

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN MALWARE
DENGAN KOMPARTEMEN PEMBAWA**

SKRIPSI

oleh:

MOCHAMAD WINARNO ARIFUDDIN

155090400111003



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019**

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN MALWARE
DENGAN KOMPARTEMEN PEMBAWA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana

Matematika

oleh:

MOCHAMAD WINARNO ARIFUDDIN

155090400111003



JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2019

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN MALWARE
DENGAN KOMPARTEMEN PEMBAWA**

oleh

MOCHAMAD WINARNO ARIFUDDIN

155090400111003

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 26
Februari 2019 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk
memperoleh gelar Sarjana Matematika**

Pembimbing

Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D.

NIP. 198411242009122006

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo S.Si., M.Si., Ph.D.

NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama

NIM

Jurusan

Penulis Skripsi berjudul

: Mochamad Winarno Arifuddin

: 155090400111003

: Matematika

: Analisis Dinamik Model Penyebaran

Malware Dengan Kompartemen

Pembawa

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain, Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 26 Februari 2019

yang menyatakan,

Mochamad Winarno Arifuddin

155090400111003

ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN *MALWARE* DENGAN KOMPARTEMEN PEMBAWA

ABSTRAK

Skripsi ini membahas analisis dinamik model penyebaran *malware* dengan kompartemen pembawa. Kompartemen pembawa berisi komputer yang didalamnya terdapat *malware* namun tidak dapat terkena dampak, tetapi tetap dapat menyebarkannya. Pada model tersebut dilakukan analisis dinamik yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Dengan analisis dinamik diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas *malware* dan titik kesetimbangan endemik *malware*. Kestabilan titik kesetimbangan bergantung pada angka reproduksi dasar R_0 . Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas *malware* bersifat stabil asimtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik *malware* bersifat stabil asimtotik lokal. Simulasi numerik mendukung hasil analisis yang telah diperoleh.

Kata kunci: model penyebaran *malware*, angka reproduksi dasar, kestabilan lokal

DYNAMICAL ANALYSIS OF MALWARE PROPAGATION MODEL USING CARRIER COMPARTMENT

ABSTRACT

This final project discusses the dynamical analysis of malware propagation model with carrier compartment. In carrier compartment, there are population of computer with malware in which can't be destructed by malware, but can transmit the malware to other computer. Dynamical analysis performed by finding the equilibrium point, basic reproduction number, and analyzing local stability of equilibrium point. Dynamical analysis shows that there are two equilibrium points, namely disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. Stability of equilibrium points depend on basic reproduction number R_0 . If $R_0 < 1$ then disease-free equilibrium point locally asymptotically stable and if $R_0 > 1$ then endemic equilibrium point locally asymptotically stable. Numerical simulations support the analytical results that have been obtained.

Keywords: malware propagation model, basic reproduction number, local stability

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika (S. Mat.). Shalawat dan salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah memberikan tauladan kepada umat manusia sehingga dapat membedakan antara kebaikan dan keburukan.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi yang memberikan beasiswa bidikmisi.
2. Ratno Bagus Edy Wibowo S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika, Bapak dan Ibu dosen jurusan matematika yang memberikan banyak ilmunya.
3. Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen pembimbing yang memberikan bimbingan, motivasi dan saran.
4. Ummu Habibah S.Si., M.Si., Ph.D. dan Indah Yanti S.Si., M.Si. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan.
5. Dr. Moch. Aruman Imron, M. Si. selaku dosen pendamping akademik yang memberikan arahan dan masukan.
6. Bapak dan Ibu tercinta, Mulyono dan Umi Nariyah, serta keluarga besar yang memberikan dukungan moral maupun materiel.
7. Sahabat terbaik, Alfiati Hasanah dan Sri Astutiningish yang memberikan motivasi dengan tulus dan ikhlas.
8. Keluarga besar FORKALAM dan matematika angkatan 2015 yang menemani dan memberikan semangat.

Dengan kerendahan hati, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan guna perbaikan pada penulisan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 26 Februari 2019,

Penulis

DAFTAR ISI

JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI.....	iii
LEMBAR PERNYATAAN.....	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	xii
DAFTAR ISI.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
BAB II DASAR TEORI.....	5
2.1 Persamaan Diferensial.....	5
2.2 Sistem Dinamik.....	6
2.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan	7
2.3.1 Sistem otonomus linear	7
2.3.2 Sistem otonomus nonlinear	9
2.4 Kriteria Routh-Hurwitz	11
2.5 Angka Reproduksi Dasar	12
2.6 Matriks Generasi Selanjutnya	13
2.7 Model SI (<i>Susceptible-Infectious</i>) Penyebaran Malware, 13	
2.8 Model SIR (<i>Susceptible-Infectious-Recovered</i>) Penyebaran Malware	14
BAB III PEMBAHASAN.....	17
3.1 Konstruksi Model.....	17
3.1.1 Laju perubahan kelas <i>S</i>	18
3.1.2 Laju perubahan kelas <i>C</i>	19
3.1.3 Laju perubahan kelas <i>I</i>	20
3.1.4 Laju perubahan kelas <i>R</i>	20
3.2 Titik Kesetimbangan Model	22
3.3 Angka Reproduksi Dasar.....	25
3.4 Analisis Kestabilan Lokal	27
3.4.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas malware	27

3.4.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik <i>malware</i>	30
3.5 Simulasi Numerik	32
3.5.1 Simulasi 1	33
3.5.2 Simulasi 2	34
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	37
4.1 Kesimpulan	37
4.2 Saran	37
DAFTAR PUSTAKA	39
LAMPIRAN	41

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, komputer adalah alat elektronik otomatis yang dapat menghitung atau mengolah data secara cermat menurut instruksi, dan memberikan hasil pengolahan, serta dapat menjalankan sistem multimedia (film, musik, televisi, faksimile), biasanya terdiri atas unit masukan, unit keluaran, unit penyimpanan, serta unit pengontrolan. Komputer telah banyak digunakan dalam kehidupan, misalnya dalam bidang pendidikan, industri, ekonomi, transportasi. Seperti peralatan lain, komputer juga membutuhkan perawatan yang tepat. Perawatan ini dilakukan secara fisik maupun non-fisik. Sebagai contoh, perawatan fisik dilakukan dengan membersihkan kotoran yang ada di luar maupun di dalam komputer tersebut, sedangkan perawatan non-fisik dilakukan dengan memasang *antimalware* untuk menangkal masuknya *malware* (*Malicious Software*).

Malware merupakan program berbahaya yang banyak digunakan dalam serangan siber. Hal ini dapat dilihat dengan adanya *zero-day attacks*, yaitu suatu kondisi ditemukannya celah keamanan *hardware* atau *software* sehingga suatu komputer dapat dieksplorasi bebas (Singh, dkk., 2016). *Malware* tidak dapat menyerang semua komputer karena ia hanya menyerang komputer sesuai dengan sistem operasinya. Misalnya komputer *iOS* tidak dapat diserang *malware* *Android* (Guillen dan del Rey, 2017).

Banyak dampak yang diakibatkan oleh *malware*, antara lain terhapusnya data sistem operasi, pencurian data pribadi dan lumpuhnya server atau jaringan komputer sehingga tidak dapat diakses pengguna (CERT-UK, 2014). Berdasarkan dampak tersebut, penyedia layanan *antimalware* berusaha mendesain *antimalware*-nya agar dapat mendeteksi semua jenis *malware*. Dari sisi matematika dapat dilakukan analisis model penyebaran *malware*. Analisis ini bermanfaat untuk memprediksi keadaan *malware* ke depan dan mengetahui faktor apa saja yang berpengaruh terhadap perkembangannya sehingga perkembangan *malware* tersebut dapat dikontrol.

Penyebaran *malware* komputer dapat dianalogikan dengan penyebaran penyakit pada makhluk hidup. *Malware* adalah penyakit pada komputer, ia dapat menyebar dari komputer berisi *malware* ke komputer rentan. Komputer yang berisi *malware* dapat terkena dampak dari *malware* jika sistem operasinya sama dengan tipe *malware*-nya, dan hanya bisa membawa tanpa terkena dampaknya bila sistem operasinya tidak sama. Individu-individu dalam penyebaran penyakit adalah makhluk hidup (manusia, hewan, atau tumbuhan), sedangkan pada penyebaran *malware* adalah komputer yang terinstal sistem operasi. Kelas *S* (*Susceptible*) berisi komputer rentan, *I* (*Infectious*) berisi komputer terinfeksi, kelas *C* (*Carrier*) berisi komputer yang mengandung *malware* tetapi tidak terkena dampaknya, dan *R* (*Recovered*) berisi komputer kebal terhadap *malware*. Kebal adalah keadaan dimana *malware* tidak dapat masuk ke dalam komputer. Kekebalan dapat hilang bila *antimalware* tidak diperbarui lagi.

Terdapat beberapa model matematika penyebaran *malware* yang sudah dianalisis para ahli. Liu, dkk. (2015) menganalisis model SI (*Susceptible-Infectious*), Abazari, dkk. (2016) menganalisis model SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*), dan Guillen dan del Rey (2017) menganalisis model SCIR (*Susceptible-Carrier-Infectious-Recovered*). Pada model SI yang dibahas Liu, dkk. (2015), dikatakan bahwa penyebaran *malware* dipengaruhi kewaspadaan pengguna. Komputer yang digunakan oleh pengguna dengan kewaspadaan tinggi akan mempunyai kekebalan yang tinggi, sedangkan komputer yang digunakan oleh pengguna dengan kewaspadaan rendah akan mempunyai kekebalan yang rendah. Model SIR yang dibahas Abazari, dkk. (2016) menjelaskan bahwa adanya *antimalware* dapat membuat komputer kebal dari *malware* hingga *antimalware* itu kedaluwarsa. Model SCIR yang dibahas Guillen dan del Rey (2017) menyatakan bahwa *malware* tidak dapat menyerang semua komputer, melainkan menyerang sesuai dengan sistem operasinya. Misalnya komputer *iOS* tidak dapat diserang *malware* *Android*. Komputer yang tidak dapat diserang *malware* ini disebut komputer pembawa (*Carrier*). Komputer pembawa tidak dapat terkena dampak dari *malware*, tetapi ia hanya membawa *malware* dan menyebarkannya ke komputer lain. Dalam hal ini, komputer dengan sistem operasi selain *Android* yang didalamnya terdapat *malware* disebut komputer pembawa, misalnya

komputer dengan sistem operasi Windows, MacOS, Linux, dan lainnya.

Skripsi ini mengkaji ulang artikel Guillen dan del Rey (2017) yang didalamnya terdapat kelas pembawa pada model penyebaran *malware*. Dalam model tersebut diasumsikan bahwa populasi komputer tetap, tidak ada penambahan komputer yang terhubung ke dalam jaringan dan tidak ada pengurangan karena kerusakan baik karena malware atau komputer yang sudah usang. Kelas atau kompartemen pembawa tersebut berisi kumpulan komputer pembawa. Analisis model dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Selanjutnya diberikan simulasi numerik untuk menverifikasi hasil analitik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis merumuskan rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model penyebaran *malware* dengan kompartemen pembawa?
2. Bagaimana titik kesetimbangan model tersebut?
3. Bagaimana kestabilan lokal titik kesetimbangan model tersebut?
4. Bagaimana simulasi numerik model tersebut?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model penyebaran *malware* dengan kompartemen pembawa.
2. Memperoleh titik kesetimbangan model tersebut.
3. Mengetahui kestabilan lokal titik kesetimbangan model tersebut.
4. Mengetahui hasil simulasi numerik model tersebut.

BAB II

DASAR TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang fungsi tidak diketahui hanya bergantung pada satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa orde n secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}),$$

dengan $y, y', y'', \dots, y^{n-1}$ adalah fungsi dari x .

Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear. Persamaan diferensial orde n disebut linear apabila memenuhi bentuk umum

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad (2.1)$$

dengan $a_0 \neq 0$, x adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas. Pada persamaan (2.1), jika $f(x) = 0$ maka persamaan (2.1) disebut persamaan homogen dan jika $f(x) \neq 0$ maka persamaan (2.1) merupakan persamaan nonhomogen. Persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear apabila variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya.

Sistem persamaan diferensial orde satu berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui dan n merupakan bilangan bulat positif lebih dari satu. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi n adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\
 x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\
 &\vdots \\
 x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t),
 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(Finizio dan Ladaz, 1982)

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu. Sistem dinamik kontinu mempunyai bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t),$$

$t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(Alligood, dkk., 2000)

Jika fungsi f tidak bergantung pada waktu t secara eksplisit, maka diperoleh sistem otonomus. Sistem otonomus berdimensi n mempunyai bentuk umum, yaitu

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

\vdots

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Titik $\vec{x} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ merupakan titik kesetimbangan jika memenuhi kondisi

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(Boyce dan DiPrima, 2012)

⁶ Universitas Brawijaya

Titik kesetimbangan \vec{x}^* dikatakan

1. Stabil, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ pada sistem (2.2) saat $t = 0$ memenuhi
$$[x_1(0) - x_1^*]^2 + \dots + [x_n(0) - x_n^*]^2 < \delta,$$
eksis dan memenuhi
$$[x_1(t) - x_1^*]^2 + \dots + [x_n(t) - x_n^*]^2 < \epsilon, \forall t \geq 0$$
2. Stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan \vec{x}^* stabil dan terdapat δ_0 sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ pada sistem (2.2) saat $t = 0$ memenuhi
$$[x_1(0) - x_1^*]^2 + \dots + [x_n(0) - x_n^*]^2 < \delta_0,$$
eksis $\forall t \geq 0$ dan memenuhi
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_i^*, i = 1, 2, \dots, n,$$
3. Tidak stabil, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

(Finizio dan Ladas, 1982)

2.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem otonomus dibagi menjadi dua yaitu linear dan nonlinear. Berikut ini dijelaskan bagaimana menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear dan nonlinear.

2.3.1 Sistem otonomus linear

Perhatikan sistem otonomus linear berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n.\end{aligned}$$

repository yang dapat dinyatakan sebagai

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Penentuan tipe kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3) bergantung pada nilai eigen matriks A .

Theorema 2.1

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem otonomus linear (2.3) dengan $|A| \neq 0$. Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ bersifat sebagai berikut.

1. Stabil asimtotik jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ real negatif atau bagian realnya negatif,
2. Stabil jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bagian realnya tak positif,
3. Tidak stabil jika sedikitnya satu nilai eigen tersebut real positif atau bagian realnya positif.

(Finizio dan Ladas, 1982)

2.3.2 Sistem otonomus nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\vec{x}), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\vec{x}), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(\vec{x}),\end{aligned}\quad (2.4)$$

dengan f_1, f_2, \dots, f_n adalah fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan \vec{x}^* . Deret Taylor fungsi f_1, f_2, \dots, f_n di sekitar \vec{x}^* adalah

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \omega_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

dengan $\omega_1(\vec{x}), \omega_2(\vec{x}), \dots, \omega_n(\vec{x})$ adalah suku sisa. Suku sisa dalam hampiran orde satu di atas memenuhi sifat

$$\lim_{(\vec{x}) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\|\vec{\omega}(\vec{x})\|}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$.

Dengan menggunakan deret Taylor fungsi f_1, f_2, \dots, f_n di sekitar \vec{x}^* , serta mengingat

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d(\vec{x} - \vec{x}^*)}{dt},$$

persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk matriks

Matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} +$$

disebut matriks Jacobi.

Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J^* \vec{w} + \vec{\omega}.$$

Apabila $\vec{w} \rightarrow \vec{0}$ maka $\vec{\omega} \rightarrow \vec{0}$, sehingga nilai $\vec{\omega}$ dapat diabaikan dan di sekitar \vec{x}^* sistem nonlinear (2.4) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J^* \vec{w}. \quad (2.6)$$

Jika $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_n = x_n^*$ maka $\vec{w} = \vec{0}$ sehingga sistem linear (2.6) memiliki titik kesetimbangan $\vec{w}^* = \vec{0}$.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Teorema 2.2

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ pada sistem (2.4) bersifat sebagai berikut.

1. Stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi stabil asimtotik,
2. Tak stabil jika titik kesetimbangan hasil linearisasi tak stabil.

(Finizio dan Ladas, 1982)

2.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Sistem otonomus dengan sebuah matriks Jacobi yang membentuk

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

mempunyai nilai eigen yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan $\det(J - \lambda I) = 0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristik dalam bentuk

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad (2.8)$$

dengan $a_n \neq 0$, karena jika $a_n = 0$ maka $\lambda = 0$ adalah solusi dan persamaan karakteristik menjadi orde $n - 1$ dengan $a_n \neq 0$.

Titik kesetimbangan sistem otonomus dengan matriks Jacobi (2.6) akan stabil jika semua akar persamaan (2.8) bernilai negatif atau dengan kata lain $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Persamaan (2.8) umumnya sulit untuk diselesaikan, sehingga sulit pula untuk menentukan tanda nilai eigennya. Oleh karena itu digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan tanda nilai eigen matriks (2.7) dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.8).

Akar-akar persamaan (2.8) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = a_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Untuk $n = 3$ persamaan (2.8) menjadi

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.9)$$

Akar-akar persamaan (2.9) akan bernilai negatif jika dan hanya jika $a_1, a_3 > 0$ dan $a_1a_2 - a_3 > 0$.

(Murray, 2002)

2.5 Angka Reproduksi Dasar

Pada model epidemik, angka reproduksi dasar menyatakan rata-rata banyaknya individu baru terinfeksi yang disebabkan satu individu terinfeksi sebelumnya selama proses penularan penyakit dalam suatu populasi rentan. Dalam hal ini angka reproduksi dasar (R_0) digunakan untuk menentukan ada atau tidaknya penyakit dalam suatu populasi. Jika $R_0 < 1$, maka setiap individu terinfeksi menyebabkan rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru. Dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi. Jika $R_0 > 1$, maka individu terinfeksi menyebabkan rata-rata lebih dari satu individu terinfeksi baru. Infeksi akan meluas dan menjadi wabah dalam suatu populasi.

(Heffernan, dkk., 2005)

Dalam skripsi ini, *malware* dianalogikan dengan penyakit karena ia dapat menyebar dari populasi terinfeksi ke populasi rentan. Individu-individu yang dimaksud adalah komputer yang terinstal sistem operasi.

2.6 Matriks Generasi Selanjutnya

Matriks generasi selanjutnya adalah metode yang digunakan untuk memperoleh angka reproduksi dasar. Misalkan terdapat n kompartemen dan m kompartemen diantaranya adalah kompartemen terinfeksi. Didefinisikan

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

dengan x_i menyatakan banyaknya individu pada kompartemen ke- i . Misalkan $F_i(\vec{x})$ adalah rata-rata munculnya infeksi baru pada kompartemen ke- i , dan $V_i(\vec{x}) = V_i^-(\vec{x}) - V_i^+(\vec{x})$ dengan $V_i^-(\vec{x})$ adalah rata-rata perpindahan individu keluar dari kompartemen ke- i , dan $V_i^+(\vec{x})$ adalah rata-rata perpindahan individu masuk ke dalam kompartemen ke- i pada kompartemen terinfeksi. $F_i(\vec{x}) - V_i(\vec{x})$ menyatakan rata-rata perubahan dari x_i . Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai FV^{-1} dengan

$$F = \left[\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j} \right], V = \left[\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_j} \right], i, j = 1, \dots, m,$$

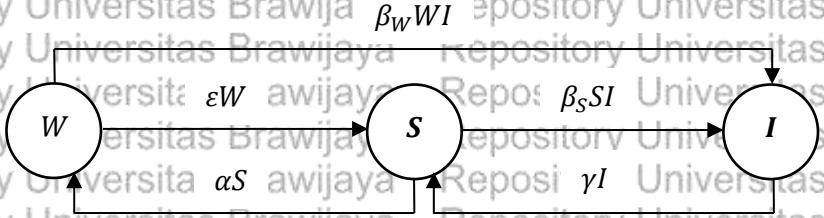
dan x_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Angka reproduksi dasar $R_0 = \rho(FV^{-1})$ didefinisikan sebagai spektral radius dari matriks FV^{-1} , yaitu nilai absolut terbesar dari nilai eigen matriks FV^{-1} .

(Hefferman, dkk, 2005)

2.7 Model SI (*Susceptible-Infectious*) Penyebaran Malware

Liu, dkk. (2015) membahas model penyebaran *malware* dengan pengaruh kewaspadaan pengguna. Pengguna dengan kewaspadaan tinggi akan selalu memperbarui *antimalware*-nya sehingga komputernya akan terlindungi dengan kuat. Pengguna dengan kewaspadaan rendah tidak memperbarui *antimalware*-nya atau bahkan tidak memasang *antimalware*, sehingga komputernya kurang terlindungi. Oleh karena itu, komputer rentan dalam model ini dibagi menjadi 2 yaitu *Weak* (W) dan *Strong* (S). *Weak* (W) adalah komputer

dengan penggunanya memiliki kewaspadaan rendah dan *Strong* (*S*) adalah komputer dengan penggunanya memiliki kewaspadaan tinggi. Dari fenomena tersebut, Liu, dkk. (2015) membuat diagram kompartemen sebagai berikut.



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen *Susceptible-Infected* (SI) dengan laju infeksi berbeda

Keterangan:

W : Komputer rentan *weak*,

S : Komputer rentan *strong*,

I : Komputer terinfeksi,

ε : Peluang komputer *weak* menjadi *strong*,

α : Peluang komputer *strong* menjadi *weak*,

β_W : Laju infeksi pada komputer *weak*,

β_S : Laju infeksi pada komputer *strong*,

γ : Peluang komputer terinfeksi menjadi *strong*.

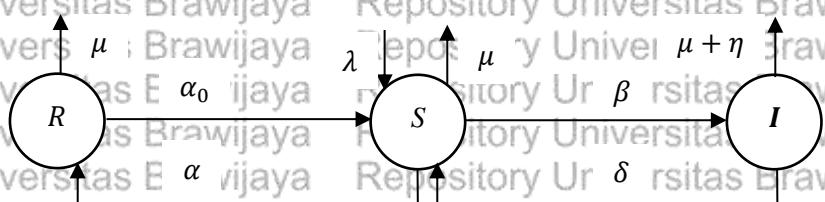
Komputer *weak* lebih mudah terkena *malware*, sehingga $\beta_W > \beta_S$.

(Liu, dkk., 2015)

2.8 Model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) Penyebaran *Malware*

Abazari, dkk. (2016) membahas model penyebaran *malware* *Susceptible-Infected-Protected* (SIP). Berbeda dengan model Liu, dkk. (2015), pada model SIP terdapat kelas *Protected* (*P*) atau *Recovered* (*R*) yaitu kelas yang mempunyai kekebalan terhadap semua jenis *malware*. Salah satu penyebab kekebalan tersebut hilang adalah karena tidak diperbaruiannya *antimalware*, sehingga komputer menjadi rentan. Selain adanya kelas *Protected*, dalam model SIR ini tidak dibedakan pengaruh kewaspadaan pengguna, sehingga kelas rentan

hanya terdapat satu kompartemen saja. Dari fenomena tersebut, Abazari, dkk. (2016) membuat diagram kompartemen sebagai berikut.



Gambar 2.2 Diagram Kompartemen *Susceptible-Infectious-Recovered* (SIR)

Keterangan:

S : Komputer rentan,

I : Komputer terinfeksi,

R : Komputer kebal,

λ : Laju rekrutmen komputer rentan baru,

α_0 : Laju *antimalware* tidak bekerja dengan efisien, misalnya karena terlambat diperbarui,

α : Laju komputer rentan menjadi kebal semua jenis *malware*,

β : Laju infeksi,

δ : Laju komputer terinfeksi menjadi rentan,

μ : Laju kerusakan yang penyebabnya selain *malware*,

η : Laju kerusakan dikarenakan *malware*.

(Abazari, dkk., 2016)

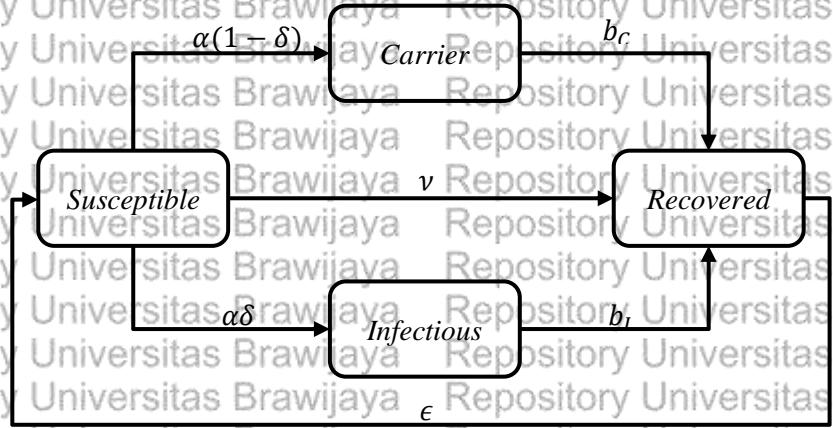
BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model

Populasi pada model penyebaran *malware* dengan kompartemen pembawa dibagi menjadi empat kelas, yaitu kelas *S* (*Susceptible*) berisi komputer rentan, *I* (*Infectious*) berisi komputer terinfeksi *malware*, kelas *C* (*Carrier*) berisi komputer yang mengandung *malware* tetapi tidak terkena dampaknya, dan *R* (*Recovered*) berisi komputer kebal terhadap *malware*. Kekebalan komputer pada kelas *R* bersifat sementara dan kemungkinan dapat menjadi rentan kembali, sehingga model penyebaran *malware* ini dapat disebut juga model *SCIRS*. Semua komputer dalam kelas tersebut berada dalam suatu jaringan komputer. Jaringan komputer merupakan suatu sistem yang terdiri dari dua komputer atau lebih yang saling terhubung satu sama lain melalui media transmisi sehingga dapat saling berbagi data. Komputer yang ada dalam jaringan komputer tersebut saling terhubung sepanjang waktu.

Diasumsikan bahwa jumlah komputer dalam jaringan tersebut tetap/konstan, tidak ada penambahan komputer yang terhubung ke dalam jaringan dan tidak ada pengurangan karena kerusakan baik karena *malware* atau komputer yang sudah usang. Komputer pembawa dan komputer terinfeksi dapat menginfeksi komputer rentan dengan laju transmisi yang sama yaitu sebesar α . Selain itu terdapat beberapa parameter lain, yaitu v (laju vaksinasi atau laju perubahan komputer rentan menjadi kebal), ϵ (laju pemulihan atau laju perubahan komputer kebal menjadi rentan), b_C (laju komputer pembawa mendapatkan kekebalan sementara), b_I (laju komputer terinfeksi mendapatkan kekebalan sementara). Diasumsikan pula parameter-parameter tersebut bernilai $0 < \alpha, v, \epsilon, b_C, b_I < 1$. Hubungan kelas *S*, *C*, *I*, *R* tersebut dapat dilihat pada diagram kompartemen berikut.



Gambar 3.1 Diagram Kompartemen *Susceptible-Carrier-Infectious-Recovered* (SCIR)

3.1.1 Laju perubahan kelas *Susceptible*

Kelas S pada model penyebaran *malware* berisi komputer yang rentan. Komputer dalam kelas ini tidak terpasang *antimalware* ataupun terpasang tetapi kederluwarsa. Kelas S berisi populasi komputer dengan berbagai jenis sistem operasi, misalnya Windows, MacOS, Linux, dan lainnya. Komputer rentan dapat terkena *malware* karena interaksi komputer rentan (S) dengan komputer terinfeksi (I) dan komputer pembawa (C) yang mengandung *malware*.

Kelas S berisi komputer dengan sistem operasi yang sesuai dan tidak sesuai dengan tipe *malware*. Dalam kelas S , sebanyak δ bagiannya adalah komputer yang sistem operasinya sesuai dengan tipe *malware*, sehingga ada sebanyak $(1 - \delta)$ bagian dari kelas S yang sistem operasinya tidak sesuai dengan tipe *malware*. Jelas bahwa $0 < \delta < 1$. Komputer dalam kelas I tidak dapat berpindah ke kelas C , begitu pula sebaliknya. Hal tersebut dikarenakan sistem operasi di antara kedua kelas tersebut berbeda. Kelas I berisi komputer yang sistem operasinya sesuai dengan tipe *malware*, sedangkan kelas C berisi komputer yang sistem operasinya tidak sesuai dengan tipe *malware*. Apabila komputer rentan yang terkena *malware* adalah komputer yang sistem operasinya tidak sesuai dengan tipe *malware* maka jumlah komputer rentan berkurang sebesar $\alpha(1 - \delta)S(I + C)$,

dimana α merupakan laju transmisi *malware* menginfeksi komputer rentan. Selain itu, apabila komputer rentan yang terkena *malware* adalah komputer yang sistem operasinya sesuai dengan tipe *malware* maka jumlah komputer rentan berkurang sebesar $\alpha\delta S(I + C)$.

Jika komputer rentan dipasang *antimalware* yang terbaru atau *antimalware* yang kedaluwarsa diperbarui, maka komputer rentan tersebut menjadi kebal terhadap *malware* dan tidak lagi berada pada kelas S . Hal ini mengakibatkan jumlah komputer rentan berkurang sebesar vS .

Jumlah komputer rentan akan bertambah ketika komputer kebal kehilangan kekebalannya. Kekebalan tersebut dapat hilang misalnya karena *antimalware* yang sudah ada dihapus atau terlambat diperbarui. Hal ini mengakibatkan jumlah komputer rentan bertambah sebesar ϵR .

Dengan demikian, laju perubahan komputer rentan pada kelas S adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha(1-\delta)S(I + C) - \alpha\delta S(I + C) - vS + \epsilon R, \\ &= -\alpha S(I + C) - vS + \epsilon R.\end{aligned}$$

3.1.2 Laju perubahan kelas *Carrier*

Kelas C berisi komputer pembawa, yaitu komputer yang tidak dapat terkena dampak *malware* meskipun ada *malware* di dalamnya. Hal ini karena tipe *malware* tidak sesuai dengan sistem operasi komputer tersebut. Penambahan jumlah komputer pembawa berasal dari interaksi komputer rentan pada kelas S dengan komputer terinfeksi pada kelas I dan komputer pembawa pada kelas C . Apabila sistem operasi komputer rentan pada kelas S tersebut tidak sesuai dengan tipe *malware*, maka komputer tersebut akan berpindah ke kelas C . Hal ini mengakibatkan jumlah komputer pembawa bertambah sebesar $\alpha(1-\delta)S(I + C)$.

Sama seperti komputer pada kelas terinfeksi, jika komputer pembawa dipasang *antimalware* atau *antimalware*-nya diperbarui dan berhasil menghilangkan *malware*, maka komputer pembawa tersebut memperoleh kekebalan sementara terhadap *malware*. Hal ini mengakibatkan jumlah komputer pembawa berkurang sebesar b_C .

Dengan demikian, laju perubahan komputer rentan pada kelas C adalah

$$\frac{dC}{dt} = \alpha(1 - \delta)S(I + C) - b_C C.$$

3.1.3 Laju perubahan kelas I

Telah diketahui bahwa kelas I adalah kelas terinfeksi, yaitu kelas yang berisi komputer yang terkena dampak *malware*. Komputer yang terkena dampak *malware* adalah komputer yang sistem operasinya bersesuaian dengan tipe *malware*. Penambahan jumlah komputer terinfeksi berasal dari kelas S yang komputer didalamnya berinteraksi dengan komputer pada kelas I dan C . Apabila sistem operasi komputer rentan pada kelas S tersebut sesuai dengan tipe *malware*, maka komputer tersebut akan berpindah ke kelas I . Hal ini mengakibatkan jumlah komputer pada kelas I akan bertambah sebesar $\alpha\delta S(I + C)$.

Jika komputer terinfeksi dipasang *antimalware* atau *antimalware*-nya diperbarui dan berhasil menghilangkan *malware*, maka komputer terinfeksi tersebut memperoleh kekebalan sementara terhadap *malware*. Hal ini mengakibatkan jumlah komputer terinfeksi berkurang sebesar $b_I I$.

Dengan demikian, laju perubahan komputer rentan pada kelas I adalah

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\delta S(I + C) - b_I I.$$

3.1.4 Laju perubahan kelas R

Kelas R berisi komputer yang kebal terhadap *malware*, *malware* tidak dapat masuk karena perlindungan *antimalware* terbaru. Namun kekebalan ini bersifat sementara. Jumlah komputer kebal bertambah karena *antimalware* yang dipasang ataupun diperbarui pada komputer terinfeksi berhasil menghilangkan *malware* pada komputer tersebut, sehingga jumlah komputer kebal bertambah sebesar $b_I I$.

Tidak hanya komputer terinfeksi yang dapat dipasang *antimalware*, *antimalware* juga dapat dipasang ataupun diperbarui pada komputer pembawa. Ketika *antimalware* berhasil membersihkan

malware tersebut maka jumlah komputer kebal bertambah sebesar $b_c C$.

Selain itu, komputer rentan yang langsung terpasang *antimalware* terbaru juga akan mengakibatkan komputer menjadi kebal. Dengan begitu, jumlah komputer kebal juga akan berambah sebesar vS .

Dikarenakan pengguna komputer adalah manusia, sehingga ada kemungkinan *antimalware* terlambat untuk diperbarui. Keterlambatan ini bisa dikarenakan tidak ada koneksi internet untuk mengunduh pembaruan, terlupa, dan tidak ada biaya bila *antimalware*-nya berbayar. Hal ini mengakibatkan jumlah komputer kebal berkurang sebesar ϵR .

Dengan demikian, laju perubahan komputer rentan pada kelas R adalah

$$\frac{dR}{dt} = b_c C + b_I I + vS - \epsilon R.$$

Dari penjelasan diatas, diperoleh sistem dinamik model penyebaran malware dengan kompartemen pembawa sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \epsilon R - \alpha S(I + C) - vS, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha(1 - \delta)S(I + C) - b_c C, \quad (3.1b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\delta S(I + C) - b_I I, \quad (3.1c)$$

$$\frac{dR}{dt} = b_c C + b_I I + vS - \epsilon R. \quad (3.1d)$$

Jika $N = S + I + C + R$, maka persamaan (3.1a) dapat ditulis

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S(I + C) + vS + \epsilon(N - S - I - C), \quad (3.1e)$$

Bila diperhatikan, $\frac{dS}{dt}, \frac{dC}{dt}$, dan $\frac{dI}{dt}$ tidak bergantung pada R , sehingga sistem diatas dapat disederhanakan menjadi sistem berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha S(I + C) - \nu S + \epsilon(N - S - I - C), \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha(1 - \delta)S(I + C) - b_c C, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha\delta S(I + C) - b_I I.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Ruang solusi dari sistem persamaan (3.2) adalah

$$\Omega = \{(S, C, I) \in \mathbb{R}_3^+: 0 \leq S + C + I \leq N\}.$$

3.2 Titik Kesetimbangan Model

Berdasarkan subbab 2.2, titik kesetimbangan sistem persamaan (3.2) adalah diperoleh saat

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0, \text{ yaitu}$$

$$\begin{aligned}-\alpha S(I + C) - \nu S + \epsilon(N - S - C - I) &= 0, \\ \alpha(1 - \delta)S(I + C) - b_c C &= 0,\end{aligned}\quad (3.3a)$$

$$\alpha\delta S(I + C) - b_I I = 0. \quad (3.3b)$$

Dari persamaan (3.3c) diperoleh

$$C = \frac{b_I I}{\alpha\delta S} - I. \quad (3.3d)$$

Substitusikan persamaan (3.3d) ke persamaan (3.3b) diperoleh

$$I \left(\frac{\alpha(1-\delta)Sb_I - b_c b_I + b_c \alpha \delta S}{\alpha \delta S} \right) = 0.$$

Terdapat 2 kasus, yaitu

$$I = 0 \text{ atau } \frac{\alpha(1-\delta)Sb_I - b_c b_I + b_c \alpha \delta S}{\alpha \delta S} = 0.$$

- Kasus 1 ketika $I = 0$

Substitusikan $I = 0$ ke persamaan (3.3d) diperoleh

$$C = 0.$$

Substitusikan $I = 0$ dan $C = 0$ ke persamaan (3.3a) diperoleh

$$S = \frac{\epsilon N}{v + \epsilon}$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan bebas *malware*, yaitu

$$E^0 = (S^0, C^0, I^0) = \left(\frac{\epsilon N}{(v + \epsilon)}, 0, 0 \right).$$

Titik kesetimbangan bebas *malware* E^0 selalu eksis.

- Kasus 2 ketika

$$\frac{\alpha(1-\delta)Sb_I - b_c b_I + b_c \alpha \delta S}{\alpha \delta S} = 0,$$

diperoleh

$$S = \frac{b_c b_I}{Q},$$

dengan $Q = \alpha b_I(1-\delta) + \alpha b_c \delta > 0$.

Substitusikan persamaan (3.3e) ke persamaan (3.3d), diperoleh

$$C = \frac{IQ}{\alpha \delta b_c} - I.$$

Substitusikan persamaan (3.3e) dan (3.3f) ke persamaan (3.3a), diperoleh

$$I = \frac{b_c \delta L}{QK}, \quad (3.3g)$$

dengan

$$K = b_I b_C + \epsilon(b_I(1 - \delta) + b_C \delta) > 0,$$

$$L = \alpha \epsilon N(b_I(1 - \delta) + b_C \delta) - b_C b_I(v + \epsilon).$$

Substitusikan persamaan (3.3g) ke persamaan (3.3f), diperoleh

$$C = \frac{b_I(1 - \delta)L}{QK}. \quad (3.3h)$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan endemik *malware*, yaitu

$$E^* = (S^*, C^*, I^*) = \left(\frac{b_C b_I}{Q}, \frac{b_I(1 - \delta)L}{QK}, \frac{b_C \delta L}{QK} \right).$$

Karena $Q > 0$, $K > 0$, dan $0 < \delta < 1$, maka titik kesetimbangan endemik *malware* eksis jika

$$L > 0,$$

$$\alpha \epsilon N(b_I(1 - \delta) + b_C \delta) - b_C b_I(v + \epsilon) > 0,$$

$$\alpha \epsilon N(b_I(1 - \delta) + b_C \delta) > b_C b_I(v + \epsilon),$$

$$\frac{\alpha \epsilon N(b_I(1 - \delta) + b_C \delta)}{b_C b_I(v + \epsilon)} > 1.$$

3.3 Angka Reproduksi Dasar

Diketahui

$$\vec{x} = (C, I, S)$$

Diketahui bahwa kompartemen berisi komputer yang mengandung *malware* adalah C dan I , dari sistem (3.2) diperoleh

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1-\delta)S(I+C) \\ \alpha\delta S(I+C) \end{bmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_C C \\ b_I I \end{bmatrix}$$

Turunan parsial \mathcal{F} dan \mathcal{V} terhadap C dan I adalah

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \alpha(1-\delta)S & \alpha(1-\delta)S \\ \alpha\delta S & \alpha\delta S \end{bmatrix}, \quad V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} b_C & 0 \\ 0 & b_I \end{bmatrix}$$

$$F(E^0) = \begin{bmatrix} \alpha(1-\delta)\epsilon N & \alpha(1-\delta)\epsilon N \\ \frac{(v+\epsilon)}{\alpha\delta\epsilon N} & \frac{(v+\epsilon)}{\alpha\delta\epsilon N} \end{bmatrix}, \quad V(E^0) = \begin{bmatrix} b_C & 0 \\ 0 & b_I \end{bmatrix}$$

Misal $G = F(E^0)V^{-1}(E^0)$,

$$G = \begin{bmatrix} \alpha(1-\delta)\frac{\epsilon N}{(v+\epsilon)} & \alpha(1-\delta)\frac{\epsilon N}{(v+\epsilon)} \\ \frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v+\epsilon)} & \frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v+\epsilon)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_I}{b_C b_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_I & 0 \\ 0 & b_C \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha(1-\delta)\epsilon N b_I}{b_C b_I (v+\epsilon)} & \frac{\alpha(1-\delta)\epsilon N b_C}{b_C b_I (v+\epsilon)} \\ \frac{\alpha\delta\epsilon N b_I}{b_C b_I (v+\epsilon)} & \frac{\alpha\delta\epsilon N b_C}{b_C b_I (v+\epsilon)} \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks G diperoleh saat

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha(1-\delta)\epsilon Nb_I}{b_c b_I(v+\epsilon)} - \lambda & \frac{\alpha(1-\delta)\epsilon Nb_C}{b_c b_I(v+\epsilon)} \\ \frac{\alpha\delta\epsilon Nb_I}{b_c b_I(v+\epsilon)} & \frac{\alpha\delta\epsilon Nb_C}{b_c b_I(v+\epsilon)} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(\frac{\alpha(1-\delta)\epsilon Nb_I}{b_c b_I(v+\epsilon)} - \lambda \right) \left(\frac{\alpha\delta\epsilon Nb_C}{b_c b_I(v+\epsilon)} - \lambda \right) - \left(\frac{\alpha(1-\delta)\epsilon Nb_C}{b_c b_I(v+\epsilon)} \right) \left(\frac{\alpha\delta\epsilon Nb_I}{b_c b_I(v+\epsilon)} \right) = 0,$$

$$\lambda^2 - \left(\frac{\alpha(1-\delta)\epsilon Nb_I + \alpha\delta\epsilon Nb_C}{b_c b_I(v+\epsilon)} \right) \lambda + \left(\frac{(\alpha(1+\delta)\epsilon Nb_I)(\alpha\delta\epsilon Nb_C)}{(b_c b_I(v+\epsilon))^2} \right) = 0,$$

$$\lambda \left(\lambda - \frac{\alpha(1-\delta)\epsilon Nb_I + \alpha\delta\epsilon Nb_C}{b_c b_I(v+\epsilon)} \right) = 0.$$

Diperoleh

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha(1-\delta)\epsilon Nb_I + \alpha\delta\epsilon Nb_C}{b_c b_I(v+\epsilon)}.$$

$R_0 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$,

jadi

$$R_0 = \frac{\alpha\epsilon N(b_I(1-\delta) + b_C\delta)}{b_c b_I(v+\epsilon)}.$$

Dapat dilihat bahwa syarat eksistensi titik kesetimbangan endemik malware (3.4) adalah $R_0 > 1$.

3.4 Analisis Kestabilan Lokal

Model penyebaran *malware* dengan kompartemen pembawa merupakan sistem dinamik otonomus nonlinear. Sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan dapat diketahui dengan proses linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan linearisasi sistem persamaan (3.2) diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha(I + C) - (v + \epsilon) & -(\alpha S + \epsilon) & -(\alpha S + \epsilon) \\ \alpha(1 - \delta)(I + C) & \alpha(1 - \delta)S - b_C & \alpha(1 - \delta)S \\ \alpha\delta(I + C) & \alpha\delta S & \alpha\delta S - b_I \end{bmatrix}.$$

3.4.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas *malware*

Menentukan nilai eigen matriks Jacobi J di titik kesetimbangan bebas malware *malware* adalah sebagai berikut.

$$\left| J(E^0) - \lambda I \right| = 0,$$
$$\begin{vmatrix} -(v + \epsilon) - \lambda & \frac{\alpha\epsilon N}{v + \epsilon} + \epsilon & \frac{\alpha\epsilon N}{v + \epsilon} + \epsilon \\ 0 & \frac{\alpha(1 - \delta)\epsilon N}{(v + \epsilon)} - b_C - \lambda & \frac{\alpha(1 - \delta)\epsilon N}{(v + \epsilon)} \\ 0 & \frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v + \epsilon)} & \frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v + \epsilon)} - b_I - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Menggunakan cara kofaktor kolom pertama diperoleh

$$(-(v + \epsilon) - \lambda) \left(\left(\frac{\alpha(1 - \delta)\epsilon N}{(v + \epsilon)} - b_C - \lambda \right) \left(\frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v + \epsilon)} - b_I - \lambda \right) - \left(\frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v + \epsilon)} \right) \left(\frac{\alpha(1 - \delta)\epsilon N}{(v + \epsilon)} \right) \right) = 0,$$

$$-\left((v + \epsilon) + \lambda\right) \left(\lambda^2 - \left(\frac{\alpha(1-\delta)\epsilon N + \alpha\delta\epsilon N}{(v + \epsilon)} - (b_c + b_l) \right) \lambda \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha(1-\delta)\epsilon N}{(v + \epsilon)} - b_c \right) \left(\frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v + \epsilon)} - b_l \right) - \left(\frac{\alpha\delta\epsilon N}{(v + \epsilon)} \right) \left(\frac{\alpha(1-\delta)\epsilon N}{(v + \epsilon)} \right) \right)$$

$$= 0,$$

$$-\left((v + \epsilon) + \lambda\right) \left(\lambda^2 - \left(\frac{\alpha\epsilon N}{(v + \epsilon)} - (b_c + b_l) \right) \lambda \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\alpha(1-\delta)\epsilon N b_l}{(v + \epsilon)} + \frac{\alpha\delta\epsilon N b_c}{(v + \epsilon)} - b_c b_l \right) \right) = 0.$$

Diperoleh nilai λ sebagaimana dijabarkan pada Lampiran 1 sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -(v + \epsilon) < 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_c b_l (R_0 - 1)(b_l(-1 + \delta) + b_c \delta)^2}}{-2(b_l(1 - \delta) + b_c \delta)},$$

$$\lambda_3 = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_c b_l (R_0 - 1)(b_l(-1 + \delta) - b_c \delta)^2}}{-2(b_l(1 - \delta) + b_c \delta)}$$

dengan

$$A = b_c b_l (1 - R_0) + b_l^2 (1 - \delta) + b_c^2 \delta.$$

- Untuk λ_2

Dikarenakan penyebut bernilai negatif, agar λ_2 bernilai negatif maka pembilangnya harus bernilai positif. Ketika $R_0 < 1$ maka akan ada dua kemungkinan.

1. Kemungkinan 1

$$A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2 > 0$$

$$A^2 > -4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2$$

maka $\sqrt{A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2} > 0$.

Dapat disimpulkan bahwa pembilangnya bernilai positif, sehingga λ_2 bernilai negatif.

2. Kemungkinan 2

$$A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2 < 0$$

$$A^2 < -4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2$$

maka $\sqrt{A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2}$ bernilai imajiner.

Dapat disimpulkan bahwa λ_2 mempunyai bagian real negatif.

• Untuk λ_3

Dikarenakan penyebut bernilai negatif, agar λ_3 bernilai negatif maka pembilangnya harus bernilai positif. Ketika $R_0 < 1$ maka akan ada dua kemungkinan,

1. Kemungkinan 1

$$A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2 > 0$$

$$A^2 > -4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2$$

maka $\sqrt{A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2} > 0$.

Dikarenakan $A > \sqrt{A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2}$, dapat disimpulkan bahwa pembilangnya bernilai positif, sehingga λ_2 bernilai negatif.

2. Kemungkinan 2

$$A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2 < 0$$

$$A^2 < -4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2$$

maka $\sqrt{A^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1 + \delta) - b_C \delta)^2}$ bernilai imajiner.

Dapat disimpulkan bahwa λ_3 mempunyai bagian real negatif.

Dikarenakan semua nilai eigen matriks Jacobi $J(E^0)$ mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan bebas malware E^0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

3.4.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik malware

Menentukan nilai eigen matriks Jacobi J di titik kesetimbangan endemik malware adalah sebagai berikut.

$$|J(E^*) - \lambda I| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon) + \lambda & (\alpha S^* + \epsilon) \\ \alpha(1 - \delta)(I^* + C^*) & \alpha(1 - \delta)S^* - b_C + \lambda \\ \alpha\delta(I^* + C^*) & \alpha\delta S^* \end{vmatrix} = 0.$$

Menggunakan cara kofaktor baris pertama diperoleh

$$\begin{aligned} & (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon)) \\ & - \lambda((\alpha(1 - \delta)S^* - b_C - \lambda)(\alpha\delta S^* - b_I - \lambda) \\ & - (\alpha\delta S^*)(\alpha(1 - \delta)S^*)) \\ & - ((-\alpha S^* + \epsilon))((\alpha(1 - \delta)(I^* + C^*))(\alpha\delta S^* - b_I - \lambda) \\ & - (\alpha\delta(I^* + C^*))(\alpha(1 - \delta)S^*)) \\ & + ((-\alpha S^* + \epsilon))((\alpha(1 - \delta)(I^* + C^*))(\alpha\delta S^*)) \\ & - ((\alpha\delta(I^* + C^*))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_C - \lambda)) = 0. \end{aligned}$$

Setelah diuraikan, diperoleh

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - (-\alpha(I^* + C^*)) - (v + \epsilon) + \alpha(1 - \delta)S^* - b_c + \alpha\delta S^* - b_l \lambda^2 \\ & + ((-\alpha(I^* + C^*)) + (v + \epsilon))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_c) \\ & + (-\alpha(I^* + C^*)) - (v + \epsilon)(\alpha\delta S^* - b_l) \\ & + (\alpha(1 - \delta)S^* - b_c)(\alpha\delta S^* - b_l) - \alpha\delta(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon) \\ & - \alpha^2\delta S^{*2}(1 - \delta) + \alpha(1 - \delta)(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon) \lambda \\ & + \alpha\delta(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon)(\alpha(1 - \delta)S^* - b_c) \\ & + \alpha^2\delta S^{*2}(1 - \delta)(-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon)) \\ & + \alpha(1 - \delta)(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon)(\alpha\delta S^* - b_l) \\ & - (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_c)(\alpha\delta S^* - b_l) = 0. \end{aligned}$$

Substitusikan E^* sehingga diperoleh $p(\lambda)$ yang merupakan persamaan karakteristik matriks Jacobi J di titik E^* sebagaimana yang dijabarkan pada Lampiran 2.

$$p(\lambda) = p_0\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3, \quad (3.5)$$

dengan

$$p_0 = 1,$$

$$p_1 = \frac{\alpha(-b_c b_l K + b_l L + b_c \delta L - b_l \delta L) + QK(b_c + b_l + v + \epsilon)}{QK},$$

$$p_2 = b_l(v + \epsilon) + b_c(b_l + v + \epsilon) +$$

$$\frac{\alpha(b_c^2(L - Kb_l)\delta - b_l L(\delta - 1)(b_l + \epsilon))}{QK} +$$

$$\frac{\alpha(b_c(b_l^2 K(\delta - 1) + L\delta\epsilon + b_l(L - K(v + \epsilon))))}{QK},$$

$$p_3 = L.$$

Untuk mengetahui jenis kestabilan titik kesetimbangan endemik *malware*, digunakan kriteria Routh-Hurwitz. Titik kesetimbangan endemik akan stabil jika $p_1 > 0$, $p_3 > 0$, dan $p_1 p_2 - p_3 > 0$.

Selanjutnya akan dicek apakah kondisi tersebut terpenuhi.

$$1) p_1 = \frac{\alpha(-b_c b_l K + b_l L + b_c \delta L - b_l \delta L) + QK(b_c + b_l + v + \epsilon)}{QK},$$

karena $Q > 0$ dan $K > 0$, maka $QK > 0$. Kemudian akan dibuktikan pembilang bernilai positif. Ketika $R_0 > 1$ diperoleh

$$\alpha\epsilon N(b_l(1 - \delta) + b_c \delta) > b_c b_l(v + \epsilon),$$

$$\alpha\epsilon N(b_l(1 - \delta) + b_c \delta) + b_c b_l(v + \epsilon) > 0.$$

Substitusikan nilai Q , K , dan L diperoleh

$$\begin{aligned} & ab_c b_l(b_c^2 \delta + b_l^2(1 - \delta) + (b_l(1 - \delta) + b_c \delta)v) \\ & + \alpha(b_l(1 - \delta) + b_c \delta)(\alpha N\epsilon(b_l(1 - \delta) + b_c \delta) - b_c b_l(v + \epsilon)) \\ & + (\alpha\epsilon(b_l(1 - \delta) + b_c \delta)^2)(b_c + b_l + v + \epsilon) > 0. \end{aligned}$$

$$2) p_3 = L = \alpha\epsilon N(b_l(1 - \delta) + b_c \delta) - b_c b_l(v + \epsilon) > 0 \text{ untuk } R_0 > 1.$$

3) Akan ditunjukkan pada simulasi numerik bahwa $p_1 p_2 - p_3 > 0$ untuk $R_0 > 1$.

Dengan terpenuhinya kriteria Routh-Hurwitz pada persamaan karakteristik matriks $J(E^*)$ jika $R_0 > 1$, sehingga semua nilai eigen matriks $J(E^*)$ bernilai negatif. Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik *malware* stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

3.5 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk memverifikasi hasil analitik yang telah diperoleh. Simulasi numerik dilakukan dengan memanfaatkan *solver* yang sudah ada pada MATLAB yaitu *ode45* untuk melihat jumlah komputer pada setiap kelas pada waktu t .

Dimisalkan terdapat total 1001 komputer, kemudian ditentukan nilai setiap parameter pada masing-masing simulasi sebagai berikut.

Tabel 3.1 Nilai parameter pada simulasi 1

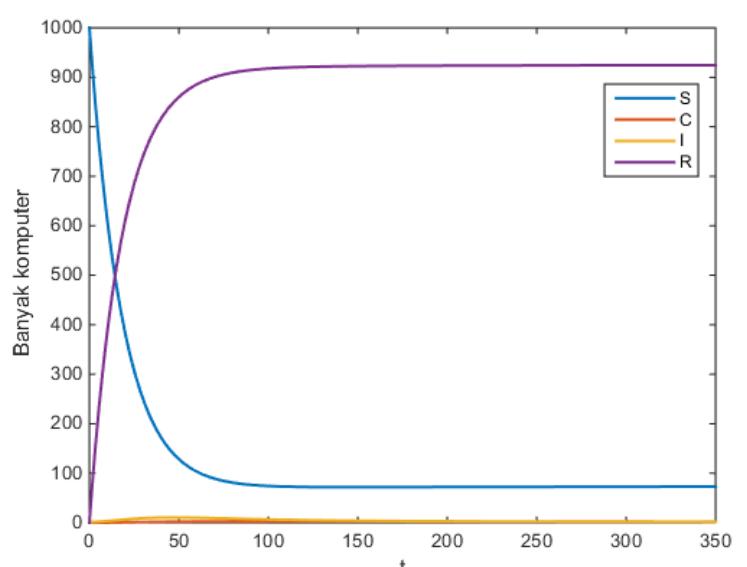
Parameter	Nilai
α	0.0002
ϵ	0.004
b_C	0.004
b_I	0.03
δ	0.9
ν	0.05

Tabel 3.2 Nilai parameter pada simulasi 2

Parameter	Nilai
α	0.0002
ϵ	0.004
b_C	0.004
b_I	0.03
δ	0.9
ν	0.01

3.5.1 Simulasi 1

Simulasi 1 dilakukan untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan bebas *malware*. Jika digunakan nilai parameter pada Tabel 3.1, diperoleh $R_0 = 0.81563 < 1$. Diambil nilai awal, yaitu $S(0) = 1000, C(0) = 0, I(0) = 1, R(0) = 0$.



Gambar 3.2 Grafik solusi menuju titik kesetimbangan bebas *malware*

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa dengan nilai awal dan parameter yang diberikan, jumlah individu populasi rentan (S), pembawa (C), dan terinfeksi (I) menuju titik kesetimbangan bebas $E^0 = (74.148, 0, 0)$. Dapat dilihat bahwa jumlah komputer rentan menurun drastis sedangkan jumlah komputer kental meningkat drastis, selain itu jumlah komputer pembawa dan terinfeksi hanya sedikit mengalami peningkatan namun kembali lagi menuju nol. Hal tersebut menunjukkan bahwa tidak akan ada lagi *malware* dalam populasi tersebut. Hasil simulasi numerik mendukung hasil analitik, yaitu jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas *malware* stabil asimtotik lokal.

3.5.2 Simulasi 2

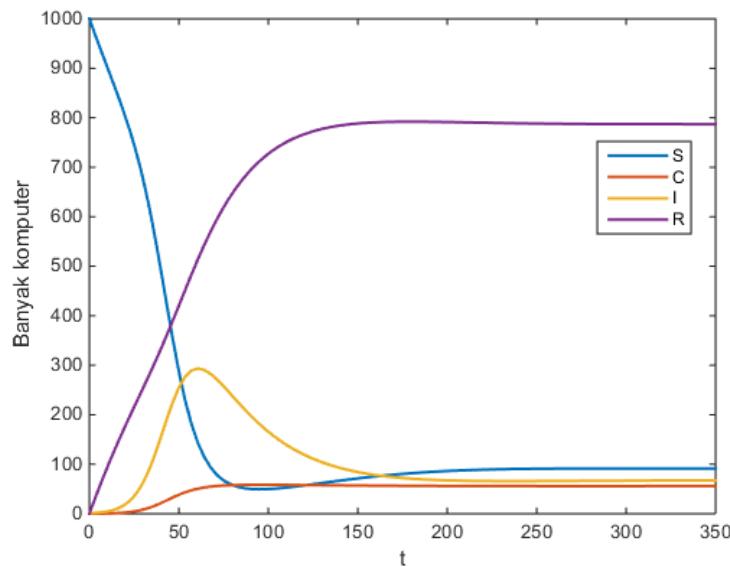
Simulasi 2 dilakukan untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan endemik *malware*. Jika digunakan nilai parameter pada Tabel 3.2, diperoleh $R_0 = 3.146 > 1$. Selain itu, diperoleh

$$p_1 = -0.0544, p_2 = 14.9049, p_3 = 3.6 \times 10^{-6}$$

sehingga didapatkan $p_1 p_2 - p_3 = 0.8115 > 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, dapat ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik lokal karena $p_1 > 0, p_3 > 0, p_1 p_2 - p_3 > 0$.

Selanjutnya diamambil nilai awal, yaitu

$$S(0) = 1000, C(0) = 0, I(0) = 1, R(0) = 0.$$



Gambar 3.3 Grafik solusi menuju titik kesetimbangan endemik *malware*

Pada Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa dengan nilai awal dan parameter yang diberikan, jumlah individu populasi rentan (S), pembawa (C), dan terinfeksi (I) menuju titik kesetimbangan endemik *malware* $E^* = (90.9091, 55.9687, 67.1624)$. Dapat dilihat jumlah komputer pembawa dan terinfeksi meningkat lebih besar daripada simulasi 1, selain itu jumlahnya tidak menuju nol tetapi menuju suatu titik. Hal tersebut menunjukkan bahwa akan adanya *malware* yang menetap dalam populasi komputer tersebut. Hasil simulasi numerik mendukung hasil analitik, yaitu jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik *malware* stabil asimtotik lokal.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan Skripsi ini, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model penyebaran *malware* dengan kompartemen pembawa terdiri dari empat kompartemen, yaitu populasi rentan (*S*), pembawa (*C*), terinfeksi (*I*), dan kebal (*R*). Model tersebut berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear.
2. Model tersebut memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas *malware* dan titik kesetimbangan endemik *malware*. Titik kesetimbangan bebas *malware* selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemik *malware* eksis jika $R_0 > 1$.
3. Titik kesetimbangan bebas *malware* bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik *malware* bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.
4. Simulasi numerik menunjukkan hasil yang sesuai dengan analisis dinamik yang telah dilakukan.

4.2 Saran

Penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan:

1. Menambahkan laju kelahiran (dikarenakan adanya penambahan komputer yang terhubung ke dalam jaringan) pada kelas *S* dan laju kematian (dikarenakan adanya kerusakan baik karena komputer sudah usang atau terkena dampak dari *malware*).
2. Melakukan strategi kontrol, antara lain dengan menentukan cara menurunkan nilai dari R_0 agar $R_0 < 1$, sehingga *malware* nantinya akan hilang dari suatu populasi komputer dalam jaringan/tidak menjadi endemi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abazari, F., M. Analoui, H. Takabi. 2016. Effect of anti-malware software on infectious nodes in cloud environment. *Computers & Security*. Vol. 58, Hal.139-148. Elsevier Ltd.
- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000, *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Badan Pengembangan dan Pembinaan Bahasa. 2016. KBBI Daring. <https://kbbi.kemdikbud.go.id/entri/Komputer> (diakses tanggal 22 Oktober 2018)
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Tenth Edition. John Wiley & Sons, Inc. United State of America.
- CERT-UK. 2014. An introduction to malware. A CERT-UK Publication.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation: with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equation*. Wadsworth Inc. California.
- Guillen, J. D. H., A. M. del Rey. 2017. Modeling malware propagation using a carrier compartment. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*. Vol. 56, Hal. 217-226, Elsevier B.V.
- Hefferman, J. M., R. J. Smith, dan L. M. Wahl. 2005. Perspectives on the Basic Reproduction Ratio. *Journal of the Royal Society Interface*. Vol. 2, Hal. 281-293. The Royal Society.

- Liu, W., C. Liu, X. Liu, S. Cui, X. Huang. 2015. Modeling the spread of malware with the influence of heterogeneous immunization. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 40, Hal. 3141-3152. Elsevier Inc.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology I An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Singh, S., P. K. Sharma, S. Y. Moon, D. Moon, J. H. Park. 2016. A comprehensive study on APT attacks and countermeasures for future networks and communications: challenges and solutions. Springer Science and Business Media New York.



LAMPIRAN

Lampiran 1 Menentukan Tanda Nilai Eigen λ untuk Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Malware

Malware

$$-(v + \epsilon) + \lambda \left(\lambda^2 - \left(\frac{\alpha\epsilon N}{(v + \epsilon)} - (b_c + b_l) \right) \lambda - \left(\frac{\alpha(1 - \delta)\epsilon N b_l}{(v + \epsilon)} + \frac{\alpha\delta\epsilon N b_c}{(v + \epsilon)} - b_c b_l \right) \right) = 0.$$

$$\lambda_1 = -(v + \epsilon) < 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{\left(\frac{\alpha\epsilon N(1 - \delta) + \alpha\epsilon N\delta}{(v + \epsilon)} - (b_c + b_l) \right)}{2} \pm$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha\epsilon N(1 - \delta) + \alpha\epsilon N\delta}{(v + \epsilon)} - (b_c + b_l) \right)^2 + 4 \left(\frac{\alpha\epsilon N(1 - \delta)b_l}{(v + \epsilon)} + \frac{\alpha\epsilon N\delta b_c}{(v + \epsilon)} - b_c b_l \right)}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha\epsilon N}{(v + \epsilon)} (b_c + b_l) \right) (b_l(-1 + \delta) - b_c\delta)}{2(b_l(-1 + \delta) - b_c\delta)} \pm$$



$$\sqrt{\left(\left(\frac{\alpha\epsilon N}{(v+\epsilon)} - (b_c + b_l) \right) ((b_l(-1+\delta) - b_c\delta)) \right)^2 + 4 \left(\frac{\alpha\epsilon N(b_l(1-\delta) + b_c\delta)}{(v+\epsilon)} - b_c b_l \right) (b_l(-1+\delta) - b_c\delta)^2}$$

$$= \frac{2(b_l(-1+\delta) - b_c\delta)}{2(b_l(-1+\delta) - b_c\delta)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha\epsilon N}{(v+\epsilon)} - (b_c + b_l) \right) (b_l(-1+\delta) - b_c\delta)}{2(b_l(-1+\delta) - b_c\delta)}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{\alpha\epsilon N}{(v+\epsilon)} - (b_c + b_l) \right) (b_l(-1+\delta) - b_c\delta) \right)^2 + 4b_c b_l \left(\frac{\alpha\epsilon N(b_l(1-\delta) + b_c\delta)}{b_c b_l(v+\epsilon)} - 1 \right) (b_l(-1+\delta) - b_c\delta)^2}{2(b_l(-1+\delta) - b_c\delta)}$$

$$= \frac{\frac{\alpha\epsilon N(b_l(-1+\delta) - b_c\delta)}{(v+\epsilon)} + (b_c + b_l)b_l(1-\delta) + (b_c + b_l)b_c\delta}{2(b_l(-1+\delta) - b_c\delta)}$$

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya



$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha\epsilon N(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)}{(v+\epsilon)} + b_I(1-\delta)(b_C+b_I) + (b_C+b_I)b_C\delta \right)^2 + 4b_Cb_I(R_0-1)(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)^2}}}{2(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)}$$
$$= \frac{b_Cb_I\alpha\epsilon N(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)}{(v+\epsilon)b_Cb_I} + \frac{b_I^2(1-\delta) + b_Cb_I(1-\delta) + (b_C+b_I)b_C\delta}{2(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)} +$$
$$\frac{\left(\frac{b_Cb_I\alpha\epsilon N(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)}{(v+\epsilon)b_Cb_I} + b_I^2(1-\delta) + b_Cb_I(1-\delta) + (b_C+b_I)b_C\delta \right)^2}{2(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)} +$$
$$\frac{4b_Cb_I(R_0-1)(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)^2}{2(b_I(-1+\delta)-b_C\delta)}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{-b_C b_I \alpha \epsilon N (b_I(1-\delta) + b_C \delta) + b_I^2 (1-\delta) + b_C b_I + b_C^2 \delta}{b_C b_I (\nu + \epsilon)} \\
 &\quad \pm \frac{\left(-b_C b_I \alpha \epsilon N (b_I(1-\delta) + b_C \delta) + b_I^2 (1-\delta) + b_C b_I + b_C^2 \delta \right)^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1+\delta) - b_C \delta)^2}{-2(b_I(1-\delta) + b_C \delta)} \\
 &\quad \pm \frac{-b_C b_I R_0 + b_I^2 (1-\delta) + b_C b_I + b_C^2 \delta}{2(b_I(-1+\delta) - b_C \delta)} \\
 &\quad \pm \frac{(-b_C b_I R_0 + b_I^2 (1-\delta) + b_C b_I + b_C^2 \delta)^2 + 4b_C b_I (R_0 - 1)(b_I(-1+\delta) - b_C \delta)^2}{-2(b_I(1-\delta) + b_C \delta)}
 \end{aligned}$$



$$= \frac{b_c b_l (1 - R_0) + b_l^2 (1 - \delta) + b_c^2 \delta}{-2(b_l(1 - \delta) + b_c \delta)} \pm \sqrt{\frac{(b_c b_l (1 - R_0) + b_l^2 (1 - \delta) + b_c^2 \delta)^2 + 4b_c b_l (R_0 - 1)(b_l(-1 + \delta) - b_c \delta)^2}{-2(b_l(1 - \delta) + b_c \delta)}}$$



**Lampiran 2 Menentukan Koefisien Persamaan Karakteristik (3.5)**

Persamaan

$$\begin{aligned} & (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon) + \lambda)((\alpha(1 - \delta)S^* - b_c - \lambda)(\alpha\delta S^* - b_l + \lambda) - (\alpha\delta S^*)(\alpha(1 - \delta)S^*)) \\ & - ((-\alpha S^* + \epsilon))((\alpha(1 + \delta)(I^* + C^*))(\alpha\delta S^* - b_l - \lambda) - (\alpha\delta(I^* + C^*))(\alpha(1 + \delta)S^*)) \\ & + ((-\alpha S^* + \epsilon))((\alpha(1 - \delta)(I^* + C^*))(\alpha\delta S^*) - (\alpha\delta(I^* + C^*))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_c - \lambda)) = 0, \\ & \lambda^3 - (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon) + \alpha(1 - \delta)S^* - b_c + \alpha\delta S^* - b_l)\lambda^2 \\ & + ((-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_c) + (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha\delta S^* - b_l) \\ & + (\alpha(1 - \delta)S^* - b_c)(\alpha\delta S^* - b_l))\lambda - ((-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_c)(\alpha\delta S^* - b_l) \\ & + (\alpha\delta(I^* + C^*)(\alpha(1 - \delta)S^* - b_c - \lambda)(-\alpha S^* + \epsilon)) + (\alpha\delta S^*)(\alpha(1 - \delta)S^*((\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon)) - \lambda) \\ & + (\alpha\delta S^* - b_l + \lambda)\alpha(1 + \delta)(I^* + C^*)(-\alpha S^* + \epsilon)) - ((-\alpha S^* - \epsilon)(\alpha(1 - \delta)S^*)(\alpha\delta(I^* + C^*))) \\ & - ((-\alpha S^* - \epsilon)\alpha(1 - \delta)(I^* + C^*)(\alpha\delta S^*)) = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lambda^3 - & (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon) + \alpha(1 - \delta)S^* - b_C + \alpha\delta S^* - b_I)\lambda^2 \\ + & ((-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_C) + (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha\delta S^* - b_I) \\ + & (\alpha(1 - \delta)S^* - b_C)(\alpha\delta S^* - b_I) - \alpha\delta(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon) - \alpha^2\delta S^{*2}(1 - \delta) \\ - & \alpha(1 - \delta)(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon))\lambda + \alpha\delta(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon)(\alpha(1 - \delta)S^* - b_C) \\ + & \alpha^2\delta S^{*2}(1 - \delta)(-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon)) + \alpha(1 - \delta)(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon)(\alpha\delta S^* - b_I) \\ - & (-\alpha(I^* + C^*)(v + \epsilon))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_C)(\alpha\delta S^* - b_I) = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $p_0 = 1$.

Menentukan p_1

$$\begin{aligned} & -(-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon) + \alpha(1 - \delta)S^* - b_C + \alpha\delta S^* - b_I), \\ & = \alpha(-S^* + I^* + C^*) + (v + \epsilon + b_C + b_I). \end{aligned}$$

Substitusikan $(S^*, C^*, I^*) = \left(\frac{b_C b_I}{Q}, \frac{b_I(1 - \delta)L}{QK}, \frac{b_C \delta L}{QK}\right)$, diperoleh

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{-b_C b_I K + \delta b_C L + b_I (1 - \delta) L}{JK} \right) + \left(\frac{(v + \epsilon + b_C + b_I) JK}{JK} \right) \\ & = \frac{\alpha(-b_C b_I K + b_I L + b_C \delta L - b_I \delta L) + QK(b_C + b_I + v + \epsilon)}{QK} \end{aligned}$$



- Menentukan p_2

$$\begin{aligned}
 & (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha(1 - \delta)S^* - b_C) + (-\alpha(I^* + C^*) - (v + \epsilon))(\alpha\delta S^* - b_I) \\
 & + (\alpha(1 - \delta)S^* - b_C)(\alpha\delta S^* - b_I) - \alpha\delta(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon) - \alpha^2\delta S^{*2}(1 - \delta) - \alpha(1 - \delta)(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon) \\
 & = -\alpha^2 S(I^* + C^*) + \alpha(b_C + b_I)(I^* + C^*) - \alpha S^*(v + \epsilon) - \alpha b_I S^*(1 - \delta) - \alpha\delta S^* b_C - \alpha(I^* + C^*)(-\alpha S^* - \epsilon) \\
 & + b_I(v + \epsilon) + b_C(b_I + v + \epsilon)
 \end{aligned}$$

Substitusikan $(S^*, C^*, I^*) = \left(\frac{b_C b_I}{Q}, \frac{b_I(1 - \delta)L}{QK}, \frac{b_C \delta L}{QK}\right)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 & -\alpha^2 \frac{b_C b_I}{Q} \left(\frac{b_I(1 - \delta)L + b_C \delta L}{QK} \right) + \alpha(b_C + b_I) \left(\frac{b_I(1 - \delta)L + b_C \delta L}{QK} \right) - \alpha \frac{b_C b_I}{Q} (v + \epsilon) - \alpha b_I \frac{b_C b_I}{Q} (1 - \delta) \\
 & - \alpha \delta \frac{b_C b_I}{Q} b_C - \alpha \left(\frac{b_I(1 - \delta)L + b_C \delta L}{QK} \right) \left(-\alpha \frac{b_C b_I}{Q} - \epsilon \right) + b_I(v + \epsilon) + b_C(b_I + v + \epsilon) \\
 & = \alpha(b_C + b_I + \epsilon) \left(\frac{b_I(1 - \delta)L + b_C \delta L}{QK} \right) - \frac{\alpha b_C b_I K(v + \epsilon) + \alpha b_C b_I^2 K(1 - \delta) + \alpha \delta b_C^2 b_I K}{QK} + b_I(v + \epsilon) \\
 & + b_C(b_I + v + \epsilon),
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha}{QK} (b_c b_l (1-\delta) L + b_c^2 \delta L + (b_l + \epsilon) b_l (1-\delta) L + (b_l + \epsilon) b_c \delta L - b_c b_l K (\nu + \epsilon) - b_c b_l^2 K (1-\delta)) \\
 &\quad - b_c^2 \delta b_l K + b_l (\nu + \epsilon) + b_c (b_l + \nu + \epsilon), \\
 &= b_l (\nu + \epsilon) + b_c (b_l + \nu + \epsilon) + \frac{\alpha}{QK} \left(b_c^2 (L - K b_l) - b_l L (\delta - 1) (b_l + \epsilon) \right) \\
 &\quad + \frac{\alpha}{QK} \left(b_c \left(b_l^2 K (\delta - 1) + L \delta \epsilon + b_l (L - K (\nu + \epsilon)) \right) \right).
 \end{aligned}$$

- Menentukan p_3

$$\begin{aligned}
 &\alpha \delta (I^* + C^*) (-\alpha S^* - \epsilon) (\alpha (1-\delta) S^* - b_c) + \alpha^2 \delta S^{*2} (1-\delta) (-\alpha (I^* + C^*) + (\nu + \epsilon)) \\
 &\quad + \alpha (1-\delta) (I^* + C^*) (-\alpha S^* - \epsilon) (\alpha \delta S^* - b_l) + (-\alpha (I^* + C^*) - (\nu + \epsilon)) (\alpha (1-\delta) S^* - b_c) (\alpha \delta S^* - b_l) \\
 &= \alpha \delta \epsilon b_c (I^* + C^*) + \alpha (1-\delta) \epsilon b_l (I^* + C^*) - \alpha b_l (1-\delta) (\nu + \epsilon) S^* - \alpha b_c \delta (\nu + \epsilon) S^* + \alpha b_c b_l (I^* + C^*) \\
 &\quad + b_c b_l (\nu + \epsilon).
 \end{aligned}$$

Substitusikan $(S^*, C^*, I^*) = \left(\frac{b_c b_l}{Q}, \frac{b_l (1-\delta) L}{QK}, \frac{b_c \delta L}{QK} \right)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha \epsilon \delta^2 b_c^2 L + \alpha \epsilon b_c b_l \delta (1-\delta) L + \alpha \epsilon b_c b_l \delta (1-\delta) L + \alpha \epsilon b_l^2 (1-\delta)^2 L + \alpha b_c^2 b_l \delta L + \alpha b_c b_l^2 (1-\delta) L}{QK} \\
 &\quad - \frac{\alpha b_c b_l^2}{Q} (1-\delta) (\nu + \epsilon) - \frac{\alpha b_c^2 b_l \delta (\nu + \epsilon)}{Q} + \frac{Q b_c b_l (\nu + \epsilon)}{Q}.
 \end{aligned}$$



Perhatikan bagian

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha b_c b_I^2}{Q} (1 - \delta)(v + \epsilon) - \frac{\alpha b_c^2 b_I \delta(v + \epsilon)}{Q} + \frac{Q b_c b_I (v + \epsilon)}{Q} \\ &= \frac{b_c b_I (v + \epsilon)}{Q} (-\alpha b_I (1 + \delta) - \alpha b_c \delta + \alpha (1 + \delta) b_I + b_c \alpha \delta) = 0. \end{aligned}$$

Karena bagian tersebut bernilai 0, maka

$$\begin{aligned} & \alpha \epsilon \delta^2 b_c^2 L + \alpha \epsilon b_c b_I \delta (1 - \delta)L + \alpha \epsilon b_c b_I \delta (1 - \delta)L + \alpha \epsilon b_I^2 (1 - \delta)^2 L + \alpha b_c^2 b_I \delta L + \alpha b_c b_I^2 (1 - \delta)L \\ & \quad - \frac{Q K}{Q K} \\ &= \frac{\alpha b_c b_I^2}{Q} (1 - \delta)(v + \epsilon) - \frac{\alpha b_c^2 b_I \delta(v + \epsilon)}{Q} + \frac{Q b_c b_I (v + \epsilon)}{Q} \\ &= \frac{\alpha \epsilon \delta^2 b_c^2 L + \alpha \epsilon b_c b_I \delta (1 - \delta)L + \alpha \epsilon b_c b_I \delta (1 - \delta)L + \alpha \epsilon b_I^2 (1 - \delta)^2 L + \alpha b_c^2 b_I \delta L + \alpha b_c b_I^2 (1 - \delta)L}{Q K} \\ &+ \frac{\alpha b_c b_I^2}{Q} (1 - \delta)(v + \epsilon) + \frac{\alpha b_c^2 b_I \delta(v + \epsilon)}{Q} - b_c b_I (v + \epsilon), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha b_I(1-\delta)}{QK} (b_C b_I (L + (v + \epsilon)K) + b_I \epsilon (1-\delta)L + \epsilon \delta b_C L) \\ &+ \frac{\alpha b_C \delta}{QK} (b_C b_I (L + (v + \epsilon)K) + b_I \epsilon (1-\delta)L + \epsilon \delta b_C L) - b_C b_I (v + \epsilon), \\ &= \frac{\alpha b_I(1-\delta)}{QK} \left(\frac{b_C b_I \epsilon}{J} + \frac{\epsilon b_I(1-\delta)L}{JK} + \frac{\epsilon b_C \delta L}{JK} + \frac{b_C b_I (L + vK)}{JK} \right) \\ &+ \frac{\alpha b_C \delta}{QK} \left(\frac{b_C b_I \epsilon}{J} + \frac{\epsilon b_I(1-\delta)L}{JK} + \frac{\epsilon b_C \delta L}{JK} + \frac{b_C b_I (L + vK)}{JK} \right) - b_C b_I (v + \epsilon), \\ &= \frac{\alpha b_I(1-\delta)}{QK} (S^* + C^* + I^* + R^*)\epsilon + \frac{\alpha b_C \delta}{JK} (S^* + C^* + I^* + R^*)\epsilon - b_C b_I (v + \epsilon), \\ &= ab_I(1-\delta)Ne + ab_C \delta Ne - b_C b_I (v + \epsilon), \\ &= \alpha \epsilon N(b_I(1-\delta) + b_C \delta) - b_C b_I (v + \epsilon), \\ &= L. \end{aligned}$$