

**METODE PREDIKTOR KOREKTOR UNTUK PERSAMAAN
DIFERENSIAL STOCK LOAN DAN OPSI BELI AMERIKA**

SKRIPSI

oleh

RITSY AMANSA

155090400111013



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

MALANG

2019

**METODE PREDIKTOR KOREKTOR UNTUK PERSAMAAN
DIFERENSIAL STOCK LOAN DAN OPSI BELI AMERIKA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar

Sarjana Matematika

Oleh

Ritsy Amansa

155090400111013



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG**

2019

**METODE PREDIKTOR KOREKTOR UNTUK PERSAMAAN
DIFERENSIAL STOCK LOAN DAN OPSI BELI AMERIKA**

Oleh

RITSY AMANSA

155090400111013

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal.....
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika**

Pembimbing

Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.

NIP. 196908071994121001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Fakultas MIPA universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.

NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Ritsy Amansa

NIM : 155090400111013

Jurusan : Matematika

Penulis Skripsi berjudul : Metode Prediktor Korektor untuk
Persamaan Diferensial Stock Loan dan Opsi Beli Amerika

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila dikemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang.....

Yang menyatakan,

Ritsy Amansa

155090400111013

METODE PREDIKTOR KOREKTOR UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL STOCK LOAN DAN OPSI BELI AMERIKA

ABSTRAK

Stock loan adalah kontrak yang melibatkan dua pihak yaitu peminjam dan pemberi pinjaman dengan saham sebagai jaminan. Kontrak *stock loan* memiliki kemiripan mekanisme seperti pada kontrak Opsi Beli Amerika sehingga sistem persamaan *stock loan* dapat mengadopsi sistem persamaan Opsi Beli Amerika. Meskipun memiliki mekanisme yang sama, keduanya memiliki perbedaan yaitu pada *Stock Loan* terdapat bunga pinjaman, sementara itu pada Opsi Beli Amerika tidak ada suku bunga pinjaman. Pada skripsi ini, persamaan diferensial *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika diperoleh menggunakan analisis portofolio, Lemma Ito dan Proses Wiener. Kondisi batas diperoleh dari analisis matematika pada bidang finansial. Setelah didapatkan sistem persamaan diferensial *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika, dilakukan transformasi sistem persamaan agar lebih sederhana untuk diterapkan ke skema numerik. Setelah itu dilakukan simulasi numerik pengaruh perubahan beberapa variabel pada sistem persamaan diferensial menggunakan Metode Prediktor Korektor. Skema Prediktor menggunakan metode eksplisit dan skema Korektor menggunakan metode implisit. Simulasi numerik dilakukan dengan bantuan *software* MATLAB.

Kata kunci : *Stock Loan*, Opsi Beli Amerika, Metode Prediktor Korektor.

PREDICTOR CORRECTOR METHOD FOR DIFERENTIAL EQUATION OF STOCK LOAN AND AMERICAN CALL OPTION

ABSTRACT

Stock loan is a contract between two parties, they are the borrower and the lender with stock as the collateral. The stock loan contract has a similar mechanism with American Call Option so that the stock loan equation system can adopt the equation system of American Call Options. Even though they have the same mechanism, both of them have differences. There are loan interest rates in the Stock Loan contract, while in American Call Option there are no loan interest rates. In this paper, the forming of differential equations of Stock Loan and American Call Options using portfolio analysis, Lemma Ito and Wiener Process. Boundary conditions are obtained from mathematical analysis in the financial field. After that, a transformation of system equation is carried out to apply for numerical schemes. Numerical simulation was carried out by influencing changes in several variables in the differential equation system using the Predictor Corrector Method. Predictor Schemes use explicit methods and the Corrector scheme uses implicit methods. The numerical Simulation is done with MATLAB software.

Keyword : Stock Loan, American Call Option, Predictor Corrector Method.

[illegible][illegible]

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Skema Prediktor Korektor untuk Persamaan Diferensial Stock Loan dan Opsi Beli Amerika* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bimbingan, motivasi dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar,
2. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. dan Mila Kurniawaty, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Ratno Bagus Edi Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Dra. Wuryansari Muharini K., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika,
4. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penasihat akademik, Bapak Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan banyak sekali ilmu kepada penulis serta segenap karyawan TU dan NOC Jurusan Matematika yang telah banyak membantu melancarkan segala kegiatan,
5. Mama (Misnawati), Ayah (Suparyo), adik-adikku (Sonya Inaya dan M. Ramdana) dan seluruh keluarga besar yang senantiasa menyemangati dan mendoakan kelancaran serta kesuksesan penulis hingga saat ini,
6. Riffa Elha Safira yang senantiasa ada untuk merapikan tulisan-tulisan penulis, menyiapkan dokumen-dokumen yang diperlukan serta memberi semangat kepada penulis,
7. Ahmad Maliki yang selalu membantu penulis ketika mengalami kesulitan dalam analisis program pada MATLAB dari awal sampai akhir,

8. M. Haafizhdiin Ibrahim yang membantu penulis belajar dasar-dasar MATLAB dari awal lagi,
9. Fara El Nandhita, Zulfikar Adi Wiguna, Rizky Saprianto dan Hamidu Aziz Pradiky yang telah banyak mendukung penulis selama kuliah saat suka dan duka,
10. Rekan-rekan Jurusan Matematika angkatan 2015 yang telah banyak berbagi ilmu kepada penulis,
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email amansaritsy18@gmail.com untuk perbaikan di masa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

DAFTAR ISI

JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI.....	iii
LEMBAR PERNYATAAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan masalah.....	3
1.3 Tujuan.....	4
BAB II DASAR TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial.....	5
2.1.1 Persamaan Differensial Biasa.....	5
2.1.2 Persamaan Differensial Parsial.....	6
2.1.3 Kondisi Batas.....	7
2.2 Metode Beda Hingga.....	8
2.3 Metode Prediktor Korektor.....	9
2.4 Saham.....	10
2.5 Opsi.....	10
2.6 <i>Stock Loan</i>	13
2.7 Proses Stokastik.....	14
2.8 Gerak Brown.....	14
2.9 Lemma Ito.....	15
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Persamaan Differensial Opsi Beli Amerika dan <i>Stok Loan</i>	17
3.2 Kondisi Batas.....	19
3.3 Transformasi Sistem Persamaan.....	21
3.4 Diskritisasi Domain.....	26
3.5 Skema Prediktor.....	27
3.6 Skema Korektor.....	29
3.7 Simulasi Numerik.....	32
BAB IV PENUTUP	

4.1 Kesimpulan	41
4.2 Saran	42
DAFTAR PUSTAKA	43

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.1	Kemungkinan letak nilai $\frac{\partial V}{\partial s}$ terhadap <i>slope</i> bergradien 1..	20
Gambar 3.2	Plot nilai <i>Stock Loan</i> terhadap perubahan <i>maturity date</i> ...	33
Gambar 3.3	Plot nilai Opsi Beli Amerika terhadap perubahan <i>maturity date</i>	34
Gambar 3.4	Plot nilai <i>Stock Loan</i> dan Opsi Beli Amerika terhadap perubahan nilai r	35
Gambar 3.5	Plot nilai <i>Stock Loan</i> dan Opsi Beli Amerika terhadap perubahan nilai D	36
Gambar 3.6	Plot nilai $S_f(\tau)$ <i>Stock Loan</i> dan $S_f(\tau)$ Opsi Beli Amerika	38
Gambar 3.7	Plot nilai $S_f(\tau)$ <i>Stock Loan</i> terhadap perubahan nilai γ	39
Gambar 3.8	Plot $S_f(\tau)$ <i>Stock Loan</i> terhadap perubahan nilai D	39

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1	Source Code Stock Loan pada MATLAB	47
Lampiran 2	Source Code Opsi Beli Amerika pada MATLAB	49

[illegible][illegible]

[illegible][illegible]

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika terapan merupakan cabang matematika yang terkait dengan teknik matematika yang digunakan untuk bidang lain. Matematika terapan berkaitan dengan penggunaan matematika guna memecahkan masalah-masalah konkret, salah satunya adalah masalah investasi pada bidang ekonomi. Cara kerja investasi adalah mengeluarkan modal hari ini dengan harapan mendapatkan keuntungan di masa yang akan datang. Seseorang yang melakukan investasi disebut investor. Saham adalah salah satu pilihan produk finansial investor untuk menanamkan modalnya.

Menurut Xu (2015), Opsi adalah kontrak finansial antara dua pihak, yaitu *holder* dan *writer* atas aset dasar seperti saham, komoditas atau mata uang. Ada dua jenis opsi dasar, yaitu opsi beli dan opsi jual. Opsi beli memungkinkan *holder* untuk membeli aset dasar pada harga yang telah ditentukan sebelum jatuh tempo atau kadaluwarsa. Harga yang telah ditentukan disebut sebagai *strike price*. Opsi tersebut dilakukan hanya ketika pemegang memilih untuk membeli atau menjual aset. Sementara itu, berdasarkan tipe *exercise*, opsi dapat diklasifikasikan menjadi opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Opsi tipe Eropa hanya dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo, sementara opsi tipe Amerika dapat dilaksanakan kapan saja sampai tanggal jatuh tempo.

Menurut Chen (2015), pemegang saham yang memerlukan sejumlah uang dapat meminjam uang di bank atau perusahaan swasta dengan saham sebagai jaminannya. Pinjaman menggunakan saham sebagai jaminan disebut pinjaman saham (*stock loan*). Untuk melakukan pinjaman saham, investor yang memiliki saham mengirimkan sahamnya ke lembaga keuangan yang menyediakan layanan pinjaman saham. Setelah dikenakan sejumlah biaya sebagai biaya layanan pinjaman saham, investor diberikan hak yang memungkinkan dia untuk menebus sahamnya pada waktu yang sah

dengan membayar kembali pokok pinjaman dan bunga pinjaman. Hak ini juga disebut sebagai nilai *Stock Loan* dengan mempertimbangkan nilai *exercise* dan keuntungan investor (*payoff*).

Stock Loan telah menarik perhatian di dunia akademik sejak 2007. Harga pinjaman saham pertama kali dipelajari oleh Xia dan Zhou berdasarkan persamaan Black-Scholes. Mereka berasumsi bahwa *Stock Loan* memiliki tanggal jatuh tempo (*maturity date*) tak terbatas. Pada tahun 2012 Liang dkk. menambahkan batasan satuan perubahan harga (fraksi) pada penilaian *Stock Loan* dan merumuskan harga sebagai pertidaksamaan variasional. Pada nilai *Stock Loan* dengan *maturity date* terbatas, solusi analitik belum diperoleh dan sebagian besar pekerjaan dilakukan dengan pendugaan. Sebagai contoh, pada tahun 2010, Prager dan Zhang memperoleh solusi analitik untuk pinjaman saham tipe Eropa (*European-style*) dengan *maturity date* terbatas menggunakan *the classical geometric brownian motion, the mean-reverting model*, dan *the two-state regime-switching model*. Pada tahun 2011, Dai dan Xu menganalisis nilai *Stock Loan* dalam empat kasus distribusi pembagian keuntungan oleh perusahaan kepada pemegang saham (*dividen*) yang berbeda dan menghitung harga menggunakan *the binomial tree method*. Tahun 2012, Wong dan Wong mempelajari masalah harga pinjaman saham dengan *fast mean-reverting stochastic volatility model* menggunakan metode ekspansi asimtotik. Pada tahun 2013, Grasselli dan Gomez mempelajari harga *Stock Loan* di pasar tak lancar dan mendiskusikan dampak parameter model berdasarkan hasil numerik menggunakan metode *projected successive-over-relaxation* (PSOR). Pada tahun yang sama, Pascucci dkk. merumuskan model *Stock Loan* yang lebih rumit dengan *dividen* akumulatif dan menganalisis sifat-sifat solusi serta menyelesaikannya menggunakan metode elemen hingga Lagrange. Lebih lanjut, pada tahun 2015, Lu dan Putri juga mempertimbangkan penetapan harga *Stock Loan* dalam empat kasus distribusi *dividen* dengan menggunakan metode Transformasi Laplace.

Pada skripsi ini dibahas persamaan diferensial *Stock Loan* dan skema numeriknya (Xu, 2015) serta perbandingannya dengan Opsi

Beli Amerika, *Stock Loan* dibandingkan dengan Opsi Beli Amerika karena keduanya memiliki mekanisme yang sama. Pada transaksi *Stock Loan*, *Borrower* dapat melunasi pinjamannya kepada *Lender* kapan saja sampai waktu jatuh tempo. Pada kontrak Opsi Beli Amerika, *Holder* dapat melakukan *exercise* kapan saja sampai waktu jatuh tempo. Menurut Xia dan Zhou (2007), hak penebusan awal investor pada kontrak *Stock Loan* ekuivalen dengan nilai Opsi Beli Amerika. Oleh karena itu, nilai Opsi Beli Amerika ini juga disebut sebagai nilai *Stock Loan*. Pada skripsi ini, nilai *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika dikerjakan dengan asumsi tingkat bunga konstan, tidak ada peluang terjadinya arbitrase (*free arbitrage*), suku bunga pinjaman tumbuh secara eksponensial terhadap waktu pada *stock loan*, dan dividen saham disimpan oleh lembaga keuangan sampai investor melakukan pelunasan. Setelah diperoleh sistem persamaan diferensial *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika, dilakukan transformasi pada sistem persamaan diferensial *Stock loan* dan Opsi Beli Amerika yang telah diperoleh sebelumnya. Skema numerik transformasi sistem persamaan diferensial tersebut diimplementasikan menggunakan *software* MATLAB dan dilakukan simulasi numerik serta diinterpretasikan hasilnya.

1.2 Rumusan masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, inti permasalahan yang dikaji pada skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana sistem dan transformasi persamaan diferensial dan Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan* ?
2. Bagaimana konstruksi skema Prediktor Korektor untuk persamaan diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan* ?
3. Bagaimana implementasi, simulasi numerik dan hasil interpretasi persamaan diferensial Opsi beli Amerika dan *Stock Loan* ?

1.3 Tujuan

Tujuan yang diperoleh pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan sistem dan transformasi persamaan diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan*.
2. Mengonstruksi skema Prediktor Korektor untuk persamaan diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan*.
3. Mengimplementasi, melakukan simulasi dan menginterpretasikan hasil simulasi numerik persamaan diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan*.

BAB II

DASAR TEORI

Dalam skripsi ini dibahas skema numerik untuk persamaan diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan* menggunakan Metode Prediktor Korektor. Oleh karena itu, teori mengenai persamaan diferensial, metode beda hingga standar, Metode Prediktor Korektor, saham, opsi, *Stock Loan*, proses stokastik, gerak Brown dan Lemma Ito diperlukan untuk membantu memahami persoalan yang dibahas dalam skripsi ini.

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Boyce dan Dprima, 2009).

Suatu persamaan diferensial mempunyai orde n jika turunan tertinggi pada persamaan diferensial tersebut adalah turunan ke- n dan mempunyai derajat k jika turunan tertingginya berderajat k (Kartono, 1994).

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas. Secara umum persamaan diferensial biasa orde n dapat dinyatakan sebagai

$$f(t, y, Dy, D^2y, \dots, D^n y) = 0,$$

dengan t adalah variabel bebas, $y(t)$ adalah variabel tak bebas dan operator $D = \frac{d}{dt}$.

Persamaan diferensial biasa orde n disebut linear apabila memenuhi bentuk umum

$$a_0(t)D^n y + a_1(t)D^{n-1}y + \dots + a_n(t)y = g(t), \quad (2.1)$$

dengan $a_0 \neq 0$, t adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas. Pada persamaan (2.1), $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ merupakan koefisien dan $g(t)$ disebut bagian nonhomogen. Jika $g(t) = 0$ maka persamaan (2.1) merupakan persamaan homogen dan jika $g(t) \neq 0$ maka persamaan (2.1) merupakan persamaan nonhomogen. Contoh persamaan diferensial biasa adalah

1. $2 \frac{dx}{dy} + xy = 0$,
2. $-x \frac{dx}{dy} + 2 \frac{y}{x} = \frac{dx}{dy} - y$.

Persamaan diferensial biasa yang tidak memenuhi bentuk umum persamaan diferensial biasa linear disebut persamaan diferensial biasa nonlinear (Boyce dan DiPrima, 2009).

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat dua atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial parsial untuk fungsi $u(x, y, \dots)$ adalah hubungan antara u dan turunan parsialnya dan dapat ditulis sebagai

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0,$$

dengan $x, y, \dots$ adalah variabel bebas dan $u(x, y, \dots)$ adalah variabel tak bebas. Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde satu dengan dua variabel bebas adalah

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Dengan cara yang sama, bentuk umum persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas adalah

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) = 0,$$

dan seterusnya untuk persamaan dengan orde yang lebih tinggi (Debnath, 2012).

Menurut Farlow (1994), persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan menjadi linear atau nonlinear. Persamaan diferensial parsial dikatakan linear jika variabel tak bebas y dan turunan parsialnya tidak dipangkatkan atau dikalikan, sedangkan dikatakan nonlinear jika variabel tak bebas y dan turunan parsialnya dipangkatkan atau dikalikan. Contoh persamaan diferensial parsial adalah

1. Persamaan gelombang: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,
2. Persamaan panas: $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,
3. Persamaan laplace dua dimensi: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,
4. Persamaan poisson dua dimensi: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$.

2.1.3 Kondisi Batas

Masalah kondisi batas melibatkan suatu persamaan diferensial dan penyelesaiannya. Menurut Suryanto (2017), masalah kondisi batas berkaitan dengan persamaan diferensial dimana kondisi diberikan pada titik-titik yang berbeda. Persamaan diferensial pada skripsi ini adalah persamaan diferensial orde dua, sehingga masalah kondisi batasnya adalah masalah kondisi batas pada persamaan diferensial orde dua. Diberikan sistem persamaan diferensial orde dua

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)),$$

$$A_0 y(a) + A_1 y'(a) = \alpha, B_0 y(a) + B_1 y'(a) = \beta.$$

Sistem persamaan di atas tidak dapat dikonversi menjadi sistem persamaan diferensial orde satu karena memiliki kondisi batas pada dua titik yang berbeda. Jika $A_0 = 0$ atau $B_0 = 0$, maka masalah kondisi batas disebut kondisi batas Neumann. Jika $A_1 = 0$ atau $B_1 = 0$, maka disebut kondisi batas Dirichlet. Jika $A_0 \neq 0$ dan $A_1 \neq 0$ atau $B_0 \neq 0$ dan $B_1 \neq 0$, maka disebut kondisi batas Robbin (campuran).

Pada skripsi ini terdapat kondisi batas Dirichlet dan kondisi batas Neumann. Kondisi batas Dirichlet adalah kondisi batas langsung

yang berupa sebuah nilai. Kondisi batas Dirichlet Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan* pada $x = x_{max}$ dan $x = 0$, yaitu $C_{t+1}^n = 0$ dan $C_1^n = f^n - K$. Sementara itu kondisi batas Neumann adalah kondisi batas yang berupa sebuah turunan. Kondisi batas Neumann di $x = 0$, menggunakan skema beda hingga, yaitu

$$\frac{\partial C_1^n}{\partial x} = \frac{4C_2^n - C_3^n - 3C_1^n}{2\Delta x}$$

2.2 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga didasarkan pada ekspansi deret Taylor dalam mengaproksimasi turunan. Ekspansi deret Taylor untuk $u(x)$ di sekitar $x = x_r$ dapat ditulis sebagai

$$u(x_r + h) = u(x_r) + hu'(x_r) + \frac{h^2}{2!}u''(x_r) + \dots, \quad (2.2)$$

$$u(x_r - h) = u(x_r) - hu'(x_r) + \frac{h^2}{2!}u''(x_r) + \dots \quad (2.3)$$

Pada persamaan (2.2) diperoleh

$$u(x_r + h) = u(x_r) + hu'(x_r) + O(h),$$

$$u'(x_r) = \frac{u(x_r+h) - u(x_r)}{h} + O(h).$$

Dengan demikian diperoleh pendekatan turunan pertama pada titik $x = x_r$, yaitu

$$u'(x_r) = \frac{du(x_r)}{dx} = \frac{u_{r+1} - u_r}{h}.$$

Pendekatan turunan pertama pada persamaan di atas disebut beda maju.

Sementara itu, pada persamaan (2.3) diperoleh ekspansi deret Taylor

$$u'(x_r) = \frac{u(x_r) - u(x_r-h)}{h} + O(h),$$

dengan demikian diperoleh pendekatan turunan pertama pada titik di $x = x_r$, yaitu

$$u'(x_r) = \frac{du(x_r)}{dx} = \frac{u_r - u_{r-1}}{h}.$$

Pendekatan turunan pertama pada persamaan di atas disebut beda mundur. Pendekatan turunan pertama di titik $x = x_r$ dapat dilakukan dengan cara lain. Jika persamaan (2.2) dikurangi dengan persamaan (2.3) maka diperoleh

$$u(x_r + h) - u(x_r - h) = 2hu'(x_r) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_r) + \dots,$$

sehingga didapatkan

$$u'(x_r) = \frac{u(x_r + h) - u(x_r - h)}{2h} + O(h^2),$$

dengan demikian diperoleh pendekatan turunan pertama dengan kesalahan $O(h^2)$ yaitu

$$u'(x_r) = \frac{u(x_r + h) - u(x_r - h)}{2h} = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h}.$$

Skema di atas disebut pendekatan beda pusat untuk turunan pertama.

(Suryanto, 2017)

2.3 Metode Prediktor Korektor

Menurut Butcher (2008), suatu metode dinamakan metode prediktor korektor karena keseluruhan langkah perhitungan dimulai dari nilai prediksi yang kemudian nilai tersebut dikoreksi. Diberikan persamaan diferensial parsial orde satu

$$\frac{dy}{dx} = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T].$$

Misalkan terdapat $N + 1$ grid seragam pada interval t dengan ukuran $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dan y^n adalah solusi pendekatan

pada $t = t_n$. Sebagai contoh, solusi langkah waktu yang baru diprediksi menggunakan metode eksplisit Euler, yaitu

$$y^* = y^n + f(t_n, y^n)\Delta t,$$

dengan tanda * mengindikasikan bahwa nilai tersebut bukanlah nilai akhir solusi saat t_{n+1} . Oleh karena itu, solusi harus dikoreksi dengan mengaplikasikan aturan trapezium menggunakan y^* untuk menghitung turunannya

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{2}(f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^*))\Delta t.$$

(Xu, 2015)

2.4 Saham

Saham merupakan salah satu instrumen jual beli di pasar modal yang berwujud selembaar kertas. Menurut Bursa Efek Indonesia (2018), saham didefinisikan sebagai tanda penyertaan modal seseorang atau pihak (badan usaha) dalam suatu perusahaan atau perseroan terbatas. Jika menyertakan modal tersebut, maka pihak tersebut memiliki klaim atas pendapatan perusahaan, klaim atas aset perusahaan dan berhak hadir dalam Rapat Umum Pemegang Saham (RUPS).

2.5 Opsi

Opsi adalah kontrak yang memberikan hak kepada pemegang kontrak (*holder*) untuk membeli atau menjual aset pada jangka waktu dan harga tertentu. Fungsi utama opsi adalah sebagai sarana untuk melakukan *hedging* atau suatu tindakan untuk mengurangi risiko akibat naik turunnya harga suatu aset dasar (*underlying asset*). Aset dasar dapat berupa saham, kurs, indeks, komoditas dan lainnya (Halim, 2005).

Menurut Utami (2017), beberapa istilah dalam opsi yaitu.

1. *Strike price* (K) adalah harga saham pada saat opsi dilaksanakan (*exercise*).
2. *Stock price* (S) adalah harga saham di pasar.
3. *Maturity date* (T) adalah tanggal jatuh tempo perjanjian.
4. *Exercise* adalah opsi dilaksanakan.
5. *Expiry Date* adalah tanggal dilakukan *exercise*.
6. Volatilitas (σ) adalah harga fluktuasi. Semakin besar volatilitas maka akan semakin besar probabilitas harga saham mengalami perubahan.
7. *Dividen* (D) adalah keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada para pemegang saham.
8. Nilai suku bunga bebas risiko (r) diambil pada suku bunga Bank Sentral Amerika pada saat ini.

Pada keadaan sebenarnya suku bunga bebas risiko harus lebih besar daripada dividen. Namun pada skripsi ini, beberapa simulasi nilai dividen lebih besar daripada suku bunga bebas risiko. Menurut Xu (2015), kasus ini menyebabkan simulasi numerik tidak stabil.

Nilai opsi dan harga saham mempengaruhi nilai portofolio pada awal investasi. Ketika investor ingin membeli opsi, maka investor harus mengeluarkan uang untuk harga saham sejumlah Δ

$$\pi = \Delta S - V. \quad (2.4)$$

Pembagian dividen sebesar D diberikan oleh perusahaan penerbit saham seiring berjalannya investasi sehingga investor memperoleh pembagian keuntungan dari perusahaan penerbit saham sebesar D untuk setiap lembar saham. Perubahan portofolio disertai dividen sebagai berikut

$$d\pi = -dV + \Delta dS + D\Delta Sdt. \quad (2.5)$$

Menurut Gheorghiu (2011), ditentukan nilai $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ untuk menghilangkan keacakan atau kondisi stokastik pada nilai portofolio.

Nilai $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ ini disebut *Delta Hedging*, yaitu strategi untuk melindungi nilai portofolio terhadap saham yang dinamis. Jika nilai $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ disubstitusikan ke persamaan (2.4) dan (2.5), maka diperoleh

$$\pi = \frac{\partial V}{\partial S} S - V, \quad (2.6)$$

$$d\pi = -dV + \frac{\partial V}{\partial S} dS + D \frac{\partial V}{\partial S} S dt. \quad (2.7)$$

Selanjutnya menurut Utami (2017), perubahan portofolio selama investasi yang disertai suku bunga bebas risiko adalah

$$d\pi = r\pi dt. \quad (2.8)$$

Menurut Luenberger (1998), berdasarkan periode waktu penggunaannya, terdapat dua jenis opsi, yaitu.

1. Opsi saham tipe Eropa (*European option*) adalah opsi yang diexercise hanya pada waktu jatuh tempo saja.
2. Opsi saham tipe Amerika (*American option*) adalah opsi yang diexercise kapan saja hingga waktu jatuh tempo.

Pada pasar modal opsi tipe Amerika lebih digemari karena pemegangnya dapat melakukan *exercise* setiap saat sampai jatuh tempo yang telah disepakati (*maturity date*). Sementara itu, menurut Fabozzi (2000), berdasarkan jenis hak yang diberikan, opsi saham dibedakan menjadi dua, yaitu.

1. Opsi beli (*call option*) adalah opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya (*holder*) untuk membeli saham dari penjual (*writer*) pada jumlah, waktu dan harga yang telah ditentukan.
2. Opsi jual (*put option*) adalah opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya (*holder*) untuk menjual saham dari penjual (*writer*) pada jumlah, waktu dan harga yang telah ditentukan.

Isi kontrak Opsi terdiri dari nama saham perusahaan, tipe Opsi, *strike price*, dan *maturity date*. Menurut Xu (2015), nilai awal untuk harga *exercise* optimal pada Opsi Beli Amerika adalah $K \times \max\left(1, \frac{r}{D}\right)$.

2.6 Stock Loan

Menurut Utami (2017), *Stock Loan* adalah kontrak yang dilakukan *borrower* dan *lender*. *Lender* sebagai pemilik saham memperoleh pinjaman dari *borrower* dengan saham sebagai jaminannya. Dalam hal ini *Borrower* tidak kehilangan hak kepemilikan atas sahamnya. *Borrower* dapat melakukan pelunasan setiap saat meskipun jatuh tempo pelunasan belum berakhir sama halnya seperti *holder* pada kontrak opsi beli Amerika yang berhak melakukan *exercise* setiap saat. Pada saat pelunasan *lender* memperoleh uang pengembalian dari *borrower* sedangkan *borrower* memperoleh sahamnya kembali.

Borrower pada kontrak pinjaman saham dianggap sebagai *holder* pada kontrak opsi beli Amerika yang memiliki hak melakukan *exercise* setiap saat. Dengan demikian mekanisme pinjaman saham dapat dikatakan mirip dengan mekanisme opsi beli Amerika. Oleh karena itu, dalam perhitungan harga pinjaman saham mengadopsi persamaan diferensial yang digunakan pada kontrak opsi beli Amerika. Menurut Dai dan Xu (2011), nilai awal *exercise* optimal f adalah $f(0) = K \times \max\left(1, \frac{r-\gamma}{D}\right)$, dengan γ adalah suku bunga pinjaman.

Pada skema numeriknya, sistem persamaan diferensial parsial *stock loan* dan Opsi Beli Amerika terdefinisi pada domain *semi-infinite* terhadap harga saham dan waktu, yaitu

$$\{(x, \tau) \in [0, \infty) \times [0, T]\}.$$

Untuk mengimplementasikan perhitungan numerik, domain *semi-infinite* diubah menjadi domain terbatas, yaitu

$$\{(x, \tau) \in [0, x_{\max}) \times [0, T]\},$$

dengan $x_{\max}$ adalah titik batas pada x . Menurut Kandilarov dan Valkov (2011), $x_{\max} = 4$.

2.7 Proses Stokastik

Suatu variabel dikatakan mengikuti proses stokastik apabila variabel tersebut berubah nilainya seiring waktu dengan cara yang tidak pasti. Proses stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ adalah suatu himpunan peubah acak dengan himpunan indeks T , dengan t adalah waktu dan $X(t)$ adalah suatu peubah acak (Lyu, 2002).

2.8 Gerak Brown

Proses stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ disebut gerak Brown jika:

1. $X(0) = 0$,
2. Untuk $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ peubah acak $X(t_i) - X(t_{i-1}), i = 1, 2, 3, \dots, n$ saling bebas,
3. Untuk $t > 0, X(t)$ menyebar normal dengan rata-rata 0 dan ragam $\sigma^2 t$.

(Ross, 2007)

Proses Wiener adalah suatu proses stokastik $\{W(t); t \geq 0\}$ yang memenuhi kondisi berikut:

1. $W(0) = 0$,
2. Untuk interval $0 \leq s \leq t, W(t) - W(s)$ menyebar normal $N(0, t - s)$ dengan rata-rata 0 dan ragam $(t - s)$,
3. Kenaikan $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ dalam interval $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ adalah saling bebas.

(Ermogenous, 2005)

Menurut Hull (2009), proses Wiener umum untuk suatu peubah acak X dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t).$$

Bagian adt disebut komponen deterministik dan $bdW(t)$ disebut komponen stokastik. Variabel a dan b masing-masing menyatakan rata-rata dan simpangan baku pada X . Pada skripsi ini, harga saham diasumsikan mengikuti gerak Brown

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma SdW_t, \quad (2.9)$$

2.9 Lemma Ito

Diberikan $W_1, W_2, \dots, W_m$ adalah proses Wiener dan $X \equiv (X_1, X_2, \dots, X_m)$ adalah peubah acak. Jika $f: R^m \rightarrow R$ mempunyai turunan kontinu dan X_i adalah proses Ito dengan $dX_i = a_i dt + b_i dW_i$, maka $df(X)$ dapat dinyatakan ke dalam proses Ito sebagai

$$df(X) = \sum_{i=1}^m f_i(X) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{i,j}(X) dX_i dX_j, \quad (2.10)$$

dan

$$(dt)^2 = dtdW_i = dtdW_j = 0,$$

$$(dW_i)^2 = (dW_j)^2 = dt,$$

$$dW_i dW_j = \rho dt,$$

dengan $f_i(X)$ adalah turunan terhadap peubah acak X dan ρ adalah korelasi antara dW_i dan dW_j .

(Lyu, 2006)

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas bagaimana persamaan diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan* dibangun beserta kondisi batasnya. Persamaan diferensial dan kondisi batas tersebut ditransformasi ke bentuk persamaan *non-dimensional*. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh menggunakan Metode Prediktor Korektor.

3.1 Persamaan Diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan*

Pada skripsi ini, harga saham diasumsikan mengikuti gerak Brown seperti pada persamaan (2.7). Pada persamaan tersebut, perubahan harga saham (S) dapat dinyatakan dalam dS . Perubahan harga saham yang disertai *dividen* dipengaruhi oleh faktor deterministik dan faktor stokastik. Faktor deterministiknya adalah selisih tingkat *return* dan *dividen* harga saham dalam jangka waktu (dt). Faktor stokastiknya adalah tingkat volatilitas (σ) dari harga saham S dalam jangka waktu (dt) yang mengikuti proses Wiener.

Jika persamaan (2.9) dikuadratkan dan disubstitusikan persamaan Lemma Ito $(dt)^2 = dtdW_t = 0$ dan $(dW_t)^2 = dt$, maka diperoleh

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dt. \quad (3.1)$$

Selanjutnya, persamaan (2.9) dikalikan dengan dt dan disubstitusikan persamaan Lemma Ito $(dt)^2 = dtdW_t = 0$ sehingga persamaan menjadi

$$dSdt = 0. \quad (3.2)$$

Misalkan $f(X) = V(S, t)$, dengan $X \equiv (X_1, X_2) = (S, t)$. Berdasarkan lemma Ito, maka berlaku

$$dV = \sum_{i=1}^2 V_i(S, t) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 V_{i,j}(S, t) dX_i dX_j,$$

$$dV = V_1(S, t)dX_1 + V_2(S, t)dX_2 + \frac{1}{2}(V_{1,1}(S, t)dX_1dX_1 + V_{1,2}(S, t)dX_1dX_2 + V_{2,1}(S, t)dX_2dX_1 + V_{2,2}(S, t)dX_2dX_2),$$

dengan $V_1(S, t)$ adalah turunan pertama V terhadap X_1 , $V_2(S, t)$ adalah turunan pertama V terhadap X_2 , $V_{1,1}(S, t)$ adalah turunan kedua V terhadap X_1 , $V_{2,2}(S, t)$ turunan kedua V terhadap X_2 dan masing-masing $V_{1,2}(S, t)$ dan $V_{2,1}(S, t)$ adalah turunan parsial campuran terhadap $X_1 = S$ dan $X_2 = t$ sehingga diperoleh persamaan

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}dSdt + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}dt^2\right). \quad (3.3)$$

Jika persamaan (3.1) dan (3.2) disubstitusikan ke persamaan (3.3) dan dengan menerapkan salah satu persamaan pada Lemma Ito, yaitu $dt^2 = 0$, maka diperoleh

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt. \quad (3.4)$$

Selanjutnya, persamaan (3.4) disubstitusikan ke persamaan (2.7) sehingga menjadi

$$d\pi = -\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + D\frac{\partial V}{\partial S}Sdt. \quad (3.5)$$

Jika persamaan (2.6) dan persamaan (3.5) disubstitusikan ke persamaan (2.8) maka diperoleh persamaan diferensial Opsi Beli Amerika dan *Stock Loan*

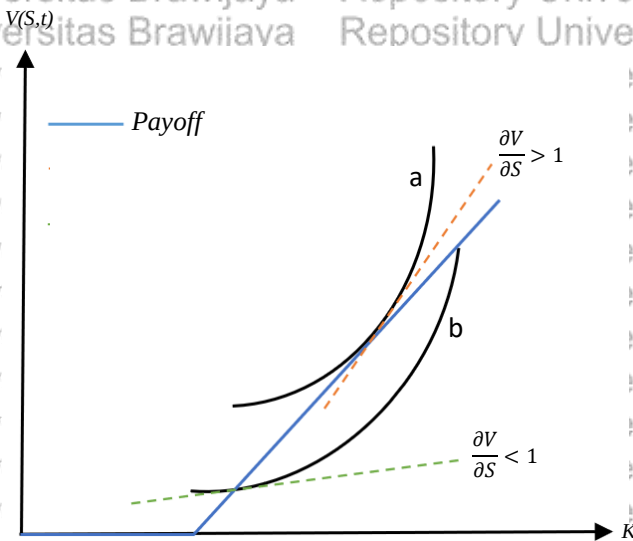
$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad (S, r, t) \in [0, S_f) \times [0, T), \quad (3.6)$$

dengan $V(S, t)$ adalah nilai Opsi atau *Stock Loan*, r adalah tingkat suku bunga bebas risiko, S adalah harga saham, σ adalah volatilitas saham, D adalah Dividen, S_f adalah harga *exercise* optimal dan T adalah *maturity date*.

3.2 Kondisi Batas

Persamaan (3.6) harus diselesaikan dengan kondisi batas yang sesuai untuk mendapatkan nilai Opsi atau *Stock Loan*. Nilai *Stock Loan* saat kadaluwarsa sama dengan *payoff*, maka $V(S, T) = \max(S - Ke^{\gamma T}, 0)$, dengan K adalah *strike price* atau besarnya pinjaman pada transaksi *Stock Loan* dan γ adalah suku bunga pinjaman yang tumbuh secara eksponensial terhadap waktu. Sementara itu, *payoff* pada Opsi Beli Amerika adalah $V(S, T) = \max(S - K, 0)$. Nilai Opsi dan *Stock Loan* dipengaruhi oleh harga saham (S). Pada saat harga saham sama dengan nol, maka nilai Opsi dan *Stock Loan* juga sama dengan nol. Oleh karena itu, kondisi batas keduanya saat $S = 0$ adalah $V(0, t) = 0$.

Borrower dapat melakukan pelunasan ketika harga saham optimal, begitu juga *holder* dapat melakukan *exercise* pada saat yang sama ($S = S_f$). Oleh karena itu, interval nilai *Stock Loan* $\max(S - Ke^{\gamma t}, 0) \leq V(S, t) \leq \max(S_f - Ke^{\gamma t}, 0)$ dan interval nilai Opsi Beli Amerika $\max(S - K, 0) \leq V(S, t) \leq \max(S_f - K, 0)$. Jika sebuah slop menyinggung *payoff* dengan gradien 1, maka terdapat tiga kemungkinan nilai $\frac{\partial V}{\partial S}$.



Gambar 3.1: Kemungkinan letak nilai $\frac{\partial V}{\partial S}$ terhadap slope bergradien 1
(Sumber: Utami, 2017)

Kemungkinan pertama saat $\frac{\partial V}{\partial S} < 1$ ditunjukkan pada kurva a Gambar (3.1). Slope yang merepresentasikan nilai Opsi atau *Stock Loan* di bawah *payoff*, terjadi kontradiksi dengan $\max(S - K, 0) \leq V(S, t)$ pada opsi dan $\max(S - Ke^{rt}, 0) \leq V(S, t)$ pada *Stock Loan*. Pada saat ini harga saham tidak mencapai optimal sehingga *holder* tidak memperoleh keuntungan optimal dan *borrower* tidak dapat melunasi pinjaman. Kemungkinan kedua saat $\frac{\partial V}{\partial S} > 1$ ditunjukkan pada kurva b Gambar 3.1. Slope yang merepresentasikan nilai Opsi atau *Stock Loan* berada di atas *payoff*. Pada saat ini *holder* maupun *borrower* memperoleh keuntungan optimal. Kemungkinan yang terjadi *holder* melakukan *exercise* dan *borrower* langsung melunasi pinjamannya dan disaat yang bersamaan mereka menjual sahamnya dengan tujuan memperoleh keuntungan instan. Hal ini bertentangan dengan prinsip *free arbitrage*. Kemudian kemungkinan ketiga saat $\frac{\partial V}{\partial S} = 1$, Slope merepresentasikan nilai Opsi atau *Stock Loan* berada pada *payoff*

$V(S, t) = \text{maks}(S_f - K)$ pada Opsi dan $V(S, t) = \text{maks}(S_f - Ke^{rt})$ pada *Stock Loan* sehingga harga saham optimal saat $S = S_f$ terjadi saat $\frac{\partial V}{\partial S} = 1$.

Berdasarkan uraian yang telah diperoleh sebelumnya, maka sistem persamaan diferensial parsial Opsi Beli Amerika adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV &= 0, \\ V(S_f, t) &= S_f - K, V(0, t) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S_f, t) &= 1, V(S, T) = \text{maks}(S - K, 0), \end{aligned} \quad (3.7)$$

dan sistem persamaan diferensial parsial *Stock Loan* adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV &= 0, \\ V(S_f, t) &= S_f - Ke^{rt}, V(0, r, t) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S_f, t) &= 1, V(S, T) = \text{maks}(S - Ke^{rT}, 0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3 Transformasi Sistem Persamaan

Transformasi dilakukan pada sistem persamaan diferensial *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika kemudian diselesaikan secara numerik. Pada skripsi ini, kondisi batas mundur diubah menjadi kondisi batas maju dengan persamaan $\tau = T - t$. Beberapa persamaan diadopsi untuk memperbaiki harga *strike* yang melibatkan suku bunga pinjaman tumbuh eksponensial terhadap waktu pada *stock loan*, yaitu

$$Y = e^{-rt}S, \quad f(\tau) = e^{-r\tau}S_f(\tau), \quad C(x, \tau) = e^{-r\tau}V(S, t)$$

dan transformasi Landau $x = \ln\left(\frac{f(\tau)}{Y}\right)$,

Persamaan $Y = e^{-rt}S$ disubstitusi ke $x = \ln\left(\frac{f(\tau)}{Y}\right)$ sehingga diperoleh fungsi x menjadi

$$x = \ln \left(\frac{f(\tau)e^{\gamma t}}{S} \right). \quad (3.9)$$

Pada persamaan (3.9) diturunkan terhadap t sehingga menjadi

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{S}{f(\tau)e^{\gamma t}} \frac{1}{S} \left(\frac{\partial f(\tau)}{\partial t} e^{\gamma t} + \frac{\partial e^{\gamma t}}{\partial t} f(\tau) \right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{f(\tau)e^{\gamma t}} \left(\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} e^{\gamma t} + \gamma e^{\gamma t} f(\tau) \right).$$

Diketahui $\tau = T - t$, maka $\frac{\partial \tau}{\partial t} = -1$ sehingga diperoleh

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma - \frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau}. \quad (3.10)$$

Selanjutnya persamaan (3.9) juga diturunkan terhadap S sehingga menjadi

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{S}{f(\tau)e^{\gamma t}} \left(-\frac{f(\tau)e^{\gamma t}}{S^2} \right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial S} = -\frac{1}{S}. \quad (3.11)$$

Pada persamaan diferensial *Stock Loan*, terdapat tiga turunan variabel V , yaitu turunan V terhadap t , terhadap S dan turunan kedua V terhadap S .

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} = \frac{\partial e^{\gamma t} C(x,\tau)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} = \frac{\partial C(x,\tau)}{\partial t} e^{\gamma t} + \frac{\partial e^{\gamma t}}{\partial t} C(x,\tau),$$

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} = e^{\gamma t} \left(\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + \gamma e^{\gamma t} C(x,\tau). \quad (3.12)$$

Persamaan (3.10) disubstitusi ke persamaan (3.12) sehingga transformasi $\frac{\partial V(S,t)}{\partial t}$ menjadi

$$\frac{\partial V}{\partial t} = e^{Yt} \left(\left(\gamma - \frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \right) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} + \gamma C(x, \tau) \right). \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial S} = \frac{\partial (e^{Yt} C(x, \tau))}{\partial S},$$

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial S} = e^{Yt} \left(\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right). \quad (3.14)$$

Persamaan (3.11) disubstitusikan ke persamaan (3.14) sehingga transformasi $\frac{\partial V(S, t)}{\partial S}$ menjadi

$$\frac{\partial V}{\partial S} = e^{Yt} \left(-\frac{1}{S} \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \right). \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V(S, t)}{\partial S} \right),$$

$$\frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(e^{Yt} \left(-\frac{1}{S} \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \right) \right),$$

$$\frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} = -e^{Yt} \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{S} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \tau}{\partial S} \right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{e^{Yt}}{S^2} \left(\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 C(x, \tau)}{\partial x^2} \right). \quad (3.16)$$

Selanjutnya, persamaan transformasi (3.13), (3.14) dan (3.16) disubstitusikan ke persamaan diferensial *Stock Loan* (3.8) sehingga diperoleh persamaan transformasi

$$e^{Yt} \left(\left(\gamma - \frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \right) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} + \gamma C(x, \tau) \right)$$

$$+ (r - D) S e^{Yt} \left(-\frac{1}{S} \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{e^{Yt}}{S^2} \left(\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 C(x, \tau)}{\partial x^2} \right)$$

$$- r e^{Yt} C(x, \tau) = 0,$$

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 + D + \gamma - r - \frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \right) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 C(x, \tau)}{\partial x^2}$$

$$+ (\gamma - r) C(x, \tau). \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) adalah persamaan transformasi dari persamaan diferensial *Stock Loan*. Selanjutnya, setiap kondisi batas pada persamaan diferensial *Stock Loan* juga ditransformasi dengan variabel-variabel yang sama. saat $t = T$, kondisi batas nilai *Stock Loan* adalah $V(S, T) = \max(S - Ke^{rT}, 0)$. Diketahui $\tau = T - t$, maka saat $t = T$ nilai $\tau = 0$. Oleh karena itu, diperoleh transformasi persamaan pada kondisi batas ini adalah

$$e^{rT} C(x, 0) = \max(f(\tau)e^{-x}e^{rT} - Ke^{rT}, 0),$$

$$C(x, 0) = \max(f(\tau)e^{-x} - K, 0). \quad (3.18)$$

Jadi persamaan (3.18) adalah persamaan transformasi kondisi batas $V(S, T) = \max(S - Ke^{rT}, 0)$.

Pada persamaan (3.9), $x = \ln\left(\frac{f(\tau)e^{r\tau}}{S}\right)$, ketika $S = 0$, maka menyebabkan nilai $x \rightarrow \infty$, sehingga kondisi batas $V(0, t) = 0$ ditransformasi menjadi $C(\infty, \tau) = 0$.

$$S = Ye^{r\tau},$$

$$S = f(\tau)e^{-x}e^{r\tau},$$

$$S = S_f e^{-x}. \quad (3.19)$$

Kondisi batas $V(S_f, t) = S_f - Ke^{r\tau}$ terjadi saat $S = S_f$. Berdasarkan persamaan (3.19), jika $S = S_f$, maka nilai $x = 0$ sehingga persamaan transformasinya menjadi

$$V(S_f, t) = S_f - Ke^{r\tau},$$

$$e^{r\tau} C(0, \tau) = f(\tau)e^{r\tau} - Ke^{r\tau},$$

$$C(0, \tau) = f(\tau) - K.$$

Jika persamaan (3.19) diturunkan terhadap x maka diperoleh

$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} = -f(\tau)e^{-x}$, saat $x = 0$, maka transformasi kondisi batas menjadi $\frac{\partial C(0, \tau)}{\partial x} = -f(\tau)$.

Ketika persamaan diferensial (3.8) dan kondisi batasnya ditransformasi, maka diperoleh sistem persamaan diferensial *Stock Loan* yang baru, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} &= \left(\frac{1}{2} \sigma^2 + D + \gamma - r - \frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \right) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 C(x, \tau)}{\partial x^2} \\ &+ (\gamma - r)C(x, \tau), \\ C(\infty, \tau) &= 0, \quad C(x, 0) = \max(f(0)e^{-x} - K, 0), \\ C(0, \tau) &= f(\tau) - K, \quad \frac{\partial C}{\partial x}(0, \tau) = -f(\tau), \end{aligned} \quad (3.20)$$

dengan $f(\tau)$ adalah harga *exercise* optimal dan berdasarkan subbab 2.6, nilai awal f adalah $f(0) = K \times \max\left(1, \frac{r-\gamma}{D}\right)$.

Sementara itu, pada kontrak Opsi Beli Amerika, tidak ada suku bunga pinjaman, sehingga perbedaannya dengan *Stock Loan* terletak pada dua kondisi batas. Pada *Stock Loan*, terdapat kondisi batas $V(S_f, t) = S_f - Ke^{\gamma t}$ dan $V(S, T) = \max(S - Ke^{\gamma T}, 0)$, sedangkan pada Opsi Beli Amerika adalah $V(S_f, t) = S_f - K$ dan $V(S, T) = \max(S - K, 0)$. Oleh karena itu, dengan menggunakan sistem transformasi

$$Y = S, \quad f(\tau) = S_f(t), \quad C(x, \tau) = V(S, t),$$

maka sistem persamaan diferensial Opsi Beli Amerika pada sistem (3.12) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} &= \left(\frac{1}{2} \sigma^2 + D - r - \frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \right) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 C(x, \tau)}{\partial x^2} \\ &- rC(x, \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\infty, \tau) &= 0, \quad C(x, 0) = \max(f(0)e^{-x} - K, 0), \\ C(0, \tau) &= f(\tau) - K \quad \frac{\partial C}{\partial x}(0, \tau) = -f(\tau). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nilai S_f dan f saat $\tau = 0$ adalah $S_f(0) = f(0) = K \times \max\left(1, \frac{r}{d}\right)$.

3.4 Diskritisasi Domain

Sistem persamaan diferensial (3.20) dan (3.21) terdefinisi pada domain *semi-infinite*, yaitu

$$\{(x, \tau) \in [0, \infty) \times [0, T]\}.$$

Untuk mengimplementasikan perhitungan numerik, domain *semi-infinite* diubah menjadi domain terbatas, yaitu

$$\{(x, \tau) \in [0, x_{\max}) \times [0, T]\},$$

dengan $x_{\max}$ adalah titik batas pada x . Menurut subbab 2.6, $x_{\max} = 4$. Dengan menempatkan $I + 1$ grid seragam di x dan $N + 1$ di τ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{x_{\max}}{I}, \quad \Delta \tau = \frac{T}{N}, \\ x_i &= (i - 1)\Delta x, \quad \tau_n = (n - 1)\Delta \tau, \end{aligned}$$

dengan $i = 1, \dots, I + 1$, $n = 1, \dots, N + 1$. Nilai fungsi C dan f pada grid (i, n) disimbolkan sebagai $C_i^n = C(x_i, \tau_n)$ dan $f^n = f(\tau_n)$. Oleh karena $f(0) = K \times \max\left(1, \frac{r-y}{d}\right)$ dan $\tau_n = (n - 1)\Delta \tau$, maka $n = 1$ sehingga $f^1 = K \times \max\left(1, \frac{r-y}{d}\right)$ untuk *Stock Loan* dan $f^1 = K \times \max\left(1, \frac{r}{d}\right)$ untuk *Opsi Beli Amerika*.

Berdasarkan subbab 2.1.3, kondisi batas Dirichlet *Opsi Beli Amerika* dan *Stock Loan* pada $x = x_{\max}$ dan $x = 0$, yaitu

$$C_{I+1}^n = 0, \quad C_1^n = f^n - K.$$

Untuk kondisi batas Neumann di $x = 0$, menggunakan skema beda hingga, yaitu

$$\frac{\partial C_1^n}{\partial x} = \frac{4C_2^n - C_3^n - 3C_1^n}{2\Delta x} \quad (3.22)$$

Selanjutnya persamaan $C_1^n = f^n - K$ dan kondisi batas $\frac{\partial C_1^n}{\partial x} = -f(\tau)$ disubstitusikan ke persamaan (3.27) sehingga dapat diperoleh hubungan nilai *Stock Loan* C dan harga *exercise* optimal f , yaitu

$$f_j^n = \frac{4C_{2,j}^n + 3K - C_{1,j}^n}{3 - 2\Delta x} \quad (3.23)$$

3.5 Skema Prediktor

Misalnya langkah waktu saat ini adalah n , maka nilai prediksi *Stock Loan* dan *exercise* pada $(n + 1)$ langkah waktu masing-masing adalah $\tilde{C}_i^{n+1}$ dan $\tilde{f}^{n+1}$. Pada skripsi ini, skema prediktor ditentukan menggunakan metode eksplisit sehingga persamaan diferensial (3.20) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta \tau} &= \left(\frac{1}{2} \sigma^2 + D + \gamma - r - \frac{1}{f^n} \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta \tau} \right) \frac{\partial C_i^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 C_i^n}{\partial x^2} \\ &\quad + (\gamma - r) C_i^n, \\ C_i^{n+1} &= -\frac{1}{f^n} \frac{\partial C_i^n}{\partial x} f^{n+1} + \left(\left(\frac{1}{2} \sigma^2 + D + \gamma - r \right) \Delta \tau + 1 \right) \frac{\partial C_i^n}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta \tau \frac{\partial^2 C_i^n}{\partial x^2} + (1 + (\gamma - r) \Delta \tau) C_i^n, \\ \tilde{C}_i^{n+1} &= A1_i^n \tilde{f}^{n+1} + B1_i^n. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Untuk $i = 2, \dots, I$ dan $n = 1, \dots, N$,

dengan

$$A1_{i,j}^n = -\frac{1}{f_j^n} \frac{\partial C_{i,j}^n}{\partial x},$$

$$B1_i^n = \left(\left(\frac{1}{2} \sigma^2 + D + \gamma - r \right) \Delta \tau + 1 \right) \frac{\partial C_i^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta \tau \frac{\partial^2 C_i^n}{\partial x^2} + (1 + (\gamma - r) \Delta \tau) C_i^n.$$

Sementara itu, untuk Opsi Beli Amerika, Skema prediktor menggunakan metode eksplisit sehingga persamaan diferensial (3.24) menjadi

$$\tilde{C}_i^{n+1} = A2_i^n \tilde{f}^{n+1} + B2_i^n. \quad (3.25)$$

Untuk $i = 2, \dots, I$ dan $n = 1, \dots, N$,

dengan

$$A2_{i,j}^n = -\frac{1}{f_j^n} \frac{\partial C_{i,j}^n}{\partial x},$$

$$B2_i^n = \left(\left(\frac{1}{2} \sigma^2 + D - r \right) \Delta \tau + 1 \right) \frac{\partial C_i^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta \tau \frac{\partial^2 C_i^n}{\partial x^2} + (1 - r \Delta \tau) C_i^n.$$

Untuk aproksimasi $\frac{\partial^2 C_i^n}{\partial x^2}$ digunakan beda pusat, sedangkan untuk

aproksimasi $\frac{\partial C_i^n}{\partial x}$ menggunakan aproksimasi *hybrid*, yaitu

menggunakan beda pusat ketika $r \leq D$ pada Opsi Beli Amerika dan $r \leq \gamma + D$ pada *Stock Loan*. Ketika $r < D$ pada Opsi Beli

Amerika dan $r > \gamma + D$ pada *Stock Loan*, aproksimasi $\frac{\partial C_i^n}{\partial x}$ menggunakan beda maju.

Ambil $i = 2$ dan $i = 3$ pada persamaan (3.24) dan (3.25) dan disubstitusikan ke persamaan (3.23) sehingga diperoleh nilai prediksi *exercise*

$$\tilde{f}^{n+1} = \frac{3K + 4B_2^n - B_3^n}{3 - 2\Delta x - 4A_2^n + A_3^n}. \quad (3.26)$$

Kondisi batas pada skema prediktor saat $x = 0$ dan $x \rightarrow \infty$ adalah

$$\tilde{C}_1^{n+1} = \tilde{f}^{n+1} - K \text{ dan } \tilde{C}_{I+1}^{n+1} = C_{I+1}^{n+1} = 0$$

3.6 Skema Korektor

Jika skema prediktor menggunakan metode eksplisit, maka skema korektor menggunakan metode implisit sehingga persamaan diferensial *Stock Loan* menjadi

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta\tau} = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + D + \gamma - r - \frac{1}{f^n} \frac{\tilde{f}^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \right) \frac{\partial C_i^{n+1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C_i^{n+1}}{\partial x^2} + (\gamma - r)C_i^{n+1}, \quad (3.27)$$

dan untuk Opsi Beli Amerika menjadi

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta\tau} = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + D - r - \frac{1}{f^n} \frac{\tilde{f}^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \right) \frac{\partial C_i^{n+1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C_i^{n+1}}{\partial x^2} - rC_i^{n+1}. \quad (3.28)$$

Pada persamaan (3.27) dan (3.28) memuat variabel f^{n+1} yang nilainya tidak diketahui. Oleh karena itu, maka nilai f^{n+1} menjadi nilai prediksi $\tilde{f}^{n+1}$.

Pada persamaan metode implisit *Stock Loan* (3.28), aproksimasi derivatif C terhadap x menggunakan beda pusat sehingga persamaan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta\tau} &= \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + D + \gamma - r - \frac{1}{f^n} \frac{\tilde{f}^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \right) \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (\gamma - r)C_i^{n+1}, \\ C_i^n &= P_1 C_{i-1}^{n+1} + P_2 C_i^{n+1} + P_3 C_{i+1}^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + D + \gamma - r - \frac{1}{f^n} \frac{\tilde{f}^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \right), \\ P_2 &= \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{\Delta x^2} - (\gamma - r)\Delta\tau + 1, \end{aligned}$$

$$P_3 = -\frac{\Delta\tau}{2\Delta x} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + D + r - \frac{1}{f^n} \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}.$$

Sedangkan persamaan metode implisit Opsi Beli Amerika (3.28) menjadi

$$C_i^n = Q_1 C_{i-1}^{n+1} + Q_2 C_i^{n+1} + Q_3 C_{i+1}^{n+1}, \quad (3.30)$$

dengan

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + D - r - \frac{1}{f^n} \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \right),$$

$$Q_2 = \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{\Delta x^2} + r \Delta\tau + 1,$$

$$Q_3 = -\frac{\Delta\tau}{2\Delta x} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + D - r - \frac{1}{f^n} \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}.$$

Selanjutnya, menyelesaikan persamaan Stock Loan (3.29) menggunakan metode implisit.

Saat $i = 2$

$C_2^n = P_1 C_1^{n+1} + P_2 C_2^{n+1} + P_3 C_3^{n+1}$. Nilai C_1^{n+1} tidak diketahui sebelumnya, oleh karena itu, nilai C_1^{n+1} menjadi nilai prediksi $\tilde{C}_1^{n+1}$ sehingga saat $i = 2$ persamaan menjadi

$$C_2^n - P_1 \tilde{C}_1^{n+1} = P_2 C_2^{n+1} + P_3 C_3^{n+1}.$$

Saat $i = 3$

$$C_3^n = P_1 C_2^{n+1} + P_2 C_3^{n+1} + P_3 C_4^{n+1},$$

saat $i = 4$

$$C_4^n = P_1 C_3^{n+1} + P_2 C_4^{n+1} + P_3 C_5^{n+1},$$

⋮

saat $i = I - 2$

$$C_{I-1}^n = P_1 C_{I-2}^{n+1} + P_2 C_{I-1}^{n+1} + P_3 C_I^{n+1},$$

saat $i = I - 1$

$$C_{I-1}^n = P_1 C_{I-1}^{n+1} + P_2 C_{I-1}^{n+1} + P_3 C_{I-1}^{n+1}.$$

Nilai $C_{I+1}^{n+1} = 0$ karena kondisi batas saat $x \rightarrow \infty$ sehingga saat $i = I - 1$ persamaan menjadi

$$C_{I-1}^n = P_1 C_{I-1}^{n+1} + P_2 C_{I-1}^{n+1}.$$

Selanjutnya, persamaan (3.30) diselesaikan dalam bentuk operasi matriks

$$G_1 J = K - L_1, \quad (3.31)$$

dengan

$$J = [C_2^{n+1}, C_3^{n+1}, \dots, C_{I-1}^{n+1}, C_I^{n+1}]^T,$$

$$K = [C_2^n, C_3^n, \dots, C_{I-1}^n, C_I^n]^T,$$

$$L_1 = [P_1 C_1^{n+1}, 0, \dots, 0, 0]^T,$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_1 & P_2 & P_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Pada sistem persamaan (3.32) dapat diperoleh nilai entri-entri pada matriks J . Kemudian, harga *exercise* optimal pada *Stock Loan* dikoreksi melalui

$$f^{n+1} = \frac{4C_2^{n+1} + 3K - C_3^{n+1}}{3 - 2\Delta x},$$

dan kondisi batas saat $x = 0$ adalah $C_1^{n+1} = f^{n+1} - K$.

Berdasarkan uraian pada *Stock Loan*, penyelesaian persamaan Opsi Beli Amerika dapat diperoleh dengan cara yang sama, yaitu

$$G_2 J = K - L_2, \quad (3.32)$$

dengan

$$J = [C_2^{n+1}, C_3^{n+1}, \dots, C_{l-1}^{n+1}, C_l^{n+1}]^T,$$

$$K = [C_2^n, C_3^n, \dots, C_{l-1}^n, C_l^n]^T,$$

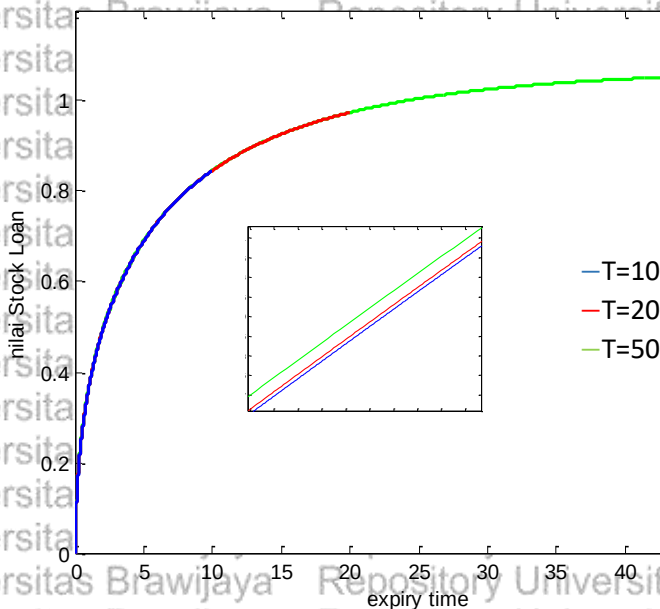
$$L_2 = [Q_1 \tilde{C}_1^{n+1}, 0, \dots, 0, 0]^T,$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} Q_2 & Q_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

3.7 Simulasi Numerik

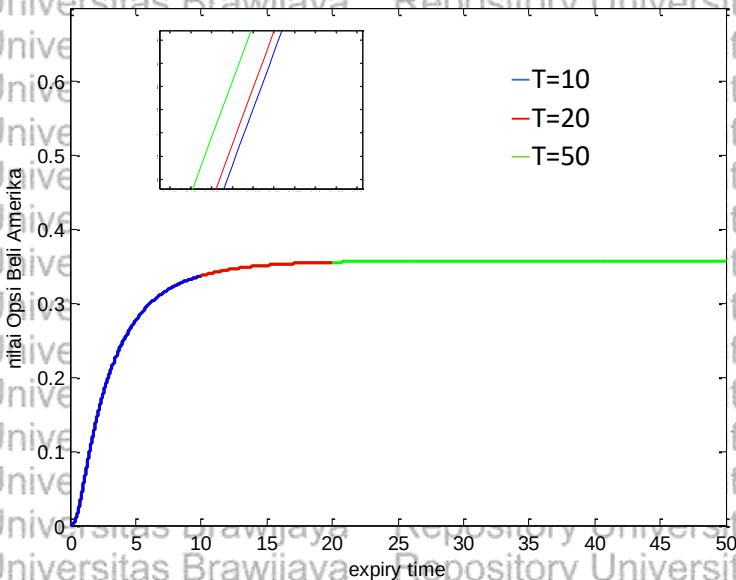
Pada subbab ini disajikan simulasi numerik sistem persamaan diferensial *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika serta pengaruhnya terhadap perubahan-perubahan pada variabel tertentu. Nilai *Stock Loan* dan nilai Opsi Beli Amerika dipengaruhi oleh *maturity date*, suku bunga bebas risiko, besarnya dividen yang dibagikan perusahaan ke pemegang saham dan suku bunga pinjaman pada *Stock Loan*, sedangkan Opsi Beli Amerika tidak terdapat suku bunga pinjaman. Suku bunga bebas risiko (r) dan suku bunga pinjaman (γ) memiliki interval nilai yang sama, yaitu $0 < r < 1$ dan $0 < \gamma < 1$. Berdasarkan transformasi Landau pada subbab 3.3, diperoleh $e^x = \frac{S_f(t)}{s}$. Saat $x = 0$ maka $S_f(t) = S$ dan nilai maksimum $x = 4$. Menurut subbab 2.5, pada keadaan sebenarnya suku bunga bebas risiko harus lebih besar daripada dividen. Namun pada skripsi ini, beberapa simulasi nilai dividen lebih besar daripada suku bunga bebas risiko. kasus ini menyebabkan simulasi numerik tidak stabil. Oleh karena itu, untuk membuat simulasi numerik tetap stabil pada kasus ini, aproksimasi $\frac{\partial C}{\partial x}$ menggunakan aproksimasi *hybrid* seperti yang dijelaskan pada subbab 3.5.

Simulasi numerik pertama pada skripsi ini adalah pengaruh nilai *Stock Loan* terhadap perubahan nilai *maturity date* pada Gambar (3.2). Parameter pada simulasi ini adalah $r = 0,06$; $\sigma = 0,4$; $\gamma = 0,1$; $D = 0,03$; $K = 0,7$; $x = 0,1$. Jangka waktu pinjaman (*maturity date*) pada transaksi, mempengaruhi nilai *stock loan*. Semakin lama jangka waktu pinjaman, maka nilai *stock loan* semakin besar karena dapat memberikan kebebasan kepada *borrower* untuk menentukan waktu *exercise*. Oleh karena itu, *borrower* lebih suka apabila meminjam uang dengan jangka waktu pelunasan yang lebih panjang. Alasan tersebut menyebabkan nilai *stock loan* semakin besar karena *maturity date* yang semakin lama. Pengaruh *maturity date* terhadap nilai *stock loan* dapat dijadikan pertimbangan oleh *borrower* untuk menentukan waktu pelunasan pinjaman kepada *Lender*.



Gambar 3.2: Plot nilai *Stock Loan* terhadap perubahan *maturity date*

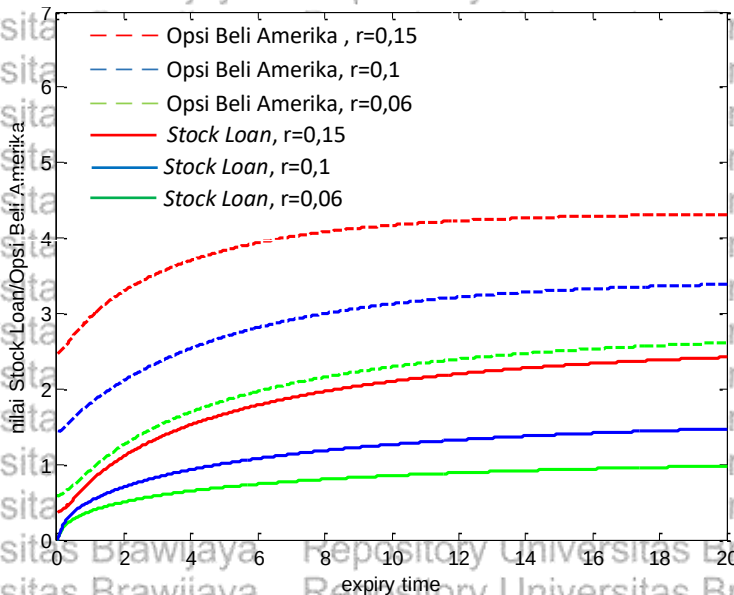
Simulasi numerik yang kedua adalah pengaruh nilai Opsi Beli Amerika terhadap perubahan nilai *maturity date*. Parameter pada simulasi ini adalah $r = 0,1$; $\sigma = 0,2$; $D = 0,15$; $K = 10$; $X = 0.45$. Perilaku grafik nilai *Stock Loan* terhadap *maturity date* memiliki kesimpulan yang sama dengan nilai Opsi Beli Amerika. Pada Gambar (3.3) terlihat bahwa semakin lama jangka waktu kontrak nilai Opsi Beli Amerika semakin besar karena masa kontrak yang lebih lama memberikan kebebasan kepada *holder* untuk memilih waktu *exercise*. Pengaruh *maturity date* terhadap nilai Opsi Beli Amerika bisa dijadikan pertimbangan oleh investor untuk menentukan perjanjian masa berakhirnya kontrak.



Gambar 3.3: Plot nilai Opsi Beli Amerika terhadap perubahan *maturity date*

Simulasi numerik selanjutnya adalah pengaruh nilai *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika pada perubahan suku bunga bebas risiko(r). Gambar (3.4) adalah grafik *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika dengan Parameter $\sigma = 0,4$; $\gamma = 0,1$; $D = 0,03$; $K = 0,7$;

$X = 0.1; T = 20$. Pada transaksi *Stock Loan*, kenaikan tingkat suku bunga bebas risiko menyebabkan kenaikan harga saham sehingga ketika melakukan pelunasan *borrower* memperoleh pengembalian. Hal ini menyebabkan nilai *stock loan* semakin meningkat. Sementara itu pada kontrak Opsi Beli Amerika, ketika tingkat suku bunga bebas risiko mengalami kenaikan menyebabkan banyak investor tertarik untuk membeli saham. Banyaknya permintaan saham di pasar modal menyebabkan nilai Opsi Beli Amerika semakin besar.

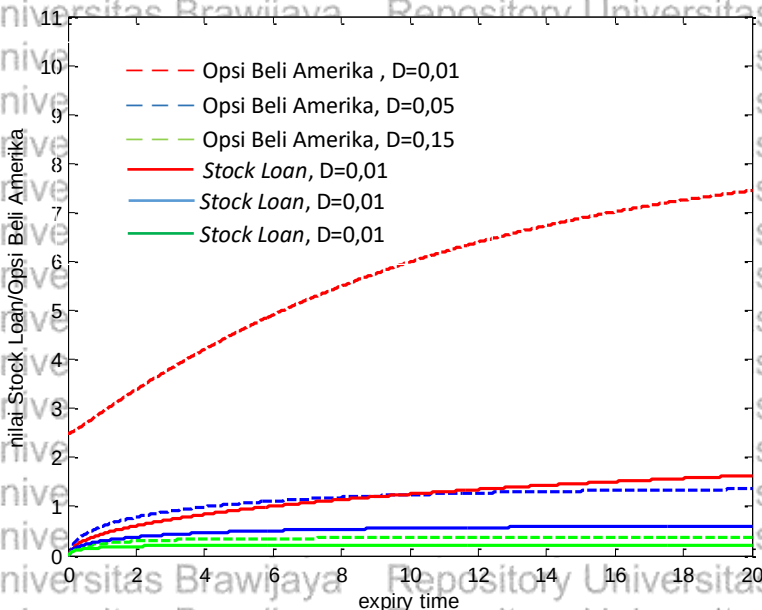


Gambar 3.4: Plot nilai *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika terhadap perubahan nilai r

Walaupun kesimpulan simulasi numerik *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika terhadap perubahan nilai r sama, namun terdapat perbedaan grafik antara keduanya. Hal ini disebabkan oleh kondisi batas yang berbeda. Pada *Stock Loan* terdapat suku bunga pinjaman (γ) sehingga nilai $f(0) = K \times \max\left(1, \frac{r-\gamma}{d}\right)$. Sedangkan pada Opsi Beli Amerika tidak terdapat suku bunga pinjaman sehingga nilai

$f(0) = K \times \max\left(1, \frac{r}{D}\right)$. Kedua nilai $f(0)$ yang berbeda ini menyebabkan nilai $C(x, 0) = \max(f(0)e^{-x} - K, 0)$ juga berbeda.

Sementara itu, untuk perubahan nilai dividen, semakin besar dividen menyebabkan nilai *stock loan* dan Opsi Beli Amerika semakin kecil. Hal ini terlihat pada Gambar (3.5) dengan parameter $r = 0,05$; $\sigma = 0,4$; $\gamma = 0,1$; $K = 0,7$; $X = 0,1$; $T = 20$. Ketika perusahaan penerbit saham menambah besar dividen, maka modal yang dimiliki perusahaan semakin berkurang sehingga tidak banyak investor yang ingin membeli saham. Kondisi ini menyebabkan nilai *stock loan* dan Opsi Beli Amerika menurun. Grafik berwarna merah pada Opsi Beli Amerika tidak dimulai pada titik yang sama dengan grafik berwarna biru dan hijau. Perbedaan ini disebabkan oleh kondisi batas $f(0) = K \times \max\left(1, \frac{r}{D}\right)$. Nilai $r = 0,05$ dan nilai $D = 0,01$ sehingga nilai $f(0) \neq K$, namun $f(0) = 3,5$ yang menyebabkan nilai Opsi Beli Amerika dimulai dari titik 2,4543.



Gambar 3.5: Plot nilai *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika terhadap perubahan nilai D

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, perbedaan *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika adalah pada *Stock Loan* terdapat suku bunga pinjaman, sedangkan Opsi Beli Amerika tidak ada suku bunga pinjaman. Hal ini menyebabkan perbedaan kondisi batas dan transformasi pada keduanya. Kondisi batas Opsi Beli Amerika adalah $V(S_f, t) = S_f - K$ dan $V(S, T) = \max(S - K, 0)$, sedangkan kondisi batas *Stock Loan* adalah $V(S_f, t) = S_f - Ke^{\gamma t}$ dan $V(S, T) = \max(S - Ke^{\gamma T}, 0)$. Sementara itu, pada transformasi persamaan diferensial *Stock Loan* memuat $S_f(t) = e^{\gamma t} f(\tau)$, sedangkan pada persamaan diferensial Opsi Beli Amerika tidak ada suku bunga pinjaman sehingga transformasinya adalah $S_f(t) = f(\tau)$, dengan $\tau = T - t$. Hal ini menyebabkan $S_f(t)$ pada *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika berbeda

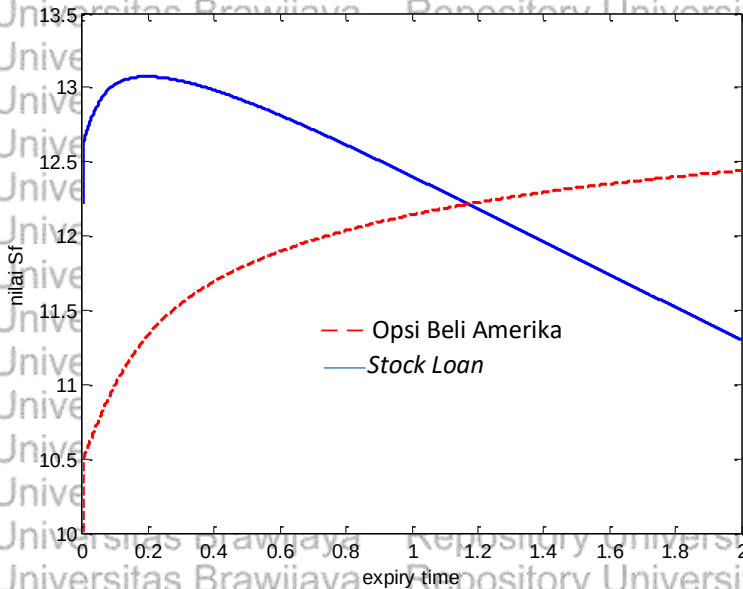
Pada *Stock Loan*, $S_f(\tau) = e^{\gamma(T-\tau)} f(\tau)$. Untuk menyelidiki kemonotonan fungsi $S_f(\tau)$ diperoleh

$$S'_f(\tau) = -\gamma e^{\gamma(T-\tau)} f(\tau) + f'(\tau) e^{\gamma(T-\tau)},$$

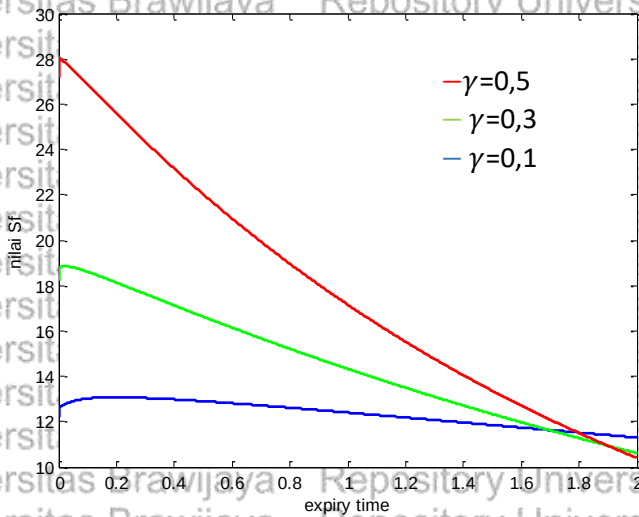
$$S'_f(\tau) = e^{\gamma(T-\tau)} (f'(\tau) - \gamma f(\tau)).$$

$e^{\gamma(T-\tau)}$ selalu bernilai positif sehingga kemonotonan $S_f(\tau)$ bergantung pada nilai $(f'(\tau) - \gamma f(\tau))$. Ketika γ semakin besar, menyebabkan nilai $(f'(\tau) - \gamma f(\tau))$ semakin kecil dan $e^{\gamma(T-\tau)}$ semakin besar. Oleh sebab itu, nilai $S_f(\tau)$ semakin turun pada *Stock Loan*. Berbeda dengan $S_f(\tau)$ pada Opsi Beli Amerika yang nilainya sama dengan $f(\tau)$. Perbandingan grafik fungsi $S_f(\tau)$ pada *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika dapat dilihat pada Gambar (3.6) dengan parameter $r = 0,1$; $\sigma = 0,2$; $\gamma = 0,1$; $D = 0,15$; $K = 0,7$; $X = 0,1$; $T = 2$ dan kemonotonan grafik $S_f(\tau)$ *stock loan* terhadap perubahan nilai γ pada Gambar (3.7) dengan parameter yang sama. Berdasarkan Gambar (3.7), semakin besar γ , fungsi $S_f(\tau)$ semakin turun dengan cepat. Nilai awal $S_f(\tau) = e^{\gamma(T-\tau)} f(\tau)$ pada Gambar (3.7) berbeda disebabkan oleh nilai γ yang berbeda.

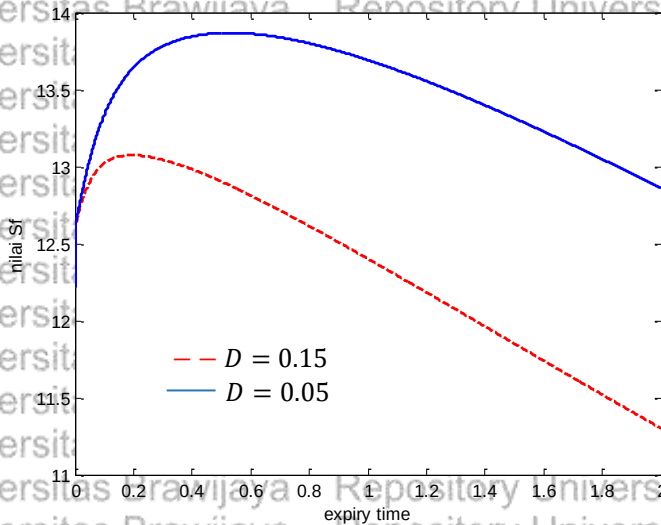
Simulasi numerik yang terakhir adalah pengaruh harga *exercise* optimal terhadap perubahan nilai D dengan parameter $r = 0,1$; $\sigma = 0,2$; $\gamma = 0,1$; $K = 10$; $T = 2$. dampak hasil dividen pada harga *exercise* optimal ditunjukkan pada Gambar (3.8). Semakin kecil nilai dividen, akan didapatkan harga *exercise* optimal yang semakin besar. Misalkan ada dua saham dengan nilai yang sama, namun dengan dividen yang berbeda, maka investor akan memilih untuk membeli saham yang memiliki dividen lebih tinggi karena ia memiliki biaya sama. Oleh karena itu, nilai *Stock Loan* pada kedua saham ini tidak memiliki harga *exercise* optimal yang sama. Ketika investor menebus saham dengan hasil dividen yang lebih rendah, maka ia akan menunggu hingga harga *exercise* optimal menjadi lebih tinggi.



Gambar 3.6: Plot nilai $S_f(\tau)$ *Stock Loan* dan $S_f(\tau)$ Opsi Beli Amerika



Gambar 3.7: Plot nilai $S_f(\tau)$ Stock Loan terhadap perubahan nilai γ



Gambar 3.8: Plot nilai $S_f(\tau)$ Stock Loan terhadap perubahan nilai dividen

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial parsial Opsi Beli Amerika memiliki persamaan diferensial yang sama seperti persamaan pada *Stock Loan*, yaitu $\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$. Perbedaan antara keduanya terletak pada dua kondisi batas. Kondisi batas pada Opsi Beli Amerika adalah $V(S_f, t) = S_f - K$ dan $V(S, T) = \max(S - K, 0)$, sementara pada *Stock Loan* terdapat suku bunga pinjaman (γ) sehingga kondisi batas pada persamaan diferensial *Stock Loan* adalah $V(S_f, t) = S_f - Ke^{\gamma t}$ dan $V(S, T) = \max(S - Ke^{\gamma T}, 0)$. Perbedaan ini juga mengakibatkan perbedaan variabel transformasi pada keduanya. Transformasi persamaan diferensial *Stock Loan* menggunakan variabel $Y = e^{-\gamma t}S$, $f(\tau) = e^{-\gamma t}S_f(t)$ dan $C(x, \tau) = e^{-\gamma t}V(S, t)$. Sementara itu transformasi persamaan diferensial Opsi Beli Amerika menggunakan variabel $Y = S$, $f(\tau) = S_f(t)$ dan $C(x, \tau) = V(S, t)$. Transformasi dilakukan untuk memperbaiki harga *strike* yang melibatkan suku bunga pinjaman (γ) yang tumbuh secara eksponensial terhadap waktu pada *Stock Loan*.
2. Konstruksi skema Prediktor Korektor digunakan pada simulasi numerik transformasi sistem persamaan diferensial *Stock Loan* dan Opsi Beli Amerika. Pada tahap prediktor menggunakan metode eksplisit, yaitu dilakukan aproksimasi beda maju pada turunan terhadap waktu. Sementara itu pada tahap korektor menggunakan metode implisit, yaitu dilakukan aproksimasi beda mundur pada turunan terhadap waktu.

3. Berdasarkan hasil simulasi menggunakan *software* MATLAB dengan Metode Prediktor Korektor, semakin lama *maturity date*, maka semakin besar nilai *Stock Loan* maupun nilai Opsi Beli Amerika. Semakin besar suku bunga bebas risiko, maka semakin besar nilai *Stock Loan* maupun nilai Opsi Beli Amerika. Sedangkan semakin besar dividen menyebabkan nilai *Stock Loan* maupun nilai Opsi Beli Amerika semakin kecil. Pada transaksi *Stock Loan* terdapat suku bunga pinjaman, sedangkan pada kontrak Opsi Beli Amerika tidak terdapat suku bunga pinjaman sehingga menyebabkan perbedaan nilai *exercise optimal* ($S_f(t)$). Nilai *exercise optimal* *Stock Loan* adalah $S_f(t) = e^{rt}f(\tau)$, sedangkan pada Opsi Beli Amerika adalah $S_f(t) = f(\tau)$. Perilaku nilai *exercise optimal* *Stock Loan* dipengaruhi oleh suku bunga pinjaman. Semakin besar suku bunga pinjaman (r) menyebabkan nilai *exercise optimal* $S_f(t)$ semakin turun secara cepat. Kemudian semakin besar nilai dividen menyebabkan nilai $S_f(t)$ pada *Stock Loan* semakin kecil.

4.2 Saran

Berdasarkan pengamatan pasar, suku bunga konstan tidak dapat memberikan deskripsi secara jelas tentang pengaruh tingkat bunga terhadap waktu. Tingkat suku bunga stokastik (*stochastic interest rate*) memiliki dampak besar pada strategi penebusan. Pada penelitian berikutnya disarankan untuk tidak mengasumsikan nilai suku bunga bebas risiko (r) konstan. Oleh karena itu, pada pembentukan persamaan diferensialnya, harga saham dan suku bunga bebas risiko mengikuti gerak Brown dan akan terdapat derivatif $V(S, r, t)$ terhadap r .

DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W.E., dan R.C. Diprima. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley dan Sons Inc. New York.
- Bursa Efek Indonesia. (2018), "Saham" <http://www.idx.co.id/produk/saham/> (diakses tanggal 13 November 2018)
- Butcher, J. 2008. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons.
- Chen, W., L. Xu., dan S. Zhu. 2015. Stock loan valuation under a stochastic interest rate model. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 70. Hal.1757-1771.
- Dai, M., dan Z.Q. Xu. 2011. Optimal redeeming strategy of stock loans with finite maturity. *Mathematical Finance*. Vol. 21. Hal. 775-793.
- Debnath, L. 2012. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineer*. Third Ed., Birkhauser. New York.
- Ermogenous, A. 2005. *Brownian Motion and Its Applications In The Stock Market*. Chicago (US): Illinois Institute of Technology.
- Farlow, S.J. 1994. *An Introduction to Differential Equation and their Application*. Mc Graw-Hill, Inc. New Jersey.
- Gheorghiu, V. 2011. *Ito Calculus in a Nutshell*. Department of Physics, Carnegie Mellon University. Hal 21.
- Grasselli, M. R., dan C. Go´mez. 2013. Stock loans in incomplete markets. *Applied Mathematical Finance*. Vol 20. Hal. 118-136.
- Halim, A. 2005. Analisis Investasi, Buku 2, Edisi Kedua. Salemba Empat. Jakarta.
- Hull, J.C. 2009. *Option, Future and Other Derivatives*. Ed ke-7. New Jersey (US): Pearson Education.

- Kandilarov, J.D., dan R. L. Valkov. 2011. A numerical approach for the american call option pricing model. *Numerical Methods and Applications*.
- Kartono,. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset. Yogyakarta.
- Liang, Z., dan W. Wu. 2012. Variational Inequalities in Stock Loan Models. *Optimization and Engineering*. Vol. 13. Hal. 459-470.
- Lu, X., dan E.R. Putri. 2015. Semi-analytic Valuation of Stock Loans with Finite Maturity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Vol. 27. Hal 206-215.
- Luenberger, D. 1998. *Investment Science*. Oxford University Press. New York.
- Lyu, Y.D. 2002. *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms*. Cambridge University Press, UK.
- Lyu, Y.D. 2006. *Stochastic Processes and Brownian Motion*. Departemen Computer Science & Information Engineering and Department of Finance, National Taiwan University. Hal 462.
- Pascucci, A., M. Suarez-Taboada., dan C. Vázquez. 2013. Mathematical analysis and numerical methods for a pde model of a stock loan pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol 403. Hal. 38-53.
- Prager, D., dan Q. Zhang. 2010. Stock loan valuation under a regime-switching model with mean-reverting and finite maturity. *Journal of Systems Science and Complexity*. Vol 23. Hal 572-583.
- Ross, S.M. 2007. *Introduction to Probability Models*. Edisi ke-9, South California (US): Elsevier.

Suryanto, A. 2017. *Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya dengan Matlab*. Universitas Negeri Malang. Malang.

Utami, T.N. 2017. *Implementasi Metode Crank-Nicolson untuk Mendeskripsikan Perilaku Asimtotik Harga Saham Optimal dari American Call Option dan Stock Loan* [tesis]. Indonesia: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Wong, T.W. dan H.Y. Wong. 2012. Stochastic volatility asymptotics of stock loans: Valuation and optimal stopping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 394. Hal. 337-346.

Xia, J., dan X. Y. Zhou. 2007. Stock Loan. *Mathematical Finance*. Vol. 17. Hal. 307-317.

Xu, Liangbin. 2015. *Stock Loan Valuation under a Stochastic Interest Rate Model* [tesis]. Australia: University of Wollongong.

Lampiran

Lampiran 1. Source Code Stock Loan pada MATLAB

```
% clear all;
clc;
%parameter
r=...;
sigma=...;
gamma=...;
D=...;
K=...;
T=...;

I=120;
N=10000;
dx=4/I;
dtau=T/N;

for n=1:N+1
    tau(n)=(n-1)*dtau;
end

%nilai awal
f(1)=K*max(1,(r-gamma)/D);
for i=1:I+1
    x(i)=(i-1)*dx;
    C(1,i)=max((f(1)*exp(-x(i))-K),0);
end

for n=1:N
    if r<=D+gamma
        for i=2:I
            A(n,i)=-1/f(n)*((C(n,i+1)-C(n,i-1))/(2*dx));
            B(n,i)=((1/2*sigma^2+D-r+gamma)*dtau+1)*(C(n,i+1)-C(n,i-1))/(2*dx)+0.5*sigma^2*dtau*(((C(n,i+1)-2*C(n,i)+C(n,i-1))/dx^2)+(1+(gamma-r)*dtau)*C(n,i));
        end
    else
        for i=2:I
            A(n,i)=-1/f(n)*((C(n,i+1)-C(n,i))/dx);
```

```

        B(n,i)=((1/2*sigma^2+D-r+gamma)*dtau+1)*(C(n,i+1)-
        C(n,i))/dx+0.5*sigma^2*dtau*((C(n,i+1)-2*C(n,i)+C(n,i-
        1))/dx^2)+(1+(gamma-r)*dtau)*C(n,i);
    end
end
ft(n+1)=(3*K+4*B(n,2)-B(n,3))/(3-2*dx-4*A(n,2)+A(n,3));
Ct(n+1,1)=ft(n+1)-K;
for i=2:I
    Ct(n+1,i)=A(n,i)*ft(n+1)+B(n,i);
end
Ct(n+1,I+1)=0;
matriksZ=zeros(I-1,I-1);
p1c(n)=-dtau/(2*dx)*(sigma^2/2+D-r+gamma-(ft(n+1)-
f(n))/(dtau*ft(n+1)))-(sigma^2*dtau)/(2*dx^2);
p2a(n)=dtau/(2*dx)*(sigma^2/2+D-r+gamma-(ft(n+1)-
f(n))/(dtau*ft(n+1)))-(sigma^2*dtau)/(2*dx^2);
p3=1+(sigma^2*dtau)/dx^2-dtau*(gamma-r);
for i=2:I
    if i==2
        matriksZ(i-1,i-1)=p3;
        matriksZ(i-1,i)=p1c(n);
    elseif i==I
        matriksZ(i-1,i-2)=p2a(n);
        matriksZ(i-1,i-1)=p3;
    else
        matriksZ(i-1,i-2)=p2a(n);
        matriksZ(i-1,i-1)=p3;
        matriksZ(i-1,i)=p1c(n);
    end
end
CC=zeros(I-1,1);
CC(1)=p2a(n)*Ct(n+1,1);
CC2=C(n,2:I)-CC';
C(n+1,2:I)=inv(matriksZ)*CC2';
f(n+1)=(4*C(n+1,2)+3*K-K(n+1,3))/(3-2*dx);
C(n+1,1)=f(n+1)-K;
C(n+1,I+1)=0;
end
for n=1:N+1
    Sf(n)=f(n)*exp(gamma*(T-tau(n)));
end

```


Lampiran 2. Source Code Opsi Beli Amerika pada MATLAB

```
clear all;
clc;
%parameter
r=...;
sigma=...;
D=...;
K=...;
T=...;
I=120;
N=10000;
dx=4/I;
dtau=T/N;
for n=1:N+1
    tau(n)=(n-1)*dtau;
end
%nilai awal
f(1)=K*max(1,r/D);
for i=1:I+1
    x(i)=(i-1)*dx;
    C(1,i)=max(f(1)*exp(-x(i))-K,0);
end
for n=1:N
    if r<=D
        for i=2:I
            A(n,i)=-1/f(n)*((C(n,i+1)-C(n,i-1))/(2*dx));
            B(n,i)=((1/2*sigma^2+D-r)*dtau+1)*(C(n,i+1)-C(n,i-1))/(2*dx)+0.5*sigma^2*dtau*(((C(n,i+1)-2*C(n,i)+C(n,i-1))/dx^2)+(1+(-r)*dtau)*C(n,i);
        end
    else
        for i=2:I
            A(n,i)=-1/f(n)*((C(n,i+1)-C(n,i))/dx);
            B(n,i)=((1/2*sigma^2+D-r)*dtau+1)*(C(n,i+1)-C(n,i))/dx+0.5*sigma^2*dtau*(((C(n,i+1)-2*C(n,i)+C(n,i-1))/dx^2)+(1+(-r)*dtau)*C(n,i);
        end
    end
end
```



```

end
ft(n+1)=(3*K+4*B(n,2)-B(n,3))/(3-2*dx-4*A(n,2)+A(n,3));
Ct(n+1,1)=ft(n+1)-K;
for i=2:I
    Ct(n+1,i)=A(n,i)*ft(n+1)+B(n,i);
end
Ct(n+1,I+1)=0;
matriksZ=zeros(I-1,I-1);
p1c(n)=-dtau/(2*dx)*(sigma^2/2+D-r-(ft(n+1)-f(n))/(dtau*ft(n+1)))-
(sigma^2*dtau)/(2*dx^2);
p2a(n)=dtau/(2*dx)*(sigma^2/2+D-r-(ft(n+1)-f(n))/(dtau*ft(n+1)))-
(sigma^2*dtau)/(2*dx^2);
p3=1+(sigma^2*dtau)/dx^2-dtau*(-r);
for i=2:I
    if i==2
        matriksZ(i-1,i-1)=p3;
        matriksZ(i-1,i)=p1c(n);
    elseif i==I
        matriksZ(i-1,i-2)=p2a(n);
        matriksZ(i-1,i-1)=p3;
    else
        matriksZ(i-1,i-2)=p2a(n);
        matriksZ(i-1,i-1)=p3;
        matriksZ(i-1,i)=p1c(n);
    end
end
CC=zeros(I-1,1);
CC(1)=p2a(n)*(ft(n+1)-K);
CC2=C(n,2:I)-CC';
C(n+1,2:I)=inv(matriksZ)*CC2';
f(n+1)=(4*C(n+1,2)+3*K-C(n+1,3))/(3-2*dx);
C(n+1,1)=f(n+1)-K;
C(n+1,I+1)=0;
end
for n=1:N+1
    if n==1
        Sf(n)=K*max(1,r/D);
    else
        Sf(n)=f(n);
    end
end

```