#### ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TOXOPLASMOSIS PADA KUCING DAN MANUSIA DENGAN JUMLAH POPULASI BERVARIASI

#### SKRIPSI

oleh: Fitroh Aulani 145090401111034



JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG 2018

#### ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TOXOPLASMOSIS PADA KUCING DAN MANUSIA DENGAN JUMLAH POPULASI BERVARIASI

#### SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

> oleh: Fitroh Aulani 145090401111034



#### JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG 2018



# **BRAWIJAY**

ii

#### LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

#### ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TOXOPLASMOSIS PADA KUCING DAN MANUSIA DENGAN JUMLAH POPULASI BERVARIASI

oleh: Fitroh Aulani 145090401111034

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 15 Februari 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Nur Shofianah, S.Si, M.Si, Ph.D NIP. 198411242009122006

Mengetahui, Ketua Jurusan Matematika Fakultas FMIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D NIP. 197509082000031003



#### LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Fitroh Aulani		
NIM	:	145090401111	034	
Jurusan	:	Matematika		
Penulis Skripsi berjudul	:	Analisis I	Dinamik	Model
2 0		Penyebaran		Penyakit
		Toxoplasmosis	pada	Kucing
		dan Manusia	dengan	Jumlah
		Populasi Berv	ariasi	

dengan ini menyatakan bahwa:

1. isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai referensi,

2. apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 15 Februari 2018 yang menyatakan,

<u>Fitroh Aulani</u> NIM. 145090401111034



#### ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TOXOPLASMOSIS PADA KUCING DAN MANUSIA DENGAN JUMLAH POPULASI BERVARIASI

#### ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model penyebaran penyakit Toxoplasmosis pada kucing dan manusia dengan jumlah populasi manusia bervariasi. Model tersebut dinyatakan dalam sistem otonomus nonlinear lima dimensi yang terdiri dari dua populasi, yaitu populasi manusia dan populasi kucing. Populasi manusia dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu manusia rentan, manusia terinfeksi, dan manusia terkendali sedangkan populasi kucing dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kucing rentan dan kucing terinfeksi. Sistem tersebut disederhanakan dalam bentuk sistem otonomus nonlinear tiga dimensi yang ekuivalen sehingga mudah dianalisis. Pada sistem tiga dimensi tersebut cukup dipandang tiga variabel yang menyatakan proporsi manusia rentan, proporsi manusia terinfeksi, dan proporsi kucing rentan. Berdasarkan hasil analisis diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dengan syarat eksistensinya. Kestabilan global titik kesetimbangan dianalisis menggunakan fungsi Lyapunov. Syarat eksistensi, kestabilan lokal, dan kestabilan global titik kesetimbangan bergantung pada bilangan reproduksi dasar  $(R_0)$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemik eksis jika  $R_0 > 1$ . Jika  $R_0 < 1$  titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik global, sebaliknya jika  $R_0 > 1$  titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik global. Simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis yang diperoleh.

**Kata kunci:** penyakit *Toxoplasmosis*, populasi manusia bervariasi, kestabilan global, fungsi *Lyapunov*, angka reproduksi dasar.



#### DYNAMICAL ANALYSIS OF A MODEL OF TOXOPLASMOSIS DISEASE IN CAT AND HUMAN WITH VARYING SIZE POPULATIONS

#### ABSTRACT

This final project discusses a dynamical analysis on a model of toxoplasmosis disease in cat and human with varying population size. The model is described by a nonlinear autonomous system of five dimensions consist of two populations, human population and cat population. Human population is divided into three subpopulations. susceptible, infected, and controlled, while the cat population into two subpopulations, susceptible and infected. This system has simplified to the equivalent nonlinear autonomous system of three dimensions so that easy to analyzed. The system of three dimensions is observed on three variables consist of proportion of susceptible human, proportion of infected human, and proportion of susceptible cat. Analysis of the model shows that there are disease free equilibrium and endemic equilibrium points. Global stability have been analized by Lyapunov function. Existence, local stability and global stability of the equilibrium points depend on the basic reproduction number  $(R_0)$ . The disease free equilibrium point always exist, the endemic equilibrium point exist if  $\hat{R}_0 > 1$ . If  $\hat{R}_0 < 1$  the disease free equilibrium point is global asymptotically stable, otherwise the endemic equilibrium point is global asymptotically stable. Numerical solution results agree with the theoretical results.

**Keywords:** toxoplasmosis disease, varying human population, global stability, Lyapunov function, basic reproduction number.



# **BRAWIJAY**

#### KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang "ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN berjudul PENYAKIT TOXOPLASMOSIS PADA KUCING DAN MANUSIA JUMLAH POPULASI BERVARIASI". DENGAN Penulis menyadari bahwa dalam proses penyusunan skripsi ini terdapat banyak pihak yang telah memberikan bantuan, bimbingan, dan motivasi. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih kepada:

- 1. Nur Shofianah, S.Si, M.Si, Ph.D selaku dosen pembimbing yang telah memberikan nasihat, pengarahan, semangat, saran, dan kritik yang sangat bermanfaat serta selalu sabar dalam menjelaskan materi kepada penulis selama proses penyusunan hingga skripsi ini dapat diselesaikan,
- 2. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si dan Indah Yanti, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam penyusunan skripsi ini,
- 3. Drs. Marsudi, MS selaku Dosen Penasihat Akademik atas bimbingan dan saran yang telah diberikan,
- 4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala bantuan yang telah diberikan,
- 5. Segenap dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat bagi penulis serta segenap staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan,
- 6. Ayah (Jamaluddin), Ibu (Nuryati), Kakak (Haris), dan Adik (Ardi) yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, dan motivasi kepada penulis,
- 7. Keluarga Besar Matematika 2014 yang selalu memberikan semangat,
- 8. Sahabat-sahabat penulis, yaitu Aini, Deby, Juwita, dan Viva yang selalu memberikan semangat, menghibur penulis, dan selalu memotivasi,

repository.ub.ac.i

#### 9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah, rahmat, dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu kelancaran penulisan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun agar skripsi ini menjadi lebih baik dan dapat disampaikan melalui email fitrohaulani96@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan memajukan dunia pendidikan.



#### DAFTAR ISI

HA	LAN	1AN JUDUL	i
HA	LAN	IAN PENGESAHAN	iii
HA	LAN	IAN PERNYATAAN	v
AB	STR	AK	vii
AB	STR	ACT	ix
KA	ATA P	PENGANTAR	xi
DA	FTA	R ISI	xiii
DA	FTA	R TABEL	XV
DA	FTA	R GAMBAR	xvii
Ι	PEN	DAHULUAN	1
	1.1.	Latar Belakang	1
	1.2.	Rumusan Masalah	2
	1.3.	Tujuan Penulisan	2
	1.4.	Batasan Masalah	3
Π	DAS	<b>AR TEORI</b>	5
	2.1.	Sistem Dinamik	5
		2.1.1. Sistem otonomus linear	6
		2.1.2. Sistem otonomus nonlinear	9
		2.1.3. Analisis kestabilan global	11
	2.2.	Toxoplasmosis	13
	2.3.	Model Penyebaran Penyakit Toxoplasmosis pada	
		Manusia dan Kucing dengan Jumlah Populasi Konstan	14
	2.4.	Angka Reproduksi Dasar	15
ш	HAS	IL DAN PEMBAHASAN	17
	3.1.	Konstruksi Model	17
	3.2.	Titik Kesetimbangan	24
	3.3.	Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan	25
		3.3.1. Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas	26
		3.3.2 Kestahilan lokal titik kesetimbangan andomik	20 26
		5.5.2. Restautian iokai uuk keseunivangan enuenik .	20

3.4. Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan	30
3.4.1. Kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit	30
3.4.2. Kestabilan global titik kesetimbangan endemik	31
3.5. Angka Reproduksi Dasar	32
3.6. Simulasi Numerik	33
3.6.1. Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$	33
3.6.2. Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$	36
<b>IV PENUTUP</b>	39
4.1. Kesimpulan	39
4.2. Saran	39
DAFTAR PUSTAKA	41



#### DAFTAR TABEL

2.1	Kestabilan titik kesetimbangan sistem dua dimensi	
	berdasarkan trace dan determinan matriks koefisien	9
3.1	Nilai parameter	33





### DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram kompartemen penyakit Toxoplasmosis pada	
	kucing dan manusia dengan populasi konstan	14
3.1	Diagram kompartemen penyakit Toxoplasmosis	18
3.2	Solusi numerik untuk $R_0 = 0.505 < 1$	34
3.3	Potret fase untuk $R_0 = 0.505 < 1$	35
3.4	Solusi numerik untuk $R_0 = 1.5152 > 1$ dengan $\beta_2 =$	
	$0.03 \operatorname{dan} p_2 = 0.3  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  $	36
3.5	Solusi numerik untuk $R_0 = 45.4545 > 1$ dengan $\beta_2 =$	
	$0.03 \text{ dan } p_2 = 0.01 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	36
3.6	Potret fase untuk $R_0 = 1.5152 > 1$	37





#### BAB I PENDAHULUAN

#### 1.1. Latar Belakang

Toxoplasmosis merupakan salah satu penyakit yang pada umumnya menginfeksi manusia dan hewan berdarah panas seperti domba, sapi, babi, mamalia laut, unggas, dan kuda. Penyakit Toxoplasmosis disebabkan oleh parasit Toxoplasma Gondii (T. Gondii). Kucing merupakan inang definitif T. Gondii, yaitu makhluk hidup yang berperan sebagai tempat parasit hidup dan berkembang. Manusia atau hewan berdarah panas merupakan inang perantara T. Gondii, yaitu makhluk hidup yang menjadi perantara penularan penyakit Toxoplasmosis. Pada tahun 1908, parasit T. Gondii ditemukan pertama kali oleh Nicole dan Manceaux pada organ limfa dan hati hewan pengerat Ctenodactylus Gundi di Tunisia, Afrika, dan pada kelinci di Brazil (Dubey, 2010).

Penyakit *Toxoplasmosis* tersebar ke seluruh dunia termasuk ke Indonesia. Di beberapa daerah di Indonesia angka kejadian penyakit ini bervariasi antara 2% hingga 63% (Gandahusada, 1991). Penyakit *Toxoplasmosis* bukanlah suatu penyakit yang fatal, tetapi bila tidak ditanggulangi dengan baik dapat menimbulkan masalah. Penyakit *Toxoplasmosis* tetap harus diwaspadai karena terbukti dapat menimbulkan kelainan yang nyata pada penderita dengan status imun yang rendah (Palgunadi, 2011). Berdasarkan fakta tersebut, dibutuhkan model matematika untuk mempelajari dan mengetahui faktor yang mempengaruhi penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* di masa depan.

Pada tahun 2002, Mateus-Pinilla dkk. melakukan simulasi numerik yang menggambarkan penyebaran parasit *Toxoplasma Gondii* pada populasi kucing. Kemudian Aranda dkk. (2008), mengkonstruksi model SIC untuk mengkaji penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* pada manusia. Model tersebut membagi populasi manusia menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (*Susceptible*), subpopulasi terinfeksi (*Infected*), dan subpopulasi terkendali (*Controlled*). Model tersebut hanya membahas transmisi vertikal yang terjadi pada manusia.

Pada tahun 2009, Gonzalez-Parra dkk. mengembangkan dan menganalisis model penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* pada populasi manusia dan kucing. Pada model tersebut, dipandang lima subpopulasi, yaitu tiga subpopulasi manusia dan dua subpopulasi kucing. Subpopulasi manusia terdiri dari subpopulasi rentan (*Susceptible*), subpopulasi terinfeksi (*Infected*), dan subpopulasi

terkendali (*Controlled*), sedangkan subpopulasi kucing terdiri dari subpopulasi rentan (*Susceptible*) dan subpopulasi terinfeksi (*Infected*). Diasumsikan bahwa laju kelahiran pada populasi manusia dan kucing sama dengan laju kematiannya. Transmisi vertikal terjadi pada manusia dan kucing dan transmisi horizontal penyakit *Toxoplasmosis* hanya terjadi pada manusia jika terjadi kontak antara manusia rentan dengan kucing terinfeksi.

Kemudian Yongzhen dkk. (2017) memodifikasi model yang telah dibahas oleh Gonzalez-Parra dkk. Berbeda dari penelitian sebelumnya, Yongzhen dkk. mempertimbangkan adanya pertumbuhan pada populasi manusia karena kelahiran dan kematian, dan tidak mempertimbangkan adanya pertumbuhan pada populasi kucing.

Skripsi ini mengkaji ulang model penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* pada manusia dan kucing dengan adanya variasi jumlah populasi manusia yang telah dibahas oleh Yongzhen dkk. (2017). Analisis yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan eksistensi titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan, dan penentuan angka reproduksi dasar. Selain itu juga dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang diperoleh.

#### 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

- 1. Bagaimana konstruksi model penyebaran *Toxoplasmosis* pada kucing dan manusia dengan jumlah populasi manusia bervariasi?
- 2. Bagaimana titik kesetimbangan dan syarat eksistensi titik kesetimbangan model?
- 3. Bagaimana hasil analisis kestabilan model?
- 4. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi solusi model?

#### 1.3. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan tersebut, tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

- 1. Mengkonstruksi model penyebaran *Toxoplasmosis* pada kucing dan manusia dengan jumlah populasi manusia bervariasi.
- 2. Menentukan titik kesetimbangan dan syarat eksistensi titik kesetimbangan model.
- 3. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model.
- 4. Menginterpretasikan hasil simulasi model.

#### 1.4. Batasan Masalah

Model yang dikonstruksi dibatasi oleh asumsi-asumsi berikut.

- 1. Jumlah populasi kucing konstan.
- 2. Jumlah populasi manusia bervariasi.
- 3. Laju kelahiran manusia lebih besar dari laju kematian.
- 4. Transmisi horizontal pada manusia hanya terjadi karena adanya kontak antara kucing terinfeksi dengan manusia rentan.
- 5. Transmisi vertikal terjadi pada manusia dan kucing.
- 6. Subpopulasi manusia pada kelas terkendali tidak akan terinfeksi kembali.





**SRAWIJAY** 

#### BAB II DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan teori-teori yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan.

#### 2.1. Sistem Dinamik

Menurut Nagle, dkk. (2012) sistem dinamik adalah suatu sistem yang kondisinya dapat diketahui di masa yang akan datang apabila diberikan kondisi di masa sekarang atau masa lalu. Terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskret memiliki bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \lor t \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

sedangkan sistem dinamik kontinu memiliki bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Suatu sistem persamaan diferensial biasa yang berbentuk

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, x_3), 
\frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, x_3), 
\frac{dx_3}{dt} = F_3(x_1, x_2, x_3),$$
(2.1)

dengan fungsi  $F_1, F_2$ , dan  $F_3$  tidak bergantung secara eksplisit pada t, disebut sistem otonomus berdimensi tiga.

(Finizio dan Ladas, 1982)

#### Definisi 2.1.1 (Titik kesetimbangan sistem otonomus)

Titik  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  merupakan titik kesetimbangan sistem otonomus (2.1) jika  $F_1(\vec{x}^*) = F_2(\vec{x}^*) = F_3(\vec{x}^*) = 0.$ 

(Meiss, 2007)

#### Definisi 2.1.2 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus)

Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat

1. stabil, jika  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon, \forall t \ge 0,$$

2. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan bersifat stabil dan  $\exists \delta_0 > 0$  sedemikian sehingga sebuah solusi sistem  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

bersifat

$$\lim_{t\to\infty}\vec{x}(t)=\vec{x}^*$$

3. tidak stabil, jika titik kesetimbangan tersebut tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan Diprima, 2012)

#### 2.1.1. Sistem otonomus linear

Perhatikan sistem otonomus linear tiga dimensi

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$
(2.2)

Sistem (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},\tag{2.3}$$

repository.up.ac.id

dengan

$$\vec{x} = \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \operatorname{dan} A = \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right].$$

Titik kesetimbangan sistem otonomus (2.2) ditentukan dengan cara menyelesaikan persamaan  $A\vec{x} = \vec{0}$ . Apabila  $|A| \neq 0$ , maka  $\vec{x}^* = \vec{0}$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem tersebut. Sifat kestabilan titik kesetimbangan ditentukan berdasarkan nilai eigen atau akar-akar persamaan karakteristik  $|A - \lambda I| = 0$ .

(Boyce dan Diprima, 2012)

# Teorema 2.1.3 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear)

Misalkan  $\lambda_n$  dengan n = 1, 2, 3, adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem (2.2), dengan  $|A| \neq 0$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = \vec{0}$  bersifat

- 1. stabil asimtotik, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen memiliki bagian riil negatif,
- 2. stabil, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen memiliki bagian riil tak positif,
- 3. tidak stabil, jika terdapat nilai eigen yang memiliki bagian riil positif.

(Finizio dan Ladas, 1982)

Perhatikan sistem otonomus linear dua dimensi

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy.$$
(2.4)

Sistem tersebut dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{x}$$

dengan

**BRAWIJAYA** 

$$H = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \operatorname{dan} \vec{x} = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right).$$

Titik kesetimbangan sistem otonomus (2.4) ditentukan dengan cara menyelesaikan persamaan  $H\vec{x} = \vec{0}$ . Apabila  $|H| \neq 0$ , maka  $\vec{x}^* = \vec{0}$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem tersebut. Sifat kestabilan titik kesetimbangan ditentukan berdasarkan nilai eigen atau akar-akar persamaan karakteristik

$$|H - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

yaitu

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc) = 0.$$

Persamaan karakteristik tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^2 - tr(H)\lambda + |H| = 0, \qquad (2.5)$$

CINO DR

dengan  $tr(H) = a + d \operatorname{dan} |H| = ad - bc$ . Dari persamaan (2.5) dapat ditentukan nilai eigen matriks H, yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(H) \pm \sqrt{D}}{2}$$
, dengan  $D = (tr(H))^2 - 4|H|$ .

Nilai  $\lambda_1, \lambda_2$  bergantung pada nilai trace dan determinan matriks H. Sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus (2.4) berdasarkan nilai trace dan determinan matriks H ditunjukkan pada Tabel 2.1.

H	tr(H)	D	Nilai eigen	Jenis Kestabilan
	> 0	$\geq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil
		< 0	$\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta, \\ \alpha > 0$	Huak Stabil
> 0	= 0	< 0	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	Stabil
	< 0	$\geq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik
		< 0	$\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta, \\ \alpha < 0$	Stabil Asimotik
< 0	bebas	> 0	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Tidak Stabil

Tabel 2.1 Kestabilan titik kesetimbangan sistem dua dimensi berdasarkan trace dan determinan matriks koefisien

(Panfilov, 2004)

#### 2.1.2. Sistem otonomus nonlinear

Sistem otonomus (2.1) dengan  $F_1, F_2, F_3$  merupakan fungsi nonlinear disebut sistem otonomus nonlinear tiga dimensi. Sistem (2.1) dapat didekati oleh sistem otonomus linear di sekitar titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ . Hal tersebut dapat ditunjukkan dengan melakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  sehingga fungsi  $F_1, F_2, F_3$  dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$F_{i}(\vec{x}) = F_{i}(\vec{x}^{*}) + \frac{\partial F_{i}(\vec{x}^{*})}{\partial x_{1}}(x_{1} - x_{1}^{*}) + \frac{\partial F_{i}(\vec{x}^{*})}{\partial x_{2}}(x_{2} - x_{2}^{*}) + \frac{\partial F_{i}(\vec{x}^{*})}{\partial x_{3}}(x_{3} - x_{3}^{*}) + \eta_{i}(\vec{x})$$

dengan  $\eta_i(\vec{x})$  adalah suku sisa, i = 1, 2, 3. Hampiran orde satu terhadap  $F_i$  menghasilkan suku sisa yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}^*}\frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan  $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, x_3 - x_3^*)^T$ .

Selanjutnya, diterapkan

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 - x_1^*), \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2 - x_2^*), \frac{dx_3}{dt} = \frac{d}{dt}(x_3 - x_3^*)$$

terhadap sistem otonomus nonlinear (2.1), maka sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1} - x_{1}^{*} \\ x_{2} - x_{2}^{*} \\ x_{3} - x_{3}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1}(\vec{x}^{*}) \\ F_{2}(\vec{x}^{*}) \\ F_{3}(\vec{x}^{*}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{1}(\vec{x}^{*}) \\ \partial X_{1}} \\ \frac{\partial F_{2}(\vec{x}^{*}) }{\partial x_{1}} \\ \frac{\partial F_{3}(\vec{x}^{*}) }{\partial x_{1}} \\ \frac{\partial F_{3}(\vec{x}^{*}) }{\partial x_{2}} \\ \frac{\partial F_{3}(\vec{x}^{*}) }{\partial x_{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} - x_{1}^{*} \\ x_{2} - x_{2}^{*} \\ x_{3} - x_{3}^{*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1}(\vec{x}) \\ \eta_{2}(\vec{x}) \\ \eta_{3}(\vec{x}) \end{bmatrix}.$$
(2.6)

Misalkan  $u_1 = x_1 - x_1^*, u_2 = x_2 - x_2^*, u_3 = x_3 - x_3^*$ , maka  $\vec{w} = (u_1, u_2, u_3)^T$ . Oleh karena  $F_i(\vec{x}^*) = 0$ , maka persamaan (2.6) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \eta_3(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}.$$

Matriks

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3(\vec{x}^*)}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi di  $\vec{x}^*$ .

Nilai  $(u_1, u_2, u_3)$  sangat kecil untuk  $(x_1, x_2, x_3)$  yang berada cukup dekat dengan  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , sehingga  $\|\vec{\eta}\| \ll \|\vec{w}\|$ . Oleh karena itu, nilai  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem otonomus nonlinear (2.1) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}.$$
(2.7)

Jika  $\vec{x} = \vec{x}^*$ , maka  $\vec{w}^* = \vec{0}$ , sehingga sistem otonomus linear (2.7) memiliki titik kesetimbangan  $\vec{w}^* = \vec{0}$ . Proses menghampiri persamaan (2.1) dengan sistem (2.7) dinamakan proses linearisasi. Sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear dapat ditentukan dengan melihat sifat kestabilan titik kesetimbangan  $\vec{w}^* = \vec{0}$  sistem hasil linearisasi (2.7), seperti dinyatakan pada Teorema 2.1.4 berikut.

(Boyce dan Diprima, 2012)

#### Teorema 2.1.4 (Kestabilan sistem otonomus nonlinear)

Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  sistem otonomus nonlinear (2.1) bersifat

- 1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.7) bersifat stabil asimtotik,
- 2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.7) bersifat tidak stabil.

(Finizio dan Ladas, 1982)

Oleh karena titik kesetimbangan stabil atau stabil asimtotik hanya pada suatu daerah tertentu dalam lingkungan solusi sistem, maka titik kesetimbangan tersebut dikatakan stabil lokal atau stabil asimtotik lokal.

#### 2.1.3. Analisis kestabilan global

Selain sifat kestabilan lokal. kestabilan global titik kesetimbangan juga dapat dianalisis. Titik kesetimbangan dikatakan stabil global atau stabil asimtotik global jika titik kesetimbangan tersebut stabil atau stabil asimtotik pada setiap lingkungan solusi sistem. Untuk menentukan sifat kestabilan global titik kesetimbangan, digunakan definisi dan teorema berikut.

#### Definisi 2.1.5 (Fungsi Lyapunov lemah)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ . Suatu fungsi  $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  disebut fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W \subseteq \mathbb{R}^n$ pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi

1.  $L(\vec{x}^*) = 0 \text{ dan } L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W,$ 2.  $\dot{L}(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W.$ 

(Alligood dkk., 2000)

#### Definisi 2.1.6 (Fungsi Lyapunov kuat)

Fungsi L disebut fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat persekitaran  $W \subset \mathbb{R}^n$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.1.5 dan AS BRA

$$\dot{L}(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W.$$

(Alligood dkk., 2000)

#### Contoh

Perhatikan persamaan satu dimensi berikut  $\dot{x} = ax$  dengan a < 0dengan titik kesetimbangan x = 0. Didefinisikan suatu fungsi Lyapunov, yaitu

$$L(x) = x^2.$$

Jelas bahwa L(0) = 0 dan  $L(x) > 0, \forall x \neq 0$  memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.1.5. Selanjutnya ditunjukkan  $\dot{L}(x) < 0, \forall x \neq 0$ , yaitu

$$\dot{L}(x) = \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (2x)(ax) = 2ax^2 < 0.$$

Oleh karena itu, fungsi Lyapunov L(x) merupakan fungsi Lyapunov kuat.

#### Teorema 2.1.7 (Kestabilan global titik kesetimbangan dengan fungsi *Lyapunov*)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat

1. stabil asimtotik global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$ ,

2. stabil global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$ .

(Alligood dkk., 2000)

#### 2.2. Toxoplasmosis

Toxoplasmosis adalah infeksi yang disebabkan oleh parasit obligat intraseluler Toxoplasma Gondii (T. Gondii). Sebagian besar orang dewasa yang terinfeksi tidak menunjukkan gejala sakit atau mengeluh sakit, tetapi sebagian yang lain mengalami pembesaran kelenjar limfe, sakit kepala atau nyeri otot. Ibu hamil yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat menimbulkan keguguran, lahir mati atau kecacatan jasmani, kemunduran mental, dan kebutaan pada bayi yang dilahirkannya. Banyak bayi yang terinfeksi pada waktu masih berada di dalam kandungan ibunya tidak menunjukkan gejala atau kelainan pada saat dilahirkan, tetapi baru tampak gejala klinisnya beberapa waktu setelah dilahirkan. Sekali terinfeksi Toxoplasmosis, manusia atau hewan akan membentuk antibodi protektif yang berperan seumur hidup, kecuali manusia atau hewan mengalami gangguan sistem imun yang berat dan tidak mampu membentuk respon imun humoral. (Soedarto, 2012)

Parasit Toxoplasma Gondii dibagi dalam tiga bentuk yaitu Oocysts, Tachyzoites, dan Bradyzoites. Oocysts hanya terbentuk dalam usus kucing yang berperan sebagai inang definitif. Oocysts dikeluarkan dari tubuh kucing melalui feces. Selanjutnya Oocysts berkembang pada tubuh inang perantara menjadi bentuk Tachyzoites. Tachyzoites yang menempati jaringan otot dan sistem syaraf pada inang perantara kemudian berubah menjadi bentuk Bradyzoites. (Dubey, 2010)

Manusia dapat terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* dengan berbagai cara. *Toxoplasmosis* tidak menular melalui interaksi antar manusia, namun wanita hamil yang terinfeksi dapat menularkan penyakit ini kepada janin yang dikandungnya. Selain itu manusia juga dapat terinfeksi karena adanya kontak dengan *feces* kucing yang mengandung parasit *T. Gondii*. Makanan yang dikonsumsi manusia, dapat menjadi perantara penyebaran parasit *T. Gondii*. Hal ini terjadi, apabila sayuran dan daging yang terkontaminasi parasit tersebut tidak dicuci dengan bersih dan tidak dimasak dengan sempurna. Transplantasi organ yang mengandung parasit *T. Gondii* juga dapat menjadi perantara penyebaran antar manusia. (Dubey, 2010)

# repository.ub.ac

## 2.3. Model Penyebaran Penyakit *Toxoplasmosis* pada Manusia dan Kucing dengan Jumlah Populasi Konstan

Model penyebaran penyakit Toxoplasmosis pada manusia dan kucing dibahas oleh Gonzalez-Parra dkk. pada tahun 2009. Model tersebut terdiri dari dua populasi, yaitu populasi manusia dan populasi kucing. Populasi manusia dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan  $(S_h)$ , subpopulasi terinfeksi  $(I_h)$ , dan subpopulasi terkendali  $(C_h)$ . Populasi kucing dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan  $(S_c)$  dan subpopulasi terinfeksi  $(I_c)$ . Namun pada model ini diasumsikan bahwa jumlah populasi manusia dan kucing konstan. Diagram kompartemen dari model Gonzalez-Parra dkk. ditunjukkan pada gambar (2.1).



## Gambar 2.1 Diagram kompartemen penyakit *Toxoplasmosis* pada kucing dan manusia dengan populasi konstan

Individu rentan dan individu terkendali dapat melahirkan individu baru yang rentan terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* dengan laju  $\mu_h(S_h + C_h)$ . Individu rentan dapat terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* karena melakukan kontak langsung dengan kucing terinfeksi dengan laju  $\beta_h S_h \frac{I_c}{N_c}$ . Hal tersebut menyebabkan jumlah individu rentan berkurang dan menambah jumlah individu terinfeksi. Individu terinfeksi dapat melahirkan individu baru yang juga terinfeksi dengan laju  $\mu_h I_h$ . Proses pengobatan individu terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* mengurangi jumlah individu terinfeksi dan menambah jumlah individu terkendali dengan laju  $\gamma I_h$ . Jumlah populasi manusia berkurang karena setiap individu memiliki masa hidup yang terbatas dengan laju  $\mu_h$ . Induk kucing yang rentan terhadap penyakit *Toxoplasmosis* dapat melahirkan kucing rentan dengan laju  $\mu_c S_c$ . Induk kucing yang terinfeksi, kemungkinan dapat melahirkan kucing yang rentan dengan laju  $\mu_c p_c I_c$  dan kemungkinan dapat melahirkan kucing yang terinfeksi pula dengan laju  $\mu_c (1 - p_c) I_c$ . Kucing rentan yang melakukan kontak langsung dengan kucing terinfeksi dapat terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* dengan laju  $\beta_c S_c \frac{I_c}{N_c}$ . Jumlah populasi kucing berkurang karena setiap kucing memiliki masa hidup yang terbatas dengan laju  $\mu_c$ . Berdasarkan uraian tersebut diperoleh model penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* dinyatakan dalam bentuk sistem otonomus nonlinear, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dS_h(t)}{dt} &= \mu_h C_h - \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c},\\ \frac{dI_h(t)}{dt} &= \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c} - \gamma I_h(t),\\ \frac{dC_h(t)}{dt} &= \gamma I_h(t) - \mu_h C_h,\\ \frac{dS_c(t)}{dt} &= \mu_c I_c p_c - \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c},\\ \frac{dI_c(t)}{dt} &= \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c} - \mu_c I_c p_c. \end{aligned}$$

#### 2.4. Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar  $(R_0)$  didefinisikan sebagai nilai rata-rata banyaknya individu baru terinfeksi, akibat individu yang telah terinfeksi sebelumnya selama masa infeksi berlangsung. Angka reproduksi dasar ini digunakan untuk menentukan ada atau tidaknya penyakit dalam suatu populasi tertentu.

Penyebaran penyakit pada populasi tertentu terjadi jika  $R_0 > 1$ , artinya setiap individu terinfeksi menghasilkan rata-rata lebih dari satu individu baru terinfeksi. Jika  $R_0 < 1$ , artinya rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu baru terinfeksi selama periode menularnya.

(Driessche dan Watmough,2002)



#### BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* pada kucing dan manusia dengan jumlah populasi bervariasi. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik pada model, yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan kestabilan lokal maupun global titik kesetimbangan. Selain itu, dilakukan pula simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis yang diperoleh.

#### 3.1. Konstruksi Model

Pada bagian ini dibahas konstruksi model penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* yang terjadi pada populasi kucing dan manusia. Populasi manusia dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan  $(S_1)$ , subpopulasi terinfeksi  $(I_1)$ , dan subpopulasi terkendali (C). Individu yang rentan terhadap penyakit *Toxoplasmosis* dapat menjadi individu yang terinfeksi karena melakukan kontak langsung dengan kucing yang terinfeksi. Individu yang terinfeksi dapat melakukan pengobatan, sehingga memiliki daya imun yang baik menjadi individu terkendali. Individu terkendali yang memiliki daya imun yang rendah dapat menjadi individu terinfeksi, namun pada model diasumsikan bahwa individu terkendali tidak akan menjadi individu terinfeksi. Berbeda dari model Gonzales-Parra dkk. (2009), pada model ini populasi manusia mengalami pertumbuhan karena adanya perbedaan antara laju kelahiran dan laju kematian. Total populasi manusia pada waktu t dinyatakan sebagai

$$N_1(t) = S_1(t) + I_1(t) + C(t).$$
(3.1)

Populasi kucing dibagi menjadi dua subpopulasi yaitu subpopulasi rentan  $(S_2)$  dan subpopulasi terinfeksi  $(I_2)$ . Kucing rentan dapat terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* karena melakukan kontak dengan kucing terinfeksi. Kucing terinfeksi tidak akan sembuh, karena parasit *Toxoplasma Gondii* hidup dan berkembang pada usus kucing. Total populasi kucing pada waktu t dinyatakan sebagai

$$N_2(t) = S_2(t) + I_2(t).$$
(3.2)

Alur penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* pada kucing dan manusia dengan populasi bervariasi digambarkan sebagai model kompartemen yang diperlihatkan pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 Diagram kompartemen penyakit Toxoplasmosis

Individu yang rentan, terinfeksi, dan terkendali penyakit Toxoplasmosis dapat melahirkan individu baru yang rentan dengan laju  $\mu_1 N_1(t)$ . Penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* dapat terjadi melalui transmisi vertikal, yaitu wanita hamil yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat melahirkan keturunannya dengan dua kemungkinan. Kemungkinan pertama, yaitu melahirkan individu vang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dengan angka kemungkinan  $(1 - p_1)$ . Kemungkinan kedua, yaitu melahirkan individu yang tidak terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dengan angka kemungkinan  $p_1$ . Hal tersebut menjadikan jumlah populasi rentan berkurang dengan laju  $\mu_1(1-p_1)I_1(t)$ . Secara alami, individu yang rentan terinfeksi penyakit Toxoplasmosis memiliki masa hidup yang terbatas sehingga populasi rentan berkurang akibat kematian alami dengan laju  $dS_1(t)$ . Penyakit Toxoplasmosis dapat menular karena adanya kontak langsung antara kucing terinfeksi dengan individu rentan. Hal tersebut mengakibatkan jumlah individu rentan berkurang yang berbanding lurus dengan proporsi kucing yang terinfeksi, yaitu sebesar  $\beta_1 S_1(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)}$ . Jadi, laju perubahan jumlah populasi yang rentan terinfeksi penyakit Toxoplasmosis adalah

$$\dot{S}_1(t) = \mu_1 N_1(t) - \mu_1 (1 - p_1) I_1(t) - dS_1(t) - \beta_1 S_1(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)}.$$
 (3.3)

Jika individu rentan melakukan kontak langsung dengan kucing terinfeksi maka populasi individu terinfeksi bertambah dengan laju  $\beta_1 S_1(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)}$ . Wanita hamil yang terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* dapat melahirkan individu yang terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* dengan angka kemungkinan  $(1 - p_1)$ . Laju perubahan populasi terinfeksi akibat transmisi vertikal adalah  $\mu_1(1 - p_1)I_1(t)$ . Individu yang terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* dengan laju kematian  $dI_1(t)$ . Proses pengobatan individu yang terinfeksi dengan laju kematian  $dI_1(t)$ . Proses pengobatan individu yang terinfeksi dengan laju  $\gamma I_1(t)$ . Jadi, laju perubahan populasi terinfeksi dengan laju  $\gamma I_1(t)$ . Jadi, laju perubahan jumlah populasi manusia yang terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* adalah

$$\dot{I}_1(t) = \beta_1 S_1(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)} + \mu_1 (1 - p_1) I_1(t) - dI_1(t) - \gamma I_1(t).$$
(3.4)

Proses pengobatan individu yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat menambah jumlah populasi individu terkendali dengan laju  $\gamma I_1(t)$ . Individu yang terkendali penyakit Toxoplasmosis memiliki masa hidup yang terbatas, sehingga jumlah populasi terkendali berkurang dengan laju kematian dC(t). Jadi, laju perubahan jumlah populasi manusia yang terkendali penyakit Toxoplasmosis adalah

$$\dot{C}(t) = \gamma I_1(t) - dC(t).$$
 (3.5)

Induk kucing yang rentan terhadap penyakit Toxoplasmosis dapat melahirkan kucing rentan dengan laju perubahan populasi  $\mu_2 S_2(t)$ . Induk kucing yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat melahirkan kucing yang rentan dengan angka kemungkinan  $p_2$ . Dalam hal ini diperoleh laju perubahan populasi kucing rentan yang berbanding lurus dengan populasi kucing terinfeksi, yaitu sebesar  $\mu_2 p_2 I_2(t)$ . Kucing rentan dapat tertular penyakit Toxoplasmosis karena melakukan kontak langsung dengan kucing terinfeksi. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi kucing rentan berkurang yang berbanding lurus dengan proporsi kucing terinfeksi, yaitu sebesar  $\beta_2 S_2(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)}$ . Kucing yang rentan terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat mengalami kematian karena memiliki masa hidup yang terbatas dengan laju  $\mu_2 S_2(t)$ . Jadi, laju perubahan jumlah repository.ub.ac.ic

populasi kucing yang rentan penyakit Toxoplasmosis adalah

$$\dot{S}_2(t) = \mu_2 p_2 I_2(t) - \beta_2 S_2(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)}$$
(3.6)

Penyebaran penyakit Toxoplasmosis dapat terjadi melalui transmisi vertikal. Induk kucing yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat melahirkan kucing yang juga terinfeksi dengan kemungkinan  $(1 - p_2)$ . Laju perubahan populasi kucing adalah  $\mu_2(1 - p_2)I_2(t)$ . Kucing rentan yang melakukan kontak langsung dengan kucing yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis akan menambah jumlah populai kucing yang terinfeksi dengan laju  $\beta_2 S_2(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)}$ . Secara alami, kucing yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat mengalami kematian karena memiliki masa hidup yang terbatas sehingga mengurangi jumlah populasi kucing terinfeksi dengan laju  $\mu_2 I_2(t)$ . Jadi, laju perubahan jumlah populasi kucing yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis dapat mengalami kematian karena memiliki masa hidup yang terbatas sehingga mengurangi jumlah populasi kucing terinfeksi penyakit Toxoplasmosis adalah

$$\dot{I}_2(t) = \beta_2 S_2(t) \frac{I_2(t)}{N_2(t)} - \mu_2 p_2 I_2(t)$$
(3.7)

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan tersebut dari persamaan (3.3)-(3.7), diperoleh model penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* dalam bentuk sistem otonomus nonlinear

$$\begin{split} \dot{S}_{1}(t) &= \mu_{1}N_{1}(t) - \mu_{1}(1-p_{1})I_{1}(t) - dS_{1}(t) - \beta_{1}S_{1}(t)\frac{I_{2}(t)}{N_{2}(t)}, \\ \dot{I}_{1}(t) &= \beta_{1}S_{1}(t)\frac{I_{2}(t)}{N_{2}(t)} + \mu_{1}(1-p_{1})I_{1}(t) - dI_{1}(t) - \gamma I_{1}(t), \\ \dot{C}(t) &= \gamma I_{1}(t) - dC(t), \\ \dot{S}_{2}(t) &= \mu_{2}p_{2}I_{2}(t) - \beta_{2}S_{2}(t)\frac{I_{2}(t)}{N_{2}(t)}, \\ \dot{I}_{2}(t) &= \beta_{2}S_{2}(t)\frac{I_{2}(t)}{N_{2}(t)} - \mu_{2}p_{2}I_{2}(t) \end{split}$$
(3.8)

dengan

- $\mu_1$ : Laju kelahiran individu
- $p_1$ : Kemungkinan individu terinfeksi melahirkan individu rentan
- $\beta_1$ : Laju kontak langsung antara kucing terinfeksi dan individu rentan

 $\gamma$ : Laju penyembuhan individu terinfeksi

- d: Laju kematian alami individu
- $\mu_2$ : Laju kelahiran dan laju kematian alami kucing
- $p_2: {\rm Kemungkinan}\ {\rm kucing}\ {\rm terinfeksi}\ {\rm melahirkan}\ {\rm kucing}\ {\rm rentan}$
- $\beta_2$ : Laju kontak langsung antara kucing terinfeksi dan kucing rentan

Total populasi manusia yang dinyatakan pada persamaan (3.1) mengalami pertumbuhan karena adanya perbedaan laju kelahiran dan kematian. Berdasarkan persamaan (3.8) maka

$$\dot{N}_1(t) = \dot{S}_1(t) + \dot{I}_1(t) + \dot{C}(t) = (\mu_1 - d)N_1(t)$$

dan

$$\dot{N}_2(t) = \dot{S}_2(t) + \dot{I}_2(t) = 0.$$

Sistem otonomus (3.8) dapat disederhanakan dengan melakukan penskalaan. Misalkan

$$x(t) = \frac{S_1(t)}{N_1(t)}, y(t) = \frac{I_1(t)}{N_1(t)}, z(t) = \frac{C(t)}{N_1(t)}, u(t) = \frac{S_2(t)}{N_2(t)}, v(t) = \frac{I_2(t)}{N_2(t)}$$

Penskalaan tersebut menghasilkan model yang lebih sederhana sehingga mudah dianalisis. Penyederhanaan model dilakukan sebagai berikut

$$\begin{split} \dot{x}(t) &= \frac{\dot{S}_1(t)N_1(t) - S_1(t)\dot{N}_1(t)}{N_1^2} \\ &= \frac{\dot{S}_1(t)}{N_1(t)} - \frac{S_1(t)}{N_1(t)} \cdot \frac{\dot{N}_1(t)}{N_1(t)} \\ &= \frac{\dot{S}_1(t)}{N_1(t)} - x(t)(\mu_1 - d) \\ &= \mu_1 - \mu_1(1 - p_1)\frac{I_1(t)}{N_1(t)} - d\frac{S_1(t)}{N_1(t)} - \beta_1\frac{S_1(t)}{N_1(t)} \cdot \frac{I_2(t)}{N_2(t)} \\ &- x(t)(\mu_1 - d) \\ &= \mu_1 - \mu_1(1 - p_1)y(t) - dx(t) - \beta_1x(t)v(t) - \mu_1x(t) + dx(t) \\ \dot{x}(t) &= \mu_1 - \mu_1(1 - p_1)y(t) - x(t)(\mu_1 + \beta_1v(t)) \end{split}$$

$$\begin{split} \dot{y}(t) &= \frac{\dot{I}_1(t)N_1(t) - I_1(t)\dot{N}_1(t)}{N_1^2} \\ &= \frac{\dot{I}_1(t)}{N_1(t)} - \frac{I_1(t)}{N_1(t)} \cdot \frac{\dot{N}_1(t)}{N_1(t)} \\ &= \frac{\dot{I}_1(t)}{N_1(t)} - y(t)(\mu_1 - d) \\ &= \beta_1 \frac{S_1(t)}{N_1(t)} \cdot \frac{I_2(t)}{N_2(t)} + \mu_1(1 - p_1) \frac{I_1(t)}{N_1(t)} - d \frac{I_1(t)}{N_1(t)} - \gamma \frac{I_1(t)}{N_1(t)} \\ &- y(t)(\mu_1 - d) \\ &= \beta_1 x(t)v(t) + \mu_1(1 - p_1)y(t) - dy(t) - \gamma y(t) - \mu_1 y(t) + dy(t) \end{split}$$

$$\begin{split} \dot{z}(t) &= \frac{\dot{C}(t)N_{1}(t) - C(t)\dot{N}_{1}(t)}{N_{1}^{2}} \\ &= \frac{\dot{C}(t)}{N_{1}(t)} - \frac{C(t)}{N_{1}(t)} \cdot \frac{\dot{N}_{1}(t)}{N_{1}(t)} \\ &= \frac{\dot{C}(t)}{N_{1}(t)} - z(t)(\mu_{1} - d) \\ &= \gamma \frac{I_{1}(t)}{N_{1}(t)} - d\frac{C(t)}{N_{1}(t)} - z(t)(\mu_{1} - d) \\ &= \gamma y(t) - dz(t) - \mu_{1}z(t) + dz(t) \\ \dot{z}(t) &= \gamma y(t) - \mu_{1}z(t) \end{split}$$

BRAWIJAYA

$$\begin{split} \dot{u}(t) = & \frac{\dot{S}_2(t)N_2(t) - S_2(t)\dot{N}_2(t)}{N_2^2} \\ = & \frac{\dot{S}_2(t)}{N_2(t)} \\ = & \mu_2 p_2 \frac{I_2(t)}{N_2(t)} - \beta_2 \frac{S_2(t)}{N_2(t)} \cdot \frac{I_2(t)}{N_2(t)} \\ \dot{u}(t) = & \mu_2 p_2 v(t) - \beta_2 u(t)v(t) \end{split}$$

$$\begin{split} \dot{v}(t) &= \frac{\dot{I}_2(t)N_2(t) - I_2(t)\dot{N}_2(t)}{N_2^2} \\ &= \frac{\dot{I}_2(t)}{N_2(t)} \\ &= \beta_2 \frac{S_2(t)}{N_2(t)} \cdot \frac{I_2(t)}{N_2(t)} - \mu_2 p_2 \frac{I_2(t)}{N_2(t)} \\ \dot{v}(t) &= \beta_2 u(t)v(t) - \mu_2 p_2 v(t) \end{split}$$

Diperoleh sistem hasil penskalaan

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mu_1 - \mu_1 (1 - p_1) y(t) - x(t)(\mu_1 + \beta_1 v(t)) \\ \dot{y}(t) &= \beta_1 x(t) v(t) + \mu_1 (1 - p_1) y(t) - \gamma y(t) - \mu_1 y(t) \\ \dot{z}(t) &= \gamma y(t) - \mu_1 z(t) \\ \dot{u}(t) &= \mu_2 p_2 v(t) - \beta_2 u(t) v(t) \\ \dot{v}(t) &= \beta_2 u(t) v(t) - \mu_2 p_2 v(t) \end{aligned}$$

$$(3.9)$$

Jelas bahwa x(t) + y(t) + z(t) = 1 dan u(t) + v(t) = 1, sehingga z(t) = 1 - x(t) - y(t) dan v(t) = 1 - u(t). Dengan demikian, persamaan (3.9) dapat direduksi menjadi

$$\dot{x}(t) = \mu_1 - \mu_1(1 - p_1)y(t) - x(t)[\mu_1 + \beta_1(1 - u(t))],$$
  

$$\dot{y}(t) = \mu_1(1 - p_1)y(t) + \beta_1x(t)(1 - u(t)) - y(t)(\gamma + \mu_1),$$
(3.10)  

$$\dot{u}(t) = \mu_2 p_2(1 - u(t)) - \beta_2 u(t)(1 - u(t)).$$

Analisis titik kesetimbangan dilakukan menggunakan sistem (3.10). Sistem dibatasi pada daerah invarian positif  $\Omega \subset \mathbb{R}^3_+$  yang

didefinisikan sebagai

$$\Omega = \{ (x, y, u) \in \mathbb{R}^3_+ | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le u \le 1 \}.$$

#### 3.2. Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Definisi (2.1.1), titik kesetimbangan sistem persamaan (3.10) diperoleh ketika  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} = 0$ , yaitu

$$\mu_1 - \mu_1(1 - p_1)y - x[\mu_1 + \beta_1(1 - u)] = 0$$
(3.11a)

$$\mu_1(1-p_1)y + \beta_1 x(1-u) - y(\gamma + \mu_1) = 0$$
(3.11b)

$$\mu_2 p_2(1-u) - \beta_2 u(1-u) = 0.$$
 (3.11c)

Dari persamaan (3.11c) diperoleh  $(1 - u)(\mu_2 p_2 - \beta_2 u) = 0$ , sehingga

$$u = 1$$
 atau  $u = \frac{\mu_2 p_2}{\beta_2}$ .

Jika u = 1 maka dari persamaan (3.11b) diperoleh

$$\mu_1(1-p_1)y - (\gamma + \mu_1)y = 0 -y(p_1\mu_1 + \gamma) = 0.$$

Karena  $(p_1\mu_1 + \gamma) \neq 0$  maka y = 0. Kemudian u = 1 dan y = 0 disubstitusikan ke persamaan (3.11a) sehingga diperoleh x = 1.

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh titik

$$E_0 = (1, 0, 1).$$

Titik kesetimbangan  $E_0$  dikatakan sebagai titik kesetimbangan bebas penyakit, karena proporsi populasi manusia yang terinfeksi bernilai nol dan proporsi populasi manusia rentan maupun kucing rentan bernilai satu (maksimum). Hal tersebut menunjukkan bahwa tidak ada populasi kucing terinfeksi karena populasi kucing rentan bernilai maksimum dan tidak ada populasi manusia yang terinfeksi. Artinya, kemungkinan tidak terjadi kontak langsung antara manusia rentan dan kucing terinfeksi.

Jika  $u \neq 1$  maka  $u = \frac{\mu_2 p_2}{\beta_2}$ , sehingga berdasarkan persamaan

(3.11b) diperoleh

$$-y(p_1\mu_1 + \gamma) + \beta_1 x (1 - u) = 0$$
  
$$y = \frac{x\beta_1(1 - u)}{\gamma + p_1\mu_1}$$
(3.12)

Kemudian substitusikan (3.12) ke persamaan (3.11a) diperoleh

$$x = \frac{\mu_1(\gamma + p_1\mu_1)}{\beta_1(1-u)(\gamma + \mu_1) + \mu_1(\gamma + p_1\mu_1)}$$

Selanjutnya, diperoleh y dengan cara mensubstitusikan x ke (3.12) sehingga

$$y = \frac{\beta_1 \mu_1 (1 - u)}{\beta_1 (1 - u)(\gamma + \mu_1) + \mu_1 (\gamma + p_1 \mu_1)}$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, diper<br/>oleh titik $E^{\ast}=(x^{\ast},y^{\ast},u^{\ast})$  dengan

$$x^* = \frac{\mu_1(\gamma + p_1\mu_1)}{\beta_1(1 - u^*)(\gamma + \mu_1) + \mu_1(\gamma + p_1\mu_1)},$$
  
$$y^* = \frac{\beta_1\mu_1(1 - u^*)}{\beta_1(1 - u^*)(\gamma + \mu_1) + \mu_1(\gamma + p_1\mu_1)}, \quad u^* = \frac{\mu_2p_2}{\beta_2}.$$

Proporsi populasi kucing rentan tidak bernilai maksimum, artinya terdapat populasi kucing yang terinfeksi. Selain itu, proporsi populasi manusia terinfeksi lebih dari nol, artinya terdapat populasi manusia yang terinfeksi. Hal tersebut, menunjukkan terjadinya penularan penyakit *Toxoplasmosis* akibat manusia rentan melakukan kontak langsung dengan kucing terinfeksi. Maka dari itu, titik kesetimbangan  $E^*$  dikatakan titik kesetimbangan endemik, karena terdapat populasi manusia yang terinfeksi.

#### 3.3. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Model (3.10) merupakan sistem dinamik otonomus nonlinear, sehingga dilakukan linearisasi di sekitar titik kesetimbangan untuk mengetahui kestabilannya. Berdasarkan proses linearisasi model

(3.10) diperoleh matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \beta_1(1-u) & -\mu_1(1-p_1) & \beta_1 x \\ \beta_1(1-u) & -(\mu_1 p_1 + \gamma) & -\beta_1 x \\ 0 & 0 & -\mu_2 p_2 - \beta_2(1-2u) \end{bmatrix}.$$

#### 3.3.1. Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit

Matriks Jacobi di  $E_0 = (1, 0, 1)$  adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_1(1-p_1) & \beta_1 \\ 0 & -(\gamma+p_1\mu_1) & -\beta_1 \\ 0 & 0 & -\mu_2p_2 + \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Karena matriks  $J(E_0)$  adalah matriks segitiga atas maka nilai eigen  $J(E_0)$  adalah

$$\lambda_1 = -\mu_1 < 0, \lambda_2 = -(\gamma + p_1\mu_1) < 0, \text{ dan } \lambda_3 = -\mu_2 p_2 + \beta_2$$

Berdasarkan Teorema (2.1.3), titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat stabil asimtotik jika ketiga nilai eigen bernilai negatif. Jelas bahwa  $\lambda_1, \lambda_2$  bernilai negatif. Sementara itu,  $\lambda_3$  bernilai negatif jika  $\beta_2 < \mu_2 p_2$  atau  $\frac{\beta_2}{\mu_2 p_2} < 1$ . Jika dimisalkan  $R_0 = \frac{\beta_2}{\mu_2 p_2}$ , maka titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal apabila  $R_0 < 1$ .

#### 3.3.2. Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik

Dalam subbab sebelumnya, sistem (3.10) mempunyai titik kesetimbangan endemik  $E^* = (x^*, y^*, u^*)$ . Titik kesetimbangan endemik  $E^*$  dapat dinyatakan dalam  $R_0 = \frac{\beta_2}{\mu_2 p_2}$ , yaitu

$$u^* = \frac{\mu_2 p_2}{\beta_2} = \frac{1}{R_0}$$
$$x^* = \frac{\mu_1 (\gamma + p_1 \mu_1)}{\beta_1 (1 - u^*) (\gamma + \mu_1) + \mu_1 (\gamma + p_1 \mu_1)}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\mu_1(\gamma + p_1\mu_1)}{\beta_1 \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) (\gamma + \mu_1) + \mu_1(\gamma + p_1\mu_1)} \\ &= \frac{R_0\mu_1(\gamma + p_1\mu_1)}{\beta_1(R_0 - 1)(\gamma + \mu_1) + R_0\mu_1(\gamma + p_1\mu_1)} \\ y^* &= \frac{\beta_1\mu_1(1 - u^*)}{\beta_1(1 - u^*)(\gamma + \mu_1) + \mu_1(\gamma + p_1\mu_1)} \\ &= \frac{\beta_1\mu_1 \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}{\beta_1 \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) (\gamma + \mu_1) + \mu_1(\gamma + p_1\mu_1)} \\ &= \frac{\beta_1\mu_1(R_0 - 1)}{\beta_1(R_0 - 1)(\gamma + \mu_1) + \mu_1R_0(\gamma + p_1\mu_1)} \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan endemik eksis saat  $x^* > 0, y^* > 0$ , dan  $u^* > 0$ .  $x^* > 0, y^* > 0$ , dan  $u^* > 0$  jika  $R_0 > 1$ , sehingga titik kesetimbangan endemik eksis.

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik, dibentuk matriks Jacobi di $E^{\ast}$ adalah

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \beta_1(1 - u^*) & -\mu_1(1 - p_1) & \beta_1 x^* \\ \beta_1(1 - u^*) & -(\gamma + p_1 \mu_1) & -\beta_1 x^* \\ 0 & 0 & -\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks  $J(E^*)$  dapat diperoleh dengan cara menyelesaikan  $|J(E^*)-\lambda I|=0$  menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga, yaitu

$$\begin{vmatrix} -\mu_1 - \beta_1(1-u^*) - \lambda & -\mu_1(1-p_1) & \beta_1 x^* \\ \beta_1(1-u^*) & -(\gamma+p_1\mu_1) - \lambda & -\beta_1 x^* \\ 0 & 0 & -\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(-\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu_1 - \beta_1(1-u^*) - \lambda & -\mu_1(1-p_1) \\ \beta_1(1-u^*) & -(\gamma+p_1\mu_1) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(-\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* - \lambda) |H - \lambda I| = 0$$

dengan

$$H = \begin{pmatrix} -\mu_1 - \beta_1(1 - u^*) & -\mu_1(1 - p_1) \\ \beta_1(1 - u^*) & -(\gamma + p_1\mu_1) \end{pmatrix}$$

maka persamaan karakteristik matriks Jacobi $J(E^{\ast})$ adalah

$$(-\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* - \lambda)(\lambda^2 - tr(H)\lambda + |H|) = 0$$
 (3.13)

#### dengan

$$\begin{aligned} tr(H) &= (-\mu_1 - \beta_1(1 - u^*)) + (-(\gamma + p_1\mu_1)) \\ &= -(\gamma + p_1\mu_1 + \mu_1 + \beta_1 - \beta_1u^*) \\ &= -(\gamma + \mu_1(p_1 + 1) + \beta_1(1 - u^*)) \\ &= -\left(\gamma + \mu_1(p_1 + 1) + \beta_1\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right) \\ &= -(\gamma + \mu_1(p_1 + 1) + \beta_1(R_0 - 1)) < 0 \\ |H| &= (-\mu_1 - \beta_1(1 - u^*))(-(\gamma + p_1\mu_1)) - (-\mu_1(1 - p_1))(\beta_1(1 - u^*)) \\ &= \mu_1\gamma + p_1\mu_1^2 + \beta_1\gamma - \beta_1\gamma u^* + \beta_1\mu_1 - \beta_1\mu_1u^* \\ &= \mu_1(\gamma + p_1\mu_1) + \beta_1(1 - u^*)(\gamma + \mu_1) \\ &= \mu_1(\gamma + p_1\mu_1) + \beta_1(R_0 - 1)(\gamma + \mu_1) > 0 \end{aligned}$$

sebab  $R_0 > 1$ . Dari persamaan (3.13) diperoleh  $(-\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* - \lambda) = 0 \operatorname{dan} (\lambda^2 - tr(H)\lambda + |H|) = 0$ . Dari  $(-\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* - \lambda) = 0$  diperoleh satu nilai eigen, yaitu

$$\lambda_1 = -\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 u^* = -\mu_2 p_2 - \beta_2 + 2\beta_2 \left(\frac{\mu_2 p_2}{\beta_2}\right)$$
$$= \mu_2 p_2 - \beta_2 = 1 - \left(\frac{\beta_2}{\mu_2 p_2}\right) = 1 - R_0 < 0$$

sebab $R_0>1.$  Dari $(\lambda^2-tr(H)\lambda+|H|)=0$  diper<br/>oleh dua nilai eigen, yaitu

$$\lambda_{2,3} = \frac{tr(H) \pm \sqrt{D}}{2}.$$

#### Perhatikan bahwa

$$\begin{split} D &= (tr(H))^2 - 4|H| \\ &= [-(\gamma + \mu_1(p_1 + 1) + \beta_1(1 - u^*))]^2 - 4[\mu_1(\gamma + p_1\mu_1) \\ &+ \beta_1(1 - u^*)(\gamma + \mu_1)] \\ &= \gamma^2 + 2\mu_1p_1\gamma - 2\mu_1\gamma - 2\beta_1\gamma + 2\beta_1\gamma + 2\beta_1\gamma u^* + \mu_1^2p_1^2 - 2\mu_1^2p_1 \\ &+ 2\mu_1p_1\beta_1 - 2\mu_1p_1\beta_1u^* + \mu_1^2 - 2\beta_1\mu_1 + 2\beta_1\mu_1u^* + \beta_1^2 \\ &- 2\beta_1^2u^* + \beta_1^2u^{*2} \\ &= \gamma^2 + 2\mu_1p_1\gamma - 2\mu_1\gamma - 2\beta_1\gamma + 2\beta_1\gamma + 2\beta_1\gamma u^* + \mu_1^2p_1^2 - 2\mu_1^2p_1 \\ &+ 2\mu_1p_1\beta_1 - 2\mu_1p_1\beta_1u^* + \mu_1^2 - 2\beta_1\mu_1 + 2\beta_1\mu_1u^* + \beta_1^2 \\ &- 2\beta_1^2u^* + \beta_1^2u^{*2} - 4(-\mu_1p_1\beta_1u^* + \beta_1\mu_1u^* - \mu_1\beta_1 + \mu_1p_1\beta_1) \\ &+ 4(-\mu_1p_1\beta_1u^* + \beta_1\mu_1u^* - \mu_1\beta_1 + \mu_1p_1\beta_1) \\ &= \gamma^2 + 2\mu_1p_1\gamma - 2\mu_1\gamma - 2\beta_1\gamma + 2\beta_1\gamma + 2\beta_1\gamma u^* + \mu_1^2p_1^2 - 2\mu_1^2p_1 \\ &- 2\mu_1p_1\beta_1 + 2\mu_1p_1\beta_1u^* + \mu_1^2 + 2\beta_1\mu_1 - 2\beta_1\mu_1u^* + \beta_1^2 \\ &- 2\beta_1^2u^* + \beta_1^2u^{*2} + 4(-\mu_1p_1\beta_1u^* + \beta_1\mu_1u^* - \mu_1\beta_1 + \mu_1p_1\beta_1) \\ &= [\gamma + \mu_1p_1 - \mu_1 - \beta_1 + \beta_1u^*]^2 + 4\beta_1\mu_1(-p_1u^* + u^* - 1 + p_1) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 \\ &+ 4\beta_1\mu_1 \left(-\frac{p_1}{R_0} + \frac{1}{R_0} - \frac{R_0}{R_0} + \frac{p_1R_0}{R_0}\right) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(p_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(P_1[R_0 - 1] - [R_0 - 1]) \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(R_0 - 1] \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_0 - 1)]^2 + 4\frac{\beta_1\mu_1}{R_0}(R_0 - 1] \\ &= [\gamma + \mu_1(p_1 - 1) - \frac{\beta_1}{R_0}(R_$$

sebab $R_0>1.$ Oleh karena nila<br/>iD>0dan tr(H)<0, |H|>0, maka berdasarkan Tabel 2.1 nilai eigen<br/>  $\lambda_2, \lambda_3\in \mathbb{R}$  dan  $\lambda_2, \lambda_3<0.$ 

Dari uraian yang telah dijelaskan diperoleh  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik  $E^*$  bersifat stabil asimtotik lokal.

29

#### 3.4. Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan

#### 3.4.1. Kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit

Pada subbab (3.3.1.) telah ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal. Selanjutnya diperiksa apakah kestabilan titik kesetimbangan  $E_0$  juga bersifat global. Pandang fungsi Lyapunov  $L_0: \Omega \to \mathbb{R}_+$ , yaitu

$$L_0 = L_0(x, y, u) = \frac{1-u}{\mu_2 p_2}.$$

Jelas bahwa  $L_0(1,0,1) = 0$  dan  $L_0(x,y,u) > 0$ ,  $\forall (x,y,u) \neq (1,0,1)$ . Oleh karena itu,  $L_0(x,y,u)$  memenuhi kondisi (1) pada Definisi (2.1.5).

Selanjutnya, akan diperiksa apakah fungsi Lyapunov  $L_0(x, y, u)$  memenuhi kondisi (2) pada Definisi (2.1.5) atau memenuhi Definisi (2.1.6).

$$\dot{L}_0(x, y, u) = \frac{dL_0}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dL_0}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dL_0}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$
$$= (-\frac{1}{\mu_2 p_2})(\mu_2 p_2(1-u) - \beta_2 u(1-u))$$
$$= -(1-u) + \frac{\beta_2}{\mu_2 p_2} u(1-u)$$
$$= -(1-u) + R_0 u(1-u)$$
$$= -(1-R_0 u)(1-u)$$

Untuk  $R_0 < 1$  dan  $u \le 1$  nilai  $\dot{L}_0(x, y, u) \le 0$ . Nilai  $\dot{L}_0(x, y, u) = 0$ jika u = 1 yang merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$ . Dengan demikian  $\dot{L}_0(x, y, u) < 0, \forall (x, y, u) \ne E_0$ . Jadi, fungsi  $L_0(x, y, u)$  memenuhi Definisi (2.1.6), sehingga fungsi  $L_0(x, y, u)$ merupakan fungsi *Lyapunov* kuat dan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 < 1$ .

**BRAWIJAYA** 

#### 3.4.2. Kestabilan global titik kesetimbangan endemik

Pada subbab (3.3.2.) telah ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $E^*$  bersifat stabil asimtotik lokal. Selanjutnya diperiksa apakah kestabilan titik kesetimbangan  $E^*$  juga bersifat global. Pandang fungsi Lyapunov  $L_1: \Omega \to \mathbb{R}_+$ , yaitu

$$L_1 = L_1(x, y, u) = u - u^* - u^* \ln \frac{u}{u^*}.$$

Akan diperiksa apakah fungsi tersebut memenuhi kondisi (1) pada Definisi (2.1.5), yaitu  $L_1(E^*) = 0$  dan L(x, y, u) > 0,  $\forall (x, y, u) \neq E^*$ .

Jelas bahwa  $L_1(E^*) = u^* - u^* - u^* \ln \frac{u^*}{u^*} = 0$ . Selanjutnya dibuktikan  $L_1(x, y, u) > 0, \forall (x, y, u) \neq E^*$ . Oleh karena dalam kasus ini dibahas titik kesetimbangan endemik, maka pasti terdapat kucing terinfeksi. Dengan demikian nilai u yang menyatakan proporsi kucing rentan tidak akan bernilai maksimum atau dengan kata lain nilai  $u \neq 1$ . Misalkan

$$L_1(u) = u - u^* - u^* \ln \frac{u}{u^*} \operatorname{dan} u \in (0, 1).$$

Turunan pertama dan kedua  $L_1(u)$  terhadap u berturut-turut, yaitu

$$L_1'(u) = 1 - \frac{u^*}{u} \operatorname{dan} L_1''(u) = \frac{u^*}{u^2}.$$

Titik stasioner  $L_1(u)$  diperoleh jika  $L'_1(u) = 0$ . Nilai u yang memenuhi  $L'_1(u) = 0$  yaitu ketika  $u = u^*$ , maka  $L'_1(u^*) = 0$ . Karena  $L''_1(u^*) = \frac{1}{u^*} > 0$ , maka  $L_1(u^*)$  adalah nilai ekstrim minimum  $L_1$ . Oleh karena itu, pasti berlaku  $L_1(u) > 0$  untuk  $\forall u \neq u^*$ . Terbukti bahwa  $L_1(x, y, u) > 0, \forall (x, y, u) \neq E^*$ . Jadi, fungsi Lyapunov  $L_1(x, y, u)$  memenuhi kondisi (1) pada Definisi (2.1.5).

Selanjutnya, akan diperiksa apakah fungsi Lyapunov  $L_1(x, y, u)$  memenuhi kondisi (2) pada Definisi (2.1.5) atau memenuhi Definisi (2.1.6).

$$\begin{split} \dot{L}_1(x,y,u) &= \frac{dL_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dL_1}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dL_1}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) (\mu_2 p_2 (1 - u) - \beta_2 (1 - u)) \\ &= \left(\frac{u - u^*}{u}\right) (\mu_2 p_2 - \beta_2 u) (1 - u) \\ &= \left(\frac{u - \frac{1}{R_0}}{u}\right) \left(\frac{\beta_2}{R_0} - \beta_2 u\right) (1 - u) \\ &= -\frac{\beta_2 (1 - u) \left(u - \frac{1}{R_0}\right)^2}{u} \\ &= -\frac{\beta_2 (1 - u) \left(u - u^*\right)^2}{u} \end{split}$$

Nilai 1-u > 0 karena 0 < u < 1 dan  $(u-u^*)^2 > 0$  karena merupakan persamaan kuadrat yang tidak akan bernilai negatif. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa  $\dot{L}_1(x, y, u) < 0$ ,  $\forall (x, y, u) \neq (x^*, y^*, u^*)$  yang merupakan titik kesetimbangan endemik  $E^*$ . Jadi, fungsi  $L_1(x, y, u)$  memenuhi Definisi (2.1.6), sehingga fungsi  $L_1(x, y, u)$  merupakan fungsi Lyapunov kuat dan titik kesetimbangan endemik  $E^*$  bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 > 1$ .

#### 3.5. Angka Reproduksi Dasar

Dari analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$ dan titik kesetimbangan endemik  $E^*$ , dapat disimpulkan bahwa pada saat  $R_0 < 1$ , populasi bebas dari penyakit, artinya rata-rata kucing yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu kucing baru terinfeksi, dengan demikian penyakit akan hilang. Pada saat  $R_0 > 1$  dalam populasi akan terjadi penyebaran penyakit, artinya setiap kucing yang terinfeksi menghasilkan rata-rata lebih dari satu kucing terinfeksi, dengan demikian infeksi akan terus menyebar. Oleh karena itu,  $R_0$ dapat disebut sebagai angka reproduksi dasar, yaitu suatu nilai yang menunjukkan adanya penularan penyakit dalam populasi tertentu.

Nilai  $R_0 = \frac{\beta_2}{\mu_2 p_2}$  menunjukkan bahwa parameter yang dapat mengontrol tingkat penyebaran penyakit Toxoplasmosis adalah laju kontak langsung antara kucing terinfeksi dan kucing rentan ( $\beta_2$ ) dan laju kelahiran kucing rentan dari induk kucing yang terinfeksi ( $\mu_2 p_2$ ). Dengan demikian adanya transmisi vertikal pada manusia dan laju kontak langsung antara kucing terinfeksi dan manusia rentan ( $\beta_1$ ) tidak berpengaruh secara langsung terhadap tingkat penyebaran penyakit Toxoplasmosis. Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$ akan stabil asimtotik jika  $R_0 < 1$ , yaitu  $\beta_2 < \mu_2 p_2$ .

#### 3.6. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Nilai awal variabel dalam skripsi ini diambil dari (Gonzales-Parra dkk., 2009), yaitu

x(0) = 0.5253, y(0) = 0.47, u(0) = 0.45.

Nilai parameter diambil dari (Yongzhen dkk., 2017) yang ditunjukkan pada Tabel 3.1 berikut.

Parameter	Nilai
$\mu_1$	0.233
$p_1$	0.9898
$\beta_1$	0.0206
d	0.00601
γ	0.000232
$\mu_2$	0.066

#### **3.6.1. Simulasi numerik untuk** $R_0 < 1$

Pada simulasi ini, digunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 dan diambil nilai parameter  $\beta_2 = 0.01$  dan  $p_2 = 0.3$  sehingga diperoleh nilai  $R_0$ , yaitu

$$R_0 = \frac{\beta_2}{\mu_2 p_2} = \frac{(0.01)}{(0.066)(0.3)} = 0.505 < 1$$



Gambar 3.2 Solusi numerik untuk  $R_0 = 0.505 < 1$ 

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan nilai awal tersebut solusi proporsi manusia rentan, proporsi manusia terinfeksi, dan proporsi kucing rentan menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (1, 0, 1)$ . Hasil simulasi numerik tersebut sesuai dengan hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika  $R_0 < 1$  titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal.

Semakin besar kemungkinan kelahiran kucing rentan dari induk kucing yang terinfeksi maka semakin besar jumlah proporsi populasi kucing rentan. Dengan demikian, jumlah proporsi kucing terinfeksi semakin kecil. Jika jumlah kucing terinfeksi semakin kecil, kemungkinan kontak langsung antara manusia rentan dan kucing terinfeksi semakin kecil pula, hal ini akan menyebabkan jumlah populasi manusia yang terinfeksi penyakit *Toxoplasmosis* semakin kecil.

Selanjutnya, diperlihatkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik global. Pada simulasi ini diambil tiga nilai awal, yaitu  $NA_1(0.4569, 0.4812, 0.71)$ ,  $NA_2(0.6563, 0.289, 0.32)$ , dan  $NA_3(0.8711, 0.12, 0.52)$ .



Gambar 3.3 Potret fase untuk  $R_0 = 0.505 < 1$ 

Berdasarkan Gambar 3.3, dapat dilihat trayektori yang bermula dari tiga nilai awal menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (1, 0, 1)$ . Hasil simulasi numerik yang diperoleh sesuai dengan hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika  $R_0 < 1$  titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik global.



#### **3.6.2. Simulasi numerik untuk** $R_0 > 1$

Pada simulasi ini, digunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 dan diambil nilai parameter  $\beta_2 = 0.03$  dan  $p_2 = 0.3$  sehingga diperoleh nilai  $R_0$ , yaitu  $\rho_1 = 0.02$ 



Gambar 3.4 Solusi numerik untuk $R_0=1.5152>1$ dengan $\beta_2=0.03$ dan $p_2=0.3$ 

Selain itu, juga diambil nilai parameter  $\beta_2 = 0.03$  dan  $p_2 = 0.01$  sehingga diperoleh nilai  $R_0$ , yaitu



Gambar 3.5 Solusi numerik untuk $R_0=45.4545>1$ dengan $\beta_2=0.03$ dan $p_2=0.01$ 

36

repository.ub.ac.id

Gambar 3.4 dan Gambar 3.5 menunjukkan bahwa dengan nilai awal tersebut solusi proporsi manusia rentan, proporsi manusia terinfeksi, dan proporsi kucing rentan menuju ke titik kesetimbangan endemik masing-masing yaitu  $E^* = (0.970526, 0.0294451, 0.66)$  dan  $E^* = (0.919661, 0.080259, 0.022)$ . Hasil simulasi numerik tersebut sesuai dengan hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika  $R_0 > 1$  titik kesetimbangan endemik  $E^*$  bersifat stabil asimtotik lokal.

Apabila laju kelahiran kucing dan laju kontak langsung antara kucing terinfeksi dan kucing rentan sama pada kedua simulasi, maka penyebaran penyakit Toxoplasmosis hanya dipengaruhi kemungkinan kelahiran kucing rentan dari induk kucing yang terinfeksi. Berdasarkan Gambar 3.4 dan Gambar 3.5. semakin kecil kemungkinan induk kucing terinfeksi melahirkan kucing rentan maka semakin kecil pula jumlah proporsi kucing rentan sehingga proporsi kucing terinfeksi semakin besar. Jika jumlah proporsi kucing terinfeksi semakin besar, kemungkinan kontak langsung antara manusia rentan dan kucing terinfeksi semakin besar pula. Hal ini akan menyebabkan jumlah proporsi manusia yang terinfeksi penyakit Toxoplasmosis akan semakin besar.

Selanjutnya, diperlihatkan bahwa titik kesetimbangan endemik  $E^*$  bersifat stabil asimtotik global. Pada simulasi ini diambil tiga nilai awal, yaitu  $NA_1(0.5268, 0.3184, 0.8), NA_2(0.4888, 0.3222, 0.52),$  dan



**Gambar 3.6 Potret fase untuk**  $R_0 = 1.5152 > 1$ 

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat dilihat trayektori yang bermula dari tiga nilai awal menuju ke titik kesetimbangan endemik  $E^* = (0.970526, 0.0294451, 0.66)$ . Hasil simulasi numerik yang diperoleh sesuai dengan hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika  $R_0 > 1$  titik kesetimbangan endemik  $E^*$  bersifat stabil asimtotik global.



#### BAB IV PENUTUP

#### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penulisan skripsi dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan sebagai berikut.

- 1. Telah diperoleh model penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* dalam bentuk sistem otonomus nonlinear lima dimensi yang disederhanakan dalam bentuk sistem otonomus tiga dimensi yang ekuivalen.
- 2. Terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis sedangkan titik kesetimbangan endemik eksis jika  $R_0 > 1$ .
- 3. Dari hasil analisis yang diperoleh, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global untuk  $R_0 < 1$  sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan global untuk  $R_0 > 1$ .
- 4. Hasil simulasi numerik menujukkan bahwa perhitungan secara analisis sesuai dengan numerik. Penyebaran penyakit *Toxoplasmosis* tidak dipengaruhi adanya transmisi vertikal pada manusia. Penyebaran penyakit dipengaruhi oleh laju kontak langsung antara kucing terinfeksi dan kucing rentan dan transmisi vertikal pada kucing seperti dinyatakan pada angka reproduksi dasar.

#### 4.2. Saran

Pada skripsi selanjutnya, disarankan membahas mengenai analisis dinamik model yang mempertimbangkan adanya vaksinasi. Selain itu dapat pula dipertimbangkan beberapa faktor pada model, seperti kelahiran musiman pada kucing atau waktu bertahan hidup parasit dalam tubuh kucing.



- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. CHAOS : An Introduction to Dynamical System. Springer-Verlag. New York.
- Aranda, D. F., R. J. Villanueva, A. J. Arenas, dan G. C. Gonzalez-Parra. 2008. Mathematical Modeling of Toxoplasmosis Disease in Varying Size Populations. *Computers and Mathematics with Applications*. vol.56 hal.690-696.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth Edition. John Willey and Sons, Inc. United State of America.
- Driessche, P. van den dan J. Watmough. 2002. Reproduction Number and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartemental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. vol.180 hal.29-48.
- Dubey, J. P. 2010. *Toxoplasmosis of Animals and Humans*. Second Edition. Taylor and Francis Group. United States of America.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equations. Wadsworth Publishing Company. Belmont, California.
- Gonzalez-Parra, G. C., A. J. Arenas, D. F. Aranda, R. J. Villanueva, dan L. Jodar. 2009. Dynamics of a Model of Toxoplasmosis Disease in Human and Cat Populations. *Computers and Mathematics with Applications*. vol.57 hal.1692-1700.
- Gandahusada, S. 1991. Study on the Prevalence of Toxoplasmosis in Indonesia: A Review. *Southeast Asian Journal of Tropical Medicine and Public Health*. vol.22 hal.93-98.
- Mateus-Pinilla, N. E., B. Hannon, dan R. M. Weigel. 2002. A Computer Simulation of the Prevention of the Transmission of Toxoplasma Gondii on Swine Farms Using a Feline T.Gondii Vaccine. *Preventive Veterinary Medicine*. vol.55 hal.17-36.
- Meiss, J. D. 2007. *Differential Dynamical System*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia.
- Nagle, R. K., E. B. Saff, dan D. Snider. 2012. Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems. Sixth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.

- Palgunadi, B. U. 2011. *Toxoplasmosis* dan Kemungkinan Pengaruhnya terhadap Perubahan Perilaku. (Online), www.elib.fk.uwks.ac.id, diakses 1 November 2017.
- Panfilov, A. 2004. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Theoretical Biology. Utrecht University.
- Soedarto. 2012. Toksoplasmosis: Mencegah dan Mengatasi Penyakit Melindungi Ibu dan Anak. CV Sagung Seto. Jakarta.
- Yongzhen, P., J. Xuehui, L. Changguo, dan G. Shujing. 2017. Dynamic of a Model of Toxoplasmosis Disease in Cat and Human with Varying Size Population. *Mathematics and Computers in Simulation*. vol.144 hal.52-59.

