

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA
PENYEBARAN PERILAKU MEROKOK**

SKRIPSI

oleh

RAHMAH RAMADINA

155090407111028



JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2019

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA
PENYEBARAN PERILAKU MEROKOK**

SKRIPSI

oleh

RAHMAH RAMADINA

155090407111028



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG**

2019

[illegible][illegible]

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA
PENYEBARAN PERILAKU MEROKOK**

oleh
RAHMAH RAMADINA
155090407111028

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 12
Juli 2019 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh
gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Indah Yanti, S.Si., M.Si
NIP. 197911292005012002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003

[illegible][illegible]

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rahmah Ramadina
NIM : 155090407111028
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model
Matematika Penyebaran Perilaku
Merokok

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 12 Juli 2019

yang menyatakan,

Rahmah Ramadina

NIM. 155090407111028

[illegible][illegible]

ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PERILAKU MEROKOK

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis dinamik model penyebaran perilaku merokok. Model ini memiliki empat subpopulasi individu, yaitu subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok, subpopulasi perokok, subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara, dan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen. Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu yang berhenti merokok sementara dapat kembali menjadi perokok akibat tekanan teman sebaya (*peer pressure*). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar (R_0), dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas perilaku merokok dan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok. Titik kesetimbangan bebas perilaku merokok selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok eksis jika $R_0 > 1$. Titik kesetimbangan bebas perilaku merokok stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan $\alpha < \beta$. Simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis yang diperoleh.

Keywords: analisis dinamik, *peer pressure*, perilaku merokok, model matematika.

[illegible][illegible]

DYNAMICAL ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL ON SMOKING

ABSTRACT

This final project discussed the construction and dynamical analysis of a mathematical model on smoking in which the population is divided into four subpopulations, namely potential smokers, smokers, smokers who temporarily quit smoking, and smokers who permanently quit smoking. It is assumed that the temporary quitters have possibility to become smokers again and the effect of peer pressure may be considered as one of the main causes of their relapse. The dynamical analysis is performed by determining the equilibrium points, the basic reproduction number (R_0), and analyzing the local stability. Based on the analytical results, two equilibrium points are obtained, namely the smoking-free equilibrium and the smoking-present equilibrium. The smoking-free equilibrium always exist, whereas the smoking-present equilibrium exists if $R_0 > 1$. The stability of the equilibrium depends on the basic reproduction number R_0 . The smoking free equilibrium is locally asymptotically stable when $R_0 < 1$, while the smoking-present equilibrium is locally asymptotically stable when $R_0 > 1$ and $\alpha < \beta$. Numerical simulations are performed to support the analytical results.

Keywords: *dynamical analysis, peer pressure, smoking, mathematical model.*

[illegible][illegible]

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Subhanahu wa taala yang telah melimpahkan rahmat, karunia, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Perilaku Merokok dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Indah Yanti, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar,
2. Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si. dan Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini
3. Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si. selaku dosen penasihat akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini tepat waktu,
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Bapak Yusuf Effendi, Ibu Fajriati Irsalina, Muhammad Fadhil, Muhammad Azhar, dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan tiada henti kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini,
6. Asri Dwi Lestari, Atikah Lamis, Elsa Dita, dan Winda Ariyanti atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini,

7. Yulia Kodrianti, Regina Claudia, Tuhfatur Rosyida, Hana Kholidah, Vidya Meyshela Y., Vanilia Cahya, Yona Lotusia, dan Noreen Ann J. atas dukungan, kebersamaan, dan kerjasama selama masa perkuliahan,
8. Felly Eliza P., Lyshe Martya H., Mega Lestari, dan Levi Larassaty atas dukungan dan kebersamaan selama penulis tinggal di Malang,
9. keluarga besar Matematika 2015 atas dukungan dan kebersamaan selama proses perkuliahan,
10. dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email rramadina26@gmail.com, untuk perbaikan pada masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 12 Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
BAB II DASAR TEORI	3
2.1 Sistem Dinamik	3
2.1.1 Sistem otonomus linear	5
2.1.2 Sistem otonomus nonlinear	6
2.1.3 <i>Second additive compound matrix</i>	8
2.2 Model penyebaran perilaku merokok	12
2.2.1 Laju perubahan subpopulasi yang berpotensi menjadi perokok (P)	13
2.2.2 Laju perubahan subpopulasi perokok (S)	14
2.2.3 Laju perubahan subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara (Q_t)	14
2.2.4 Laju perubahan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen (Q_p)	15
2.3 Angka Reproduksi Dasar	16
BAB III PEMBAHASAN	19
3.1 Konstruksi Model	19
3.2 Angka Reproduksi Dasar	20
3.3 Titik Keseimbangan	21

3.3.1	Titik kesetimbangan bebas perilaku merokok (E_0)	21
3.3.2	Titik kesetimbangan dengan perilaku merokok (E^*)	22
3.4	Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan	24
3.4.1	Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas perilaku merokok	24
3.4.2	Kestabilan lokal titik kesetimbangan dengan perilaku merokok	25
3.5	Simulasi Numerik	27
3.5.1	Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$	28
3.5.2	Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha < \beta$	29
3.5.3	Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha = \beta$	30
3.5.4	Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha > \beta$	30
BAB IV	KESIMPULAN DAN SARAN	33
4.1	Kesimpulan	33
4.2	Saran	34
DAFTAR PUSTAKA	DAFTAR PUSTAKA	35
LAMPIRAN	LAMPIRAN	37

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram kompartemen model penyebaran perilaku merokok oleh Sharomi dan Gumel (2008)	13
Gambar 3.1	Potret fase untuk $R_0 < 1$	28
Gambar 3.2	Potret fase untuk $R_0 > 1$	29
Gambar 3.3	Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha = \beta$	31
Gambar 3.4	Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha > \beta$	32

[illegible][illegible]

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	<i>Second additive compound matrix untuk $n = 2$</i>	9
Tabel 2.2	<i>Second additive compound matrix untuk $n = 3$</i>	10

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Penurunan persamaan (3.5)	37
------------	-------------------------------------	----

[illegible][illegible]

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut *World Health Organization* (WHO), merokok merupakan salah satu penyebab utama kematian. Data WHO tahun 2012 menyebutkan bahwa lebih dari 5 juta orang di seluruh dunia meninggal akibat merokok per tahun dan diproyeksikan akan meningkat hingga 10 juta orang pada tahun 2020. Kematian akibat merokok disebabkan oleh kandungan berbahaya pada rokok maupun asap rokok yang masuk ke tubuh manusia. Kandungan berbahaya pada rokok dapat pula memicu kanker dan berbagai penyakit seperti penyempitan pembuluh darah, sakit jantung, paru-paru, dan *bronchitis*.

Data *Global school-based Student Health Survey* (GSHS) WHO tahun 2015 menunjukkan bahwa presentase perokok usia remaja di Indonesia mencapai 19,20% yang meliputi laki-laki dan perempuan. Seseorang dapat menjadi perokok karena dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain bergaul dengan perokok atau memiliki orang tua maupun saudara yang merokok. Seorang perokok yang sudah berhenti merokok dapat kembali menjadi perokok. Kasus ini disebut relapse atau kambuh. Salah satu penyebab kambuh antara lain pengaruh tekanan teman sebaya (*peer pressure*). Pengaruh tekanan teman sebaya secara langsung dapat berupa bujukan atau paksaan, dan secara tidak langsung dapat berupa tekanan pada diri sendiri agar seseorang merasa dianggap dalam suatu kelompok pertemanan.

Penyebaran perilaku merokok dapat dijelaskan dengan model matematika penyebaran penyakit menular. Pada tahun 1997, Castillo-Garsow dkk. mengemukakan model *PSQ* dengan tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok (P), subpopulasi perokok (S), dan subpopulasi perokok yang berhenti merokok (Q). Model matematika *PSQ* kemudian dikembangkan oleh Sharomi dan Gumel pada tahun 2008 dengan

membagi subpopulasi quitters menjadi dua, yaitu subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara (Q_t) dan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen (Q_p). Pada tahun 2014, Alkhudhari, dkk. menyelidiki pengaruh tekanan teman sebaya pada subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara, sebagai salah satu penyebab individu pada subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara kembali menjadi perokok.

Dalam skripsi ini dikaji kembali model yang dikembangkan oleh Alkhudhari, dkk. (2014). Analisis yang dilakukan terhadap model meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Pada langkah terakhir dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis yang diperoleh.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model penyebaran perilaku merokok?
2. Bagaimana titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana kestabilan lokal titik kesetimbangan model?
4. Bagaimana kesesuaian hasil simulasi numerik model dengan hasil analisis yang diperoleh?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penulisan skripsi ini adalah.

1. menjelaskan konstruksi model penyebaran perilaku merokok,
2. menentukan titik kesetimbangan model,
3. mengetahui kestabilan lokal titik kesetimbangan model, dan
4. memverifikasi kesesuaian hasil simulasi numerik model dengan hasil analisis yang diperoleh.

BAB II DASAR TEORI

Pada bab ini dijelaskan teori-teori yang digunakan untuk membantu pengerjaan dan memahami permasalahan pada skripsi, yaitu sistem dinamik, sistem otonomus linear dan nonlinear, angka reproduksi dasar, *second additive compound matrix*, serta model acuan.

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa mendatang jika diketahui kondisinya di masa sekarang atau di masa lalu.

(Nagle, dkk., 2012)

Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

(Alligood, dkk., 2000)

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial orde satu berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

dengan $f(\vec{x})$ fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t .

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Definisi 2.1.1 (Titik kesetimbangan sistem otonomus).

Titik $\vec{x}^*$ disebut titik kritis sistem otonomus (2.3) jika $f(\vec{x}^*) = 0$. Titik kritis $\vec{x}^*$ merupakan solusi sistem (2.3) yang bernilai konstan, karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhi keadaan setimbang disebut titik kesetimbangan, sehingga titik kritis disebut juga kesetimbangan.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Definisi 2.1.2 (Kestabilan titik kesetimbangan).

Pada sistem otonomus (2.3), titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ dikatakan

1. stabil, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.3) pada saat $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

2. stabil asimtotik, jika $\vec{x}^*$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ untuk $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

maka berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*, \forall t \geq 0,$$

3. tidak stabil, apabila tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.1.1 Sistem otonomus linear

Perhatikan sistem otonomus linear dengan n persamaan berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Sistem persamaan (2.4) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.5)$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.4) adalah $\vec{x}^* = \vec{0}$.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Tipe kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.4) bergantung pada nilai eigen matriks A seperti disajikan pada Teorema 2.1.1.

Teorema 2.1.1 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear).

Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear bergantung pada nilai eigen matriks A . Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks A . Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem (2.4) bersifat,

1. stabil asimtotik, jika seluruh nilai eigen matriks A memiliki bagian real negatif,

2. tidak stabil, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif,
3. stabil, tetapi tidak stabil asimtotik, jika semua nilai eigen adalah imajiner untuk sistem (2.4) dua dimensi, dan
4. stabil, tetapi tidak stabil asimtotik, jika salah satu nilai eigen bernilai nol dan lainnya negatif untuk untuk sistem (2.4) dua dimensi.

(Robinson, 2004)

2.1.2 Sistem otonomus nonlinear

Misal sistem (2.3) adalah sistem otonomus nonlinear dengan n persamaan dan fungsi-fungsi f merupakan fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $\vec{x}^*$. Deret Taylor fungsi f_i di sekitar $\vec{x}^*$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah $f(\vec{x})$ di sekitar titik kesetimbangan $\vec{x}^*$, sehingga dapat dinyatakan sebagai

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), \quad (2.6)$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ adalah suku sisa hampiran orde satu, yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{|\vec{\eta}(\vec{x})|}{\|\vec{w}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T = \vec{x} - \vec{x}^*$.

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2.6) dan mengingat

$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ diperoleh

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Oleh karena $f_i(\vec{x}^*) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka sistem persamaan (2.6) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta} \quad (2.7)$$

dengan

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

disebut matriks Jacobi. Nilai $\vec{\eta}$ sangat kecil untuk $\vec{x}$ yang berada dekat dengan $\vec{x}^*$, sehingga $\vec{\eta} \rightarrow 0$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem (2.7) dapat dihamperi oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.8)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, maka $\vec{w}^* = \vec{0}$ sehingga titik kesetimbangan sistem (2.8) adalah $\vec{w}^* = \vec{0}$. Proses pendekatan sistem otonomus nonlinear oleh sistem linear disebut dengan proses linearisasi.

Teorema 2.1.2 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous nonlinear*).

Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ sistem otonomus nonlinear bersifat

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi stabil asimtotik
2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi tidak stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.1.3 *Second additive compound matrix*

Definisi 2.1.3 (*k-th additive compound matrix*).

Diberikan $A = (a_{i,j})$ matriks real berukuran $n \times n$. Matriks $A^{[k]} = (b_{i,j})$ atau *k-th additive compound matrix* didefinisikan sebagai berikut, untuk setiap $i = 1, \dots, \binom{n}{k}$, diberikan $(i) = (i_1, \dots, i_k)$ bilangan ke- i dalam urutan leksikografis pasangan bilangan $(i_1, \dots, i_k)$, sedemikian sehingga $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Oleh karena matriks A berukuran $n \times n$, untuk setiap $j = 1, \dots, \binom{n}{k}$, diberikan $(j) = (j_1, \dots, j_k)$ sedemikian sehingga $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Kemudian $b_{i,j} =$

1. $a_{i_1, i_1} + \dots + a_{i_k, i_k}$, jika $(i) = (j)$,
2. $(-1)^{r+s} a_{i_r, j_s}$ jika satu entri i_r pada (i) tidak terdapat di (j) dan j_s tidak terdapat di (i) ,
3. 0, jika tidak terdapat entri i_r pada (i) di (j) dan sebaliknya.

Untuk $k = 1$ dan $k = n$, berlaku $A^{[1]} = A$ dan $A^{[n]} = tr(A)$.

(Muldowney, 1990)

Sebagai contoh, jika $k = 2$, *second additive compound matrix* $A = (a_{i,j})$ untuk

1. $n = 2$.

Untuk setiap $i = 1, \dots, \binom{2}{2} = 1$ dan $j = 1, \dots, \binom{2}{2} = 1$, diberikan $(i) = (i_1, i_2)$ dan $(j) = (j_1, j_2)$, dengan $1 \leq i_1 < i_2 \leq 2$ dan $1 \leq j_1 < j_2 \leq 2$, sehingga diperoleh $(i) = (1, 2)$ dan $(j) = (1, 2)$. Kemudian, pembentukan entri $b_{i,j}$ dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: *Second additive compound matrix* untuk $n = 2$

$(i) \setminus (j)$	$(1, 2)$
$(1, 2)$	$a_{11} + a_{22}$

Oleh karena $(i) = (j)$, maka $b_{11} = a_{11} + a_{22}$. Dengan demikian, *second additive compound matrix* A untuk $n = 2$ adalah

$$A^{[2]} = a_{11} + a_{22}.$$

2. $n = 3$.

Untuk setiap $i = 1, \dots, \binom{3}{2} = 1, 2, 3$ dan $j = 1, \dots, \binom{3}{2} = 1, 2, 3$, diberikan $(i) = (i_1, i_2)$ dan $(j) = (j_1, j_2)$, dengan $1 \leq i_1 < i_2 \leq 3$ dan $1 \leq j_1 < j_2 \leq 3$, sehingga diperoleh $(i) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ dan $(j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$. Kemudian, pembentukan entri $b_{i,j}$ dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Sebagai contoh, untuk $(i) = (1, 2)$ dan $(j) = (2, 3)$, oleh karena i_1 pada (i) tidak terdapat di (j) dan j_2 pada (j) tidak terdapat di (i) , maka $b_{13} = (-1)^{1+2} a_{i_1, j_2} = -a_{1,3}$.

Berdasarkan Tabel 2.2, *second additive compound matrix* untuk

Tabel 2.2: *Second additive compound matrix* untuk $n = 3$

$(i) \setminus (j)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
$(1, 2)$	$a_{11} + a_{22}$	a_{23}	$-a_{13}$
$(1, 3)$	a_{32}	$a_{11} + a_{33}$	a_{12}
$(2, 3)$	$-a_{31}$	a_{21}	$a_{22} + a_{33}$

$n = 3$ adalah

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.1.3 (Kriteria kestabilan berdasarkan $tr(A)$, $det(A)$ dan $det(A^{[2]})$)

Misal A matriks *real* 3×3 . Jika $tr(A)$, $det(A)$ dan $det(A^{[2]})$, dengan $A^{[2]}$ adalah *second additive compound matrix* A , bernilai negatif, maka seluruh nilai eigen A memiliki bagian real negatif.

Bukti:

Misal A matriks 3×3 dan $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ adalah nilai eigen matriks A dengan $\Re(\lambda_1) \leq \Re(\lambda_2) \leq \Re(\lambda_3)$. Jika matriks A memiliki persamaan karakteristik

$$\lambda^3 - tr(A)\lambda^2 - c\lambda - det(A) = 0, \quad (2.9)$$

dengan $c = (a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33})$, maka persamaan (2.9) dapat dituliskan dalam bentuk $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$ dengan

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A)$,
2. $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -c$,
3. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = det(A)$.

Sifat-sifat tersebut juga berlaku untuk matriks $A^{[2]}$ dengan nilai eigen $\lambda_i + \lambda_j, 1 \leq i < j \leq 3$.

Jika $\det(A) < 0$ atau $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 < 0$, maka terdapat dua kondisi yang terpenuhi, yaitu

1. $\Re(\lambda_j) < 0$, untuk $j = 1, 2, 3$, atau
2. $\Re(\lambda_1) < 0 \leq \Re(\lambda_2) \leq \Re(\lambda_3)$.

Jika kondisi 1 berlaku, maka teorema terbukti. Berikut akan dibuktikan jika kondisi 2 berlaku. Misal kondisi 2 berlaku. Jika $\text{tr}(A) < 0$ atau $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$, maka $\Re(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$ dan $\Re(\lambda_1 + \lambda_3) < 0$. Matriks $A^{[2]}$, memiliki nilai eigen $(\lambda_1 + \lambda_2)$, $(\lambda_1 + \lambda_3)$, dan $(\lambda_2 + \lambda_3)$, sehingga

$$\text{sgn}(\det(A^{[2]})) = \text{sgn}(\Re(\lambda_1 + \lambda_2) \Re(\lambda_1 + \lambda_3) \Re(\lambda_2 + \lambda_3))$$

$$\text{sgn}(\det(A^{[2]})) = \text{sgn}(\Re(\lambda_2 + \lambda_3))$$

dengan sgn merupakan tanda untuk determinan *second additive compound matrix* dan bagian real penjumlahan nilai eigen. Jika $\det(A^{[2]}) < 0$, karena $\text{sgn}(\det(A^{[2]})) = \text{sgn}(\Re(\lambda_2 + \lambda_3))$, maka $\Re(\lambda_2 + \lambda_3) < 0$, hal ini kontradiksi dengan kondisi 2. Dengan demikian, terbukti $\Re(\lambda_j) < 0$ untuk $j = 1, 2, 3$. ■

(McCluskey dan van den Driessche, 2004)

Contoh: Diberikan sistem otonomus nonlinear

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - dI$$

$$\frac{dV}{dt} = (p + q)\Lambda + c\beta \frac{(N - V)}{N} I - (\mu + r_1)V + (r_1 - d - r_2)I,$$

$$\frac{dN}{dt} = q\Lambda + kV - (k + \mu + d + r_2)I$$

Akan dibuktikan titik kesetimbangan $E^* = (N^*, V^*, I^*)$ stabil asimtotik lokal. Matriks Jacobi di titik kesetimbangan E^* untuk sistem otonomus nonlinear di atas adalah

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -d \\ c\beta \frac{V^* I^*}{N^{*2}} & -(c\beta \frac{I^*}{N^*} + \mu + r_1) & G \\ 0 & k & -(k + \mu + d + r_2) \end{bmatrix}$$

dengan $G = c\beta + r_1 - d - r_2 - c\beta \frac{V}{N}$, dan *second additive compound matrix* $J(E^*)$ adalah

$$J(E^*)^{[2]} = \begin{bmatrix} -(c\beta \frac{I^*}{N^*} + 2\mu + r_1) & G & d \\ k & -(k + 2\mu + d + r_2) & 0 \\ 0 & c\beta \frac{V^* I^*}{N^{*2}} & -H \end{bmatrix}$$

dengan $H = c\beta \frac{I^*}{N^*} + k + d + r_1 + r_2 + 2\mu$. Kestabilan titik kesetimbangan E^* dapat ditentukan dengan melihat nilai $tr(A)$, $det(A)$ dan $det(A^{[2]})$.

1. Jelas bahwa $tr(J(E^*)) < 0$.

2. $det(J(E^*)) = -\mu c\beta \frac{I^*}{N^*} (k + \mu + d + r_2) - dk c\beta \frac{V^* I^*}{N^{*2}} - \mu(\mu + r_1) q \frac{\Lambda}{I^*} - \mu k(p + q) \frac{\Lambda}{I^*} < 0$.

3. $det(J(E^*)^{[2]}) = -H(c\beta \frac{I^*}{N^*} + \mu)(k + 2\mu + d + r_2) - H(\mu + r_1) \frac{\Lambda}{I^*} - Hk(p + q) \frac{\Lambda}{I^*} + dk c\beta \frac{V^* I^*}{N^{*2}} < 0$

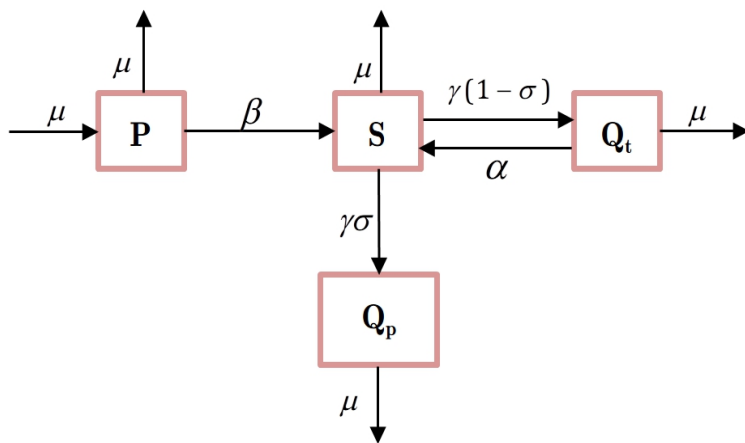
Oleh karena nilai $tr(A)$, $det(A)$ dan $det(A^{[2]})$ bernilai negatif, berdasarkan Teorema 2.1.3, seluruh nilai eigen matriks $(J(E^*))$ memiliki bagian real negatif. Dengan demikian, titik E^* stabil asimtotik lokal.

(McCluskey dan van den Driessche, 2004)

2.2 Model penyebaran perilaku merokok

Pada tahun 2008, Sharomi dan Gumel mengemukakan model penyebaran perilaku merokok dengan empat subpopulasi, yaitu subpopulasi individu yang belum pernah merokok selama hidupnya tetapi berpotensi menjadi perokok di masa yang akan datang (P), subpopulasi perokok (S), subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara (Q_t), dan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen (Q_p). Model penyebaran perilaku merokok disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 2.1.

Diagram kompartemen model penyebaran perilaku merokok dapat diterjemahkan ke dalam model matematika. Terdapat lima parameter



Gambar 2.1: Diagram kompartemen model penyebaran perilaku merokok oleh Sharomi dan Gumel (2008)

yang memengaruhi laju perubahan masing-masing subpopulasi. Parameter μ menyatakan laju kelahiran dan kematian alami. Parameter β menyatakan laju interaksi subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok (P) dan subpopulasi perokok (S), α menyatakan laju subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara kembali menjadi perokok atau kambuh, γ menginterpretasi laju berhenti merokok, dan σ menginterpretasi peluang berhenti merokok. Konstruksi model penyebaran perilaku merokok dapat dijelaskan sebagai berikut.

2.2.1 Laju perubahan subpopulasi yang berpotensi menjadi perokok (P)

Misalkan $P(t)$, $S(t)$, $Q_t(t)$, dan $Q_p(t)$ berturut-turut menyatakan proporsi subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok, subpopulasi perokok, subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara, dan perokok yang berhenti merokok secara permanen. Subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok dapat bertambah dengan adanya kelahiran dengan laju μ . Interaksi antara

individu yang berpotensi menjadi perokok dengan individu perokok memungkinkan terjadinya penyebaran perilaku merokok, sehingga subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok berkurang dengan laju β . Berkurangnya individu pada subpopulasi yang berpotensi menjadi perokok juga disebabkan oleh kematian alami yang dinyatakan dengan laju μ . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi yang berpotensi menjadi perokok dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dP}{dt} = \mu - \mu P - \beta PS. \quad (2.10)$$

2.2.2 Laju perubahan subpopulasi perokok (S)

Interaksi antara individu yang berpotensi menjadi perokok dengan individu perokok menyebabkan terjadinya penyebaran perilaku merokok, sehingga individu yang berpotensi menjadi perokok berubah menjadi perokok. Hal ini menyebabkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi perokok dengan laju β . Jumlah individu pada subpopulasi perokok juga dapat berubah karena adanya interaksi antara individu pada subpopulasi perokok dan individu pada subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara. Interaksi ini dapat menyebabkan subpopulasi perokok bertambah dengan laju α . Jumlah individu subpopulasi perokok dapat berkurang sebab individu pada subpopulasi ini berhenti menjadi perokok dengan laju sebesar γ . Kematian alami juga menyebabkan berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi ini dengan laju sebesar μ . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi perokok dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = \beta PS + \alpha Q_t - (\mu + \gamma)S. \quad (2.11)$$

2.2.3 Laju perubahan subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara (Q_t)

Jumlah individu subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara dapat bertambah karena adanya individu perokok yang berhenti merokok sementara dengan laju γ dan peluang $(1 - \sigma)$ atau dinyatakan sebagai $\gamma(1 - \sigma)$. Individu yang kambuh pada

subpopulasi ini menyebabkan jumlah individu pada subpopulasi ini berkurang dengan laju α . Selain itu, kematian alami juga memengaruhi berkurangnya subpopulasi ini dengan laju μ . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dQ_t}{dt} = \gamma(1 - \sigma)S - \alpha Q_t - \mu Q_t. \quad (2.12)$$

2.2.4 Laju perubahan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen (Q_p)

Jumlah individu pada subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen dapat bertambah akibat terjadinya perubahan perilaku individu pada subpopulasi perokok berhenti merokok secara permanen dengan laju γ dan peluang σ atau dinyatakan sebagai $\gamma\sigma$. Kematian alami menyebabkan jumlah individu pada subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara berkurang dengan laju μ . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen dinyatakan sebagai

$$\frac{dQ_p}{dt} = \gamma\sigma S - \mu Q_p. \quad (2.13)$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh sistem otonomus nonlinear model penyebaran perilaku merokok sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \mu - \mu P - \beta PS \\ \frac{dS}{dt} &= \beta PS + \alpha Q_t - (\mu + \gamma)S \\ \frac{dQ_t}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)S - \alpha Q_t - \mu Q_t \\ \frac{dQ_p}{dt} &= \gamma\sigma S - \mu Q_p, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dengan $P(t) + S(t) + Q_t(t) + Q_p(t) = 1$.

2.3 Angka Reproduksi Dasar

Pada model epidemi, angka reproduksi dasar (R_0) didefinisikan sebagai jumlah rata-rata individu yang terinfeksi disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa penularan penyakit dalam suatu populasi rentan. Dalam hal ini angka reproduksi dasar R_0 digunakan untuk mengetahui apakah suatu penyakit menyebar atau tidak dalam suatu populasi. Jika $R_0 < 1$, maka rata-rata individu terinfeksi baru yang dihasilkan oleh individu terinfeksi dalam satu periode infeksi adalah kurang dari satu, sehingga infeksi tidak akan menyebar dan perlahan menghilang. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka rata-rata individu terinfeksi baru yang dihasilkan oleh individu terinfeksi dalam satu periode infeksi adalah lebih dari satu, sehingga infeksi dapat menyebar (van den Driessche dan Watmough, 2002).

Angka reproduksi dasar (R_0) dapat dicari dengan suatu pendekatan umum yaitu matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*). Dalam mengkonstruksi matriks generasi selanjutnya melibatkan subpopulasi yang menyebabkan infeksi.

Diberikan $y \in \mathbb{R}^n$ menyatakan proporsi kelas noninfeksi ke- i pada saat t dan $x \in \mathbb{R}^m$ menyatakan proporsi kelas infeksi sebesar m pada saat t . Model kompartemen dengan kelas terinfeksi dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x'_i = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i, i = 1, 2, \dots, m,$$

dengan $\mathcal{F}_i$ merupakan infeksi baru kelas ke- i yang diperoleh dari individu rentan dan bernilai positif, dan $\mathcal{V}_i$ merupakan laju perpindahan individu dari kelas satu ke kelas lainnya. $\mathcal{V}_i$ bernilai positif jika menyatakan transfer keluar dari suatu kelas, dan bernilai negatif jika menyatakan transfer masuk ke suatu kelas. $\mathcal{F}_i$ merupakan komponen matriks $\mathcal{F}$ dengan $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m)^T$ dan $\mathcal{V}_i$ merupakan komponen matriks $\mathcal{V}$ dengan $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m)^T$.

Didefinisikan F dan V merupakan matriks berukuran $m \times m$ yang dinyatakan sebagai berikut

$$F(E_0) = \frac{\partial \mathcal{F}_i(E_0)}{\partial x_j}, V(E_0) = \frac{\partial \mathcal{V}_i(E_0)}{\partial x_j}$$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, m$, dan E_0 adalah titik kesetimbangan bebas

penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai

$$R = FV^{-1}$$

dan bilangan reproduksi dasar diperoleh dari

$$R_0 = \rho(R)$$

dengan $\rho(R)$ adalah *spectral radius* matriks R , yaitu modulus maksimal nilai eigen matriks R .

(Brauer dan Chavez, 2010)

Contoh:

Diberikan model epidemik SIR dengan S adalah kelas rentan penyakit, I adalah kelas terinfeksi, dan R adalah kelas yang telah sembuh dari penyakit. Dalam kasus ini, terdapat keadaan kambuh. Sistem persamaan model epidemik SIR tersebut adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - \beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI + \alpha R - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)I - \alpha R - \mu R.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Untuk mencari angka reproduksi dasar R_0 sistem 2.15, disusun matriks $\mathcal{F}_i$ dan $\mathcal{V}_i$. Kelas infeksi adalah I dan R, dengan kata lain $m = 2$, sehingga diperoleh $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\mu + \gamma)I - \alpha R \\ (\mu + \alpha)R - \gamma(1 - \sigma)I \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, diperoleh matriks F dan V dengan mencari turunan parsial entri $\mathcal{F}_i$ dan $\mathcal{V}_i$ yang dinyatakan sebagai berikut

$$F(E_0) = \begin{bmatrix} \beta S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V(E_0) = \begin{bmatrix} K_1 & -\alpha \\ -K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

dengan $K_1 = (\mu + \gamma)$, $K_2 = \gamma(1 - \sigma)$, $K_3 = (\mu + \alpha)$, dan E^0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit, $E^0 = (S_0, I_0, R_0)$. Kemudian, dilakukan pencarian inverse matriks V , yaitu

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{K_3}{K_1 K_3 - \alpha K_2} & \frac{\alpha}{K_1 K_3 - \alpha K_2} \\ \frac{K_2}{K_1 K_3 - \alpha K_2} & \frac{K_1}{K_1 K_3 - \alpha K_2} \end{bmatrix}.$$

Setelah itu, dilakukan perhitungan matriks generasi selanjutnya,

$$K = FV^{-1},$$

$$K = \begin{bmatrix} \beta S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K_3}{K_1 K_3 - \alpha K_2} & \frac{\alpha}{K_1 K_3 - \alpha K_2} \\ \frac{K_2}{K_1 K_3 - \alpha K_2} & \frac{K_1}{K_1 K_3 - \alpha K_2} \end{bmatrix},$$

maka dengan mudah diketahui bahwa

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta S_0 K_3}{K_1 K_3 - \alpha K_2} = \frac{\beta S_0 (\mu + \alpha)}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) + \alpha \gamma (1 - \sigma)}.$$

(Sharomi dan Gumel, 2008)

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dikaji kembali model penyebaran perilaku merokok yang merujuk artikel Alkhudari, dkk (2014), analisis dinamik model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar dengan menggunakan Matriks Generasi Selanjutnya, serta analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, dilakukan simulasi numerik dengan pendekatan Runge-Kutta orde empat untuk mendukung hasil analisis yang dilakukan

3.1 Konstruksi Model

Model penyebaran perilaku merokok memiliki empat subpopulasi, yaitu subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok (P), subpopulasi perokok (S), subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara (Q_t), dan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen (Q_p). Konstruksi model ini mirip dengan model (2.14). Perbedaannya terletak pada parameter laju α yang diubah menjadi αS . Dengan kata lain, pengaruh yang diberikan oleh seorang teman perokok menjadi penyebab utama seorang perokok yang berhenti merokok sementara kembali menjadi perokok. Sistem otonomus nonlinear model penyebaran perilaku merokok menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \mu - \mu P - \beta PS \\ \frac{dS}{dt} &= -(\mu + \gamma)S + \beta PS + \alpha Q_t \\ \frac{dQ_t}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)S - \alpha Q_t - \mu Q_t \\ \frac{dQ_p}{dt} &= \gamma\sigma S - \mu Q_p\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan $P(t) + S(t) + Q_t(t) + Q_p(t) = 1$.

Pada sistem (3.1), subpopulasi Q_p tidak memengaruhi subpopulasi lainnya, sehingga sistem (3.1) dapat disederhanakan

dengan memandang tiga persamaan pertama saja, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \mu - \mu P - \beta PS \\ \frac{dS}{dt} &= -(\mu + \gamma)S + \beta PS + \alpha SQ_t \\ \frac{dQ_t}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)S - \alpha Q_t - \mu Q_t\end{aligned}\quad (3.2)$$

yang terdefinisi pada $\Gamma = \{P + S + Q_t \leq 1, P \geq 0, S, Q_t \geq 0\}$.

3.2 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan menggunakan metode Matriks Generasi Selanjutnya. Diberikan $X = (S, Q_t)$, sistem (3.2) dapat dituliskan sebagai

$$X' = \mathcal{F}(X) - \mathcal{V}(X)$$

dengan

$$\mathcal{F}(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta PS \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathcal{V}(X) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu + \gamma)S - \alpha SQ_t \\ \mu Q_t + \alpha SQ_t - \gamma(1 - \sigma)S \end{bmatrix}.$$

Dengan menghitung matriks Jacobi $\mathcal{F}(X)$ dan $\mathcal{V}(X)$ pada E_0 , diperoleh matriks F dan V .

$$D\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mu + \gamma & 0 \\ -\gamma(1 - \sigma) & 0 \end{bmatrix},$$

$$D\mathcal{F}(E_0) = F = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D\mathcal{V}(E_0) = V = \begin{bmatrix} \mu + \gamma & 0 \\ -\gamma(1 - \sigma) & \mu \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan definisi matriks generasi selanjutnya, yaitu $R = FV^{-1}$, dengan

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu + \gamma} & 0 \\ \frac{\gamma(1 - \sigma)}{\mu(\mu + \gamma)} & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix},$$

diperoleh

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\mu+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks R adalah $\lambda_1 = \frac{\beta}{(\mu+\gamma)}$ dan $\lambda_2 = 0$. Angka reproduksi dasar merupakan *spectral radius* R , yaitu

$$R_0 = \frac{\beta}{(\mu+\gamma)}.$$

3.3 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (3.2) diperoleh ketika $\frac{dP}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{dQ_t}{dt} = 0$, yaitu

$$\mu - \mu P - \beta P S = 0, \quad (3.3a)$$

$$-(\mu + \gamma)S + \beta P S + \alpha S Q_t = 0, \quad (3.3b)$$

$$\gamma(1 - \sigma)S - \alpha S Q_t - \mu Q_t = 0, \quad (3.3c)$$

Berdasarkan persamaan (3.3a), (3.3b), dan (3.3c) diperoleh

$$S(-(\mu + \gamma) + \beta P + \alpha Q_t) = 0, \quad (3.4a)$$

$$P = \frac{\mu}{\mu + \beta S}, \quad (3.4b)$$

$$Q_t = \frac{\gamma(1 - \sigma)S}{\mu + \alpha S}, \quad (3.4c)$$

Berdasarkan persamaan (3.4a) diperoleh dua kemungkinan, yaitu $S = 0$ atau $-(\mu + \gamma) + \beta P + \alpha Q_t = 0$.

3.3.1 Titik kesetimbangan bebas perilaku merokok (E_0)

Pada saat $S = 0$, persamaan (3.4b) dan (3.4c) menjadi

$$P = 1 \text{ dan } Q_t = 0,$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan yang pertama, yaitu

$$E_0 = (P_0, S_0, Q_{t_0}) = (1, 0, 0).$$

Titik kesetimbangan E_0 merupakan titik kesetimbangan bebas perilaku merokok (*smoking-free equilibrium*) karena $S = Q_t = 0$ yang berarti tidak terdapat perilaku merokok pada populasi.

3.3.2 Titik kesetimbangan dengan perilaku merokok (E^*)

Pada saat $-(\mu + \gamma) + \beta P + \alpha Q_t = 0$, atau

$$-(\mu + \gamma) + \beta \left(\frac{\mu}{\mu + \beta S} \right) + \alpha \left(\frac{\gamma(1 - \sigma)S}{\mu + \alpha S} \right) = 0,$$

ekuivalen dengan

$$S^2 + A_1 S + A_2 = 0 \quad (3.5)$$

dimana

$$A_1 = \frac{\mu(\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma)}{\beta\alpha(\mu + \gamma\sigma)} \quad \text{dan} \quad A_2 = \frac{\mu^2(\mu + \gamma - \beta)}{\beta\alpha(\mu + \gamma\sigma)}.$$

Penurunan persamaan (3.5) dapat dilihat pada Lampiran 1. Solusi persamaan (3.5) adalah

$$S_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right) \quad (3.6)$$

dengan diskriminan $D = A_1^2 - 4A_2$. Jika persamaan (3.5) dikaitkan dengan nilai R_0 , A_2 dapat dituliskan sebagai

$$A_2 = \frac{\mu^2(\mu + \gamma)(1 - R_0)}{\beta\alpha(\mu + \gamma\sigma)}.$$

Jika $R_0 < 1$, maka $A_2 > 0$ dan berlaku

$$\frac{\beta}{\mu + \gamma} < 1$$

$$\mu + \gamma > \beta$$

$$\mu - \beta + \gamma > 0$$

$$\alpha(\mu - \beta + \gamma) > 0$$

$$\alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma > 0$$

$$\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma > 0$$

$$\mu(\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma) > 0$$

$$\mu(\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma) > 0$$

$$\frac{\mu(\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma)}{\beta\alpha(\mu + \gamma\sigma)} > 0$$

atau $A_1 > 0$.

1. Untuk $D < 0$, maka $S_{1,2} = \frac{-A_1 \pm i\sqrt{|D|}}{2} \in \mathbb{C}$.

2. Untuk $D = 0$, maka $S_{1,2} = \frac{-A_1}{2} < 0$.

3. Untuk $D > 0$, maka $S_1 + S_2 = -A_1$ dan $S_1 S_2 = A_2$. Oleh karena $A_2 > 0$ dan $A_1 > 0$, maka $S_1 + S_2 < 0$ dan $S_1 S_2 > 0$.

Dengan demikian, jelas bahwa kedua solusi bernilai negatif.

Berdasarkan uraian di atas, persamaan (3.5) tidak memiliki solusi positif untuk $R_0 < 1$.

Jika $R_0 = 1$, maka $A_2 = 0$ dan berlaku

$$\frac{\beta}{\mu + \gamma} = 1$$

$$\alpha(\mu + \gamma) = \alpha\beta$$

$$\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu + \gamma) > \alpha\beta$$

$$\mu\beta + \gamma\beta + \alpha\mu - \alpha\beta + \alpha\gamma > 0$$

$$\mu(\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma) > 0$$

$$\frac{\mu(\mu\beta + \gamma\beta + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma)}{\beta\alpha(\mu + \gamma\sigma)} > 0$$

atau $A_1 > 0$ Karena $A_2 = 0$ dan $A_1 > 0$, maka $S_1 + S_2 = -A_1 = 0$ dan $S_1 S_2 = A_2 < 0$. Dengan demikian, jelas bahwa persamaan (3.5) memiliki satu solusi bernilai nol dan satu solusi bernilai negatif, sehingga persamaan (3.5) tidak memiliki solusi positif untuk $R_0 = 1$.

Jika $R_0 > 1$, maka $A_2 < 0$, sehingga $\sqrt{D} = \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \in \mathbb{R}$ dan berlaku $\sqrt{A_1^2 - 4A_2} > |A_1|$ yang menyebabkan

$$S_1 = \frac{1}{2} \left(-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right) > 0$$

dan

$$S_2 = \frac{1}{2} \left(-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right) < 0.$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh satu solusi bernilai positif.

Dengan demikian, persamaan (3.5) memiliki satu solusi positif untuk $R_0 > 1$, yaitu

$$S^* = \frac{1}{2} \left(-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right) \quad (3.7)$$

sehingga persamaan (3.4b) dan (3.4c) menjadi

$$P^* = \frac{\mu}{\mu + \beta S^*}, \quad (3.8)$$

dan

$$Q_t^* = \frac{\gamma(1 - \sigma)S^*}{\mu + \alpha S^*}. \quad (3.9)$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, diperoleh titik kesetimbangan yang kedua, yaitu titik kesetimbangan dengan perilaku merokok (*smoking-present equilibrium*)

$$E^* = (P^*, S^*, Q_t^*)$$

dengan $R_0 > 1$.

3.4 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Sistem (3.2) merupakan sistem otonomus nonlinear, sehingga sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model bergantung pada hasil linearisasi sistem. Berdasarkan langkah linearisasi pada subbab 2.1.2, diperoleh matriks Jacobi untuk sistem (3.2), yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S & -\beta P & 0 \\ \beta S & -(\mu + \gamma) + \beta P + \alpha Q_t & \alpha S \\ 0 & -\alpha Q_t + \gamma(1 - \sigma) & -\mu - \alpha S \end{pmatrix}.$$

3.4.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas perilaku merokok

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan E_0 adalah sebagai berikut

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & -(\mu + \gamma) + \beta & 0 \\ 0 & \gamma(1 - \sigma) & -\mu \end{pmatrix},$$

Selanjutnya menentukan persamaan karakteristik matriks $J(E_0)$, yaitu

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta & 0 \\ 0 & -(\mu + \gamma) + \beta - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma(1 - \sigma) & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(-\mu - \lambda(-(\mu + \gamma) + \beta - \lambda)) = 0,$$

Diperoleh nilai eigen matriks $J(E_0)$, yaitu $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu < 0$ dan $\lambda_3 = -(\mu + \gamma) + \beta = -(\mu + \gamma)(1 - R_0)$ bernilai negatif jika $R_0 \leq 1$. Dengan demikian E_0 stabil asimtotik lokal untuk $R_0 \leq 1$. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka terdapat nilai eigen yang bernilai positif yang mengakibatkan titik kesetimbangan bebas perilaku merokok tidak stabil.

3.4.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan dengan perilaku merokok

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan E^* adalah

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S^* & -\beta P^* & 0 \\ \beta S^* & -(\mu + \gamma) + \beta P^* + \alpha Q_t^* & \alpha^* S^* \\ 0 & -\alpha Q_t^* + \gamma(1 - \sigma) & -\mu - \alpha S^* \end{pmatrix}.$$

Matriks $J(E^*)$ dapat disederhanakan dengan melakukan substitusi persamaan (3.3b) $\mu + \gamma = \beta P^* + \alpha Q_t^*$,

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S^* & -\beta P^* & 0 \\ \beta S^* & 0 & \alpha S^* \\ 0 & -\alpha Q_t^* + \gamma(1 - \sigma) & -\mu - \alpha S^* \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya *second additive compound matrix* $J(E^*)$, yaitu

$$J(E^*)^{[2]} = \begin{pmatrix} -\mu - \beta S^* & \alpha S^* & 0 \\ -\alpha Q_t^* + \gamma(1 - \sigma) & -2\mu - \beta S^* - \alpha S^* & -\beta P^* \\ 0 & \beta S^* & -\mu - \alpha S^* \end{pmatrix}.$$

Kestabilan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok dapat ditentukan dengan melihat nilai $tr(J(E^*))$, $det(J(E^*))$, dan $det(J(E^*)^{[2]})$.

$$1. \operatorname{tr}(J(E^*)) = -2\mu - \beta S^* - \alpha S^*.$$

Oleh karena semua parameter bernilai positif dan $S^* > 0$, maka $\operatorname{tr}(J(E^*)) < 0$.

$$2. \det(J(E^*)) = (-\mu - \beta S^*)(0 - \alpha S^*(-\alpha Q_t^* + \gamma(1 - \sigma)) + \beta P^*(\beta S^* - \mu - \alpha S^*)).$$

Dengan menggunakan $\frac{\mu Q_t^*}{S^*} = -\alpha Q_t^* + \gamma(1 - \sigma)$ dari persamaan (3.9), $\det(J(E^*))$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \det(J(E^*)) &= (-\mu - \beta S^*)(-\alpha \mu Q_t^* - \mu \beta^2 P^* S^* - \alpha \beta^2 P^* S^*, \\ &= -\alpha \mu^2 Q_t^* + \alpha \beta \mu Q_t^* S^* - \mu \beta^2 P^* S^* - \alpha \beta^2 P^* S^*, \\ &= \beta \alpha S^*(\mu Q_t^* - \beta P^* S^*) + \mu(\alpha \mu Q_t^* - \beta^2 P^* S^*), \\ &< \beta \alpha S^*(\mu Q_t^* - \beta P^* S^*) + \mu \beta(\mu Q_t^* - \beta P^* S^*), \end{aligned}$$

jika $\alpha < \beta$.

$$\text{Sehingga } \det(J(E^*)) = (\beta \alpha S^* + \mu \beta)(\mu Q_t^* - \beta P^* S^*).$$

Dengan menggunakan $\beta P^* S^* = -\mu P^* + \mu$ dari persamaan (3.8), $\det(J(E^*))$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\det(J(E^*)) = \mu(\beta \alpha S^* + \mu \beta)(Q_t^* + P^* - 1).$$

Oleh karena semua parameter bernilai positif, $\alpha < \beta$, $P^* + Q_t^* < 1$, dan $S^* > 0$, maka $\det(J(E^*)) < 0$.

$$3. \det(J(E^*)^{[2]}) = (-\mu - \beta S^*)(-2\mu - \beta S^* - \alpha S^*)(-\mu - \alpha S^*) + \beta^2 P^* S^* - \alpha S^*(-\alpha Q_t^* + \gamma(1 - \sigma)(-\mu - \alpha S^*) + 0).$$

Dengan menggunakan $\frac{\mu Q_t^*}{S^*} = -\alpha Q_t^* + \gamma(1 - \sigma)$ dari persamaan (3.9), dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\det(J(E^*)^{[2]}) &= -(\mu + \beta S^*)[(2\mu + \beta S^* + \alpha S^*)(\mu + \alpha S^*) \\
&\quad + \beta^2 P^* S^*] + \alpha \mu Q_t^* (\mu + \alpha S^*), \\
&= -(\mu + \beta S^*)[(2\mu + \beta S^*)(\mu + \alpha S^*) \\
&\quad + \mu(\alpha \mu Q_t^* - \beta^2 P^* S^*) + S^*(\alpha^2 \mu Q_t^* - \beta^3 P^* S^*)], \\
&< -(\mu + \beta S^*)[(2\mu + \beta S^*)(\mu + \alpha S^*)] + \mu(\beta \mu Q_t^* \\
&\quad - \beta^2 P^* S^*) + S^*(\beta^2 \mu Q_t^* - \beta^3 P^* S^*), \text{ jika } \alpha < \beta, \\
&= -(\mu + \beta S^*)[(2\mu + \beta S^*)(\mu + \alpha S^*)] + \mu(\beta \mu Q_t^* \\
&\quad - \beta^2 P^* S^*) + \beta S^*(\beta \mu Q_t^* - \beta^2 P^* S^*), \\
&= -(\mu + \beta S^*)[(2\mu + \beta S^*)(\mu + \alpha S^*)] \\
&\quad + \beta(\mu + \beta S^*)(\mu Q_t^* - \beta P^* S^*).
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan $\beta P^* S^* = -\mu P^* + \mu$ dari persamaan (3.8),

$\det(J(E^*)^{[2]})$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned}
\det(J(E^*)^{[2]}) &= -(\mu + \beta S^*)[(2\mu + \beta S^*)(\mu + \alpha S^*)] \\
&\quad + \mu\beta(\mu + \beta S^*)(Q_t^* + P^* - 1), \\
&< 0
\end{aligned}$$

Oleh karena semua parameter bernilai positif, $\alpha < \beta$, $P^* + Q_t^* < 1$, dan $S^* > 0$ jika $R_0 > 1$, maka $\det(J(E^*)^{[2]}) < 0$.

Berdasarkan perhitungan di atas, diperoleh $\text{tr}(J(E^*))$ bernilai negatif, $\det(J(E^*))$ dan $\det(J(E^*)^{[2]})$ bernilai negatif jika $\alpha < \beta$, sehingga, berdasarkan Teorema 2.1.3, seluruh nilai eigen matriks $J(E^*)$ bernilai negatif. Dengan demikian, titik E^* stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan $\alpha < \beta$.

3.5 Simulasi Numerik

Pada subbab ini disajikan solusi numerik model yang diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 untuk mensimulasikan hasil analisis yang diperoleh. Parameter yang digunakan berdasarkan pada artikel yang digunakan

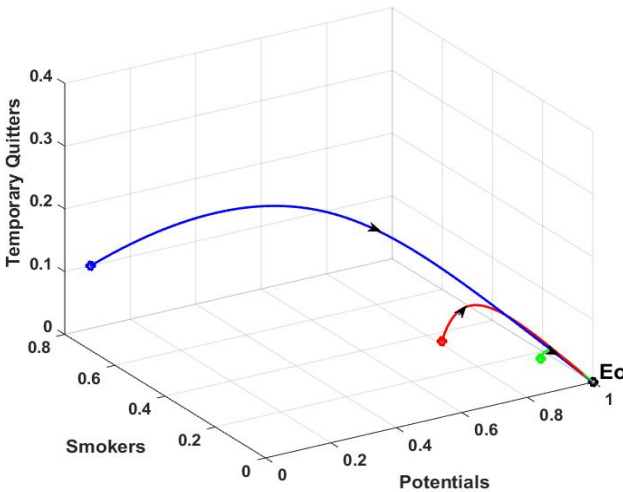
3.5.1 Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$

Simulasi numerik dengan $R_0 < 1$ menggunakan nilai parameter $\beta = 0.2, \mu = 0.04, \gamma = 0.3, \alpha = 0.25$, dan $\sigma = 0.4$, diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma} = 0.588 < 1.$$

Pada saat $R_0 < 1$, hanya satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik E_0 . Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan tiga nilai awal

$(P_1, S_1, Q_{t_1}) = (0.08, 0.80, 0.10)$, $(P_2, S_2, Q_{t_2}) = (0.70, 0.05, 0.17)$, $(P_3, S_3, Q_{t_3}) = (0.70, 0.21, 0.05)$. Hasil simulasi numerik disajikan dalam ruang tiga dimensi (P, S, Q_t) seperti pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Potret fase untuk $R_0 < 1$.

Gambar 3.1 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal yang diberikan, orbit-orbit solusi pada ruang PSQ_t menuju titik kesetimbangan $E_0 = (1, 0, 0)$. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika $R_0 < 1$, maka hanya ada satu titik kesetimbangan yaitu titik

kesetimbangan bebas perilaku merokok E_0 dan bersifat stabil asimtotik.

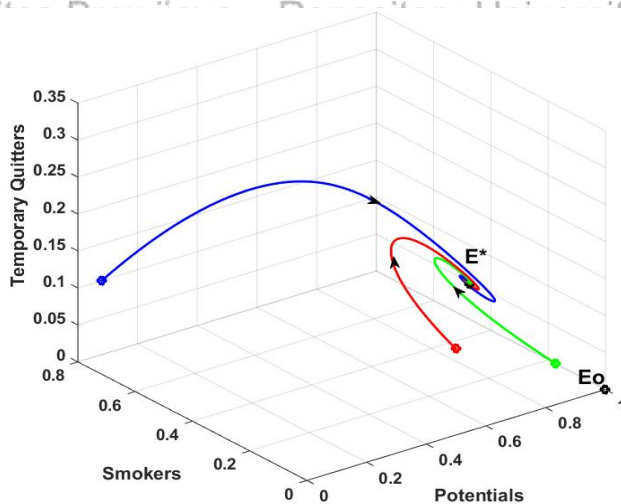
3.5.2 Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha < \beta$

Simulasi numerik dengan $R_0 > 1$ dan $\alpha < \beta$ menggunakan nilai parameter $\beta = 0.5$, $\mu = 0.04$, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 0.25$, dan $\sigma = 0.4$, diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma} = 1.470 > 1.$$

Titik kesetimbangan yang eksis pada saat $R_0 > 1$ adalah titik kesetimbangan E_0 dan E^* . Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan tiga nilai awal

$(P_1, S_1, Q_{t_1}) = (0.08, 0.80, 0.10)$, $(P_2, S_2, Q_{t_2}) = (0.88, 0.05, 0.04)$, $(P_3, S_3, Q_{t_3}) = (0.70, 0.21, 0.05)$. Hasil simulasi numerik disajikan dalam ruang tiga dimensi (P, S, Q_t) seperti pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2: Potret fase untuk $R_0 > 1$.

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal yang diberikan, orbit-orbit solusi pada ruang PSQ_t menuju titik

kesetimbangan $E^* = (0.597, 0.056, 0.181)$. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika $R_0 > 1$, maka terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas perilaku merokok $E_0 = (1, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok $E^* = (P^*, S^*, Q_t^*)$, tetapi hanya ada satu titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik, yaitu titik kesetimbangan E^* .

3.5.3 Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha = \beta$

Simulasi numerik dengan $R_0 > 1$ dan $\alpha = \beta$ menggunakan nilai parameter $\alpha = \beta = 0.5$, $\mu = 0.04$, $\gamma = 0.3$, dan $\sigma = 0.4$, diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma} = 1.470 > 1.$$

Titik kesetimbangan yang eksis pada saat $R_0 > 1$ adalah titik kesetimbangan E_0 dan E^* . Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan tiga nilai awal

$(P_1, S_1, Q_{t_1}) = (0.08, 0.80, 0.10)$, $(P_2, S_2, Q_{t_2}) = (0.88, 0.05, 0.04)$, $(P_3, S_3, Q_{t_3}) = (0.70, 0.21, 0.05)$. Hasil simulasi numerik disajikan dalam ruang tiga dimensi (P, S, Q_t) seperti pada Gambar 3.3.

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa dengan nilai awal yang diberikan dan parameter $\alpha = \beta$, kurva solusi P , S , dan Q_t tidak menuju titik kesetimbangan $E^* = (P^*, S^*, Q_t^*)$ dengan $P^* = 0.378$, $S^* = 0.131$, dan $Q_t^* = 0.223$, maupun titik kesetimbangan $E_0 = (1, 0, 0)$. Sehingga kedua titik kesetimbangan tidak stabil untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha = \beta$.

3.5.4 Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha > \beta$

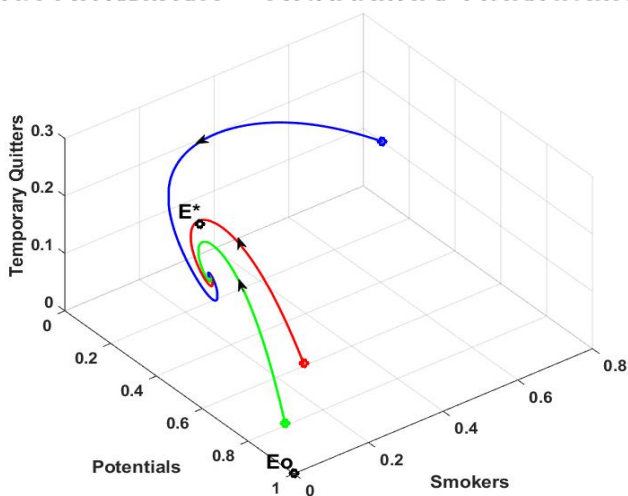
Simulasi numerik dengan $R_0 > 1$ dan $\alpha > \beta$ menggunakan nilai parameter $\beta = 0.5$, $\mu = 0.04$, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 0.6$, dan $\sigma = 0.4$, diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma} = 1.470 > 1.$$

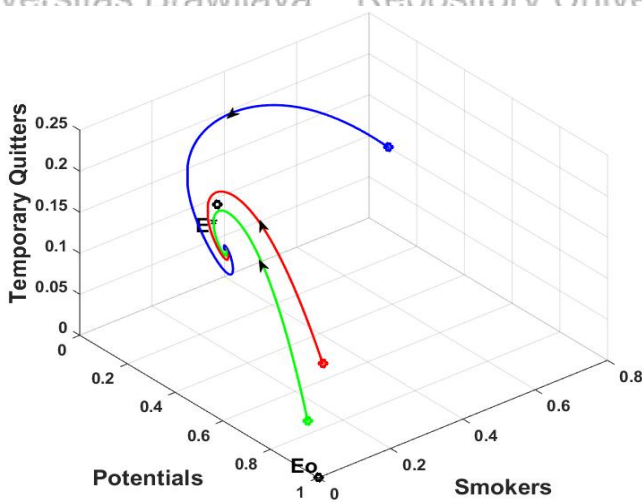
Titik kesetimbangan yang eksis pada saat $R_0 > 1$ adalah titik kesetimbangan E_0 dan E^* . Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan tiga nilai awal

$(P_1, S_1, Q_{t_1}) = (0.08, 0.80, 0.10)$, $(P_2, S_2, Q_{t_2}) = (0.88, 0.05, 0.04)$, $(P_3, S_3, Q_{t_3}) = (0.70, 0.21, 0.05)$. Hasil simulasi numerik disajikan dalam ruang tiga dimensi (P, S, Q_t) seperti pada Gambar 3.4.

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa dengan dua nilai awal yang diberikan dan parameter $\alpha > \beta$, kurva solusi P, S , dan Q_t tidak menuju titik kesetimbangan $E^* = (P^*, S^*, Q_t^*)$ dengan $P^* = 0.372$, $S^* = 0.134$, dan $Q_t^* = 0.200$, maupun titik kesetimbangan $E_0 = (1, 0, 0)$. Sehingga kedua titik kesetimbangan tidak stabil untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha > \beta$.



Gambar 3.3: Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha = \beta$.



Gambar 3.4: Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $\alpha > \beta$.

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pembahasan skripsi ini, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model penyebaran perilaku merokok berbentuk sistem otonomus nonlinear yang terdiri dari empat subpopulasi, yaitu subpopulasi individu yang berpotensi menjadi perokok (P), subpopulasi perokok (S), subpopulasi perokok yang berhenti merokok sementara (Q_t), dan subpopulasi perokok yang berhenti merokok secara permanen (Q_p).
2. Model penyebaran perilaku merokok memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas perilaku merokok (E_0) dan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok (E^*). Titik kesetimbangan E_0 selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan E^* eksis jika $R_0 > 1$.
3. Berdasarkan hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas perilaku merokok stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan $\alpha < \beta$.
4. Hasil simulasi numerik menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Jika $R_0 < 1$, hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas perilaku merokok (E_0) yang bersifat stabil asimtotik lokal, sedangkan jika $R_0 > 1$, terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas perilaku merokok (E_0) dan titik kesetimbangan dengan perilaku merokok (E^*). Titik kesetimbangan E_0 tidak stabil dan titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan $\alpha < \beta$.

4.2 Saran

Pada penelitian berikutnya disarankan untuk membahas kontrol optimal pada perilaku merokok.

DAFTAR PUSTAKA

- Alkhudari, Z., Alsheikh, S., dan Altuwairqi, S. 2014. Global dynamics of a mathematical model on smoking. *ISRN Applied Mathematics*, 2014, 1-7.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., dan Yorke, J. A. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical System*. New York: Springer-Verlag.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem* (10th ed.). USA: John Wiley and Sons, Inc.
- Brauer, F. dan Chavez, C. C. 2010. *Mathematical models in population biology and epidemiology* (2nd ed.). New York: Springer-Verlag.
- Castillo-Garsow, C., Jordan-Salivia, G., dan Herrera, A. R. 1997. *Mathematical models for the dynamics of tobacco use, recovery, and relapse*. New York: Cornell University.
- McCluskey, C. C. dan van den Driessche, P. 2004. Global analysis of two tuberculosis models. *Journal of Dynamics and Differential Equation*, 16, 139-166.
- Nagle, R. K., Staff, E. B., dan Snider, A. D. 2012. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* (8th ed.). Florida: Addison-Wesley.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. International Edition. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Sharomi, O. dan Gumel, A. B. 2008. Curtailing smoking dynamics: a mathematical modeling approach. *Applied Mathematics and Computation*, 195, 475-499.

van den Driessche, P. dan Watmough, J. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Bioscience*, 180, 29-48.

World Health Organization. 2012. *World Health Organization report on tobacco*. <http://www.who.int/en/news-room/fact-sheets/detail/tobacco> (diakses tanggal 26 Oktober 2018).

World Health Organization. 2015. *GSHS WHO 2015 Indonesia report*. https://www.who.int/ncds/surveillance/gshs/GSHS_2015_Indonesia_Report_Bahasa.pdf (diakses tanggal 1 Maret 2019).



LAMPIRAN

Lampiran 1. Penurunan persamaan (3.5)

$$\begin{aligned}
 &(\mu + \gamma) + \beta \left(\frac{\mu}{\mu + \beta S} \right) + \alpha \left(\frac{\gamma(1 - \sigma)S}{\mu + \alpha S} \right) = 0 \\
 &(-\mu - \gamma)(\mu + \beta S)(\mu + \alpha S) + \mu\beta(\mu + \alpha S) + \alpha(\gamma S - \gamma\sigma S)(\mu + \beta S) = 0 \\
 &-\alpha\beta\mu S^2 - \alpha\beta\gamma\sigma S^2 - \alpha\mu^2 S - \beta\mu^2 S - \alpha\mu\gamma S - \beta\mu\gamma S + \alpha\beta\mu S + \alpha\mu\gamma S - \alpha\mu\gamma\sigma S = 0 \\
 &(-\alpha\beta\mu - \alpha\beta\gamma\sigma)S^2 + (-\alpha\mu^2 - \beta\mu^2 - \alpha\mu\gamma - \beta\mu\gamma + \alpha\beta\mu + \alpha\mu\gamma - \alpha\mu\gamma\sigma)S + \mu^3 - \mu^2\gamma + \beta\mu^2 = 0 \\
 &-\alpha\beta(\mu + \gamma\sigma)S^2 + -\mu(\beta\mu + \beta\gamma + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma)S + -\mu^2(\mu - \gamma + \beta) = 0 \\
 &S^2 + \left(\frac{\mu(\beta\mu + \beta\gamma + \alpha(\mu - \beta) + \alpha\gamma\sigma)}{\beta\alpha(\mu + \gamma\sigma)} \right) S + \frac{\mu^2(\mu - \gamma + \beta)}{\beta\alpha(\mu + \gamma\sigma)} = 0
 \end{aligned}$$