

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI KOLERA DENGAN  
MIGRASI ANTAR DUA WILAYAH**

**SKRIPSI**

oleh  
**ARDHI SANJAYA**  
**145090400111001**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI KOLERA DENGAN  
MIGRASI ANTAR DUA WILAYAH**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh

**ARDHI SANJAYA**

**145090400111001**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI KOLERA DENGAN  
MIGRASI ANTAR DUA WILAYAH**

oleh  
**ARDHI SANJAYA**  
**145090400111001**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 18 Januari 2018  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

**Pembimbing**

**Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.**  
**NIP. 196607281993032001**

**Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.**  
**NIP. 197509082000031003**



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ardhi Sanjaya  
NIM : 145090400111001  
Jurusan : Matematika  
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Epidemik  
Kolera dengan Migrasi antar Dua Wilayah

dengan ini menyatakan bahwa:

1. skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 18 Januari 2018  
yang menyatakan,

Ardhi Sanjaya  
NIM. 145090400111001





# ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI KOLERA DENGAN MIGRASI ANTAR DUA WILAYAH

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis model epidemi kolera dengan adanya pengaruh migrasi antar dua wilayah. Pada model ini hanya individu rentan dan sembuh saja yang dapat bermigrasi ke daerah lain, karena penderita kolera yang parah akan mengalami diare dan muntah, sehingga dianggap tidak mungkin melakukan perjalanan. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar  $R_0$ , dan analisis kestabilan titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki empat titik kesetimbangan. Salah satunya adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada model terdapat dua angka reproduksi dasar, yaitu  $R_0^{(1)}$  dan  $R_0^{(2)}$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan tiga titik lainnya eksis dengan syarat tertentu. Kestabilan keempat titik kesetimbangan bergantung pada angka reproduksi dasar  $R_0^{(1)}$  dan  $R_0^{(2)}$ . Simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

**Kata kunci:** kolera, migrasi dua wilayah, titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan.



# DYNAMIC ANALYSIS OF MODEL EPIDEMI KOLERA WITH MIGRATION BETWEEN TWO REGIONS

## ABSTRACT

This final project discusses the construction and analysis of an epidemic model of cholera with the possibility of migration between two regions. In this model only susceptible and recovered individuals who can migrate, as the cholera sufferers will experience severe diarrhea and vomiting such that they are impossible to travel. Dynamical analysis involves determination the equilibrium point, existence condition of equilibrium point, finding the basic reproduction number  $R_0$ , and stability analysis of equilibrium point. Dynamical analysis shows that there are four equilibrium points. One of some is the disease-free equilibrium point. Moreover there are two basic reproduction numbers, namely  $R_0^{(1)}$  and  $R_0^{(2)}$ . Disease-free point always exists, while the other three point exist under some certain conditions. The stability of all four equilibrium points depends on the basic reproduction rate  $R_0^{(1)}$  and  $R_0^{(2)}$ . The result of numerical simulation supports the result of dynamical analysis.

**Keywords:** cholera, two-region migration, equilibrium point, basic reproduction rate, stability analysis.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Model Epidemologi Kolera dengan Migrasi antar Dua Wilayah* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi sekaligus dosen penasihat akademik atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Indah Yanti, S.Si., M.Si. dan Drs. Marsudi, MS selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
4. Ayah (Taryanto), Ibu (Sri Wahyuni), adik (Andi Faradian dan Nico Ari Permana) dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Dikita Astrianti, Nanda Riesta Pratama, Purwaningtias Aprianti, Dinda Ayu Retno Nuraini, Avin Maulana dan Mega Rachmawati atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini.
6. Keluarga Besar Matematika 2014 dan rekan organisasi intra kampus (SBC MIPA, LISMATIKA, HIMAMASTA) atas kebersamaan selama menikmati proses perkuliahan.

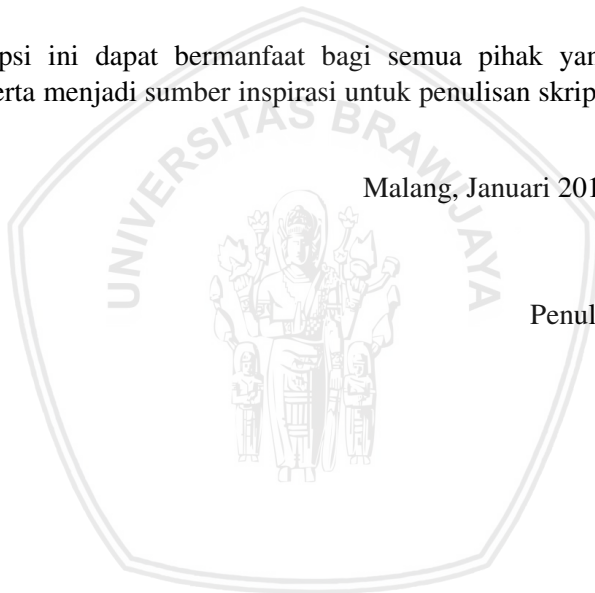
- repository.ub.ac.id
7. Keluarga Kost Zero Squad dan Ikatan Mahasiswa Karanganyar Brawijaya atas dukungan serta kebersamaan selama penulis tinggal di Malang.
  8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email [ardhisanjaya453@gmail.com](mailto:ardhisanjaya453@gmail.com), untuk perbaikan dimasa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, Januari 2018

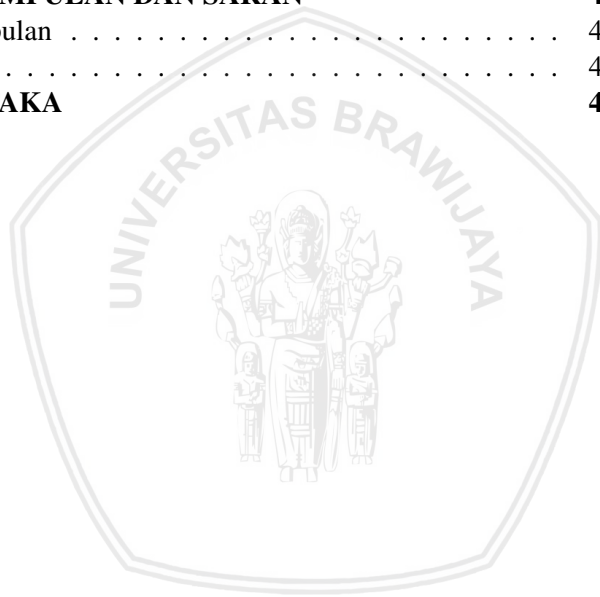
Penulis



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI</b>	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ix</b>
<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	<b>xix</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	3
<b>BAB II DASAR TEORI</b>	<b>5</b>
2.1 Sistem Dinamik . . . . .	5
2.1.1 Sistem <i>Autonomous</i> . . . . .	5
2.1.2 Sistem <i>Autonomous</i> Linear . . . . .	7
2.1.3 Kriteria Routh Hurwitz . . . . .	8
2.1.4 Sistem <i>Autonomous</i> Nonlinear . . . . .	9
2.1.5 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov . . . . .	11
2.2 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri . . . . .	12
2.3 Angka Reproduksi Dasar . . . . .	14
2.4 Matriks Partisi . . . . .	15
2.4.1 Definisi Matriks Partisi . . . . .	15
2.4.2 Operasi Matriks Partisi . . . . .	15
2.4.3 Determinan Matriks Partisi . . . . .	16
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	<b>19</b>
3.1 Konstruksi Model . . . . .	19
3.1.1 Laju perubahan subpopulasi individu rentan . . . . .	20
3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi . . . . .	20
3.1.3 Laju perubahan subpopulasi sembuh . . . . .	21
3.1.4 Laju perubahan konsentrasi bakteri . . . . .	22
3.2 Titik Keseimbangan Model . . . . .	23
3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan . . . . .	30

3.3.1	Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ) . . . . .	31
3.3.2	Kestabilan lokal titik kesetimbangan ( $E^*$ ) . . . . .	33
3.3.3	Kestabilan lokal titik kesetimbangan ( $E^{**}$ ) . . . . .	35
3.4	Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan ( $\bar{E}$ ) . . . . .	38
3.5	Simulasi Numerik dan Interpretasi Hasil Analisis . . . . .	41
3.5.1	Simulasi untuk $R_0^{(1)} < 1$ dan $R_0^{(2)} < 1$ . . . . .	42
3.5.2	Simulasi untuk $R_0^{(1)} > 1$ dan $R_0^{(2)} < 1$ . . . . .	43
3.5.3	Simulasi untuk $R_0^{(1)} < 1$ dan $R_0^{(2)} > 1$ . . . . .	44
3.5.4	Simulasi untuk $R_0^{(1)} > 1$ dan $R_0^{(2)} > 1$ . . . . .	45
<b>BAB IV</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>47</b>
4.1	Kesimpulan . . . . .	47
4.2	Saran . . . . .	47
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>		<b>49</b>





## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram kompartemen model epidemi kolera dengan migrasi antar dua wilayah . . . . .	19
Gambar 3.2	Potret fase untuk $R_0^{(1)} < 1$ dan $R_0^{(2)} < 1$ . . . . .	43
Gambar 3.3	Potret fase untuk $R_0^{(1)} > 1$ dan $R_0^{(2)} < 1$ . . . . .	44
Gambar 3.4	Potret fase untuk $R_0^{(1)} < 1$ dan $R_0^{(2)} > 1$ . . . . .	45
Gambar 3.5	Potret fase untuk $R_0^{(1)} > 1$ dan $R_0^{(2)} > 1$ . . . . .	46





## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan kestabilan . . . . .	41
Tabel 3.2	Nilai parameter . . . . .	42





## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Pembuktian Teorema 3.1 . . . . .	51
Lampiran 2	Matriks Jacobi $E^0$ . . . . .	52
Lampiran 3	Matriks Jacobi $E^*$ . . . . .	53
Lampiran 4	Pembuktian kriteria Routh Hurwitz titik kesetimbangan $E^*$ . . . . .	54
Lampiran 5	Matriks Jacobi $E^{**}$ . . . . .	56
Lampiran 6	Pembuktian kriteria Routh Hurwitz titik kesetimbangan $E^{**}$ . . . . .	57
Lampiran 7	Uraian fungsi Lyapunov titik kesetimbangan $\bar{E}$ . . . . .	59





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Model epidemi merupakan hasil penelitian matematikawan yang digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit menular seperti HIV/AIDS, demam berdarah, kolera, infeksi rotavirus, dan lain-lain. Model matematika penyebaran penyakit pertama diusulkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Dalam model tersebut populasi dibagi menjadi tiga kelas, yaitu *susceptible* (S), *infected* (I), dan *recovered* (R). Selanjutnya, model SIR ini dikembangkan untuk memodelkan berbagai macam penyakit.

Salah satu penyakit yang penyebarannya dimodelkan secara matematika adalah kolera. Kolera merupakan penyakit infeksi saluran usus akut yang menimbulkan ancaman serius bagi penduduk, khususnya di negara berkembang dengan sanitasi yang buruk, rentan peperangan, dan kelaparan. Di Indonesia wabah kolera pernah terjadi pada tahun 1961 di Sulawesi Selatan dan Irian Jaya karena mayoritas penduduk kurang memperhatikan kebersihan lingkungannya. Beberapa negara di dunia juga melaporkan kasus kolera ke *World Health Organization* (WHO). Sebagai contoh pada tahun 2012 total kasus kolera mencapai 245.393 kasus, termasuk 3.034 kasus kematian karena penyakit tersebut. Data tersebut melibatkan 48 negara di belahan dunia, yaitu 27 di Afrika, 12 di Asia, 6 di Amerika, dan 3 di Eropa dan Osenia. Penyakit kolera disebabkan oleh bakteri *Vibrio Cholerae* yang biasanya masuk ke tubuh manusia melalui makanan atau minuman yang terkontaminasi. Gejala yang dialami penderita adalah diare disertai perut kram, mual, muntah, dan dehidrasi. Jika tidak segera dilakukan pengobatan, penderita akan mengalami dehidrasi terus menerus dan dalam kasus yang parah dapat terjadi kematian. Pemberian air biasa tidak akan banyak membantu dalam penyembuhan sehingga penderita kolera membutuhkan infus cairan gula (*Dextrose*) dan garam (*Normal Saline*) atau bentuk cairan infus yang dicampur keduanya (*Dextrose Saline*).

Penelitian tentang penyakit kolera telah banyak dilakukan. Pada tahun 2001, Codeco membahas model epidemi kolera SIB dengan

faktor lingkungan yang berpengaruh pada kehidupan bakteri di waduk. Jin Wang dan Shu Liao (2012) membahas model epidemi kolera SIBR yang menggabungkan model umum penyebaran penyakit SIR dan konsentrasi bakteri untuk menganalisis penyebaran kolera. Eisenberg, dkk., (2013) melakukan penelitian tentang cara mengurangi penyebaran kolera berdasarkan aliran air yang terkontaminasi bakteri dan perpindahan manusia. Dalam penelitian tersebut aliran air yang terkontaminasi sulit untuk diperhitungkan jumlah bakterinya, sehingga model ini dinilai kurang realistis. Baru-baru ini dilakukan penelitian model epidemi kolera dengan perpindahan individu antar dua wilayah. Njagarah dan Nyabadza (2014) membahas model epidemi kolera di dua daerah yang berbeda dengan adanya migrasi individu rentan, terinfeksi, dan sembuh ke daerah lain. Asumsi model Njagarah dan Nyabadza (2014) dianggap kurang sesuai dengan realita. Penderita kolera biasanya tidak dapat bermigrasi karena diare dan muntah yang parah serta membutuhkan pengobatan yang intensif. Dengan melihat kekurangan tersebut, Berge, dkk. (2015) membahas model epidemi kolera di dua daerah dengan adanya migrasi individu rentan dan sembuh saja. Penelitian Berge, dkk. (2015) ini berbeda dari penelitian Njagarah dan Nyabadza (2014) karena individu terinfeksi tidak melakukan migrasi ke daerah lain.

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis dinamik model epidemi kolera SIBR dengan pengaruh migrasi individu antar dua wilayah berbeda yang merujuk pada artikel Berge, dkk. (2015). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan. Untuk mendukung hasil analisis dinamik, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model epidemi kolera dengan adanya migrasi?



2. Bagaimana titik kesetimbangan model dan kestabilannya?
3. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik model?

### 1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menjelaskan konstruksi model epidemi kolera dengan adanya migrasi.
2. Menentukan titik kesetimbangan model dan kestabilannya.
3. Melakukan simulasi numerik dan menginterpretasikan hasilnya, serta membandingkan hasil simulasi numerik dengan hasil analisis model.





## BAB II

### DASAR TEORI

Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik model epidemi kolera dengan migrasi antar dua wilayah. Oleh karena itu, teori mengenai sistem dinamik, sistem *autonomous*, kriteria Routh Hurwitz, fungsi Lyapunov, angka reproduksi dasar, dan matriks partisi diperlukan untuk membantu memahami persoalan yang dibahas dalam skripsi ini.

#### 2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisi saat ini atau masa lampau (Nagle, dkk., 2012). Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Alligood, dkk., 2000)

Sistem dinamik kontinu dapat dibedakan menjadi sistem *autonomous* dan sistem *nonautonomous*. Dalam skripsi ini model yang dibahas merupakan sistem *autonomous*.

##### 2.1.1 Sistem *Autonomous*

Sistem *autonomous* adalah suatu sistem persamaan diferensial biasa yang berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

dengan fungsi  $\vec{f}(\vec{x})$  adalah fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas  $t$ .

(Boyce dan DiPrima, 2012)

**Definisi 2.1.1 (Titik Keseimbangan Sistem *Autonomous*).**

Titik  $\vec{x}^*$  disebut titik kritis sistem *autonomous* (2.1) jika memenuhi  $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ . Titik kritis  $\vec{x}^*$  merupakan solusi sistem persamaan (2.1) yang bernilai konstan, karena  $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ . Keadaan yang menyebabkan  $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$  disebut keadaan setimbang dan titik kritis adalah titik yang memenuhinya, sehingga titik kritis disebut sebagai titik keseimbangan.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

**Definisi 2.1.2 (Kestabilan titik keseimbangan).**

Titik keseimbangan  $\vec{x}^*$  sistem *autonomous* (2.1) dikatakan

1. **stabil**, jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\vec{x}(t)$  sistem (2.1) yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

ada untuk setiap  $t > 0$  dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

2. **stabil asimtotik**, jika titik keseimbangan  $\vec{x}^*$  stabil dan terdapat  $\delta_0 > 0$  sedemikian sehingga jika suatu solusi  $\vec{x}(t)$  sistem (2.1) yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

maka berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. **tidak stabil**, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

## 2.1.2 Sistem *Autonomous* Linear

Secara umum sistem *autonomous* linear  $n$  persamaan dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\quad (2.2)$$

Sistem persamaan (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.3)$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Jika  $\det(A) \neq 0$ , maka  $\vec{x}^* = \vec{0}$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan (2.2). Penentuan tipe kestabilan titik kesetimbangan pada sistem *autonomous* linear bergantung pada nilai eigen matriks  $A$ .

### **Teorema 2.1.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous* Linear.**

Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  adalah nilai eigen matriks  $A$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = \vec{0}$  sistem (2.2) bersifat,

1. **stabil asimtotik**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif,
2. **stabil**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real tak positif,
3. **tidak stabil**, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif.

(Finizio dan Ladas, 1982)

### 2.1.3 Kriteria Routh Hurwitz

Kestabilan titik kesetimbangan sistem linear bergantung pada tanda akar persamaan karakteristik atau nilai eigen matriks koefisiennya. Jika suatu sistem linear berderajat  $n$  mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.4)$$

maka titik kesetimbangan pada sistem tersebut bersifat stabil asimtotik jika akar-akar persamaan karakteristiknya memiliki bagian real negatif. Dalam beberapa kasus tertentu, tidak mudah untuk menentukan akar-akar persamaan (2.4). Salah satu cara mengetahui kestabilan titik kesetimbangan tanpa harus menentukan akar-akar persamaan karakteristiknya dengan memanfaatkan kriteria Routh Hurwitz.

Akar-akar persamaan karakteristik (2.4) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = |a_1| > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Misalkan diberikan persamaan karakteristik berderajat empat

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (2.5)$$

Akar-akar persamaan (2.5) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

1.  $D_1 = |a_1| = a_1 > 0$ ,
2.  $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0$ ,

$$3. D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 - a_4 > 0,$$

$$4. D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 > 0,$$

sehingga  $a_4 > 0$ .

(Murray, 2002)

### 2.1.4 Sistem *Autonomous Nonlinear*

Perhatikan sistem *autonomous nonlinear* berdimensi  $n$  berikut.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}), i = 1, \dots, n, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

dengan fungsi  $f_i$  memiliki turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ . Sistem (2.6) dapat didekati oleh sistem *autonomous linear* dengan cara melakukan ekspansi Taylor fungsi  $f_i$  di sekitar titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ , sehingga fungsi  $f_i$  dapat dinyatakan sebagai

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), \quad (2.7)$$

dengan  $\eta_i(\vec{x})$  adalah suku sisa untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Suku sisa pada hampiran orde satu terhadap  $f_i$  memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{p}\|} = 0,$$

dengan  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , dimana  $p_i = x_i - x_i^*$  untuk  $i = 1, \dots, n$ . Selanjutnya dengan menerapkan  $\frac{dx_i}{dt} = \frac{dp_i}{dt}$  pada sistem (2.6) maka

diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Karena  $f_i(\vec{x}^*) = 0$  untuk  $i = 1, \dots, n$  maka persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

atau

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = J\vec{p} + \vec{\eta}, \tag{2.9}$$



dengan

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

disebut matriks Jacobi. Jika  $\vec{x}$  berada dekat dengan  $\vec{x}^*$ , maka  $\vec{\eta}$  bernilai kecil, sehingga  $\vec{\eta} \rightarrow 0$ . Oleh karena itu,  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.6) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = J\vec{p}. \quad (2.10)$$

Jika  $\vec{x} = \vec{x}^*$ , maka diperoleh  $\vec{p}^* = \vec{0}$  sehingga sistem linear (2.10) memiliki titik kesetimbangan  $\vec{p}^* = \vec{0}$  dan  $J$  berperan sebagai  $A$  pada sistem *autonomous* linear (2.3). Proses penghampiran sistem nonlinear oleh sistem linear dinamakan proses linearisasi. Selanjutnya kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear (2.6) akan bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan hasil linearisasi seperti dinyatakan pada Teorema 2.2

### **Teorema 2.1.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous* Nonlinear.**

Titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear bersifat,

1. **stabil asimtotik**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat stabil asimtotik,
2. **tidak stabil**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat tidak stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

### **2.1.5 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov**

Kestabilan titik kesetimbangan dibedakan menjadi kestabilan lokal dan global. Kestabilan lokal titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear (2.6) dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi seperti yang dijelaskan pada subbab 2.1.4. Sedangkan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan global titik kesetimbangan adalah dengan menggunakan fungsi Lyapunov.

### Definisi 2.1.5.1 Fungsi Lyapunov Lemah.

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Suatu fungsi  $L : R^n \rightarrow R$  disebut **fungsi Lyapunov lemah** untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W \subseteq R^n$  dari  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi,

1.  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$ ,
2.  $L'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$ .

(Alligood dkk, 2000).

### Definisi 2.1.5.2 Fungsi Lyapunov Kuat.

Fungsi  $L$  disebut **fungsi Lyapunov kuat** untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi,

1.  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$ ,
2.  $L'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*, \vec{x} \in W$ .

(Alligood dkk, 2000).

### Teorema 2.1.5 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov.

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat,

1. **stabil global**, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$ ,
2. **stabil asimtotik global**, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$ .

(Alligood dkk, 2000).

## 2.2 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri

Misalkan  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Rata-rata aritmatika dari  $c_1, c_2, \dots, c_n$  diberikan oleh

$$A = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j.$$

Misalkan  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+$ . Rata-rata geometri dari  $c_1, c_2, \dots, c_n$  diberikan oleh

$$G = ((c_1)(c_2)\dots(c_n))^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=1}^n c_j\right)^{\frac{1}{n}}.$$

### **Teorema 2.2 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri**

Misalkan  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+$ , dengan  $n \geq 2$  maka

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \geq ((c_1)(c_2)\dots(c_n))^{\frac{1}{n}}. \quad (2.11)$$

Pertidaksamaan (2.11) akan menjadi persamaan jika dan hanya jika  $c_1 = c_2 = \dots = c_n$ .

**Bukti.** Tanpa mengurangi keumuman, dimisalkan  $0 < c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ , maka  $c_1 \leq A \leq c_n$  dan diperoleh

$$\begin{aligned} A(c_1 + c_n - A) - c_1 c_n &= (c_1 - A)(A - c_n) \geq 0, \\ c_1 + c_n - A &\geq \frac{c_1 c_n}{A}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ketika  $n = 2$ , maka  $A = \frac{c_1 + c_2}{2}$ , sehingga diperoleh

$$c_1 + c_2 - A \geq \frac{c_1 c_2}{A},$$

$$2A - A \geq \frac{c_1 c_2}{A},$$

$$A^2 \geq c_1 c_2,$$

jadi sifat benar untuk  $n = 2$ .

Andaikan sifat benar untuk  $n = k$ , yaitu  $\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{k} \geq (c_1 c_2 \dots c_k)^{\frac{1}{k}}$ . Akan dibuktikan bahwa sifat benar untuk  $n = k + 1$ , yaitu

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1} + c_k + c_{k+1}}{k + 1} \geq (c_1 c_2 \dots c_{k-1} c_k c_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika  $A$  memenuhi

$$(k + 1)A = c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1} + c_k + c_{k+1}.$$

Jika nilai  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$  maka  $A = c_i = c$  sehingga  $A = G$ .

Jika terdapat beberapa nilai  $c_i \neq A$  maka harus ada satu bilangan yang lebih besar dari  $A$  dan satu bilangan yang kurang dari  $A$ . Tanpa

mengurangi keumuman sifat, misalkan  $c_k > A > c_{k+1}$ , sehingga  $c_k - A > 0$ ,  $A - c_{k+1} > 0$ , dan diperoleh

$$(c_k - A)(A - c_{k+1}) > 0. \tag{2.13}$$

Didefinisikan  $y \equiv c_k + c_{k+1} - A \geq c_k - A > 0$ , sehingga

$$(k + 1)A = c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1} + c_k + c_{k+1},$$

$$kA = c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1} + c_k + c_{k+1} - A,$$

$$kA = c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1} + y,$$

dan diperoleh

$$A^{k+1} = A^k A \geq c_1 c_2 \dots c_{k-1} y A,$$

$$A^{k+1} \geq c_1 c_2 \dots c_{k-1} y A.$$

Berdasarkan persamaan (2.13) diperoleh

$$(c_k + c_{k+1} - A)A - c_k c_{k+1} > 0,$$

$$yA > c_k c_{k+1},$$

sehingga diperoleh  $A^{k+1} \geq c_1 c_2 \dots c_{k-1} c_k c_{k+1}$  dan Teorema 2.2 terbukti.

(Mercer, 2014)

### 2.3 Angka Reproduksi Dasar

Salah satu hal yang paling penting dalam penyebaran penyakit adalah kemampuan penyakit untuk menyebar atau mewabah dalam suatu populasi. Angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) adalah angka yang khas dalam model epidemi yang menyatakan rata-rata banyaknya individu yang tertular oleh satu individu terinfeksi selama proses penularan penyakit dalam suatu populasi rentan (Heffernan, dkk., 2005). Dalam hal ini angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) dapat digunakan untuk menentukan terjadi atau tidaknya wabah penyakit dalam suatu populasi. Jika  $R_0 < 1$ , artinya rata-rata banyaknya individu yang tertular oleh satu individu terinfeksi berjumlah kurang dari satu individu, sehingga tidak mungkin terjadi penyebaran penyakit. Sedangkan jika  $R_0 > 1$  artinya rata-rata banyaknya individu yang tertular oleh satu individu terinfeksi berjumlah lebih dari satu individu, sehingga terjadi wabah.

(Driessche dan Watmough, 2002)

## 2.4 Matriks Partisi

### 2.4.1 Definisi Matriks Partisi

Matriks partisi adalah suatu matriks yang dapat dibagi menjadi matriks-matriks kecil dengan cara menggambar garis-garis horisontal dan vertikal di antara baris dan kolom matriks. Matriks-matriks yang lebih kecil sering kali disebut submatriks / blok. Sebagai contoh, diberikan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Jika garis-garis digambarkan antara baris kedua dan baris ketiga antara kolom ketiga dan kolom keempat, maka A akan terbagi menjadi empat submatriks  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ , dan  $A_{22}$ ,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

(Leon, 2001)

### 2.4.2 Operasi Matriks Partisi

Misal A dan B adalah matriks partisi yang berukuran  $3 \times 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix}.$$

Matriks-matriks partisi yang identik dapat ditambahkan dengan menjumlahkan blok yang sesuai :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \\ A_{31} + B_{31} & A_{32} + B_{32} \end{pmatrix}.$$

Perkalian matriks partisi membutuhkan banyak ketentuan dalam dimensi. Sebagai contoh jika,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} & A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} \end{pmatrix}$$

adalah benar, maka dimensi kolom dari  $A_{11}$ ,  $A_{21}$  dan  $A_{31}$  harus sama dengan dimensi baris dari  $B_{11}$  dan  $B_{12}$ . Demikian juga, dimensi kolom dari  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  dan  $A_{32}$  harus sama dengan dimensi baris dari  $B_{21}$  dan  $B_{22}$ .

(Golub dan Loan, 1996)

### 2.4.3 Determinan Matriks Partisi

Diberikan  $S$  adalah matriks dengan ordo  $N \times N$ , yaitu

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{pmatrix}.$$

Matriks  $S$  dapat dipartisi menjadi matriks  $2 \times 2$  dengan empat submatriks  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dan  $D$  dengan submatriks  $A$  dan  $D$  adalah matriks bujur sangkar, yaitu

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

sehingga  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dan  $D$  masing-masing berordo  $n \times n$ ,  $n \times (N - n)$ ,  $(N - n) \times n$ , dan  $(N - n) \times (N - n)$ ,  $n < N$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Determinan dari  $S$  adalah

$$\det(S) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B), \text{ jika } A \text{ matriks nonsingular}$$

atau

$$\det(S) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C), \text{ jika } D \text{ matriks nonsingular.}$$

Matriks  $D - CA^{-1}B$  dan  $A - BD^{-1}C$  disebut sebagai *Schur Complements*.

Jika matriks  $B$  atau  $C$  adalah matriks nol maka

$$\det(S) = \det(A)\det(D).$$

(Ouellette, 1981)





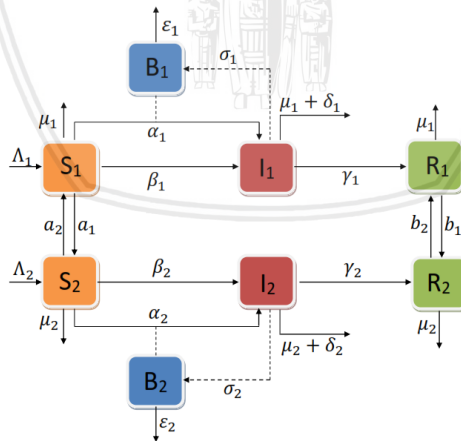


### BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model epidemi kolera dengan migrasi antar dua wilayah. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal, dan global titik kesetimbangan. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

#### 3.1 Konstruksi Model

Populasi dalam model epidemi kolera SIBR dengan migrasi antar dua wilayah ini dibagi menjadi delapan subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (*Susceptible*) di daerah ke  $i$ , subpopulasi terinfeksi (*Infected*) di daerah ke  $i$ , konsentrasi bakteri (*Bacteria*) di daerah ke  $i$ , dan subpopulasi sembuh (*Recovered*) di daerah ke  $i$  dengan  $i = 1, 2$ . Selanjutnya, aliran subpopulasi antar kompartemen  $S_i, I_i, B_i$ , dan  $R_i$ , dengan  $i = 1, 2$ , disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Diagram kompartemen model epidemi kolera dengan migrasi antar dua wilayah

### 3.1.1 Laju perubahan subpopulasi individu rentan

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi rentan ( $S_i$ ) dipengaruhi oleh kelahiran, perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi, migrasi antar dua wilayah, dan kematian alami.

Individu yang baru lahir akan masuk ke dalam subpopulasi rentan, sehingga mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi rentan dengan laju sebesar  $\Lambda_i$ .

Setiap individu pada subpopulasi rentan dapat terinfeksi karena kontak tak langsung dengan air atau melalui makanan dan minuman yang terkontaminasi bakteri *Vibrio Cholerae* dengan tingkat  $\alpha_i$  atau karena berinteraksi dengan individu terinfeksi dengan tingkat  $\beta_i$ . Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi rentan berkurang dengan laju sebesar  $\alpha_i S_i B_i$  dan  $\beta_i S_i I_i$ .

Adanya migrasi individu rentan ke daerah lain dengan tingkat  $a_i S_i$  mengakibatkan berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan dan adanya migrasi individu rentan dari daerah lain dengan tingkat  $a_j S_j$  mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi rentan.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan juga disebabkan karena kematian alami dengan laju sebesar  $\mu_i S_i$ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi rentan ( $S_i$ ) per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS_i}{dt} = \Lambda_i - \alpha_i S_i B_i - \beta_i S_i I_i - a_i S_i + a_j S_j - \mu_i S_i, \quad i \neq j,$$

atau dapat ditulis juga sebagai

$$\frac{dS_i}{dt} = \Lambda_i - \alpha_i S_i B_i - \beta_i S_i I_i - (a_i + \mu_i) S_i + a_j S_j, \quad i \neq j. \quad (3.1)$$

### 3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi ( $I_i$ ) dipengaruhi oleh perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi, kematian alami, kematian akibat penyakit, dan perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh.

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi rentan akibat kontak tak langsung dengan air atau melalui makanan dan minuman

yang terkontaminasi bakteri *Vibrio Cholerae* dengan tingkat  $\alpha_i$  atau akibat berinteraksi dengan individu terinfeksi dengan tingkat  $\beta_i$  menyebabkan perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi. Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi ( $I_i$ ) bertambah dengan laju sebesar  $\alpha_i S_i B_i$  dan  $\beta_i S_i I_i$ .

Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi disebabkan oleh kematian alami dengan laju sebesar  $\mu_i I_i$  dan kematian akibat penyakit dengan laju sebesar  $\delta_i I_i$ . Jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi juga berkurang karena penyembuhan dengan laju sebesar  $\gamma_i I_i$ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi terinfeksi ( $I_i$ ) per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI_i}{dt} = \alpha_i S_i B_i + \beta_i S_i I_i - \mu_i I_i - \delta_i I_i - \gamma_i I_i,$$

atau dapat ditulis juga sebagai

$$\frac{dI_i}{dt} = \alpha_i S_i B_i + \beta_i S_i I_i - (\mu_i + \delta_i + \gamma_i) I_i. \quad (3.2)$$

### 3.1.3 Laju perubahan subpopulasi sembuh

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah individu pada subpopulasi sembuh ( $R_i$ ) dipengaruhi oleh perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh, migrasi antar dua wilayah, dan kematian alami.

Berkurangnya Jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi akibat penyembuhan dengan laju sebesar  $\gamma_i$  menyebabkan perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh. Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi sembuh bertambah dengan laju sebesar  $\gamma_i I_i$ .

Adanya migrasi individu sembuh ke daerah lain dengan tingkat  $b_i R_i$  mengakibatkan berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi sembuh dan adanya migrasi individu sembuh dari daerah lain dengan tingkat  $b_j R_j$  mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi sembuh. Berkurangnya jumlah individu pada subpopulasi sembuh juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju sebesar  $\mu_i R_i$ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi sembuh ( $R_i$ ) per satuan waktu dapat dinyatakan

$$\frac{dR_i}{dt} = \gamma_i I_i + b_j R_j - (\mu_i + b_i) R_i, \quad i \neq j. \quad (3.3)$$

### 3.1.4 Laju perubahan konsentrasi bakteri

Berdasarkan Gambar 3.1, perubahan jumlah konsentrasi bakteri ( $B_i$ ) dipengaruhi oleh penumpahan bakteri dari individu terinfeksi dan kematian bakteri.

Individu yang terinfeksi bakteri akan mengalami diare sehingga fases yang dikeluarkan berupa cairan. Pada saat individu sekresi, beberapa bakteri juga ikut keluar bersama cairan sehingga terjadi penumpahan bakteri dari individu terinfeksi ke lingkungan atau sumber air dengan laju sebesar  $\sigma_i$ . Hal ini menyebabkan konsentrasi bakteri bertambah sebesar  $\sigma_i I_i$  namun tidak mengurangi Jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi. Konsentrasi bakteri dapat berkurang sebesar  $\varepsilon_i B_i$  karena kematian bakteri.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi sembuh ( $R_i$ ) per satuan waktu dapat dinyatakan

$$\frac{dB_i}{dt} = \sigma_i I_i - \varepsilon_i B_i. \quad (3.4)$$

Berdasarkan persamaan (3.1)-(3.4) dengan  $i = 1, 2$ .  $i \neq j$  diperoleh sistem persamaan *autonomous* nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= \Lambda_1 - \alpha_1 S_1 B_1 - \beta_1 S_1 I_1 - (a_1 + \mu_1) S_1 + a_2 S_2 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \alpha_1 S_1 B_1 + \beta_1 S_1 I_1 - (\mu_1 + \delta_1 + \gamma_1) I_1 \\ \frac{dR_1}{dt} &= \gamma_1 I_1 + b_2 R_2 - (\mu_1 + b_1) R_1 \\ \frac{dB_1}{dt} &= \sigma_1 I_1 - \varepsilon_1 B_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= \Lambda_2 - \alpha_2 S_2 B_2 - \beta_2 S_2 I_2 - (a_2 + \mu_2) S_2 + a_1 S_1 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \alpha_2 S_2 B_2 + \beta_2 S_2 I_2 - (\mu_2 + \delta_2 + \gamma_2) I_2 \\ \frac{dR_2}{dt} &= \gamma_2 I_2 + b_1 R_1 - (\mu_2 + b_2) R_2 \\ \frac{dB_2}{dt} &= \sigma_2 I_2 - \varepsilon_2 B_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Perhatikan bahwa  $\frac{dS_i}{dt}$ ,  $\frac{dI_i}{dt}$ , dan  $\frac{dB_i}{dt}$  tidak bergantung pada  $R_i$  sehingga dalam melakukan analisis cukup hanya dibahas sistem persamaan *autonomous* nonlinear

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_1}{dt} &= \Lambda_1 - \alpha_1 S_1 B_1 - \beta_1 S_1 I_1 - (a_1 + \mu_1) S_1 + a_2 S_2 \\
 \frac{dI_1}{dt} &= \alpha_1 S_1 B_1 + \beta_1 S_1 I_1 - (\mu_1 + \delta_1 + \gamma_1) I_1 \\
 \frac{dB_1}{dt} &= \sigma_1 I_1 - \varepsilon_1 B_1 \\
 \frac{dS_2}{dt} &= \Lambda_2 - \alpha_2 S_2 B_2 - \beta_2 S_2 I_2 - (a_2 + \mu_2) S_2 + a_1 S_1 \\
 \frac{dI_2}{dt} &= \alpha_2 S_2 B_2 + \beta_2 S_2 I_2 - (\mu_2 + \delta_2 + \gamma_2) I_2 \\
 \frac{dB_2}{dt} &= \sigma_2 I_2 - \varepsilon_2 B_2,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

yang terdefinisi pada

$$\Omega = \{(S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2) \in \mathbb{R}_+^6 \mid N_i \leq \frac{\Lambda_i}{\mu_0}, i = 1, 2\},$$

dengan  $N_i = S_i + I_i + R_i$  dan  $\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2\}$ . Informasi mengenai  $R_1$  dan  $R_2$  dapat diperoleh dari solusi  $I_1$  dan  $I_2$ .

### 3.2 Titik Keseimbangan Model

Berdasarkan definisi, titik keseimbangan sistem persamaan (3.6) diperoleh apabila  $\frac{dS_1}{dt} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dB_1}{dt} = \frac{dS_2}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = \frac{dB_2}{dt} = 0$ , yaitu

$$\Lambda_1 - \alpha_1 S_1 B_1 - \beta_1 S_1 I_1 - (\mu_1 + a_1) S_1 + a_2 S_2 = 0, \tag{3.7a}$$

$$\alpha_1 S_1 B_1 + \beta_1 S_1 I_1 - (\mu_1 + \delta_1 + \gamma_1) I_1 = 0, \tag{3.7b}$$

$$\sigma_1 I_1 - \varepsilon_1 B_1 = 0, \tag{3.7c}$$

$$\Lambda_2 - \alpha_2 S_2 B_2 - \beta_2 S_2 I_2 - (\mu_2 + a_2) S_2 + a_1 S_1 = 0, \tag{3.7d}$$

$$\alpha_2 S_2 B_2 + \beta_2 S_2 I_2 - (\mu_2 + \delta_2 + \gamma_2) I_2 = 0, \tag{3.7e}$$

$$\sigma_2 I_2 - \varepsilon_2 B_2 = 0. \tag{3.7f}$$

Misalkan  $\theta_1 = \mu_1 + \delta_1 + \gamma_1$  dan  $\theta_2 = \mu_2 + \delta_2 + \gamma_2$ , maka persamaan (3.7b) dan (3.7e) menjadi

$$\alpha_1 S_1 B_1 + \beta_1 S_1 I_1 - \theta_1 I_1 = 0, \tag{3.8}$$

$$\alpha_2 S_2 B_2 + \beta_2 S_2 I_2 - \theta_2 I_2 = 0. \tag{3.9}$$

Dari persamaan (3.7c) dan (3.7f) diperoleh

$$B_1 = \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1}, \quad (3.10)$$

$$B_2 = \frac{\sigma_2 I_2}{\varepsilon_2}. \quad (3.11)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) ke persamaan (3.8) dan mensubstitusikan persamaan (3.11) ke persamaan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 \sigma_1 S_1 I_1}{\varepsilon_1} + \beta_1 S_1 I_1 - \theta_1 I_1 &= 0 \\ \left( \frac{\alpha_1 \sigma_1 S_1}{\varepsilon_1} + \beta_1 S_1 - \theta_1 \right) I_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 \sigma_2 S_2 I_2}{\varepsilon_2} + \beta_2 S_2 I_2 - \theta_2 I_2 &= 0 \\ \left( \frac{\alpha_2 \sigma_2 S_2}{\varepsilon_2} + \beta_2 S_2 - \theta_2 \right) I_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Berdasarkan persamaan (3.12) diperoleh dua kemungkinan, yaitu

$$I_1 = 0 \text{ atau } \frac{\alpha_1 \sigma_1 S_1}{\varepsilon_1} + \beta_1 S_1 - \theta_1 = 0.$$

Berdasarkan persamaan (3.13) diperoleh juga dua kemungkinan, yaitu

$$I_2 = 0 \text{ atau } \frac{\alpha_2 \sigma_2 S_2}{\varepsilon_2} + \beta_2 S_2 - \theta_2 = 0.$$

Jika  $I_1 = 0$  dan  $I_2 = 0$  maka persamaan (3.10) dan (3.11) menjadi

$$B_1 = 0 \text{ dan } B_2 = 0.$$

Dengan mensubstitusikan  $I_1 = 0, I_2 = 0, B_1 = 0,$  dan  $B_2 = 0$  ke persamaan (3.7a) dan (3.7d) diperoleh

$$\Lambda_1 - (\mu_1 + a_1)S_1 + a_2 S_2 = 0, \quad (3.14)$$

$$\Lambda_2 - (\mu_2 + a_2)S_2 + a_1 S_1 = 0. \quad (3.15)$$

Eliminasi persamaan (3.14) dan (3.15) diperoleh

$$S_1 = \frac{(\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2 \Lambda_2}{\mu_1 \mu_2 + a_2 \mu_1 + a_1 \mu_2} \text{ dan } S_2 = \frac{(\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1 \Lambda_1}{\mu_1 \mu_2 + a_2 \mu_1 + a_1 \mu_2}.$$

Dari perhitungan di atas maka diperoleh titik kesetimbangan yang pertama, yaitu  $E^0 = (S_1^0, 0, 0, S_2^0, 0, 0)$ , dengan

$$S_1^0 = \frac{(\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2\Lambda_2}{\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2}$$

$$S_2^0 = \frac{(\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1\Lambda_1}{\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2}.$$

Titik ini disebut titik kesetimbangan bebas penyakit karena tidak ada individu yang terinfeksi.

Jika persamaan (3.8)  $I_1 \neq 0$  maka  $\frac{\alpha_1\sigma_1 S_1}{\varepsilon_1} + \beta_1 S_1 - \theta_1 = 0$ , sehingga diperoleh

$$S_1 = \frac{\theta_1 \varepsilon_1}{\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1}. \quad (3.16)$$

Jika persamaan (3.13)  $I_2 = 0$  maka persamaan (3.11) menjadi  $B_2 = 0$ . Dengan mensubstitusikan  $I_2 = 0$ ,  $B_2 = 0$ , dan persamaan (3.16) ke persamaan (3.7d) diperoleh

$$S_2 = \frac{\Lambda_2(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1) + a_1\theta_1\varepsilon_1}{(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)}. \quad (3.17)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.16), (3.10), dan (3.17) ke persamaan (3.7a) diperoleh

$$I_1 = \frac{(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)((\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2\Lambda_2) - (\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)\theta_1\varepsilon_1}{(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)\theta_1}$$

Karena  $I_1 \neq 0$  maka  $I_1$  terdefinisi pada  $\Omega$  jika  $I_1 > 0$ , sehingga diperoleh

$$(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)((\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2\Lambda_2) - (\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)\theta_1\varepsilon_1 > 0$$

atau

$$\frac{(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)((\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2\Lambda_2)}{(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)\theta_1\varepsilon_1} > 1$$

Untuk selanjutnya dimisalkan bahwa

$$\frac{(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)((\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2\Lambda_2)}{(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)\theta_1\varepsilon_1} = R_0^{(1)} \quad (3.18)$$

Berdasarkan persamaan (3.18) dan penurunan  $I_1$  maka diperoleh

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)(R_0^{(1)} - 1)}{(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)} \quad (3.19)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.19) ke persamaan (3.10) diperoleh

$$B_1 = \frac{\sigma_1(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)(R_0^{(1)} - 1)}{(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)} \quad (3.20)$$

Dari persamaan (3.16), (3.17), (3.19), dan (3.20) diperoleh titik kesetimbangan kedua, yaitu  $E^* = (S_1^*, I_1^*, B_1^*, S_2^*, 0, 0)$ , dengan

$$\begin{aligned} S_1^* &= \frac{\theta_1\varepsilon_1}{\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1} \\ I_1^* &= \frac{\varepsilon_1(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)(R_0^{(1)} - 1)}{(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)} \\ B_1^* &= \frac{\sigma_1(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)(R_0^{(1)} - 1)}{(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)} \\ S_2^* &= \frac{\Lambda_2(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1) + a_1\theta_1\varepsilon_1}{(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)}, \end{aligned}$$

yang eksis ketika  $R_0^{(1)} > 1$ .

Jika persamaan (3.12)  $I_2 \neq 0$  maka  $\frac{\alpha_2\sigma_2 S_2}{\varepsilon_2} + \beta_2 S_2 - \theta_2 = 0$ , sehingga diperoleh

$$S_2 = \frac{\theta_2\varepsilon_2}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2}. \quad (3.21)$$

Jika persamaan (3.8)  $I_1 = 0$  maka persamaan (3.10) menjadi  $B_1 = 0$ . Dengan mensubstitusikan  $I_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ , dan persamaan (3.21) ke persamaan (3.7a) diperoleh

$$S_1 = \frac{\Lambda_1(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2) + a_2\theta_2\varepsilon_2}{(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)}. \quad (3.22)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.21), (3.11), dan (3.22) ke persamaan (3.7d) diperoleh

$$I_2 = \frac{(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)((\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1\Lambda_1) - (\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)\theta_2\varepsilon_2}{(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)\theta_2}$$



Karena  $I_2 \neq 0$  maka  $I_2$  terdefinisi pada  $\Omega$  jika  $I_2 > 0$ , sehingga diperoleh

$$(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)((\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1\Lambda_1) - (\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)\theta_2\varepsilon_2 > 0$$

atau

$$\frac{(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)((\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1\Lambda_1)}{(\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)\theta_2\varepsilon_2} > 1$$

untuk selanjutnya akan dimisalkan bahwa

$$\frac{(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)((\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1\Lambda_1)}{(\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)\theta_2\varepsilon_2} = R_0^{(2)} \quad (3.23)$$

Berdasarkan persamaan (3.23) dan penurunan  $I_2$  maka diperoleh

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2(\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)(R_0^{(2)} - 1)}{(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)} \quad (3.24)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.24) ke persamaan (3.11) diperoleh

$$B_2 = \frac{\sigma_2(\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)(R_0^{(2)} - 1)}{(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)} \quad (3.25)$$

Dari persamaan (3.22), (3.21), (3.24), dan (3.25) diperoleh titik kesetimbangan ketiga, yaitu  $E^{**} = (S_1^{**}, 0, 0, S_2^{**}, I_2^{**}, B_2^{**})$ , dengan

$$\begin{aligned} S_1^{**} &= \frac{\Lambda_1(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2) + a_2\theta_2\varepsilon_2}{(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)} \\ S_2^{**} &= \frac{\theta_2\varepsilon_2}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2} \\ I_2^{**} &= \frac{\varepsilon_2(\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)(R_0^{(2)} - 1)}{(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)} \\ B_2^{**} &= \frac{\sigma_2(\mu_2\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_1)(R_0^{(2)} - 1)}{(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)} \end{aligned}$$

yang eksis ketika  $R_0^{(2)} > 1$ .

Jika persamaan (3.8)  $I_1 \neq 0$  maka  $\frac{\alpha_1\sigma_1 S_1}{\varepsilon_1} + \beta_1 S_1 - \theta_1 = 0$ , sehingga diperoleh

$$S_1 = \frac{\theta_1\varepsilon_1}{\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1}. \quad (3.26)$$

Jika persamaan (3.12)  $I_2 \neq 0$  maka  $\frac{\alpha_2 \sigma_2 S_2}{\varepsilon_2} + \beta_2 S_2 - \theta_2 = 0$ , sehingga diperoleh

$$S_2 = \frac{\theta_2 \varepsilon_2}{\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2}. \quad (3.27)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10), (3.26), dan (3.27) ke persamaan (3.7a) diperoleh

$$I_1 = \frac{(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)(\Lambda_1(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2) + a_2 \theta_2 \varepsilon_2)}{\theta_1(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)} - \frac{\theta_1 \varepsilon_1 (\mu_1 + a_1)(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)}{\theta_1(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)}.$$

Karena  $I_1 \neq 0$  maka  $I_1$  terdefinisi pada  $\Omega$  jika  $I_1 > 0$ , sehingga diperoleh

$$(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)(\Lambda_1(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2) + a_2 \theta_2 \varepsilon_2) - \theta_1 \varepsilon_1 (\mu_1 + a_1)(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2) > 0$$

atau

$$\frac{(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)(\Lambda_1(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2) + a_2 \theta_2 \varepsilon_2)}{\theta_1 \varepsilon_1 (\mu_1 + a_1)(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)} > 1$$

untuk selanjutnya dimisalkan bahwa

$$\frac{(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)(\Lambda_1(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2) + a_2 \theta_2 \varepsilon_2)}{\theta_1 \varepsilon_1 (\mu_1 + a_1)(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)} = T_1 \quad (3.28)$$

Berdasarkan persamaan (3.28) dan penurunan  $I_1$  maka diperoleh

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 (\mu_1 + a_1)(T_1 - 1)}{\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1} \quad (3.29)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.29) ke persamaan (3.10) diperoleh

$$B_1 = \frac{\sigma_1 (\mu_1 + a_1)(T_1 - 1)}{\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1} \quad (3.30)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.11), (3.26), dan (3.27) ke persamaan (3.7d) diperoleh

$$I_2 = \frac{(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)(\Lambda_2(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1) + a_1 \theta_1 \varepsilon_1)}{\theta_2(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)} - \frac{\theta_2 \varepsilon_2 (\mu_2 + a_2)(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)}{\theta_2(\alpha_2 \sigma_2 + \varepsilon_2 \beta_2)(\alpha_1 \sigma_1 + \varepsilon_1 \beta_1)}.$$

Karena  $I_2 \neq 0$  maka  $I_2$  terdefinisi pada  $\Omega$  jika  $I_2 > 0$ , sehingga diperoleh

$$(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)(\Lambda_2(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1) + a_1\theta_1\varepsilon_1) - \theta_2\varepsilon_2(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1) > 0$$

atau

$$\frac{(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)(\Lambda_2(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1) + a_1\theta_1\varepsilon_1)}{\theta_2\varepsilon_2(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)} > 1$$

untuk selanjutnya dimisalkan bahwa

$$\frac{(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)(\Lambda_2(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1) + a_1\theta_1\varepsilon_1)}{\theta_2\varepsilon_2(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)} = T_2 \quad (3.31)$$

Berdasarkan persamaan (3.31) dan penurunan  $I_2$  maka diperoleh

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2(\mu_2 + a_2)(T_2 - 1)}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2} \quad (3.32)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.32) ke persamaan (3.11) diperoleh

$$B_2 = \frac{\sigma_2(\mu_2 + a_2)(T_2 - 1)}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2} \quad (3.33)$$

Dari persamaan (3.26), (3.29), (3.30), (3.26), (3.32), dan (3.33) diperoleh titik kesetimbangan yang keempat, yaitu  $\bar{E} = (\bar{S}_1, \bar{I}_1, \bar{B}_1, \bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{B}_2)$ , dengan

$$\bar{S}_1 = \frac{\theta_1\varepsilon_1}{\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\varepsilon_1(\mu_1 + a_1)(T_1 - 1)}{\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1}$$

$$\bar{B}_1 = \frac{\sigma_1(\mu_1 + a_1)(T_1 - 1)}{\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1}$$

$$\bar{S}_2 = \frac{\theta_2\varepsilon_2}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\varepsilon_2(\mu_2 + a_2)(T_2 - 1)}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2}$$

$$\bar{B}_2 = \frac{\sigma_2(\mu_2 + a_2)(T_2 - 1)}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2}$$

yang eksis ketika  $T_1 > 1$  dan  $T_2 > 1$ .

**Teorema 3.1** Jika  $T_1 > 1$  dan  $T_2 > 1$  maka  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$ .

*Bukti.* Diketahui bahwa  $T_1 = \frac{(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)(\Lambda_1(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2) + a_2\theta_2\varepsilon_2)}{\theta_1\varepsilon_1(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)}$  dan  $T_2 = \frac{(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)(\Lambda_2(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1) + a_1\theta_1\varepsilon_1)}{\theta_2\varepsilon_2(\mu_2 + a_2)(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)}$ .  $T_1 > 1$  maka

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)(\Lambda_1(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2) + a_2\theta_2\varepsilon_2)}{\theta_1\varepsilon_1(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)} > 1 \\ & (\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)(\Lambda_1(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2) + a_2\theta_2\varepsilon_2) \\ & \quad - \theta_1\varepsilon_1(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2) > 0 \\ & \Lambda_1(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2) + a_2\theta_2\varepsilon_2 - \frac{\theta_1\varepsilon_1(\mu_1 + a_1)(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)}{\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1} > 0 \\ & \Lambda_1 + \frac{a_2\theta_2\varepsilon_2}{\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2} - \frac{(\mu_1 + a_1)\theta_1\varepsilon_1}{\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1} > 0 \\ & \Lambda_1 + \frac{a_2\left(\frac{(\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1\Lambda_1}{\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2}\right)}{\frac{(\alpha_2\sigma_2 + \varepsilon_2\beta_2)((\mu_1 + a_1)\Lambda_2 + a_1\Lambda_1)}{(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)\theta_2\varepsilon_2}} - \frac{(\mu_1 + a_1)\left(\frac{(\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2\Lambda_2}{\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2}\right)}{\frac{(\alpha_1\sigma_1 + \varepsilon_1\beta_1)((\mu_2 + a_2)\Lambda_1 + a_2\Lambda_2)}{(\mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2)\theta_1\varepsilon_1}} > 0 \\ & \Lambda_1 + \frac{a_2S_2^0}{R_0^{(2)}} - \frac{(\mu_1 + a_1)S_1^0}{R_0^{(1)}} > 0. \end{aligned}$$

Misalkan  $\Lambda_1 + \frac{a_2S_2^0}{R_0^{(2)}} - \frac{(\mu_1 + a_1)S_1^0}{R_0^{(1)}} = K_1$ , maka  $K_1 > 0$ . Dengan Cara yang sama untuk  $T_2 > 1$  diperoleh  $K_2 = \Lambda_2 + \frac{a_1S_1^0}{R_0^{(1)}} - \frac{(\mu_2 + a_2)S_2^0}{R_0^{(2)}} > 0$ .

Selanjutnya, karena  $K_1 > 0$  dan  $K_2 > 0$  maka

$$(\mu_1 + a_2)K_1 + a_2K_2 > 0 \tag{3.34a}$$

$$(\mu_1 + a_1)K_2 + a_1K_1 > 0. \tag{3.34b}$$

Dengan menggantikan  $K_1$  dan  $K_2$  terhadap pertidaksamaan di atas, maka perhitungan secara langsung sesuai yang dipaparkan pada Lampiran 1 menunjukkan bahwa pertidaksamaan (3.34a) dan (3.34b) sama dengan  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$ . Dengan demikian terbukti jika  $T_1 > 1$  dan  $T_2 > 1$  maka  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$ .

### 3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

Sifat kestabilan lokal titik keseimbangan model dapat diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem *autonomous* nonlinear (3.6) di sekitar titik keseimbangan. Berdasarkan proses linearisasi sistem (3.6), diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & 0 & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{32} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ j_{41} & 0 & 0 & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ 0 & 0 & 0 & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j_{65} & j_{66} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} j_{11} &= -\alpha_1 B_1 - \beta_1 I_1 - (\mu_1 + a_1) & j_{41} &= a_1 \\ j_{12} &= -\beta_1 S_1 & j_{44} &= -\alpha_2 B_2 - \beta_2 I_2 - (\mu_2 + a_2) \\ j_{13} &= -\alpha_1 S_1 & j_{45} &= -\beta_2 S_2 \\ j_{14} &= a_2 & j_{46} &= -\alpha_2 S_2 \\ j_{21} &= \alpha_1 B_1 + \beta_1 I_1 & j_{54} &= \alpha_2 B_2 + \beta_2 I_2 \\ j_{22} &= \beta_1 S_1 - \theta_1 & j_{55} &= \beta_2 S_2 - \theta_2 \\ j_{23} &= \alpha_1 S_1 & j_{56} &= \alpha_2 S_2 \\ j_{32} &= \sigma_1 & j_{65} &= \sigma_2 \\ j_{33} &= -\varepsilon_1 & j_{66} &= -\varepsilon_2 \end{aligned}$$

### 3.3.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ )

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $E^0$  dipaparkan pada Lampiran 2. Persamaan karakteristik matriks  $J(E^0)$  dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E^0) - I\lambda| = 0$ . Untuk mempermudah menentukan akar-akar karakteristik, maka matriks dapat dipartisi menjadi

$$|J(E^0) - I\lambda| = \begin{vmatrix} J_1(E^0) - I\lambda & J_2(E^0) - I\lambda \\ 0 & J_3(E^0) - I\lambda \end{vmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} & J_1(E^0) - I\lambda = \\ & \begin{pmatrix} -(\mu_1 + a_1) - \lambda & -\beta_1 S_1^0 & -\alpha_1 S_1^0 & a_2 \\ 0 & \beta_1 S_1^0 - \theta_1 - \lambda & \alpha_1 S_1^0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & -\varepsilon_1 - \lambda & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & -(\mu_2 + a_2) - \lambda \end{pmatrix}, \\ & J_2(E^0) - I\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\beta_2 S_2^0 & -\alpha_2 S_2^0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dan

$$J_3(E^0) - I\lambda = \begin{pmatrix} \beta_2 S_2^0 - \theta_2 - \lambda & \alpha_2 S_2^0 \\ \sigma_2 & -\varepsilon_2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan definisi determinan matriks partisi maka

$$|J(E^0) - I\lambda| = |J_1(E^0) - I\lambda| |J_3(E^0) - I\lambda|.$$

$|J_1(E^0) - I\lambda| = P_0(\lambda)P_1(\lambda)$  dimana  $P_0(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda + d$ , dengan  $c = \mu_1 + a_1 + \mu_2 + a_2$  dan  $d = \mu_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_1\mu_2$  sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4d}}{2} < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4d}}{2} < 0$$

dan  $P_1(\lambda) = \lambda^2 + u_1\lambda + u_2$ , dengan  $u_1 = \theta_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 S_1^0$  dan  $u_2 = \varepsilon_1\theta_1 - \varepsilon_1\beta_1 S_1^0 - \sigma_1\alpha_1 S_1^0$ . Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz akar-akar persamaan  $P_1(\lambda) = 0$  memiliki bagian real negatif jika dan jika  $u_1 > 0$  dan  $u_2 > 0$ . Jika  $R_0^{(1)} < 1$  maka

$$\begin{aligned} u_2 &= \varepsilon_1\theta_1 - \varepsilon_1\beta_1 S_1^0 - \sigma_1\alpha_1 S_1^0 \\ u_2 &= \varepsilon_1\theta_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_1\beta_1 S_1^0 + \sigma_1\alpha_1 S_1^0}{\varepsilon_1\theta_1}\right) \\ u_2 &= \varepsilon_1\theta_1(1 - R_0^{(1)}), \end{aligned}$$

$u_2 > 0$ . Selanjutnya dibuktikan  $u_1 > 0$ . Jika  $R_0^{(1)} < 1$  maka

$$\begin{aligned} u_1 &= \theta_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 S_1^0 \\ u_1 &\geq \theta_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 S_1^0 - \frac{\sigma_1\alpha_1 S_1^0}{\varepsilon_1} \\ u_1 &\geq \varepsilon_1 + \theta_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_1\beta_1 S_1^0 + \sigma_1\alpha_1 S_1^0}{\varepsilon_1\theta_1}\right) \\ u_1 &\geq \varepsilon_1 + \theta_1(1 - R_0^{(1)}), \end{aligned}$$

$u_1 > 0$ . Akar-akar persamaan  $P_1(\lambda)$  memiliki bagian real negatif jika  $R_0^{(1)} < 1$ .

$|J_3(E^0) - I\lambda| = \lambda^2 + v_1\lambda + v_2$  dengan  $v_1 = \theta_2 + \varepsilon_2 - \beta_2 S_2^0$  dan  $v_2 = \varepsilon_2\theta_2 - \varepsilon_2\beta_2 S_2^0 - \sigma_2\alpha_2 S_2^0$ . Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz akar-akar persamaan  $|J_3(E^0) - I\lambda| = 0$  memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika  $v_1 > 0$  dan  $v_2 > 0$ . Jika  $R_0^{(2)} < 1$  maka

$$\begin{aligned} v_2 &= \varepsilon_2\theta_2 - \varepsilon_2\beta_2 S_2^0 - \sigma_2\alpha_2 S_2^0 \\ v_2 &= \varepsilon_2\theta_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2\beta_2 S_2^0 + \sigma_2\alpha_2 S_2^0}{\varepsilon_2\theta_2}\right) \\ v_2 &= \varepsilon_2\theta_2(1 - R_0^{(2)}), \end{aligned}$$

$v_2 > 0$ . Selanjutnya dibuktikan  $v_1 > 0$ . Jika  $R_0^{(2)} < 1$  maka

$$\begin{aligned} v_1 &= \theta_2 + \varepsilon_2 - \beta_1 S_2^0 \\ v_1 &\geq \theta_2 + \varepsilon_2 - \beta_2 S_2^0 - \frac{\sigma_2\alpha_2 S_2^0}{\varepsilon_2} \\ v_1 &\geq \varepsilon_2 + \theta_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2\beta_2 S_2^0 + \sigma_2\alpha_2 S_2^0}{\varepsilon_2\theta_2}\right) \\ v_1 &\geq \varepsilon_2 + \theta_2(1 - R_0^{(2)}), \end{aligned}$$

$v_1 > 0$ . Akar-akar persamaan karakteristik  $|J_3(E^0) - I\lambda| = 0$  memiliki bagian real negatif jika  $R_0^{(2)} < 1$ .

Berdasarkan uraian di atas maka titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ) bersifat stabil asimtotik lokal jika  $R_0^{(1)} < 1$  dan  $R_0^{(2)} < 1$ .

### 3.3.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan ( $E^*$ )

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $E^*$  ditunjukkan pada Lampiran 3. Persamaan karakteristik matriks  $J(E^*)$  dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E^*) - I\lambda| = 0$ . Untuk mempermudah menentukan akar-akar karakteristik, maka matriks dapat dipartisi menjadi

$$|J(E^*) - I\lambda| = \begin{vmatrix} J_1(E^*) - I\lambda & J_2(E^*) - I\lambda \\ 0 & J_3(E^*) - I\lambda \end{vmatrix}$$

dengan

$$J_1(E^*) - I\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 B_1^* - \beta_1 I_1^* - (\mu_1 + a_1) - \lambda & -\beta_1 S_1^* & -\alpha_1 S_1^* & a_2 \\ \alpha_1 B_1^* + \beta_1 I_1^* & \beta_1 S_1^* - \theta_1 - \lambda & \alpha_1 S_1^* & 0 \\ 0 & \sigma_1 & -\varepsilon_1 - \lambda & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & -(\mu_2 + a_2) - \lambda \end{pmatrix},$$

$$J_2(E^*) - I\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\beta_2 S_2^* & -\alpha_2 S_2^* \end{pmatrix},$$

dan

$$J_3(E^*) - I\lambda = \begin{pmatrix} \beta_2 S_2^* - \theta_2 - \lambda & \alpha_2 S_2^* \\ \sigma_2 & -\varepsilon_2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan definisi determinan matriks partisi maka

$$|J(E^*) - I\lambda| = |J_1(E^*) - I\lambda| |J_3(E^*) - I\lambda|.$$

$$|J_1(E^*) - I\lambda| = \lambda^4 + h_1 \lambda^3 + h_2 \lambda^2 + h_3 \lambda + h_4 \text{ dengan}$$

$$h_1 = \alpha_1 B_1^* - \beta_1 S_1^* + \beta_1 I_1^* + a_1 + a_2 + \mu_1 + \mu_2 + \theta_1 + \varepsilon_1$$

$$h_2 = \alpha_1 a_2 B_1^* + \alpha_1 \mu_2 B_1^* + \alpha_1 \theta_1 B_1^* + \alpha_1 \varepsilon_1 B_1^* - a_1 \beta_1 S_1^* - a_2 \beta_1 S_1^* - \alpha_1 \sigma_1 S_1^* - \beta_1 \mu_1 S_1^* - \beta_1 \mu_2 S_1^* - \beta_1 \varepsilon_1 S_1^* + \beta_1 a_2 I_1^* + \beta_1 \mu_2 I_1^* + \beta_1 \theta_1 I_1^* + \beta_1 \varepsilon_1 I_1^* + a_1 \mu_2 + a_1 \theta_1 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \mu_1 + a_2 \theta_1 + a_2 \varepsilon_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \theta_1 + \mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \theta_1 + \mu_2 \varepsilon_1 + \theta_1 \varepsilon_1$$

$$h_3 = a_2 \alpha_1 \theta_1 B_1^* + \alpha_1 \mu_2 \theta_1 B_1^* + \alpha_1 \mu_2 \varepsilon_1 B_1^* + \alpha_1 \theta_1 \varepsilon_1 B_1^* - a_1 \alpha_1 \sigma_1 S_1^* - a_1 \beta_1 \mu_2 S_1^* - a_1 \beta_1 \varepsilon_1 S_1^* - a_2 \alpha_1 \sigma_1 S_1^* - a_2 \beta_1 \mu_1 S_1^* - a_2 \beta_1 \varepsilon_1 S_1^* - \alpha_1 \mu_1 \sigma_1 S_1^* - \alpha_1 \mu_1 \sigma_1 S_1^* - \beta_1 \mu_1 \mu_2 S_1^* - \beta_1 \mu_1 \varepsilon_1 S_1^* - \beta_1 \mu_1 \varepsilon_1 S_1^* + a_1 \beta_1 \theta_1 I_1^* + a_2 \beta_1 \varepsilon_1 I_1^* + \beta_1 \mu_2 \theta_1 I_1^* + \beta_1 \mu_2 \varepsilon_1 I_1^* + \beta_1 \theta_1 \varepsilon_1 I_1^* + a_1 \mu_2 \theta_1 + a_1 \mu_2 \varepsilon_1 + a_1 \theta_1 \varepsilon_1 + a_2 \mu_1 \theta_1 + a_2 \mu_1 \varepsilon_1 + a_2 \theta_1 \varepsilon_1 + \mu_1 \mu_2 \theta_1 + \mu_1 \mu_2 \varepsilon_1 + \mu_1 \theta_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \theta_1 \varepsilon_1$$

$$h_4 = a_2 \alpha_1 \theta_1 \varepsilon_1 B_1^* + \alpha_1 \mu_2 \theta_1 \varepsilon_1 B_1^* - a_1 \alpha_1 \mu_2 \sigma_1 S_1^* - a_1 \beta_1 \mu_2 \varepsilon_1 S_1^* - a_2 \alpha_1 \mu_1 \sigma_1 S_1^* - a_2 \beta_1 \mu_1 \varepsilon_1 S_1^* - \alpha_1 \mu_1 \mu_2 \sigma_1 S_1^* - \beta_1 \mu_1 \mu_2 \varepsilon_1 S_1^* + a_2 \beta_1 \theta_1 \varepsilon_1 I_1^* + \beta_1 \mu_2 \theta_1 \varepsilon_1 I_1^* + a_1 \mu_2 \theta_1 \varepsilon_1 + a_2 \mu_1 \theta_1 \varepsilon_1 + \mu_1 \mu_2 \theta_1 \varepsilon_1.$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz akar-akar persamaan karakteristik

$|J_1(E^*) - I\lambda| = 0$  memiliki bagian real negatif karena memenuhi

1.  $h_1 > 0$  dan  $h_4 > 0$



$$2. h_1 h_2 - h_3 > 0$$

$$3. h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0.$$

Karena rumitnya membuktikan secara analitik bahwa  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$ , maka kondisi tersebut disimulasikan secara numerik.

Pembuktian kriteria di atas dijelaskan pada Lampiran 4.

$|J_3(E^*) - I\lambda| = \lambda^2 + x_1\lambda + x_2$  dengan  $x_1 = \theta_2 + \varepsilon_2 - \beta_2 S_2^*$  dan  $x_2 = \varepsilon_2 \theta_2 - \varepsilon_2 \beta_2 S_2^* - \sigma_2 \alpha_2 S_2^*$ . Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz akar-akar persamaan  $|J_3(E^*) - I\lambda| = 0$  memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika  $x_1 > 0$  dan  $x_2 > 0$ . Jika  $T_2 < 1$  maka

$$\begin{aligned} x_2 &= \varepsilon_2 \theta_2 - \varepsilon_2 \beta_2 S_2^* - \sigma_2 \alpha_2 S_2^* \\ x_2 &= \varepsilon_2 \theta_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 \beta_2 S_2^* + \sigma_2 \alpha_2 S_2^*}{\varepsilon_2 \theta_2}\right) \\ x_2 &= \varepsilon_2 \theta_2 (1 - T_2), \end{aligned}$$

$x_2 > 0$ . Selanjutnya dibuktikan  $x_1 > 0$ . Jika  $T_2 < 1$  maka

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_2 + \varepsilon_2 - \beta_1 S_2^* \\ x_1 &\geq \theta_2 + \varepsilon_2 - \beta_2 S_2^* - \frac{\sigma_2 \alpha_2 S_2^*}{\varepsilon_2} \\ x_1 &\geq \varepsilon_2 + \theta_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 \beta_2 S_2^* + \sigma_2 \alpha_2 S_2^*}{\varepsilon_2 \theta_2}\right) \\ x_1 &\geq \varepsilon_2 + \theta_2 (1 - T_2), \end{aligned}$$

$x_1 > 0$ . Akar-akar persamaan karakteristik  $|J_3(E^*) - I\lambda| = 0$  memiliki bagian real negatif jika  $T_2 < 1$ .

Berdasarkan uraian di atas maka titik kesetimbangan ( $E^*$ ) bersifat stabil asimtotik lokal jika  $T_2 < 1$ .

### 3.3.3 Kestabilan lokal titik kesetimbangan ( $E^{**}$ )

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $E^{**}$  ditunjukkan pada Lampiran 5. Persamaan karakteristik matriks  $J(E^{**})$  dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E^{**}) - I\lambda| = 0$ . Untuk mempermudah menentukan akar-akar karakteristik, maka matriks dapat dipartisi menjadi

$$|J(E^{**}) - I\lambda| = \begin{vmatrix} J_1(E^{**}) - I\lambda & J_2(E^{**}) - I\lambda \\ 0 & J_3(E^{**}) - I\lambda \end{vmatrix}$$

dengan

$$\begin{pmatrix} J_1(E^{**}) - I\lambda = \\ \left( \begin{array}{cccc} \alpha_2 B_2^{**} - \beta_2 I_2^{**} - (\mu_2 + a_2) - \lambda & -\beta_2 S_2^{**} & -\alpha_2 S_2^{**} & a_2 \\ \alpha_2 B_2^{**} + \beta_2 I_2^{**} & \beta_2 S_2^{**} - \theta_2 - \lambda & \alpha_2 S_2^{**} & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\varepsilon_2 - \lambda & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -(\mu_2 + a_2) - \lambda \end{array} \right), \\ J_2(E^{**}) - I\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\beta_1 S_1^{**} & -\alpha_1 S_1^{**} \end{pmatrix}, \end{pmatrix}$$

dan

$$J_3(E^{**}) - I\lambda = \begin{pmatrix} \beta_1 S_1^{**} - \theta_1 - \lambda & \alpha_1 S_1^{**} \\ \sigma_1 & -\varepsilon_1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan definisi determinan matriks partisi maka

$$|J(E^{**}) - I\lambda| = |J_1(E^{**}) - I\lambda| |J_3(E^{**}) - I\lambda|.$$

$$|J_1(E^{**}) - I\lambda| = \lambda^4 + r_1 \lambda^3 + r_2 \lambda^2 + r_3 \lambda + r_4 \text{ dengan}$$

$$r_1 = \alpha_2 B_2^{**} - \beta_2 S_2^{**} + \beta_2 I_1^{**} + a_2 + a_1 + \mu_2 + \mu_1 + \theta_2 + \varepsilon_2$$

$$\begin{aligned} r_2 = & \alpha_2 a_1 B_2^{**} + \alpha_2 \mu_1 B_2^{**} + \alpha_2 \theta_2 B_2^{**} + \alpha_2 \varepsilon_2 B_2^{**} - a_2 \beta_2 S_2^{**} \\ & - a_1 \beta_2 S_2^{**} - \alpha_2 \sigma_2 S_2^{**} - \beta_2 \mu_2 S_2^{**} - \beta_2 \mu_1 S_2^{**} - \beta_2 \varepsilon_2 S_2^{**} \\ & + \beta_2 a_2 I_2^{**} + \beta_2 \mu_2 I_2^{**} + \beta_2 \theta_2 I_2^{**} + \beta_2 \varepsilon_2 I_2^{**} + a_2 \mu_1 + a_2 \theta_2 \\ & + a_2 \varepsilon_2 + a_1 \mu_2 + a_1 \theta_2 + a_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \mu_1 + \mu_2 \theta_2 + \mu_2 \varepsilon_2 + \mu_1 \theta_2 \\ & + \mu_1 \varepsilon_2 + \theta_2 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 = & a_1 \alpha_2 \theta_2 B_2^{**} + \alpha_2 \mu_1 \theta_2 B_2^{**} + \alpha_2 \mu_1 \varepsilon_2 B_2^{**} + \alpha_2 \theta_2 \varepsilon_2 B_2^{**} \\ & - a_2 \alpha_2 \sigma_2 S_2^{**} - a_2 \beta_2 \mu_1 S_2^{**} - a_2 \beta_2 \varepsilon_2 S_2^{**} - a_1 \alpha_2 \sigma_2 S_2^{**} \\ & - a_1 \beta_2 \mu_2 S_2^{**} - a_1 \beta_2 \varepsilon_2 S_2^{**} - \alpha_2 \mu_2 \sigma_2 S_2^{**} - \alpha_2 \mu_2 \varepsilon_2 S_2^{**} - \beta_2 \mu_2 \mu_1 S_2^{**} \\ & - \beta_2 \mu_2 \varepsilon_2 S_2^{**} - \beta_2 \mu_2 \varepsilon_2 S_2^{**} + a_2 \beta_2 \theta_2 I_2^{**} + a_1 \beta_2 \varepsilon_2 I_2^{**} + \beta_2 \mu_1 \theta_2 I_2^{**} \\ & + \beta_2 \mu_1 \varepsilon_2 I_2^{**} + \beta_2 \theta_2 \varepsilon_2 I_2^{**} + a_2 \mu_1 \theta_2 + a_2 \mu_1 \varepsilon_2 + a_2 \theta_2 \varepsilon_2 + a_1 \mu_2 \theta_2 \\ & + a_1 \mu_2 \varepsilon_2 + a_1 \theta_2 \varepsilon_2 + \mu_2 \mu_1 \theta_2 + \mu_2 \mu_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \theta_2 \varepsilon_2 + \mu_1 \theta_2 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 = & a_1 \alpha_2 \theta_2 \varepsilon_2 B_2^{**} + \alpha_2 \mu_1 \theta_2 \varepsilon_2 B_2^{**} - a_2 \alpha_2 \mu_1 \sigma_2 S_2^{**} - a_2 \beta_2 \mu_1 \varepsilon_2 S_2^{**} \\ & - a_1 \alpha_2 \mu_2 \sigma_2 S_2^{**} - a_1 \beta_2 \mu_2 \varepsilon_2 S_2^{**} - \alpha_2 \mu_2 \mu_1 \sigma_2 S_2^{**} - \beta_2 \mu_2 \mu_1 \varepsilon_2 S_2^{**} \\ & + a_1 \beta_2 \theta_2 \varepsilon_2 I_2^{**} + \beta_2 \mu_1 \theta_2 \varepsilon_2 I_2^{**} + a_2 \mu_1 \theta_2 \varepsilon_2 + a_1 \mu_2 \theta_2 \varepsilon_2 + \mu_2 \mu_1 \theta_2 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz akar-akar persamaan karakteristik  $|J_1(E^{**}) - I\lambda| = 0$  memiliki bagian real negatif karena memenuhi

1.  $r_1 > 0$  dan  $r_4 > 0$
2.  $r_1 r_2 - r_3 > 0$
3.  $r_1 r_2 r_3 - r_3^2 - r_1^2 r_4 > 0$ .

Karena rumitnya membuktikan secara analitik bahwa  $r_1 r_2 r_3 - r_3^2 - r_1^2 r_4 > 0$ , maka kondisi tersebut disimulasikan secara numerik.

Pembuktian kriteria di atas dijelaskan pada Lampiran 6.

$|J_3(E^{**}) - I\lambda| = \lambda^2 + y_1\lambda + y_2$  dengan  $y_1 = \theta_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 S_1^{**}$  dan  $y_2 = \varepsilon_1 \theta_1 - \varepsilon_1 \beta_1 S_1^{**} - \sigma_1 \alpha_1 S_1^{**}$ . Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz akar-akar persamaan  $|J_3(E^{**}) - I\lambda| = 0$  mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika  $y_1 > 0$  dan  $y_2 > 0$ . Jika  $T_1 < 1$  maka

$$y_2 = \varepsilon_1 \theta_1 - \varepsilon_1 \beta_1 S_1^{**} - \sigma_1 \alpha_1 S_1^{**}$$

$$y_2 = \varepsilon_1 \theta_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_1 \beta_1 S_1^{**} + \sigma_1 \alpha_1 S_1^{**}}{\varepsilon_1 \theta_1} \right)$$

$$y_2 = \varepsilon_1 \theta_1 (1 - T_1)$$

$y_2 > 0$ . Selanjutnya dibuktikan  $y_1 > 0$ . Jika  $T_1 < 1$  maka

$$y_1 = \theta_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 S_1^{**}$$

$$y_1 \geq \theta_1 + \varepsilon_1 - \beta_1 S_1^{**} - \frac{\sigma_1 \alpha_1 S_1^{**}}{\varepsilon_1}$$

$$y_1 \geq \varepsilon_1 + \theta_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_1 \beta_1 S_1^{**} + \sigma_1 \alpha_1 S_1^{**}}{\varepsilon_1 \theta_1} \right)$$

$$y_1 \geq \varepsilon_1 + \theta_1 (1 - T_1)$$

$y_1 > 0$ . Akar-akar persamaan karakteristik  $|J_3(E^{**}) - I\lambda| = 0$  memiliki bagian real negatif jika  $T_1 < 1$ .

Berdasarkan uraian di atas maka titik kesetimbangan  $(E^{**})$  bersifat stabil asimtotik lokal jika  $T_1 < 1$ .

### 3.4 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan ( $\bar{E}$ )

Sifat kestabilan global titik kesetimbangan dapat diketahui dengan mengkonstruksi fungsi Lyapunov. Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$\begin{aligned}
 L(S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2) = & k_1[(S_1 - \bar{S}_1 - \bar{S}_1 \ln \frac{S_1}{\bar{S}_1}) + (I_1 - \bar{I}_1 - \bar{I}_1 \ln \frac{I_1}{\bar{I}_1}) \\
 & + \frac{\alpha_1 \bar{S}_1}{\varepsilon_1} (B_1 - \bar{B}_1 - \bar{I}_1 \ln \frac{B_1}{\bar{B}_1})] \\
 & + k_2[(S_2 - \bar{S}_2 - \bar{S}_2 \ln \frac{S_2}{\bar{S}_2}) + (I_2 - \bar{I}_2 - \bar{I}_2 \ln \frac{I_2}{\bar{I}_2}) \\
 & + \frac{\alpha_2 \bar{S}_2}{\varepsilon_2} (B_2 - \bar{B}_2 - \bar{I}_2 \ln \frac{B_2}{\bar{B}_2})],
 \end{aligned}$$

dengan  $k_1, k_2 > 0$  yang terdefinisi pada  $\Omega$ . Diketahui  $\bar{E} = (\bar{S}_1, \bar{I}_1, \bar{B}_1, \bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{B}_2)$ . Perlu dibuktikan bahwa  $L(S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2)$  merupakan fungsi Lyapunov kuat untuk  $\bar{E}$  yang memenuhi kondisi berikut

a.  $L(\bar{E}) = 0, \bar{E} \in \Omega$ .

$$\begin{aligned}
 L(\bar{E}) = & k_1[(\bar{S}_1 - \bar{S}_1 - \bar{S}_1 \ln \frac{\bar{S}_1}{\bar{S}_1}) + (\bar{I}_1 - \bar{I}_1 - \bar{I}_1 \ln \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_1}) \\
 & + \frac{\alpha_1 \bar{S}_1}{\varepsilon_1} (\bar{B}_1 - \bar{B}_1 - \bar{I}_1 \ln \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_1})] \\
 & + k_2[(\bar{S}_2 - \bar{S}_2 - \bar{S}_2 \ln \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_2}) + (\bar{I}_2 - \bar{I}_2 - \bar{I}_2 \ln \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_2}) \\
 & + \frac{\alpha_2 \bar{S}_2}{\varepsilon_2} (\bar{B}_2 - \bar{B}_2 - \bar{I}_2 \ln \frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_2})] \\
 = & k_1[(0 - \bar{S}_1 \ln(1)) + (0 - \bar{I}_1 \ln(1)) + \frac{\alpha_1 \bar{S}_1}{\varepsilon_1} (0 - \bar{I}_1 \ln(1))] \\
 & + k_2[(0 - \bar{S}_2 \ln(1)) + (0 - \bar{I}_2 \ln(1)) + \frac{\alpha_2 \bar{S}_2}{\varepsilon_2} (0 - \bar{I}_2 \ln(1))] \\
 = & 0.
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa  $L(\bar{E}) = 0$ .

b.  $L(S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2) > 0, \forall (S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2) \neq \bar{E} \in \Omega$ .

$$\begin{aligned}
 L(S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2) &= k_1[(S_1 - \bar{S}_1, \bar{S}_1 \ln \frac{S_1}{\bar{S}_1}) + (I_1 - \bar{I}_1, \bar{I}_1 \ln \frac{I_1}{\bar{I}_1}) \\
 &\quad + \frac{\alpha_1 \bar{S}_1}{\varepsilon_1} (B_1 - \bar{B}_1 - \bar{I}_1 \ln \frac{B_1}{\bar{B}_1})] \\
 &\quad + k_2[(S_2 - \bar{S}_2, \bar{S}_2 \ln \frac{S_2}{\bar{S}_2}) + (I_2 - \bar{I}_2, \bar{I}_2 \ln \frac{I_2}{\bar{I}_2}) \\
 &\quad + \frac{\alpha_2 \bar{S}_2}{\varepsilon_2} (B_2 - \bar{B}_2 - \bar{I}_2 \ln \frac{B_2}{\bar{B}_2})].
 \end{aligned}$$

Misalkan  $f(S_i) = S_i - \bar{S}_i - \bar{S}_i \ln \frac{S_i}{\bar{S}_i}, i = 1, 2$  dan  $f(S_i)$  terdefinisi pada domain  $S_i \in \mathbb{R}^+$  sehingga turunan pertama  $f(S_i)$  terhadap  $S_i$  dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f'(S_i) = 1 - \frac{\bar{S}_i}{S_i}, S_i \in (0, \infty).$$

Titik stasioner diperoleh ketika  $f'(S_i) = 0$ . Nilai  $S$  yang memenuhi  $f'(S_i) = 0$  adalah  $S_i = \bar{S}_i$ , sehingga  $f'(\bar{S}_i) = 0$ . Jika  $S_i \in (0, \bar{S}_i)$  maka berlaku  $f'(\bar{S}_i) < 0$ . Dilain pihak, jika  $S_i \in (\bar{S}_i, \infty)$  maka berlaku  $f'(\bar{S}_i) > 0$ . Oleh karena itu  $f(S_i)$  monoton turun pada selang  $(0, \bar{S}_i)$  dan monoton naik pada selang  $(\bar{S}_i, \infty)$ . Berdasarkan uraian tersebut jelas bahwa  $(\bar{S}_i, 0)$  merupakan titik minimum  $f(S_i)$ . Karena 0 merupakan nilai minimum  $f(S_i)$  maka pasti berlaku  $f(S_i) > 0, \forall S_i \neq \bar{S}_i \in \Omega$ . Hal ini juga berlaku untuk membuktikan  $f(I_i) = I_i - \bar{I}_i - \bar{I}_i \ln \frac{I_i}{\bar{I}_i}$  dan  $f(B_i) = B_i - \bar{B}_i - \bar{I}_i \ln \frac{B_i}{\bar{B}_i}$ . Jadi terbukti bahwa  $L(S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2) > 0$ .

c.  $\frac{dL}{dt} < 0, \forall (S_1, I_1, B_1, S_2, I_2, B_2) \neq \bar{E} \in \Omega$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= k_1[\frac{dS_1}{dt}(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1}) + \frac{I_1}{dt}(1 - \frac{\bar{I}_1}{I_1}) + \frac{\alpha_1 \bar{S}_1}{\varepsilon_1} \frac{B_1}{dt}(1 - \frac{I_1}{B_1})] \\
 &\quad + k_2[\frac{dS_2}{dt}(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2}) + \frac{I_2}{dt}(1 - \frac{\bar{I}_2}{I_2}) + \frac{\alpha_2 \bar{S}_2}{\varepsilon_2} \frac{B_2}{dt}(1 - \frac{I_2}{B_2})],
 \end{aligned}$$

dengan diuraikan kembali seperti yang dipaparkan pada Lampiran 7, maka dapat diperoleh bentuk paling sederhana

sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -a_1 \bar{S}_1 (\Lambda_1 - \alpha_1 \bar{S}_1 \bar{I}_1) \left( \frac{\bar{S}_1}{S_1} + \frac{S_1}{\bar{S}_1} - 2 \right) - a_1 \bar{S}_1 \alpha_1 \bar{S}_1 \bar{I}_1 \left( \frac{S_1 B_1}{I_1 \bar{S}_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1 B_1} + \frac{\varepsilon_1 \bar{S}_1}{\sigma_1 S_1} - 3 \right) - a_2 \bar{S}_2 (\Lambda_2 - \alpha_2 \bar{S}_2 \bar{I}_2) \left( \frac{\bar{S}_2}{S_2} + \frac{S_2}{\bar{S}_2} - 2 \right) \\ &\quad - a_2 \bar{S}_2 \alpha_2 \bar{S}_2 \bar{I}_2 \left( \frac{S_2 B_2}{I_2 \bar{S}_2} + \frac{\sigma_2 I_2}{\varepsilon_2 B_2} + \frac{\varepsilon_2 \bar{S}_2}{\sigma_2 S_2} - 3 \right) \\ &\quad - a_1 a_2 \bar{S}_1 \bar{S}_2 \left( \frac{S_2 \bar{S}_1}{S_1 \bar{S}_2} + \frac{S_1 \bar{S}_2}{S_2 \bar{S}_1} - 2 \right) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\bar{S}_1}{S_1} + \frac{S_1}{\bar{S}_1} - 2 &= \frac{\bar{S}_1^2 + S_1^2 - 2S_1 \bar{S}_1}{S_1 \bar{S}_1} \\ &= \frac{(\bar{S}_1 - S_1)^2}{S_1 \bar{S}_1} \geq 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh  $\left( \frac{\bar{S}_1}{S_1} + \frac{S_1}{\bar{S}_1} - 2 \right) \geq 0$ . Dengan cara yang sama maka diperoleh  $\left( \frac{\bar{S}_2}{S_2} + \frac{S_2}{\bar{S}_2} - 2 \right) \geq 0$  dan  $\left( \frac{S_2 \bar{S}_1}{S_1 \bar{S}_2} + \frac{S_1 \bar{S}_2}{S_2 \bar{S}_1} - 2 \right) \geq 0$ .

Selanjutnya akan dibuktikan  $\left( \frac{S_1 B_1}{I_1 \bar{S}_1} + \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1 B_1} + \frac{\varepsilon_1 \bar{S}_1}{\sigma_1 S_1} - 3 \right) \geq 0$  dengan menggunakan pertaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri yang dijelaskan pada teorema 2.2.

Misalkan  $c_1 = \frac{S_1 B_1}{I_1 \bar{S}_1}$ ,  $c_2 = \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1 B_1}$ ,  $c_3 = \frac{\varepsilon_1 \bar{S}_1}{\sigma_1 S_1}$ , maka berlaku

$$\begin{aligned} \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} &\geq \sqrt[3]{c_1 c_2 c_3} \\ \frac{\frac{S_1 B_1}{I_1 \bar{S}_1} + \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1 B_1} + \frac{\varepsilon_1 \bar{S}_1}{\sigma_1 S_1}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{S_1 B_1}{I_1 \bar{S}_1} \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1 B_1} \frac{\varepsilon_1 \bar{S}_1}{\sigma_1 S_1}} \\ \frac{S_1 B_1}{I_1 \bar{S}_1} + \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1 B_1} + \frac{\varepsilon_1 \bar{S}_1}{\sigma_1 S_1} &\geq 3. \end{aligned}$$

Sehingga jelas terbukti  $\left( \frac{S_1 B_1}{I_1 \bar{S}_1} + \frac{\sigma_1 I_1}{\varepsilon_1 B_1} + \frac{\varepsilon_1 \bar{S}_1}{\sigma_1 S_1} - 3 \right) \geq 0$ . Dengan cara yang sama maka diperoleh  $\left( \frac{S_2 B_2}{I_2 \bar{S}_2} + \frac{\sigma_2 I_2}{\varepsilon_2 B_2} + \frac{\varepsilon_2 \bar{S}_2}{\sigma_2 S_2} - 3 \right) \geq 0$

Dengan demikian, jika  $(\Lambda_1 - \alpha_1 \bar{S}_1 \bar{I}_1) \geq 0$  dan  $(\Lambda_2 - \alpha_2 \bar{S}_2 \bar{I}_2) \geq 0$ , maka  $\frac{dL}{dt} < 0$ .

Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan ( $\bar{E}$ ) bersifat stabil asimtotik global jika  $(\Lambda_1 - \alpha_1 \bar{S}_1 \bar{I}_1) \geq 0$  dan  $(\Lambda_2 - \alpha_2 \bar{S}_2 \bar{I}_2) \geq 0$ .

Syarat eksistensi dan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.6) dirangkum pada Tabel (3.1).

Tabel 3.1: Titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan kestabilan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E^0$	Tidak ada	Stabil Asimtotik Lokal	$R_0^{(1)} < 1$ dan $R_0^{(2)} < 1$
$E^*$	$R_0^{(1)} > 1$	Stabil Asimtotik Lokal	$T_2 < 1$
$E^{**}$	$R_0^{(2)} > 1$	Stabil Asimtotik Lokal	$T_1 < 1$
$\bar{E}$	$T_1 > 1$ dan $T_2 > 1$	Stabil Asimtotik Global	$(\Lambda_1 - \alpha_1 \bar{S}_1 \bar{I}_1) \geq 0$ $(\Lambda_2 - \alpha_2 \bar{S}_2 \bar{I}_2) \geq 0$

### 3.5 Simulasi Numerik dan Interpretasi Hasil Analisis

Pada subbab ini ditunjukkan simulasi numerik solusi sistem (3.6) untuk mengilustrasikan hasil analisis pada subbab sebelumnya. Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode Rungge-Kutta orde empat dan *software* Matlab. Berdasarkan Tabel (3.1) terdapat empat titik kesetimbangan dengan syarat kestabilan tertentu. Untuk memperlihatkan kestabilan semua titik kesetimbangan beberapa nilai parameter diambil tetap untuk semua simulasi, sedangkan nilai parameter  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  diubah-ubah sehingga memenuhi empat kondisi yang berbeda sesuai Tabel (3.1). Beberapa nilai parameter yang tetap disajikan dalam Tabel (3.2) sebagai berikut

Tabel 3.2: Nilai parameter

Parameter	Nilai
$\Lambda_1$	40
$\Lambda_2$	45
$\mu_1$	0.09
$\mu_2$	0.06
$\beta_1$	0.000022
$\beta_2$	0.000025
$\gamma_1$	0.33
$\gamma_2$	0.35
$a_1$	0.032
$a_2$	0.025
$\sigma_1$	50
$\sigma_2$	52
$\delta_1$	0.03
$\delta_2$	0.034
$\varepsilon_1$	0.8
$\varepsilon_2$	0.7

Hasil simulasi ditunjukkan dengan potret fase pada ruang ruang  $S_1I_1B_1$  dan  $S_2I_2B_2$  dengan beberapa nilai awal yang berbeda. Garis-garis orbit menunjuk ke titik kesetimbangan tertentu berdasarkan syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sesuai Tabel (3.1).

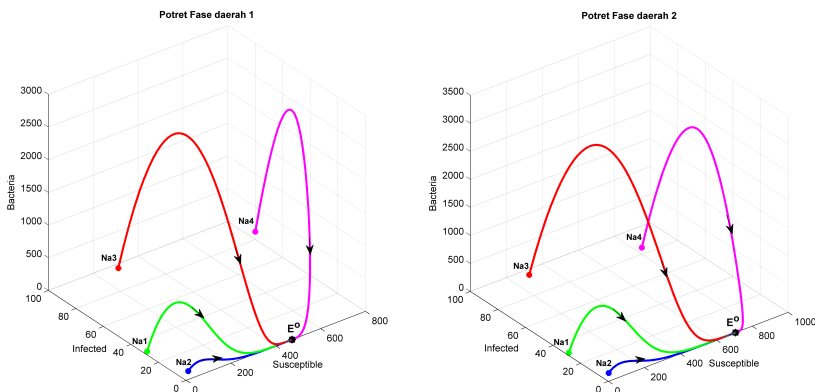
### 3.5.1 Simulasi untuk $R_0^{(1)} < 1$ dan $R_0^{(2)} < 1$

Pada simulasi ini diambil nilai parameter  $\alpha_1 = 0.0000024$  dan  $\alpha_2 = 0.0000016$ , sehingga diperoleh  $R_0^{(1)} = 0.1807 < 1$  dan  $R_0^{(2)} = 0.2292 < 1$ . Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut, maka hanya titik  $E^0 = (472.8, 0, 0, 707.4, 0, 0)$  yang eksis. Perilaku solusi dengan empat nilai awal yang berbeda, yaitu

$$\begin{aligned}
 \text{Na1} &= (10, 30, 15, 10, 30, 15), \\
 \text{Na2} &= (40, 5, 20, 40, 5, 20), \\
 \text{Na3} &= (200, 50, 150, 200, 50, 150), \text{ dan} \\
 \text{Na4} &= (800, 80, 120, 800, 80, 120)
 \end{aligned}$$

dapat dilihat pada Gambar 3.2.





Gambar 3.2: Potret fase untuk  $R_0^{(1)} < 1$  dan  $R_0^{(2)} < 1$

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $E^0$ . Oleh karena itu, jika  $R_0^{(1)} < 1$  dan  $R_0^{(2)} < 1$  maka titik kesetimbangan  $E^0$  bersifat stabil asimtotik lokal.

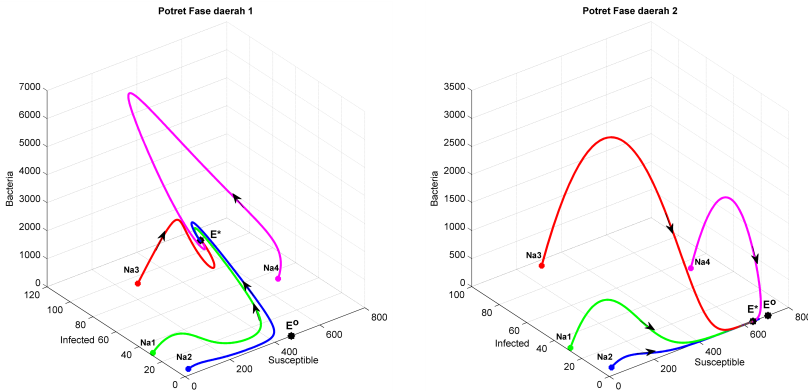
### 3.5.2 Simulasi untuk $R_0^{(1)} > 1$ dan $R_0^{(2)} < 1$

Pada simulasi ini diambil nilai parameter  $\alpha_1 = 0.000024$  dan  $\alpha_2 = 0.0000016$ , sehingga diperoleh  $R_0^{(1)} = 1.5992 > 1$  dan  $R_0^{(2)} = 0.0588 < 1$  serta  $T_1 = 9.4516 > 1$  dan  $T_2 = 0.0532 < 1$ . Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut, maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik

$$E^0 = (472.8, 0, 0, 707.4, 0, 0) \text{ dan } E^* = (295.7, 44.3, 2770.4, 640.7, 0, 0).$$

Berdasarkan Tabel (3.1) titik kesetimbangan  $E^0$  bersifat tidak stabil karena  $R_0^{(1)} > 1$ , sedangkan titik kesetimbangan  $E^*$  memenuhi syarat kestabilan lokal yaitu  $T_2 = 0.0532 < 1$ . Perilaku solusi dengan empat nilai awal yang berbeda, yaitu

$$\begin{aligned} \text{Na1} &= (10, 30, 15, 10, 30, 15), \\ \text{Na2} &= (40, 5, 20, 40, 5, 20), \\ \text{Na3} &= (200, 50, 150, 200, 50, 150), \text{ dan} \\ \text{Na4} &= (670, 50, 100, 670, 50, 100) \end{aligned}$$



Gambar 3.3: Potret fase untuk  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} < 1$

dapat dilihat pada Gambar 3.3.

Gambar 3.3 yang menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $E^*$ . Oleh karena itu, jika  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} < 1$  maka titik kesetimbangan  $E^*$  bersifat stabil asimtotik lokal.

### 3.5.3 Simulasi untuk $R_0^{(1)} < 1$ dan $R_0^{(2)} > 1$

Pada simulasi ini diambil nilai parameter  $\alpha_1 = 0.0000024$  dan  $\alpha_2 = 0.000016$ , sehingga diperoleh  $R_0^{(1)} = 0.1807 < 1$  dan  $R_0^{(2)} = 1.9336 > 1$  serta  $T_1 = 0.1540 < 1$  dan  $T_2 = 4.1392 > 1$ . Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut, maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik

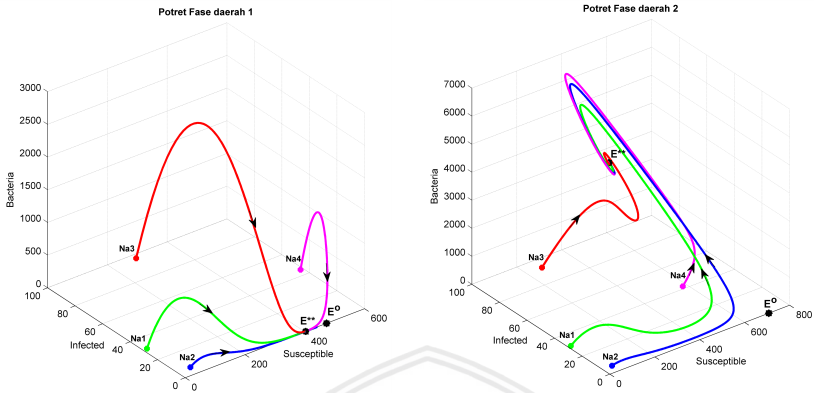
$$E^0 = (472.8, 0, 0, 707.4, 0, 0) \text{ dan}$$

$$E^{**} = (402.8, 0, 0, 365.9, 60.3, 4482.7).$$

Berdasarkan Tabel (3.1) titik kesetimbangan  $E^0$  bersifat tidak stabil karena  $R_0^{(2)} > 1$ , sedangkan titik kesetimbangan  $E^{**}$  memenuhi syarat kestabilan lokal yaitu  $T_1 = 0.1540 < 1$ . Perilaku solusi dengan empat nilai awal yang berbeda, yaitu

- Na1 = (10, 30, 15, 10, 30, 15),
- Na2 = (40, 5, 20, 40, 5, 20),
- Na3 = (200, 50, 150, 200, 50, 150), dan
- Na4 = (570, 40, 100, 570, 40, 100)

dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4: Potret fase untuk  $R_0^{(1)} < 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$

Gambar 3.4 yang menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $E^{**}$ . Oleh karena itu, jika  $R_0^{(1)} < 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$  maka titik kesetimbangan  $E^{**}$  bersifat stabil asimtotik lokal.

### 3.5.4 Simulasi untuk $R_0^{(1)} > 1$ dan $R_0^{(2)} > 1$

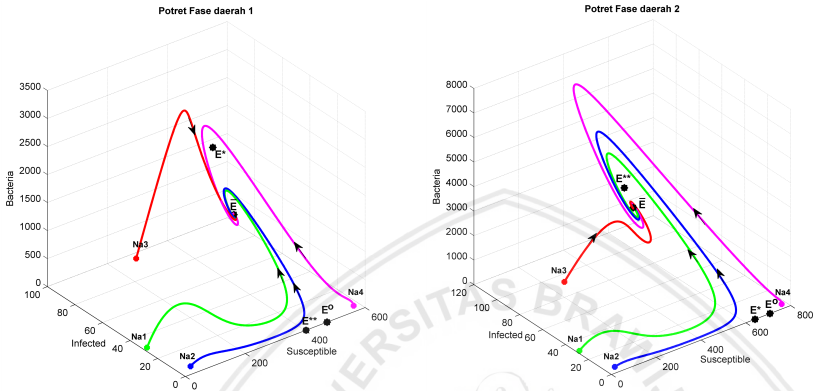
Pada simulasi ini diambil nilai parameter  $\alpha_1 = 0.000024$ , dan  $\alpha_2 = 0.000016$ , sehingga diperoleh  $R_0^{(1)} = 1.5992 > 1$  dan  $R_0^{(2)} = 1.9336 > 1$  serta  $T_1 = 1.3625 > 1$  dan  $T_2 = 1.7513 > 1$ . Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut, maka semua titik kesetimbangan eksis, yaitu titik

$$\begin{aligned} E^0 &= (472.8, 0, 0, 707.4, 0, 0), \\ E^* &= (295.7, 44.3, 2770.4, 640.7, 0, 0), \\ E^{**} &= (402.8, 0, 0, 365.9, 60.3, 4482.7), \text{ dan} \\ \bar{E} &= (295.7, 29.1, 1816.1, 365.9, 52.6, 3908.9). \end{aligned}$$

Nilai parameter yang diberikan memenuhi syarat kestabilan global titik kesetimbangan  $\bar{E}$ , yaitu  $\Lambda_1 - \alpha_1 \bar{S}_1 \bar{I}_1 = 39.79348312 \geq 0$  dan  $\Lambda_2 - \alpha_2 \bar{S}_2 \bar{I}_2 = 44.69205856 \geq 0$  sesuai Tabel (3.1), sehingga titik kesetimbangan  $\bar{E}$  bersifat stabil asimtotik global. Perilaku solusi dengan empat nilai awal yang berbeda, yaitu

$$\begin{aligned} Na1 &= (10, 30, 15, 10, 30, 15), \\ Na2 &= (40, 5, 20, 40, 5, 20), \\ Na3 &= (200, 50, 150, 200, 50, 150), \text{ dan} \\ Na4 &= (580, 4, 10, 580, 4, 10) \end{aligned}$$

dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5: Potret fase untuk  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$

Gambar 3.5 yang menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit menuju ke titik kesetimbangan  $\bar{E}$ . Oleh karena itu, jika  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$  titik kesetimbangan  $\bar{E}$  bersifat stabil asimtotik global.

## BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut

1. Model epidemi kolera dengan migrasi antar dua wilayah berbentuk sistem *autonomous* nonlinear enam dimensi yang menyatakan perubahan populasi individu rentan, populasi individu terinfeksi, dan konsentrasi bakteri di kedua wilayah tersebut.
2. Model tersebut memiliki empat titik kesetimbangan. Salah satunya adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan tiga titik lainnya eksis dengan syarat tertentu.
3. Terdapat dua angka reproduksi dasar, yaitu  $R_0^{(1)}$  dan  $R_0^{(2)}$ . Jika  $R_0^{(1)} < 1$  dan  $R_0^{(2)} < 1$  maka hanya titik  $E^0$  yang eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal. Jika  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} < 1$  maka titik  $E^0$  eksis namun tidak stabil, sedangkan titik  $E^*$  eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal. Jika  $R_0^{(1)} < 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$  maka titik  $E^0$  eksis namun tidak stabil, sedangkan titik  $E^{**}$  eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal. Jika  $T^{(1)} > 1$  dan  $T^{(2)} > 1$  maka  $R_0^{(1)} > 1$  dan  $R_0^{(2)} > 1$  sehingga semua titik kesetimbangan eksis namun hanya satu titik yang stabil, yaitu titik  $\bar{E}$  yang bersifat stabil asimtotik global.
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

### 4.2 Saran

Pada penelitian berikutnya disarankan untuk memodifikasi model dengan mengasumsikan bahwa individu yang sembuh dapat menjadi individu rentan kembali.



**DAFTAR PUSTAKA**

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Berge, T., S. Bowong, dan J. M. S. Lubuma. 2015. Global Stability of a Two-patch Cholera Model with Fast and Slow Transmissions. *Mathematics and Computers in Simulation*. Vol. 113. Hal. 142-164.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley Sons Inc. United State of America.
- Codeco, C. T. 2001. Endemic and Epidemic Dynamics of Cholera: the Role of the Aquatic Reservoir. *BMC Infectious Diseases*. Vol 1. Hal. 1-14.
- Driessche, P. V. D. dan J. Watmough. 2002. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. Vol. 180. Hal. 29-48.
- Eisenberg, M. C., Z. Shuai, J. H. Tien, dan P. V. D. Driessche. 2013. A cholera Model in a Patchy Environment with Water and Human Movement. *Mathematical Biosciences*. Vol. 246. Hal. 105-112.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi kedua. Terjemahan Widiarti Santoso. Erlangga. Jakarta.
- Golub, G. H. dan C. F. Loan. 1996. *Matrix Computations*. Third Edition. The Johns Hopkins. London.
- Kermack, W. O. dan A. G. McKendrick. 1927. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal*

*Society of London*. Vol. 115. No. 772. Hal. 700-721.

Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi kelima. Terjemahan Alit Bondan. Erlangga. Jakarta.

Mercer, P.R. 2014. *More Calculus of a Single Variable*. Springer-Verlag. New York.

Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology: An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.

Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.

Njagarah, J. B. H. dan F. Nyabadza. 2014. A Metapopulation Model for Cholera Transmission Dynamics Between Communities Linked by Migration. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 241. Hal. 317-331.

Ouellette, D. V. 1981. Schur Complements and Statistics. *Linear Algebra and Appl.* Vol. 36. Hal. 187-295.

Wang, J. dan S. Liao. 2012. A Generalized Cholera Model and Epidemic-endemic Analysis. *Journal of Biological Dynamics*. Vol. 6. No. 2. Hal. 568-589.