\}$ adalah anti ring fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan $\beta$ adalah anti ring fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$. Untuk membuktikannya akan ditunjukkan terlebih dahulu $\beta_t$ merupakan ring dengan operator.
Berdasarkan Contoh 2.7.10 diperoleh

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & x \in \{\bar{1},\ \bar{3},\ \bar{5}\} \\ \frac{2}{3}, & x \in \{\bar{0},\ \bar{2},\ \bar{4}\} \end{cases}$$

selanjutnya interval $[0,1]$ dibagi menjadi 3 subinterval, yaitu $\left[0,\frac{2}{3}\right]$, $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$ dan $\left(\frac{3}{4},1\right]$ sehingga terdapat 3 kasus berikut.

*Kasus 1*. Untuk setiap $t \in \left[0,\frac{2}{3}\right]$ diperoleh

$$\beta_{t_1} = \{x \in \mathbb{Z}_6 : \beta(x) \le t\} = \{\bar{0},\ \bar{2},\ \bar{4}\}..$$

*Kasus 2*. Untuk setiap $t \in \left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$ diperoleh

$$\beta_{t_2} = \{x \in \mathbb{Z}_6 : \beta(x) \le t\} = \{\bar{0},\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4},\ \bar{5}\}.$$

*Kasus 3*. Untuk setiap $t \in \left(\frac{3}{4},1\right]$ diperoleh

$$\beta_{t_3} = \{x \in \mathbb{Z}_6 : \beta(x) \le t\} = \{\bar{0},\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4},\ \bar{5}\}.$$

Karena $\beta_{t_2} = \beta_{t_3} = \{\bar{0},\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4},\ \bar{5}\}$ dan $\beta_{t_1} = \{\bar{0},\ \bar{2},\ \bar{4}\}$ adalah ring dengan operator sesuai dengan Contoh 2.5.2 maka diperoleh $\beta_t$ adalah ring dengan operator untuk setiap $t \in [0,1]$.
Jadi, terbukti $\beta$ adalah anti ring fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$.

**Definisi 3.1.7 (Anti Ideal Fuzzy dengan Operator)**
Misalkan $R$ adalah ring dan $\beta$ adalah anti M-ring fuzzy dari $R$. $\beta$ disebut anti M-ideal fuzzy dari $R$, jika $\beta$ memenuhi kondisi berikut
(i) $\beta(y + x - y) \le \beta(x)$
(ii) $\beta(xy) \le \beta(y)$
(iii) $\beta((x + z)y - xy) \le \beta(z)$
Untuk setiap $x, y, z \in R$.

**Contoh 3.1.8**

Diberikan $\beta = \left\{\left(\bar{0}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{1}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{2}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{3}, \frac{3}{4}\right), \left(\bar{4}, \frac{2}{3}\right), \left(\bar{5}, \frac{3}{4}\right)\right\}$ merupakan anti ring fuzzy dengan operator pada $\mathbb{Z}_6$ sesuai dengan Contoh 3.1.6. Akan dibuktikan $\beta$ merupakan ideal fuzzy dengan operator.

**Bukti:**

Akan ditunjukkan $\beta$ adalah ideal fuzzy dengan operator dari $\mathbb{Z}_6$.

Berdasarkan Contoh 3.1.6 diperoleh

- $\beta(\bar{y} + \bar{x} - \bar{y}) \leq \beta(\bar{x})$
  Karena $\bar{x}, \bar{y}$ merupakan elemen dari ring $\mathbb{Z}_6$ maka
  $\beta(\bar{y} + \bar{x} - \bar{y}) = \beta(\bar{x})$ untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ .

- $\beta(\bar{x}\,\bar{y}) \leq \beta(\bar{y})$
  Untuk membuktikan aksioma ini, maka harus ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga harus diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi.
  Misalkan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $Q = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:
    - Untuk sebarang $\bar{x}, \in P$ dan $\bar{y} \in Q$ maka $\bar{x}\bar{y} \in P$.
      $\beta(\bar{x}\,\bar{y}) = \frac{2}{3}$ dan $\beta(\,\bar{y}) = \frac{3}{4}$ sehingga $\beta(\bar{x}\,\bar{y}) < \beta(\bar{y})$.
    - Untuk sebarang $\bar{x} \in Q$ dan $\bar{y} \in P$ maka $\bar{x}\bar{y} \in P$.
      sehingga $\beta(\bar{x}\,\bar{y}) = \beta(\bar{y}) = \frac{2}{3}$.
    - Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in P$ maka $\bar{x}\bar{y} \in P$.
      sehingga $\beta(\bar{x}\,\bar{y}) = \beta(\bar{y}) = \frac{2}{3}$.
    - Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in Q$ maka $\bar{x}\bar{y} \in Q$.
      sehingga $\beta(\bar{x}\,\bar{y}) = \beta(\bar{y}) = \frac{3}{4}$.

- $\beta((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \leq \beta(\bar{z})$
  Untuk membuktikan aksioma ini, maka harus ditunjukkan berlaku untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga harus diuji berlaku untuk setiap kemungkiunan yang terjadi.
  Misalkan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $Q = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$, kemungkinan-kemungkinan yang terjadi sebagai berikut:

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in P$ maka
  $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  Sehingga $\beta\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \beta(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \in P$ dan $\bar{z} \in Q$ maka
  $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  $\beta\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \frac{2}{3}$ dan $\beta(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.
  Sehingga $\beta((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) < \beta(\bar{z})$

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{z}, \in P$ dan $\bar{y} \in Q$ maka
  $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  Sehingga $\beta\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \beta(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.

- Untuk sebarang $\bar{y}, \bar{z}, \in P$ dan $\bar{x} \in Q$ maka
  $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  Sehingga $\beta\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \beta(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.
- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Q$ maka
  $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in Q$.
  Sehingga $\beta\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \beta(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.
- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \in Q$ dan $\bar{z} \in P$ maka
  $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  Sehingga $\beta((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) = \beta(\bar{z}) = \frac{2}{3}$.

- Untuk sebarang $\bar{x}, \bar{z}, \in Q$ dan $\bar{y} \in P$ maka
  $((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) \in P$.
  $\beta\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \frac{3}{4}$ dan $\beta(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.
  Sehingga $\beta((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}) < \beta(\bar{z})$

- Untuk sebarang $\bar{y}, \bar{z}, \in Q$ dan $\bar{x} \in P$ maka
  $\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) \in Q$.
  Sehingga $\beta\big((\bar{x} + \bar{z})\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}\big) = \beta(\bar{z}) = \frac{3}{4}$.

Karena ketiga aksioma terpenuhi maka terbukti $\beta$ merupakan ideal fuzzy dengan operator.

## 3.2 Sifat-sifat Ring Fuzzy dengan Operator dan Anti Subring Fuzzy dengan Operator

Pada subbab ini akan dibahas sifat-sifat dari ring fuzzy dengan operator dan anti ring fuzzy dengan operator .

**Teorema 3.2.1**
Misal $R$ adalah M-ring dan $\mu$ adalah himpunan fuzzy pada $R$. $\mu$ adalah anti M-ring fuzzy di $R$ jika dan hanya jika $\mu^c$ adalah M-ring fuzzy di $R$.

**Bukti:**
Misalkan $\mu$ adalah anti M-ring fuzzy di $R$. Akan ditunjukkan bahwa $\mu^c$ adalah M-ring fuzzy di $R$.
($\Rightarrow$)Karena diketahui bahwa $\mu$ adalah anti M-ring fuzzy di $R$ maka
$\mu(x-y) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$ dan $\mu(xy) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$.

- Ambil sebarang $x, y \in R$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \mu(x-y) &\leq \max\{\mu(x), \mu(y)\} \\ -\mu(x-y) &\geq -\max\{\mu(x), \mu(y)\} \\ 1-\mu(x-y) &\geq 1-\max\{\mu(x), \mu(y)\} \\ \mu^c(x-y) &\geq 1-\max\{\mu(x), \mu(y)\} \\ &= \min\{1-\mu(x), 1-\mu(y)\} \\ &= \min\{\mu^c(x), \mu^c(y)\}. \end{aligned}$$

- Ambil sebarang $x, y \in R$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\leq \max\{\mu(x), \mu(y) \\ -\mu(xy) &\geq -\max\{\mu(x), \mu(y) \\ 1-\mu(xy) &\geq 1-\max\{\mu(x), \mu(y) \\ \mu^c(xy) &\geq 1-\max\{\mu(x), \mu(y)\} \\ &= \min\{1-\mu(x), 1-\mu(y)\} \\ &= \min\{\mu^c(x), \mu^c(y)\} \end{aligned}$$

Terbukti, $\mu^c$ adalah M-ring fuzzy di $R$.

Sebaliknya, misalkan $\mu^c$ adalah anti M-ring fuzzy di $R$, maka akan ditunjukkan bahwa $\mu$ adalah M-ring fuzzy di $R$.
($\Leftarrow$)Karena diketahui bahwa $\mu^c$ adalah anti M-ring fuzzy di $R$ maka

$$\mu^c(x-y) \leq \max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\}$$

dan

$$\mu^c(xy) \leq \max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\}$$

- Ambil sebarang $x, y \in R$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \mu^c(x-y) &\leq \max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\} \\ -\mu^c(x-y) &\geq -\max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\} \\ 1-\mu^c(x-y) &\geq 1-\max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\} \\ \mu(x-y) &\geq 1-\max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\} \\ &= \min\{1-\mu^c((x), 1-\mu^c((y)\} \\ &= \min\{\mu(x), \mu(y)\} \end{aligned}$$

- Ambil sebarang $x, y \in R$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \mu^c(xy) &\leq \max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\} \\ -\mu^c(xy) &\geq -\max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\} \\ 1-\mu^c(xy) &\geq \max\{\mu^c((x), \mu^c((y)\} \\ \mu(xy) &\geq 1-\max\{\mu^c(x), \mu^c(y)\} \\ &= \min\{1-\mu^c(x), 1-\mu^c(y)\} \\ &= \min\{\mu(x), \mu(y)\}. \end{aligned}$$

Terbukti , $\mu$ adalah M-ring fuzzy di $R$.

**Teorema 3.2.2**

Misal $R$ adalah M-ring dan $\mu$ adalah M-ring fuzzy di $R$. $\mu$ adalah anti M-ideal fuzzy di $R$ jika dan hanya jika $\mu^c$ adalah M-ideal fuzzy di $R$.

**Bukti :**

($\Rightarrow$)Misalkan bahwa $\mu$ adalah anti M-ideal fuzzy di $R$, akan ditunjukkan bahwa $\mu^c$ adalah M-ideal fuzzy di $R$.

Ambil sebarang $x, y \in R$. Berdasarkan Definisi 3.1.7 diperoleh.

- Diketahui $\mu(y+x-y) \leq \mu(x)$ dengan $\mu_t = \{x \epsilon R \mid \mu(x) \leq t\}, t \in [0,1]$.
  Akan ditunjukkan bahwa $\mu^c\ (y+x-y) \geq \mu^c\ (x)$.

$$\begin{aligned} \mu(y+x-y) &\leq \mu(x) \\ -\mu(y+x-y) &\geq -\mu(x) \\ 1-\ \mu(y+x-y) &\geq\ 1-\mu(x) \\ \mu^c\ (y+x-y) &\geq \mu^c\ (x). \end{aligned}$$

- Diketahui $\mu(xy) \leq \mu(y)$ dan akan ditunjukkan bahwa $\mu^c(xy) \geq \mu^c(y)$.

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\leq \mu(y) \\ -\mu(xy) &\geq -\mu(y) \\ 1-\mu(xy) &\geq 1-\mu(y) \\ \mu^c(xy) &\geq \mu^c(y) \end{aligned}$$

➢ Diketahui $\mu((x+z)y-xy) \leq \mu(z)$ dan akan ditunjukkan $\mu^c\big((x+z)y-xy\big) \geq \mu^c(z)$.

$$\mu((x+z)y-xy) \leq \mu(z)$$
$$-\mu\big((x+z)y-xy\big) \geq -\mu(z)$$
$$1-\mu\big((x+z)y-xy\big) \geq 1-\mu(z)$$
$$\mu^c((x+z)y-xy) \geq \mu^c(z)$$

∴Karena semua kondisi dipenuhi, maka terbukti $\mu^c$ adalah M-ideal fuzzy di $R$.

(⇐)Sebaliknya, misalkan bahwa $\mu^c$ adalah M-ideal fuzzy di $R$, akan ditunjukkan bahwa $\mu$ adalah anti M-ideal fuzzy di $R$.

Ambil sebarang $x, y \in R$. Berdasarkan Definisi 3.1.7 diperoleh.

➢ Diketahui $\mu^c(y+x-y) \geq \mu^c(x)$ dengan

$$\mu_t = \{x \epsilon R \mid \mu(x) \geq t\}, t \in [0,1]$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mu(y+x-y) \leq \mu(x)$.

$$\mu^c(y+x-y) \geq \mu^c(x)$$
$$-\mu^c(y+x-y) \leq -\mu^c(x)$$
$$1-\mu^c(y+x-y) \leq 1-\mu^c(x)$$
$$\mu(y+x-y) \leq \mu(x).$$

➢ Diketahui bahwa $\mu^c(xy) \geq \mu^c(y)$.

Akan ditunjukkan bahwa $\mu(xy) \leq \mu(y)$.

$$\mu^c(xy) \geq \mu^c(y)$$
$$-\mu^c(xy) \leq -\mu^c(y)$$
$$1-\mu^c(xy) \leq 1-\mu^c(y)$$
$$\mu(xy) \leq \mu(y)$$

➢ Diketahui bahwa $\mu^c((x+z)y-xy) \geq \mu^c(z)$.

Akan ditunjukkan bahwa $\mu((x+z)y-xy) \leq \mu(z)$.

$$\mu^c((x+z)y-xy) \geq \mu^c(z)$$
$$-\mu^c\big((x+z)y-xy\big) \leq -\mu^c(z)$$
$$1-\mu^c\big((x+z)y-xy\big) \leq 1-\mu^c(z)$$
$$\mu((x+z)y-xy) \leq \mu(z)$$

∴ Karena semua kondisi dipenuhi, maka terbukti $\mu$ adalah anti M-ideal fuzzy di $R$.

**Definisi 3.2.3**
Misal $R$ adalah M-ring dan $\{\mu_i : i \in I\}$ adalah keluarga dari M-ideal fuzzy dari $R$, irisan $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ dari M-ideal fuzzy dari $R$ didefinisikan dengan

$$\left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)(x) = \inf\{\mu_i(x) : i \in I\}, \forall x \in R$$

**Teorema 3.2.4**
Jika $R$ adalah M-ring, $\{\mu_i : i \in I\}$ adalah keluarga dari M-ideal fuzzy dari $R$, maka irisan $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ adalah M-ideal fuzzy dari $R$.

**Bukti:**
Misalkan , $\{\mu_i : i \in I\}$ adalah keluarga dari M-ideal fuzzy dari $R$.
Akan ditunjukkan $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ adalah ring fuzzy dari $R$.
Ambil sebarang $x, y \in R$, sehingga diperoleh.

- $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x-y) = \inf\{\mu_i(x-y) | i \in I\}$
  Berdasarkan Definisi 2.7.7, $\mu(x-y) \geq min\big(\mu(x), \mu(y)\big)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)(x-y) &\geq \inf\left\{min\big(\mu_i(x), \mu_i(y)\big) \,\middle|\, i \in I\right\}\\ &= \min\{\inf(\mu_i(x)|i \in I), \inf(\mu_i(y)|i \in I)\}\\ &= \min\{(\textstyle\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x), (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(y)\}.\end{aligned}$$

- $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(xy) = \inf\{\mu_i(xy) | i \in I\}$
  Berdasarkan Definisi 2.7.7, $\mu(xy) \geq min\big(\mu(x), \mu(y)\big)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)(xy) &\geq \inf\left\{min\big(\mu_i(x), \mu_i(y)\big) \,\middle|\, i \in I\right\}\\ &= \min\{\inf(\mu_i(x)|i \in I), \inf(\mu_i(y)|i \in I)\}\\ &= \min\{(\textstyle\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x), (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(y)\}, \forall x, y \in R\end{aligned}$$

Karena terbukti $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ adalah ring fuzzy dan diketahui $R$ adalah M-ring maka $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ M-ring fuzzy dari $R$.
Selanjutnya akan ditunjukkan $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ adalah M-ideal fuzzy dari $R$.
Untuk sembarang $x, y, z \in R$, diperoleh.

- $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(y+x-y)=\inf\{\mu_i(y+x-y)|i\in I\}$
  Berdasarkan Definisi 3.1.3, $\mu(y+x-y)\geq\mu(x)$ diperoleh
  $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(y+x-y)\geq\inf\{\mu_i(x)|i\in I\}$
  $=(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x)$

- $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(xy)=\inf\{\mu_i(xy)|i\in I\}$
  Berdasarkan Definisi 3.1.3 , $\mu(xy)\geq\mu(y)$ diperoleh

  $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(xy)\geq\inf\{\mu_i(y)|i\in I\}$
  $=(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(y)$
- $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)\big((x+z)y-xy\big)=\inf\big\{\mu_i\big((x+z)y-xy\big)|i\in I\big\}$
  Berdasarkan Definisi 3.1.3, $\mu\big((x+z)y-xy\big)\geq\mu(z)$ diperoleh

  $(\bigcap_{i\in I}\mu_i)\big((x+z)y-xy\big)\geq\inf\{\mu_i(z)|i\in I\}$
  $=(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(z)$

Terbukti $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ adalah M-ideal fuzzy dari $R$.

**Definisi 3.2.5**
Misal $R$ adalah M-ring, $\{\mu_i: i\in I\}$ adalah keluarga dari anti M-ideal fuzzy dari $R$, gabungan $\bigcup_{i\in I}\mu_i$ dari anti M-ideal fuzzy dari $R$ didefinisikan dengan

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\sup\{\mu_i(x): i\in I\},\forall x\in R.$$

**Teorema 3.2.6**
Jika $R$ adalah M-ring, $\{\mu_i: i\in I\}$ adalah keluarga dari anti M-ideal fuzzy dari $R$, maka gabungan $\bigcup_{i\in I}\mu_i$ adalah anti M-ideal fuzzy dari $R$.

**Bukti:**
Misalkan , $\{\mu_i: i\in I\}$ adalah keluarga dari anti M-ideal fuzzy dari $R$.
Akan ditunjukkan $\bigcup_{i\in I}\mu_i$ merupakan anti ring fuzzy dai R.
Ambil $x,y\in R$, sehingga diperoleh.

- $(\bigcup_{i\in I}\mu_i)(x-y)=\sup\{\mu_i(x-y)|i\in I\}$

Berdasarkan Definisi 3.1.5 $\mu(x-y) \leq max(\mu(x),\mu(y))$ diperoleh

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x-y) \leq \sup\{max(\mu_i(x),\mu_i(y))\,|i \in I\}$$

$$= \max\{\sup(\mu_i(x)|i \in I), \sup(\mu_i(y)|i \in I)\}$$

$$= \max\{(\cup_{i\in I}\mu_i)(x), (\cup_{i\in I}\mu_i)(y)\}$$

- $(\cup_{i\in I}\mu_i)(xy) = \sup\{\mu_i(xy)|i \in I\}$

  Berdasarkan Definisi 3.1.5, $\mu(xy) \leq max(\mu(x),\mu(y))$ diperoleh

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(xy) \leq \sup\{max(\mu_i(x),\mu_i(y))\,|i \in I\}$$

$$= \max\{\sup(\mu_i(x)|i \in I), \sup(\mu_i(y)|i \in I)\}$$

$$= \max\{(\cup_{i\in I}\mu_i)(x), (\cup_{i\in I}\mu_i)(y)\}, \forall x,y \in R$$

Karena terbukti $(\cup_{i\in I}\mu_i)$ adalah anti ring fuzzy dan diketahui $R$ adalah M-ring maka $(\cup_{i\in I}\mu_i)$ M-ring fuzzy dari $R$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\cup_{i\in I}\mu_i$ adalah anti M-ideal fuzzy dari $R$.

Untuk sembarang $x,y,z \in R$, diperoleh

- $(\cup_{i\in I}\mu_i)(y+x-y) = \sup\{\mu_i(y+x-y)|i \in I\}$

  Berdasarkan Definisi 3.1.7 $\mu(y+x-y) \leq \mu(x)$ diperoleh

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(y+x-y) \leq \sup\{\mu_i(x)|i \in I\}$$

$$= (\cup_{i\in I}\mu_i)(x)$$

- $(\cup_{i\in I}\mu_i)(xy) = \sup\{\mu_i(xy)|i \in I\}$

  Berdasarkan Definisi 3.1.7, $\mu(xy) \leq \mu(y)$ diperoleh

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(y+x-y) \leq \sup\{\mu_i(y)|i \in I\}$$

$$= (\cup_{i\in I}\mu_i)(y)$$

- $(\cup_{i\in I}\mu_i)((x+z)y-xy) = \sup\{\mu_i((x+z)y-xy)|i \in I\}$

  Berdasarkan Definisi 3.1.7, $\mu((x+z)y-xy) \leq \mu(z)$ diperoleh

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)\big((x+z)y-xy\big) \leq \sup\{\mu_i(z)|i\in I\}$$
$$= (\cup_{i\in I}\mu_i)(z)$$

Terbukti $\cup_{i\in I}\mu_i$ adalah anti M-ideal fuzzy dari $R$.

**Definisi 3.2.7**

Misal $R$ dan $S$ keduanya adalah M-ring dan $f$ adalah fungsi dari $R$ ke $S$

(i) Jika $\mu$ adalah M-ring fuzzy di $S$, maka *pre-image* dari $\mu$ pada $f$ adalah M-ring fuzzy di $R$, didefinisikan dengan
$$f^{-1}(\mu)(x) = \mu\big(f(x)\big), \qquad \forall x \in R$$

(ii) Jika $\gamma$ adalah M-ring fuzzy di $R$, maka *image* dari $\gamma$ pada $f$ adalah M-ring fuzzy di $S$, didefinisikan dengan

$$f(\gamma)(y) = \begin{cases} \sup \gamma(x) & \\ x \in f^{-1}(y), & f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0, & yang\ lain \end{cases}$$

untuk setiap $y \in S$.

**Contoh 3.2.8**

Diberikan $\mathbb{Z}_6$ adalah M-ring dengan pemetaan,

$$\begin{tikzcd} :\ \mathbb{Z}_6 \arrow[rr, "f", "x \longmapsto f(x) = x"'] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathbb{Z}_6 \arrow[dl, "\mu"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

dan

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & y \in \{\bar{1},\ \bar{3},\ \bar{5}\} \\ \frac{3}{4}, & y \in \{\bar{0},\ \bar{2},\ \bar{4},\ \} \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in \{\bar{1},\ \bar{3},\ \bar{5}\} \\ \frac{3}{4}, & x \in \{\bar{0},\ \bar{2},\ \bar{4},\ \} \end{cases}$$

masing–masing merupakan M-ring fuzzy di $\mathbb{Z}_6$. Akan ditentukan *pre-image* dari $\mu$ dan *image* dari $\gamma$.

**Jawab:**
Akan ditentukan *pre-image* dari $\mu$. Berdasarkan definisi *pre-image* diperoleh

$$f^{-1}(\mu)(x) = \mu\big(f(x)\big), \qquad \forall x \in \mathbb{Z}_6.$$

Karena diketahui $f(x) = x$, maka

$$f^{-1}(\mu)(x) = \mu(x), \qquad \forall x \in \mathbb{Z}_6$$

$$f^{-1}(\mu)(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & x \in \{\overline{1},\ \overline{3},\ \overline{5}\} \\ \dfrac{3}{4}, & x \in \{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{4},\}. \end{cases}$$

Selanjutnya akan ditentukan *image* dari $\gamma$. Berdasarkan definisi *image* diperoleh.

$$f(\gamma)(x) = \begin{cases} \sup\ \gamma(x) & \\ x \in f^{-1}(x), & f^{-1}(x) \neq 0 \\ 0, & yang\ lain \end{cases}, \forall x \in \mathbb{Z}_6$$

- Saat $x = 0$ .

  $f(\gamma)(x) = \begin{matrix} \sup\ \gamma(x) \\ x \in f^{-1}(0) \end{matrix}$

  $= \sup\ \gamma(0)$

  $= \frac{3}{4}$

- Saat $x = 1$ .

  $f(\gamma)(x) = \begin{matrix} \sup\ \gamma(x) \\ x \in f^{-1}(1) \end{matrix}$

  $= \sup\ \gamma(1)$

  $= \frac{2}{3}$

- Saat $x = 2$ .

  $f(\gamma)(x) = \begin{matrix} \sup\ \gamma(x) \\ x \in f^{-1}(2) \end{matrix}$

  $= \sup\ \gamma(2)$

  $= \frac{3}{4}$

- Saat $x = 3$ .

$$f(\gamma)(x) = \sup_{x \in f^{-1}(3)} \gamma(x)$$
$$= \sup \gamma(3)$$
$$= \frac{2}{3}$$

- Saat $x = 4$ .
$$f(\gamma)(x) = \sup_{x \in f^{-1}(4)} \gamma(x)$$
$$= \sup \gamma(4)$$
$$= \frac{3}{4}$$

- Saat $x = 5$ .
$$f(\gamma)(x) = \sup_{x \in f^{-1}(5)} \gamma(x)$$
$$= \sup \gamma(5)$$
$$= \frac{2}{3}$$

Jadi , image dari $\gamma$ adalah $\begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in \{\overline{1},\ \overline{3},\ \overline{5}\} \\ \frac{3}{4}, & x \in \{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{4}, \}. \end{cases}$

**Teorema 3.2.8**

Misal $R$ dan $S$ keduanya adalah M-ring dan $f: R \to S$ adalah M-homomorfisma dari $R$ ke $S$

(i) Jika $\mu$ adalah M-ring fuzzy dari $S$, maka $f^{-1}(\mu)$ adalah M-ring fuzzy dari $R$.

(ii) Jika $A$ adalah M-ring fuzzy dari $R$, maka $f(A)$ adalah M-ring fuzzy dari $S$.

**Bukti:**

i. Akan ditunjukkan Jika $\mu$ adalah M-ring fuzzy dari $S$, maka $f^{-1}(\mu)$ adalah M-ring fuzzy dari $R$.

Misalkan $x_1,\ x_2 \in R$, diperoleh.

- $f^{-1}(\mu)(x_1 - x_2) = \mu(f(x_1 - x_2))$

Karena $\mu$ merupakan M-ring fuzzy maka

$$f^{-1}(\mu)(x_1 - x_2) \geq \min\{\mu(f(x_1), \mu(f(x_2))\}$$
$$= \min\{f^{-1}\big(\mu(x_1\ )\big), f^{-1}(\mu(x_2))\}.$$

- $f^{-1}(\mu)(x_1 \cdot x_2) = \mu(f(x_1 \cdot x_2))$

Karena $\mu$ merupakan M-ring fuzzy maka

$$f^{-1}(\mu)(x_1 \cdot x_2) \geq \min\{\mu\big(f(x_1)\big), \mu\big(f(x_2)\big)\}$$

$$= \min\{f^{-1}(\mu(x_1)), f^{-1}(\mu(x_2))\}$$

Sehingga, $f^{-1}(\mu)$ adalah M-ring fuzzy dari $R$.

ii. Akan ditunjukkan Jika $\gamma$ adalah M-ring fuzzy dari $R$, maka $f(\gamma)$ adalah M-ring fuzzy dari $S$.

- Misalkan $y_1,\ y_2 \in S$, diperoleh

$\{x: x \in f^{-1}(y_1 - y_2)\} \supseteq \{x_1 - x_2: x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$.

Sehingga

$$\begin{aligned} f(\gamma)(y_1 - y_2) &= \sup\{\gamma(x): x \in f^{-1}(y_1 - y_2)\} \\ &\geq \sup\{\gamma(x_1 - x_2): x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \end{aligned}$$

Karena $\gamma$ merupakan M-ring fuzzy maka

$$\begin{aligned} f(\gamma)(y_1 - y_2) &\geq \sup\{min(\gamma(x_1), \gamma(x_2)): x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &\geq \sup\{\min(\gamma(x_1), \gamma(x_2)): x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &= \min\{\sup(\gamma(x_1)): x_1 \in f^{-1}(y_1), \sup(\gamma(x_2)): x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &= \min\{f(\gamma)(y_1), f(\gamma)(y_2)\}. \end{aligned}$$

- Misalkan $y_1,\ y_2 \in S$, diperoleh

$\{x: x \in f^{-1}(y_1 \cdot y_2)\} \supseteq \{x_1 \cdot x_2: x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$

$$\begin{aligned} f(\gamma)(y_1 \cdot y_2) &= \sup\{\gamma(x): x \in f^{-1}(y_1 \cdot y_2)\} \\ &\geq \sup\{\gamma(x_1 \cdot x_2): x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \end{aligned}$$

Karena $\gamma$ merupakan M-ring fuzzy maka

$$\begin{aligned} f(\gamma)(y_1 \cdot y_2) &\geq \sup\{min(\gamma(x_1), \gamma(x_2)): x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &\geq \sup\{\min(\gamma(x_1), \gamma(x_2)): x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &= \min\{\sup(\gamma(x_1)): x_1 \in f^{-1}(y_1), \sup(\gamma(x_2)): x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &= \min\{f(\gamma)(y_1), f(\gamma)(y_2)\} \end{aligned}$$

Sehingga, $f(\gamma)$ adalah M-ring fuzzy dari $S$.

**Teorema 3.2.9**

Misal $R$ dan $S$ keduanya adalah M-ring dan $f: R \to S$ adalah M-homomorfisma dari $R$ ke $S$ dan

(i) Jika $\mu$ adalah M-ideal fuzzy dari $S$, maka $f^{-1}(\mu)$ adalah M-ideal fuzzy dari $R$.

(ii) Jika $\gamma$ adalah M-ideal fuzzy dari $R$, maka $f(\gamma)$ adalah M-ideal fuzzy dari $S$.

**Bukti:**

I. Akan ditunjukkan jika $\mu$ adalah M-ideal fuzzy dari $S$, maka $f^{-1}(\mu)$ merupakan M-ring fuzzy dari $R$ sesuai dengan Teorema 3.2.8 (i).
Misal $x_1, x_2, x_3 \in R$, diperoleh.

- $f^{-1}(\mu)(x_1 + x_2 - x_1) = \mu(f(x_1) + f(x_2) - f(x_1))$
  Karena $\mu$ merupakan M-ideal fuzzy maka
  $$f^{-1}(\mu)(x_1 + x_2 - x_1) \geq \mu(f(x_2))$$
  $$= f^{-1}(\mu)(x_2).$$

- $f^{-1}(\mu)(x_1 \cdot x_2) = \mu(f(x_1 \cdot x_2))$
  Karena $\mu$ merupakan M-ideal fuzzy maka
  $$f^{-1}(\mu)(x_1 \cdot x_2) \geq \mu(f(x_2))$$
  $$= f^{-1}(\mu)(x_2).$$

- $f^{-1}(\mu)((x_1 + x_2)x_3 - x_1x_3) = \mu((f(x_1) + f(x_2))f(x_3) - f(x_1)f(x_3))$
  Karena $\mu$ merupakan M-ideal fuzzy maka
  $$f^{-1}(\mu)((x_1 + x_2)x_3 - x_1x_3) \geq \mu(f(x_2))$$
  $$= f^{-1}(\mu)(x_2).$$

Sehingga $f^{-1}(\mu)$ adalah M-ideal fuzzy dari $R$.

II. Jika $\gamma$ adalah M-ideal fuzzy dari $R$, maka $f(\gamma)$ merupakan M-ring fuzzy dari $S$ berdasarkan Teorema 3.2.8 (ii).

Karena $\gamma$ merupakan M-ideal fuzzy maka untuk $y_1, y_2, y_3 \in S$, diperoleh.

- $f(\gamma)(y_1 + y_2 - y_1) \quad = \quad sup\{\gamma(x): x \in f^{-1}(y_1 + y_2 - y_1)\}$

$f(\gamma)(y_1 + y_2 - y_1) \quad = \quad sup\{\gamma(x): x \in f^{-1}(y_1 + y_2 - y_1)\}$

$$\begin{aligned} &\geq \sup\{\gamma(x_1 + x_2 - x_1) : x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &\geq \sup\{\gamma(x_2) : x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &= f(\gamma)(y_2). \end{aligned}$$

- $f(\gamma)(y_1 \cdot y_2) \quad = \quad sup\{\gamma(x) : x \in f^{-1}(y_1 \cdot y_2)\}$

$$\begin{aligned} f(\gamma)(y_1 \cdot y_2) &= sup\{\gamma(x) : x \in f^{-1}(y_1 \cdot y_2)\} \\ &\geq \sup\{\gamma(x_1 \cdot x_2) : x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &\geq \sup\{\gamma(x_2) : x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &= f(\gamma)(y_2) . \end{aligned}$$

- $f(\gamma)((y_1 + y_2)y_3 - y_1y_3) \quad = \quad sup\{\gamma(x) : x \in f^{-1}(y_1 + y_2 - y_1)\}$

$$\begin{aligned} f(\gamma)((y_1 + y_2)y_3 - y_1y_3) &= sup\{\gamma(x) : x \in f^{-1}(y_1 + y_2 - y_1)\} \\ &\geq \sup\{\gamma((y_1 + y_2)y_3 - y_1y_3) : x_1 \in f^{-1}(y_1), \\ &\quad x_2 \in f^{-1}(y_2), x_3 \in f^{-1}(y_3)\} \\ &\geq \sup\{\gamma(x_2) : x_2 \in f^{-1}(y_2)\} \\ &= f(\gamma)(y_2). \end{aligned}$$

Sehingga $f(\gamma)$ adalah M-ideal fuzzy dari $S$.

# BAB IV
# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Sifat-sifat dari M-ring fuzzy dan anti M-ring fuzzy saling berkaitan satu sama lain. Seperti misalnya, $\mu$ adalah anti M-ring fuzzy di $R$ jika $\mu^c$ adalah M-ring fuzzy di $R$, dan begitu pula sebaliknya. Selanjutnya, jika $\mu$ adalah anti M-ideal fuzzy di $R$ maka $\mu^c$ adalah M-ideal fuzzy di $R$, begitu pula sebaliknya. Sifat M-ring fuzzy dan M-ideal fuzzy juga saling terkait. Misal $R$ dan $S$ keduanya adalah M-ring dan $f: R \to S$ adalah M-homomorfisma dari $R$ ke $S$,

(i) Jika $B$ adalah M-ring fuzzy dari $S$, maka $f^{-1}(B)$ adalah M-ring fuzzy dari $R$.

(ii) Jika $A$ adalah M-ring fuzzy dari $R$, maka $f(A)$ adalah M-ring fuzzy dari $S$.

Sifat tersebut berlaku juga pada M-ideal fuzzy .

## Daftar Pustaka


Alam, M. Z. 2015. Fuzzy Rings and Anti Fuzzy Rings With Operator. *IOSR Journal Mathematics*. Vol. 11, hal 48-54.

Bhattacharya, P. Jain, S. Nagpaul, S. 1994. *Basic Abstract Algebra second edition*. Cambridge University Press. New York.

Hunter, J. K. 2014. *An Introduction to Real Analysis*. Department of Mathematics, University of California at Davis.

Kandasamy, W. B. V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. Department of Mathematics Indian Institute of Technology Madras Chennai – 600 036.

Kandasamy, W. B. V. 2013. *Subset Grupoids.* Education Publisher Inc. Ohio.

Liu, W. J. 1982. Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy Ideals. *Fuzzy sets and systems* . Vol. 8, hal: 133-139.

Massa'deh, M. O. 2016. On M-Fuzzy Subrings. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS).* Vol. 62, hal: 41-49.

Massa'deh, M. O. 2012. The M-Homomorphism and M-Anti Homomorphism on M-Fuzzy Subrings over M-Rings. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics.* Vol.7, hal:337-343.

Rosenfeld, A. 1971. Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* Vol. 35, hal: 512-517.

Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control*. Vol. 8, hal: 338-353.