



KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI SIR DENGAN LAJU INFEKSI TERSATURASI

SKRIPSI

DINDA AYU RETNO NURAINI

145090401111018

oleh



PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2018

**KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI SIR
DENGAN LAJU INFEKSI TERSATURASI**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh

DINDA AYU RETNO NURAINI

145090401111018



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG**

2018

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI****KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI SIR
DENGAN LAJU INFEKSI TERSATURASI**

oleh

DINDA AYU RETNO NURAINI**145090401111018**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Pengujian
pada tanggal 20 Februari 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing

Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.**NIP. 196607281993032001**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya****Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.****NIP. 197509082000031003**



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dinda Ayu Retno Nuraini
NIM : 145090401111018
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : **Kontrol Optimal Model Epidemii**
SIR dengan Laju Infeksi Tersaturasi

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.**
2. **Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 20 Februari 2018
yang menyatakan,

Dinda Ayu Retno Nuraini
NIM. 145090401111018



KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI SIR DENGAN LAJU INFEKSI TERSATURASI

ABSTRAK

Pada skripsi ini, dibahas kontrol optimal pada model epidemi *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan laju infeksi tersaturasi. Terdapat *inhibitor* dalam laju tersebut yang dapat menghambat penyebaran penyakit. Strategi pengendalian penyakit yang digunakan berupa vaksinasi dan pengobatan dengan tetap mempertahankan laju penyembuhan alami. Strategi tersebut bertujuan untuk meminimumkan individu yang rentan dan terinfeksi penyakit, serta memaksimalkan jumlah individu sembuh. Kontrol yang optimal diperoleh dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Hasil simulasi numerik yang dilakukan menggunakan Metode *Sweep Maju Mundur* menunjukkan bahwa pemberian kontrol vaksinasi dan pengobatan yang dilakukan secara terpisah dapat mempengaruhi jumlah subpopulasi rentan, terinfeksi, maupun sembuh. Selain itu, kontrol yang optimal juga dipengaruhi oleh bobot biaya. Pengaruh yang lebih signifikan diperoleh bila kedua kontrol dikombinasikan dengan bobot biaya sama maupun berbeda. Namun, hasil yang paling optimal diperoleh saat bobot biaya yang diberikan sama.

Kata kunci: model epidemi *SIR*, tersaturasi, kontrol optimal, vaksinasi, pengobatan.



OPTIMAL CONTROL OF A *SIR* EPIDEMIC MODEL WITH SATURATED INCIDENT RATE

ABSTRACT

This final project discusses an optimal control applied to *SIR* (Susceptible-Infectious-Recovered) model with saturated incident rate.

There is inhibitor reducing the disease spread. The disease control strategies which used are vaccination and treatment while natural recovery is maintained. The objective of the strategies are to minimize the susceptible and infectious individuals and to maximize the recovered individuals. Optimal control is obtained by using the Pontryagin Minimum Principle. The result of numerical simulation using Forward-Backward Sweep Method shows that vaccination and treatment given separately affects the number of susceptible, infectious, or recovered subpopulations. Furthermore, the optimal control is also affected by weighting costs. More significant effect is obtained when both controls are combined with the same or different weighting costs. However, the most optimal result is obtained when the same weighting cost are applied.

Keywords: *SIR* epidemic model, saturated, optimal control, vaccination, treatment.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga skripsi yang berjudul *Kontrol Optimal Model Epidemii SIR dengan Laju Infeksi Tersaturasi* dapat selesai dengan baik. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis. Skripsi ini disusun dan diajukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Banyak pihak yang telah memberikan bantuan, bimbingan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi atas seluruh bimbingan, motivasi, kesabaran, bantuan, serta kritik dan saran yang telah diberikan kepada penulis selama penulisan skripsi.
2. Dr. Trisilowati, M.Sc., Ph.D. dan Nur Shofianah, S.Si, M.Si, Ph.D selaku Majelis Penguji yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen Penasihat Akademik dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala motivasi dan bantuan yang diberikan.
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta seluruh staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Bapak (Suwandi), ibu (Yatini), adik (Rachel Ayu P.W.) dan seluruh keluarga tercinta yang selalu memberikan motivasi, dukungan, dan doa kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. PurwaningtiAs Aprianti, Ardhi Sanjaya, M. Hasyim Muzaqi, Avin Maulana, Dwi Kartika Sari, dan Dikita Astrianti atas ilmu, kritik, dan saran yang telah diberikan dalam penulisan skripsi.
7. Seluruh Keluarga Besar Matematika angkatan 2014 atas bantuan, motivasi, dan kebersamaan selama menjalani proses perkuliahan.



8. Rekan kerja organisasi intra kampus (HIMAMASTA) atas kebersamaan, dukungan, dan motivasi yang telah diberikan selama menjalani proses perkuliahan hingga penulisan skripsi selesai.
9. Seluruh keluarga Kos Kertosentono 71 atas dukungan dan motivasi selama penyusunan skripsi ini, serta kebersamaannya selama penulis tinggal di Malang.
10. Semua pihak yang membantu baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak bisa penulis sebutkan satu-satu.

Kesempurnaan hanya milik Allah SWT. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk perbaikan pada penulisan selanjutnya melalui email adinda.nuraini96@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 20 Februari 2018

Penulis



DAFTAR ISI

Halaman

JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Pembatasan Kajian	3
1.4 Tujuan	3
BAB II DASAR TEORI	5
2.1 Sistem Dinamik	5
2.1.1 Sistem <i>autonomous</i>	6
2.1.2 Sistem <i>autonomous</i> linear	7
2.1.3 Sistem <i>autonomous</i> nonlinear	8
2.2 Angka Reproduksi Dasar	10
2.3 Teori Kontrol Optimal	11
2.3.1 Syarat Perlu Kontrol Optimal	11
2.3.2 Prinsip Minimum Pontryagin	14
2.4 Metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur	15
2.5 Metode Runge-Kutta Orde 4	16
2.6 Model Epidemi <i>SIR</i>	16
BAB III PEMBAHASAN	19
3.1 Formulasi Model Epidemi <i>SIR</i> dengan Kontrol	19
3.2 Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal	20
3.2.1 Fungsi Hamilton	21
3.2.2 Persamaan <i>state</i>	21
3.2.3 Persamaan <i>costate</i>	21
3.2.4 Kondisi stasioner	22
3.3 Simulasi Numerik	24
3.3.1 Simulasi I	26
3.3.2 Simulasi II	29



3.3.3 Simulasi III

32

BAB IV PENUTUP

39

4.1 Kesimpulan

39

4.2 Saran

39

DAFTAR PUSTAKA

41

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram kompartemen <i>SIR</i>	17
Gambar 3.1	Diagram kompartemen <i>SIR</i> dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan	19
Gambar 3.2	Dinamika model <i>SIR</i> dengan kontrol vaksinasi	27
Gambar 3.3	Profil kontrol vaksinasi ($u(t)$)	29
Gambar 3.4	Dinamika model <i>SIR</i> dengan kontrol pengobatan	30
Gambar 3.5	Profil kontrol pengobatan ($v(t)$)	32
Gambar 3.6	Dinamika model <i>SIR</i> dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan	33
Gambar 3.7	Profil kontrol vaksinasi $u(t)$ dan pengobatan $v(t)$	35
Gambar 3.8	Dinamika model <i>SIR</i> dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan saat $C_1 < C_2$	36
Gambar 3.9	Profil kontrol vaksinasi $u(t)$ dan pengobatan $v(t)$ saat $C_1 < C_2$	37



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Epidemi adalah penyakit menular yang terjadi pada suatu populasi dalam waktu tertentu. Penyakit dapat menular melalui kontak langsung dengan penderita. Karena mudah menular maka menjadi masalah yang sangat diperhatikan di semua negara, namun penyebaran penyakit tersebut dapat dikendalikan dengan mempelajari dinamika penyebaran penyakit. Oleh karena itu, diperlukan pemodelan matematika untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit pada suatu populasi di masa yang akan datang dengan melihat kondisi masa sekarang atau masa lalu yang disebut dengan model epidemi. Salah satu model yang dibentuk adalah model epidemi *SIR*. *SIR* merupakan singkatan dari *Susceptible* (subpopulasi individu rentan terhadap penyakit), *Infectious* (subpopulasi individu terinfeksi penyakit), dan *Recovered* (subpopulasi individu sembuh dari penyakit). Model tersebut menyatakan bahwa subpopulasi individu rentan dapat terinfeksi oleh suatu penyakit, kemudian sembuh dan memperoleh kekebalan terhadap penyakit tersebut sehingga tidak kembali menjadi individu rentan.

Jumlah individu yang terinfeksi penyakit akibat kontak langsung antara individu rentan dan terinfeksi disebut laju infeksi. Laju infeksi pada model epidemi *SIR* biasanya berupa fungsi linear, tetapi juga dapat berupa nonlinear karena ketika individu yang terinfeksi banyak, laju infeksi dapat lebih kecil atau sebaliknya. Laju infeksi yang lebih kecil disebabkan adanya perubahan perilaku individu yang menjadi *inhibitor* (hambatan) pada laju infeksi (Hethcote dan Driessche, 1990). *Inhibitor* pada laju infeksi tersebut dapat ditimbulkan oleh meningkatnya subpopulasi rentan maupun terinfeksi. Laju infeksi oleh fungsi nonlinear ini disebut laju infeksi tersaturasi.

Upaya pengendalian penyakit dapat dilakukan dengan melihat pola penyebaran yang diketahui melalui analisis kestabilan titik kesetimbangan model epidemi *SIR*. Strategi pengendalian penyakit



yang biasa digunakan berupa vaksinasi dan pengobatan karena dapat lebih efektif untuk pencegahan dan penyembuhan. Vaksinasi dan pengobatan merupakan alat untuk kontrol optimal. Secara ekonomi, pemberian vaksin atau pengobatan sering terkendala oleh biaya sehingga belum tentu optimal. Oleh karena itu, pemberian vaksin dan pengobatan yang optimal perlu ditentukan agar biaya yang dibutuhkan minimum namun tetap dapat bekerja secara efektif. Contoh penyakit model *SIR* yang dapat diberi vaksinasi dan pengobatan adalah cacar air dan campak. Perilaku yang menjadi *inhibitor* pada penyakit cacar air dan campak adalah menghindari sentuhan dengan penderita dan menggunakan masker.

Analisis dinamik dan kontrol optimal pada model epidemi *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi telah dibahas oleh banyak peneliti. Kaddar (2010) membahas analisis kestabilan lokal menggunakan metode Routh-Hurwitz pada model epidemi *SIR* dengan waktu tunda. Waktu tunda yang digunakan adalah masa inkubasi yang terjadi pada laju infeksi tersaturasi dalam subpopulasi individu terinfeksi dan *inhibitor* timbul pada jumlah populasi individu rentan maupun terinfeksi. Rihan dan Anwar (2012) membahas analisis kestabilan model epidemi *SIR* menggunakan Bifurkasi Hopf. Pertumbuhan subpopulasi rentan dalam model pada artikel tersebut diasumsikan dapat terhambat karena faktor kepadatan penduduk dan *inhibitor* hanya timbul pada subpopulasi individu rentan. Laraabi dkk. (2012) membahas kontrol optimal model epidemi *SIR* dengan kontrol vaksinasi. Model tersebut merupakan modifikasi dari model Kaddar (2010) yang dikontrol dengan pemberian vaksin pada subpopulasi individu rentan, namun tidak menggunakan waktu tunda. Kemudian Bashier dan Patidar (2017) membahas kontrol optimal model epidemi *SIR* dengan vaksinasi dan pengobatan. Model ini merupakan modifikasi dari model Laraabi dkk. (2012) dengan penambahan kontrol pengobatan pada subpopulasi individu terinfeksi.

Skripsi ini mengacu kepada penelitian Bashier dan Patidar (2017) yang membahas kontrol optimal pada model epidemi *SIR* dengan dua variabel kontrol yaitu vaksinasi dan pengobatan, model ini memiliki laju infeksi tersaturasi. Laju pemulihan alami dalam model ini juga tetap dipertahankan sehingga kontrol pengobatan tidak menggantikan laju pemulihan alami. Model epidemi *SIR* ini



menggunakan *inhibitor* pada laju infeksi tersaturasi yang ditimbulkan oleh jumlah populasi individu rentan dan terinfeksi. Tujuan kontrol optimal pada model ini adalah meminimumkan subpopulasi individu terinfeksi dan memaksimalkan subpopulasi individu sembuh dengan biaya kontrol seminimum mungkin. Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan prinsip minimum Pontryagin, kemudian disimulasikan dengan metode *Sweep* Maju-Mundur menggunakan software MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model epidemi *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi menggunakan dua kontrol?
2. Bagaimana penyelesaian masalah kontrol optimal pada model epidemi *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model epidemi *SIR* tanpa dan dengan kontrol?

1.3 Pembatasan Kajian

Pembahasan skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan batasan kajian sebagai berikut.

1. Penularan penyakit hanya terjadi secara horizontal, yaitu tidak diturunkan dari orang tua ke anak.
2. Vaksinasi hanya diberikan pada subpopulasi individu rentan dan pengobatan diberikan pada subpopulasi individu terinfeksi.
3. Pemberian vaksin dan pengobatan mengakibatkan kekebalan bersifat permanen.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model epidemi *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi menggunakan dua kontrol.



2. Menyelesaikan masalah kontrol optimal pada model epidemi *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi.
3. Menyelidiki pengaruh kontrol pada model epidemi *SIR* berdasarkan hasil simulasi numerik.



BAB II DASAR TEORI

Dalam skripsi ini dibahas kontrol optimal model epidemi *SIR* dengan dua kontrol dan laju infeksi tersaturasi. Oleh karena itu, teori mengenai sistem dinamik, angka reproduksi dasar, teori kontrol optimal, metode *Sweep* Maju-Mundur, dan metode Runge-Kutta orde 4 diperlukan untuk membantu memahami persoalan dalam penulisan skripsi ini.

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya pada masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi pada keadaan sekarang atau masa lampau. Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskret berupa persamaan beda dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

sedangkan sistem dinamik kontinu berupa persamaan diferensial dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dengan $\vec{x}(t)$ menyatakan kondisi sistem pada waktu t . Jika $x(t_0) = x_0$ dan masalah nilai awal tersebut memiliki solusi, maka dapat ditentukan kondisi sistem pada waktu $t > t_0$.

(Nagle dkk., 2012)

Sistem dinamik kontinu dibedakan menjadi sistem *autonomous* dan sistem *nonautonomous*. Dalam skripsi ini, model yang dibahas adalah sistem *autonomous*.



2.1.1 Sistem *autonomous*

Sistem *autonomous* adalah suatu sistem persamaan diferensial dengan \vec{f} tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t , namun hanya bergantung pada variabel \vec{x} . Misalnya diberikan sistem *autonomous* tiga dimensi berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z),\end{aligned}\quad (2.1)$$

Berdasarkan persamaan (2.1), dapat dilihat bahwa fungsi $\vec{f} = (F, G, H)$ tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t .

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Definisi 2.1 Titik kesetimbangan sistem *autonomous*

Suatu titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ disebut titik kritis sistem persamaan (2.1) jika memenuhi $F(\vec{x}^*) = G(\vec{x}^*) = H(\vec{x}^*) = 0$. Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem persamaan (2.1) yang bernilai konstan karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya adalah titik kritis, sehingga titik kritis disebut juga sebagai titik kesetimbangan.

Definisi 2.2 Kestabilan titik kesetimbangan.

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem *autonomous* (2.1) dikatakan

1. **stabil**, jika $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) pada $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

ada untuk semua $t > 0$ dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon,$$

untuk $\forall t \geq 0$,



2. **stabil asimtotik**, jika \bar{x}^* stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika suatu solusi $\bar{x}(t)$ sistem (2.1) memenuhi

$$\|\bar{x}(0) - \bar{x}^*\| < \delta_0,$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \bar{x}^*,$$

3. **tidak stabil**, jika tidak memenuhi kriteria pertama.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.1.2 Sistem *autonomous* linear

Jika fungsi $\vec{f} = (F, G, H)$ pada sistem persamaan (2.1) berbentuk linear, maka diperoleh sistem *autonomous* linear. Namun, jika fungsi $\vec{f} = (F, G, H)$ pada sistem persamaan (2.1) berbentuk nonlinear, maka diperoleh sistem *autonomous* nonlinear.

Bentuk sistem *autonomous* linear berdimensi tiga adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sistem persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.3)$$

dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ dan $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Jika $\det A \neq 0$, maka titik $\bar{x}^* = \vec{0}$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem persamaan (2.2). Persamaan karakteristik $|A - rI|$ menghasilkan nilai eigen yang merupakan akar persamaan karakteristik. Nilai eigen dapat digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2).

(Boyce dan DiPrima, 2012)



Teorema 2.1 Kestabilan sistem persamaan linear

Misalkan $r_1, r_2,$ dan r_3 adalah nilai eigen matriks A pada sistem persamaan (2.2). Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif,
2. **stabil**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real tak positif,
3. **tidak stabil**, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif.

(Finizio dan Ladas, 1982)

2.1.3 Sistem *autonomous nonlinear*

Misalkan fungsi $\vec{f} = (F, G, H)$ pada sistem persamaan (2.1) adalah fungsi nonlinear yang memiliki turunan parsial kontinu di titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$. Sistem persamaan (2.1) dapat didekati oleh sistem *autonomous* linear dengan melakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* sehingga fungsi $F, G,$ dan H dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= F(\vec{x}^*) + F_x(\vec{x}^*)(x - x^*) + F_y(\vec{x}^*)(y - y^*) \\ &\quad + F_z(\vec{x}^*)(z - z^*) + \eta_1(\vec{x}), \\ G(\vec{x}) &= G(\vec{x}^*) + G_x(\vec{x}^*)(x - x^*) + G_y(\vec{x}^*)(y - y^*) \\ &\quad + G_z(\vec{x}^*)(z - z^*) + \eta_2(\vec{x}), \\ H(\vec{x}) &= H(\vec{x}^*) + H_x(\vec{x}^*)(x - x^*) + H_y(\vec{x}^*)(y - y^*) \\ &\quad + H_z(\vec{x}^*)(z - z^*) + \eta_3(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan $\eta_1(x, y, z), \eta_2(x, y, z), \eta_3(x, y, z)$ adalah suku sisa. Berdasarkan hampiran orde satu fungsi $F, G,$ dan $H,$ suku sisa sistem persamaan (2.4) memenuhi sifat

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_1(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} &= 0, \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_2(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} &= 0, \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_3(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} &= 0, \end{aligned}$$



dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)$.

Karena $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x^*)}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}$, dan $\frac{dz}{dt} = \frac{d(z-z^*)}{dt}$, maka persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\vec{x}^*) \\ G(\vec{x}^*) \\ H(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x(\vec{x}^*) & F_y(\vec{x}^*) & F_z(\vec{x}^*) \\ G_x(\vec{x}^*) & G_y(\vec{x}^*) & G_z(\vec{x}^*) \\ H_x(\vec{x}^*) & H_y(\vec{x}^*) & H_z(\vec{x}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \eta_3(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Karena $F(\vec{x}^*) = G(\vec{x}^*) = H(\vec{x}^*) = 0$, maka sistem persamaan (2.5) menjadi

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(\vec{x}^*) & F_y(\vec{x}^*) & F_z(\vec{x}^*) \\ G_x(\vec{x}^*) & G_y(\vec{x}^*) & G_z(\vec{x}^*) \\ H_x(\vec{x}^*) & H_y(\vec{x}^*) & H_z(\vec{x}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \eta_3(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}, \quad (2.6)$$

dengan $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ dan

$$J = \begin{bmatrix} F_x(\vec{x}^*) & F_y(\vec{x}^*) & F_z(\vec{x}^*) \\ G_x(\vec{x}^*) & G_y(\vec{x}^*) & G_z(\vec{x}^*) \\ H_x(\vec{x}^*) & H_y(\vec{x}^*) & H_z(\vec{x}^*) \end{bmatrix}.$$

Jika \vec{x} berada cukup dekat dengan \vec{x}^* , maka $\vec{\eta}$ bernilai kecil sehingga $\vec{\eta} \rightarrow 0$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ diabaikan dan sistem persamaan nonlinear (2.1) dapat dihampiri oleh sistem persamaan linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.7)$$



Jika $x = x^*$, $y = y^*$, dan $z = z^*$ maka diperoleh $\vec{w} = \vec{0}$ yang merupakan titik kesetimbangan sistem persamaan (2.7). Matriks J berperan sebagai matriks A pada sistem *autonomous* linear (2.3). Proses penghampiran sistem persamaan nonlinear oleh sistem persamaan linear disebut linearisasi.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan nonlinear akan bergantung kepada kestabilan titik kesetimbangan hasil linearisasi.

Teorema 2.2 Kestabilan sistem persamaan nonlinear.

Titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat stabil asimtotik,
2. **tidak stabil**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat tidak stabil.

(Finizio dan Ladas, 1982)

2.2 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar (R_0) adalah angka rata-rata banyaknya individu terinfeksi baru yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi dalam populasi rentan. R_0 digunakan untuk memahami dinamika penyebaran suatu penyakit dan memperkirakan suatu populasi dapat mewabah atau tidak. Jika $R_0 < 1$, artinya individu terinfeksi dapat menularkan penyakit rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru, sehingga dapat diprediksi infeksi akan hilang dan tidak akan terjadi penyebaran penyakit atau disebut bebas penyakit. Jika $R_0 > 1$, artinya individu terinfeksi dapat menularkan penyakit rata-rata lebih dari satu individu terinfeksi baru, sehingga menyebabkan mudah terjadi penyebaran penyakit.

(Heffernan dkk., 2005)



2.3 Teori Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal adalah masalah penentuan kondisi yang sesuai sebagai upaya memaksimalkan atau meminimumkan suatu fungsi tujuan. Pada masalah kontrol optimal dengan sistem persamaan diferensial biasa, variabel kontrol dinotasikan $\vec{u}(t)$ dan variabel *state* dinotasikan $\vec{x}(t)$. *State* suatu sistem kontinu pada waktu t disebut fungsi kendala dan dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) \quad (2.8)$$

Fungsi tujuan dipengaruhi oleh $\vec{u}(t)$ dan $\vec{x}(t)$ dengan bentuk umum sebagai berikut

$$Z(\vec{u}) = \int_{t_0}^T f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt, \quad (2.9)$$

dengan kondisi batas $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ dan $\vec{x}(T)$ bebas.

Variabel kontrol yang mengoptimalkan Z dinotasikan $\vec{u}^*(t)$. Selanjutnya $\vec{u}^*(t)$ disubstitusikan ke dalam persamaan *state* $\vec{x}(t)$ sehingga diperoleh *state* yang optimal yang dinotasikan $\vec{x}^*(t)$. Masalah kontrol optimal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

(Neilan dan Lenhart, 2010)

2.3.1 Syarat Perlu Kontrol Optimal

Berdasarkan masalah kontrol optimal, maka diturunkan syarat perlu dari masalah kontrol optimal. Misalkan variabel kontrol dan *state* optimal dinotasikan u^* dan x^* . Didefinisikan variabel kontrol lain dengan bentuk

$$u = u^*(t) + \epsilon h(t)$$

dengan $h(t)$ sebagai fungsi variasi dan $\epsilon \in \mathbb{R}$. Misalkan $x(t, \epsilon)$ adalah *state* yang sesuai untuk $u = u^*(t) + \epsilon h(t)$, kemudian substitusikan ke dalam persamaan (2.8) sehingga menjadi

$$\frac{dx(t, \epsilon)}{dt} = g(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon h(t)). \quad (2.10)$$



Jika $t = t_0$ maka $x(t_0, \epsilon) = x_0$. Jika $\epsilon = 0$ maka $x(t, 0) = x^*$, sehingga diperoleh kontrol $u^*(t)$. Dari fungsi variasi dan kontrol yang diperoleh, fungsi tujuan menjadi

$$Z(u^*(t) + \epsilon h(t)) = \int_{t_0}^T f(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon h(t)) dt. \quad (2.11)$$

Nilai maksimum dari Z terjadi saat $\epsilon = 0$ yang diberikan oleh

$$\frac{dZ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0. \quad (2.12)$$

Setelah itu, diberikan variabel *costate* yang dinotasikan $\lambda(t)$ sehingga diperoleh

$$\int_{t_0}^T \frac{d}{dt} (\lambda(t)x(t, \epsilon)) dt = \lambda(T)x(T, \epsilon) - \lambda(t_0)x(t_0, \epsilon). \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\int_{t_0}^T \frac{d}{dt} (\lambda(t)x(t, \epsilon)) dt + \lambda(t_0)x(t_0, \epsilon) - \lambda(T)x(T, \epsilon) = 0. \quad (2.14)$$

Selanjutnya persamaan (2.14) ditambahkan pada persamaan (2.11) sehingga bentuk fungsi tujuan menjadi

$$\begin{aligned} Z(u^*(t) + \epsilon h(t)) &= \int_{t_0}^T [f(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon h(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda(t)x(t, \epsilon))] dt + \\ &\lambda(t_0)x(t_0, \epsilon) - \lambda(T)x(T, \epsilon) \\ &= \int_{t_0}^T [f(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon h(t)) + \lambda'(t)x(t, \epsilon) + \\ &\lambda(t)g(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon h(t))] dt + \lambda(t_0)x(t_0, \epsilon) - \\ &\lambda(T)x(T, \epsilon) \\ &= \int_{t_0}^T [f(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon h(t)) + \lambda'(t)x(t, \epsilon) + \\ &\lambda(t)g(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon h(t))] dt + \lambda(t_0)x_0 - \\ &\lambda(T)x(T, \epsilon). \end{aligned}$$

Kemudian Z diturunkan sehingga



$$\frac{dZ}{d\epsilon}(u^*(t) + \epsilon h(t)) = \int_{t_0}^T \left[f_x \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + f_u \frac{\partial (u^*(t) + \epsilon h(t))}{\partial \epsilon} + \lambda'(t) \left(\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \lambda(t) \left(g_x \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + g_u \frac{\partial (u^*(t) + \epsilon h(t))}{\partial \epsilon} \right) \right) \right] dt - \lambda(T) \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T, \epsilon).$$

Berdasarkan persamaan (2.12) maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dZ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^T \left[(f_x + \lambda g_x + \lambda') \frac{\partial \vec{x}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda g_u) \frac{\partial (u^*(t) + \epsilon h(t))}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right] dt \\ &\quad - \lambda(T) \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T, 0) \\ &= \int_{t_0}^T \left[(f_x + \lambda g_x + \lambda') \frac{\partial x}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda g_u) h \right] dt - \lambda(T) \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T, 0) \end{aligned}$$

dengan f dan g adalah $(t, x^{*(t)}, u^*(t))$.

Berdasarkan uraian tersebut, diambil

$$\lambda'(t) = -[f_x(t, x^{*(t)}, u^*(t)) + \lambda(t)g_x(t, x^{*(t)}, u^*(t))] \quad (2.15)$$

dan

$$\lambda(T) = 0, \quad (2.16)$$

sehingga diperoleh

$$\int_{t_0}^T [(f_u + \lambda g_u)h(t)] dt = 0, \quad (2.17)$$

untuk sembarang $h(t)$.

Persamaan (2.17) yang ditunjukkan oleh $(f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda g_u(t, x^*(t), u^*(t)))h(t)$ untuk semua $t_0 \leq t \leq T$ disebut kondisi optimal. Persamaan (2.15) disebut persamaan *costate* dan persamaan (2.16) disebut kondisi transversal.

(Neilan dan Lenhart, 2010)



2.3.2 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum Pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal. Prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh kontrol $\bar{u}(t)$ yang dapat mengoptimalkan fungsi tujuan. Untuk menentukan kondisi tersebut, dibangun suatu fungsi yang disebut fungsi Hamilton dengan memperkenalkan suatu variabel baru yang disebut variabel *costate* dan dinotasikan dengan $\bar{\lambda}(t)$. Fungsi Hamilton didefinisikan sebagai

$$H = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad (2.18)$$

$$= H(t, \bar{u}(t), \bar{x}(t), \bar{\lambda}(t)),$$

dengan f adalah integran pada fungsi tujuan persamaan (2.9) dan g adalah ruas kanan persamaan *state*, $i = 1, 2, \dots, n$.

Jika $\bar{u}^*(t)$ dan $\bar{x}^*(t)$ adalah nilai yang mengoptimalkan masalah (2.9) dan (2.8), maka variabel *costate* $\bar{\lambda}(t)$ akan eksis jika

$$H(t, \bar{x}^*(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t)) \geq H(t, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}(t)). \quad (2.19)$$

Kondisi tersebut menyatakan bahwa harus ditentukan kontrol optimal $\bar{u}^*(t)$ yang meminimumkan fungsi Hamilton H pada saat t . Selanjutnya jika fungsi Hamilton dapat diturunkan terhadap $\bar{u}(t)$, maka kondisi (2.19) terpenuhi jika

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0.$$

Untuk mengetahui apakah kontrol yang diperoleh merupakan kontrol minimum atau maksimum, dapat dilakukan dengan cara memeriksa turunan kedua fungsi Hamilton terhadap $\bar{u}(t)$. Jika

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} > 0,$$

maka masalah kontrol yang diselesaikan adalah masalah kontrol minimum, dan sebaliknya.

Selain variabel kontrol $\bar{u}(t)$, fungsi Hamilton juga memuat variabel *state* $\bar{x}(t)$ dan *costate* $\bar{\lambda}(t)$. Berdasarkan persamaan (2.18), persamaan *state* dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$



dan persamaan *costate* dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{\vec{\lambda}} = \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

Jika nilai awal $\vec{x}(0)$ dan nilai akhir $\vec{x}(T)$ diberikan, maka dapat langsung ditentukan nilai turunan \vec{x}' dan $\vec{\lambda}'$. Namun jika tidak diberikan kondisi akhir $\vec{x}(T)$, maka digunakan suatu kondisi yang disebut kondisi transversal, yaitu $\vec{\lambda}(T) = 0$ sebagai kondisi akhir.

Berdasarkan uraian tersebut, prinsip minimum Pontryagin meliputi beberapa syarat berikut.

a. $H(t, \vec{x}^*, \vec{u}^*, \vec{\lambda}) \leq H(t, \vec{x}^*, \vec{u}, \vec{\lambda})$ untuk setiap $t \in [0, T]$,

b. $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{\lambda}}$ (persamaan *state*),

c. $\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$ (persamaan *costate*),

d. $\vec{\lambda}(T) = 0$ (kondisi transversal).

Jika diberikan batasan $a \leq \vec{u} \leq b$ pada variabel kontrol $\vec{u}(t)$, maka kondisi $\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} = 0$ berubah menjadi persamaan karakteristik

$$\vec{u}^* = \begin{cases} \vec{u} = a, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} < 0, \\ a \leq \vec{u} \leq b, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} = 0, \\ \vec{u} = b, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} > 0. \end{cases}$$

(Lenhart dan Workman, 2007)

2.4 Metode Sweep Maju-Mundur

Ada banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan kontrol optimal, salah satunya adalah metode *Sweep Maju-Mundur*. Secara umum, algoritma metode *Sweep Maju-Mundur* sebagai berikut.

Langkah 1 : Membuat dugaan awal untuk nilai \vec{u} .

Langkah 2 : Menggunakan kondisi awal $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ dan nilai \vec{u} untuk menyelesaikan persamaan *state* \vec{x} dengan Metode Runge-Kutta orde 4 langkah maju.



Langkah 3 : Menggunakan kondisi transversal $\bar{\lambda}(T)$, nilai awal \bar{u} dan \bar{x} untuk menyelesaikan persamaan *costate* $\bar{\lambda}$ dengan Metode Runge-Kutta orde 4 langkah mundur.

Langkah 4 : Memperbarui nilai \bar{u} dengan memasukkan nilai \bar{x} dan $\bar{\lambda}$ yang baru ke dalam karakteristik kontrol optimal.

Langkah 5 : Memeriksa konvergensi, jika nilai eror dari iterasi saat ini dan sebelumnya sangat kecil maka cetak nilai-nilai saat ini, namun jika nilai erornya tidak kecil maka proses kembali ke langkah 2.

(Lenhart dan Workman, 2007)

2.5 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan metode satu langkah karena hanya membutuhkan satu titik sebelumnya untuk menentukan nilai yang baru. Diberikan suatu langkah (h), $x(t)$, dan $x' = f(t, x(t))$ dapat membentuk aproksimasi $x(t + h)$ sehingga diperoleh rumus rekursi sebagai berikut

$$x(t + h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

dengan

$$k_1 = f(t, x(t)),$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{1}{2}h, x(t) + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{1}{2}h, x(t) + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$k_4 = f\left(t + h, x(t) + hk_3\right).$$

(Lenhart dan Workman, 2007)

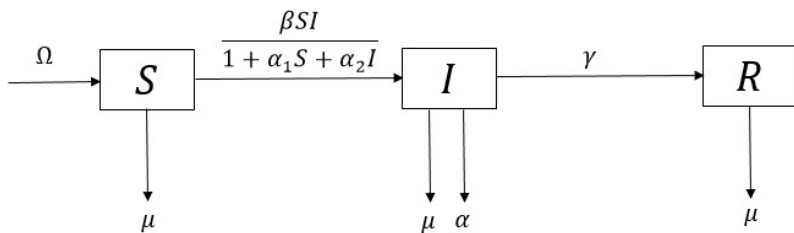
2.6 Model Epidemologi SIR

Pada skripsi ini dibahas proses penyebaran penyakit model SIR dari persamaan diferensial nonlinear. SIR adalah singkatan dari *Susceptibles* (subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit),



Infectious (subpopulasi individu yang terinfeksi penyakit), dan *Recovered* (subpopulasi individu yang sembuh dari penyakit). Pada subpopulasi rentan, penambahan individu disimbolkan Ω . Selain penambahan individu, perubahan jumlah subpopulasi rentan dipengaruhi oleh kematian alami (μ) yang mengakibatkan jumlah subpopulasi berkurang. Subpopulasi rentan juga dapat berkurang karena terjadi infeksi penyakit. Laju infeksi pada subpopulasi rentan dipengaruhi oleh *inhibitor* yang disebut laju infeksi tersaturasi. Fungsi $\frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I}$ merupakan *inhibitor* atau hambatan yang ditimbulkan oleh perubahan perilaku individu saat individu rentan dan individu terinfeksi meningkat. Jumlah subpopulasi terinfeksi dapat berkurang karena adanya kematian akibat penyakit (α) dan kematian alami (γ). Individu yang sudah sembuh, tidak akan kembali menjadi individu rentan. Subpopulasi sembuh dari penyakit hanya dapat berkurang karena kematian alami.

Diagram kompartemen yang menggambarkan aliran individu antar subpopulasi dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1: Diagram kompartemen *SIR*

Sistem persamaan dari Gambar 2.1, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Omega - \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} - (\mu + \alpha + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R, \end{aligned} \quad (2.20)$$



dengan

S = subpopulasi individu rentan,

I = subpopulasi individu terinfeksi,

R = subpopulasi individu sembuh,

Ω = laju penambahan populasi,

β = laju kontak antara individu rentan dengan terinfeksi,

μ = laju kematian alami,

α = laju kematian karena penyakit,

α_1, α_2 = inhibitor,

γ = laju penyembuhan.

Dari sistem persamaan (2.20), diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{\Omega}{\mu}, 0, 0 \right),$$

dan titik kesetimbangan endemik

$$E^* = (S^*, I^*, R^*)$$

dengan

$$S^* = \frac{\Omega((\mu + \alpha + \gamma) + \alpha_2 \Omega)}{\mu((\mu + \alpha + \gamma)R_0 + \alpha_2 \Omega)},$$

$$I^* = \frac{\Omega(R_0 - 1)}{(\mu + \alpha + \gamma)R_0 + \alpha_2 \Omega},$$

$$R^* = \frac{\Omega(R_0 - 1)}{\mu((\mu + \alpha + \gamma)R_0 + \alpha_2 \Omega)},$$

dan

$$R_0 = \frac{\Omega(\beta - \alpha_1(\mu + \alpha + \gamma))}{\mu(\mu + \alpha + \gamma)} = \frac{\Omega\beta}{(\mu + \alpha + \gamma)(\alpha_1 \Omega + \mu)}.$$

R_0 adalah angka reproduksi dasar yang digunakan untuk mengecek kestabilan. Kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. Kesetimbangan endemik dikatakan stabil asimtotik jika $R_0 > 1$.

(Bashier dan Patidar, 2017)



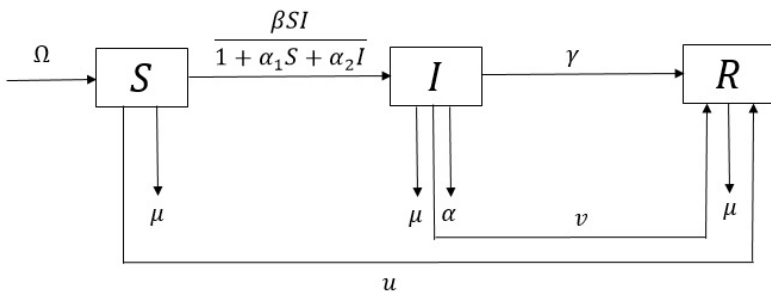
BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas formulasi model epidemi *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi dan pemberian variabel kontrol optimal berupa vaksinasi dan pengobatan. Untuk menyelesaikan kontrol optimal, pembahasan dalam skripsi menerapkan prinsip minimum Pontryagin. Kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur untuk melihat ilustrasi model epidemi *SIR* dengan dan tanpa kontrol.

3.1 Formulasi Model Epidemi *SIR* dengan Kontrol

Pada bab sebelumnya telah diuraikan model epidemi *SIR* yang sederhana, sedangkan model matematika yang dibahas pada skripsi ini adalah modifikasi model epidemi *SIR* dengan memberikan vaksinasi dan pengobatan. Untuk mencegah individu terinfeksi penyakit, dapat dilakukan pemberian vaksinasi kepada individu yang rentan terhadap penyakit sehingga menambah jumlah subpopulasi sembuh. Individu yang telah terinfeksi penyakit dapat sembuh karena diberikan pengobatan. Pada model ini, penyembuhan secara alami juga masih tetap dipertahankan. Berikut diagram kompartemen model *SIR* dengan vaksinasi dan pengobatan.



Gambar 3.1: Diagram kompartemen *SIR* dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan



Dari diagram kompartemen tersebut, diperoleh model epidemi *SIR* berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear dengan laju infeksi tersaturasi dan pemberian kontrol berupa vaksinasi dan pengobatan namun tetap mempertahankan penyembuhan alami sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \Omega - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - \mu S(t) + u(t)S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - (\mu + \alpha + \gamma)I(t) - v(t)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) + u(t)S(t) + v(t)I(t) - \mu R(t),\end{aligned}\quad (3.1)$$

dengan $u(t)$ adalah vaksinasi dan $v(t)$ adalah pengobatan.

3.2 Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal

Pemberian vaksinasi dan pengobatan dibutuhkan suatu biaya. Penyelesaian masalah kontrol optimal adalah untuk mendapatkan kontrol vaksinasi dan pengobatan yang optimal sehingga dapat meminimumkan kedua kontrol, meminimumkan jumlah subpopulasi rentan dan terinfeksi, serta memaksimumkan jumlah subpopulasi sembuh dengan membentuk fungsi tujuan. Fungsi tujuan yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$Z(u(t), v(t)) = \int_{t_0}^T (C_1 u^2 + C_2 v^2 + S(t) + I(t) - R(t)) dt, \quad (3.2)$$

dengan C_1 adalah bobot biaya vaksinasi dan C_2 adalah bobot biaya pengobatan. T adalah waktu akhir serta u dan v adalah kontrol yang akan diminimumkan dengan fungsi kendala pada sistem persamaan (3.1). Fungsi biaya dimodelkan nonlinear dan dipilih fungsi kuadrat yaitu u^2 dan v^2 .

Akan ditentukan $Z(u^*(t), v^*(t))$ sedemikian sehingga

$$Z(u^*(t), v^*(t)) = \min_{(u,v) \in \mathbb{U}} Z(u(t), v(t)),$$

dengan $\mathbb{U} = \{(u, v) : u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, v_{\min} \leq v(t) \leq v_{\max}\}$.



3.2.1 Fungsi Hamilton

Langkah pertama untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah membentuk fungsi Hamilton. Dalam prinsip minimum Pontryagin, Hamilton dibentuk berdasarkan fungsi tujuan dan persamaan *state* sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 H &= H(\vec{u}(t), \vec{x}(t), \vec{\lambda}(t)) \\
 &= f(\vec{u}(t), \vec{x}(t)) + \vec{\lambda}^T \dot{\vec{x}}(t) \\
 &= C_1 u^2 + C_2 v^2 + S(t) + I(t) - R(t) \\
 &\quad + \lambda_1 \left(\Omega - \frac{\beta S(t) I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - \mu S(t) - u(t) S(t) \right) \\
 &\quad + \lambda_2 \left(\frac{\beta S(t) I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - (\mu + \alpha + \gamma) I(t) - v(t) I(t) \right) \\
 &\quad + \lambda_3 \left(\gamma I(t) + u(t) S(t) + v(t) I(t) - \mu R(t) \right).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.2 Persamaan *state*

Berdasarkan prinsip minimum Pontryagin, persamaan *state* adalah turunan fungsi Hamilton sistem persamaan (3.3) terhadap masing-masing λ_1 , λ_2 , dan λ_3 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \Omega - \frac{\beta S(t) I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - \mu S(t) - u(t) S(t), \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{\beta S(t) I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - (\mu + \alpha + \gamma) I(t) - v(t) I(t), \\
 \frac{dR}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \gamma I(t) + u(t) S(t) + v(t) I(t) - \mu R(t),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$.

3.2.3 Persamaan *costate*

Persamaan *costate* dan kondisi transversal merupakan komponen dalam Prinsip minimum Pontryagin. Persamaan *costate*



dapat diperoleh dari turunan fungsi Hamilton (3.3) terhadap S , I , dan R sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S} \\ &= -\left[1 - \frac{\beta I(t)(1 + \alpha_2 I(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2} + \mu + u\right] \lambda_1(t) + \\ &\quad \frac{\beta I(t)(1 + \alpha_2 I(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2} \lambda_2(t) + u(t) \lambda_3(t) \\ &= -1 + \frac{\beta I(t)(1 + \alpha_2 I(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2} (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) + \\ &\quad (\mu + u(t)) \lambda_1(t) - u(t) \lambda_3(t), \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I} \\ &= \left[1 - \frac{\beta S(t)(1 + \alpha_1 S(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2} \lambda_1(t) + \left(\frac{\beta I(t)(1 + \alpha_2 I(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2}\right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mu - \lambda - \gamma - v(t)\right) \lambda_2(t) + (\gamma + v(t)) \lambda_3(t)\right] \\ &= -1 + \frac{\beta S(t)(1 + \alpha_1 S(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2} (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) + \\ &\quad (\mu + \alpha + \gamma + v(t)) \lambda_2(t) - (\gamma + v(t)) \lambda_3(t), \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R} \\ &= -[1 - \mu \lambda_3(t)] \\ &= 1 + \mu \lambda_3(t), \end{aligned}$$

dengan kondisi transversal $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0$.

3.2.4 Kondisi stasioner

Kontrol yang optimal diperoleh jika $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ dan $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$. Kondisi tersebut disebut kondisi stasioner. Kontrol yang optimal dimisalkan $u^*(t)$ dan $v^*(t)$ sehingga diperoleh



$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2C_1 u^*(t) - \lambda_1(t)S(t) + \lambda_3(t)S(t) = 0$$

$$u^*(t) = \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{2C_1},$$

dan

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 2C_2 v^*(t) - \lambda_2(t)I(t) + \lambda_3(t)I(t) = 0$$

$$v^*(t) = \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I(t)}{2C_2}.$$

Variabel kontrol pada model epidemi SIR dengan vaksinasi dan pengobatan didefinisikan $u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}$ dan $v_{min} \leq v(t) \leq v_{max}$, sehingga diperoleh solusi

$$u^* = \begin{cases} u_{min}, & \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{2C_1} < 0, \\ \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{2C_1}, & \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{2C_1} = 0, \\ u_{max}, & \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{2C_1} > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

dan

$$v^* = \begin{cases} v_{min}, & \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I(t)}{2C_2} < 0, \\ \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I(t)}{2C_2}, & \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I(t)}{2C_2} = 0, \\ v_{max}, & \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I(t)}{2C_2} > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Kontrol optimal $u^*(t)$ dan $v^*(t)$ persamaan (3.5) dan (3.6) juga dapat dinyatakan sebagai

$$u^*(t) = \min \left[u_{max}, \max \left[u_{min}, \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S(t)}{2C_1} \right] \right] \quad (3.7)$$

dan

$$v^*(t) = \min \left[v_{max}, \max \left[v_{min}, \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I(t)}{2C_2} \right] \right]. \quad (3.8)$$

Turunan kedua fungsi Hamilton pada persamaan (3.3) terhadap $u^*(t)$ dan $v^*(t)$ adalah



$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} = 2C_1 \quad (3.9)$$

dan

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 v} = 2C_2 \quad (3.10)$$

dengan C_1 dan C_2 merupakan bilangan positif sehingga nilai turunan kedua adalah bilangan positif. Oleh karena itu, jenis kontrol $u^*(t)$ dan $v^*(t)$ adalah minimum.

Sistem yang optimal diperoleh dengan mensubstitusikan (3.7) dan (3.8) dalam sistem persamaan *state* dan persamaan *costate* sehingga diperoleh sistem yang optimal sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Omega - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - \mu S(t) - u^*(t)S(t), \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - (\mu + \alpha + \gamma)I(t) - v^*(t)I(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) + u^*(t)S(t) + v^*(t)I(t) - \mu R(t), \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= -1 + \frac{\beta I(t)(1 + \alpha_2 I(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2} (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) + \\ &\quad (\mu + u^*(t))\lambda_1(t) - u^*(t)\lambda_3(t), \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -1 + \frac{\beta S(t)(1 + \alpha_1 S(t))}{(1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t))^2} (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) + \\ &\quad (\mu + \alpha + \gamma + v^*(t))\lambda_2(t) - (\gamma + v^*(t))\lambda_3(t), \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= 1 + \mu\lambda_3(t). \end{aligned}$$

3.3 Simulasi Numerik

Hasil solusi numerik dari penyelesaian kontrol optimal diperoleh menggunakan metode *Sweep Maju-Mundur* dengan bantuan software MATLAB. Pada metode ini, dilakukan diskritisasi interval $[0, T]$ di titik-titik $t_i = t_0 + ih$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan h merupakan ukuran langkah waktu. Variabel-variabel yang digunakan adalah $S, I, R, u, v, \lambda_1, \lambda_2,$ dan λ_3 . Kemudian pada setiap node, variabel tersebut



dinyatakan sebagai $S(i)$, $I(i)$, $R(i)$, $u(i)$, $v(i)$, $\lambda_1(i)$, $\lambda_2(i)$, dan $\lambda_3(i)$.

Nilai hampiran variabel *state* S , I , R didekati dengan metode Runge-Kutta orde 4 maju dengan nilai awal $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$, sedangkan variabel *costate* didekati dengan metode Runge-Kutta orde 4 mundur dengan nilai akhir $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0$.

Langkah-langkah algoritma metode *sweep* Maju Mundur dijelaskan sebagai berikut.

Langkah 1

Membuat dugaan nilai awal untuk S , S_{old} , I , I_{old} , R , R_{old} , u , u_{old} , v , v_{old} , λ_1 , λ_{1old} , λ_2 , λ_{2old} , λ_3 , λ_{3old} . Kemudian mengganti nilai S_{old} , I_{old} , R_{old} , u_{old} , v_{old} , λ_{1old} , λ_{2old} , λ_{3old} dengan S , I , R , u , v , λ_1 , λ_2 , dan λ_3 .

Langkah 2

Menggunakan kondisi awal $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$, $u(t)$, $v(t)$ untuk menyelesaikan persamaan *state* S , I , R dengan Metode Runge-Kutta orde 4 langkah maju.

Langkah 3

Menggunakan kondisi transversal $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0$, serta nilai S , I , R , u , v untuk menyelesaikan persamaan *costate* λ dengan Metode Runge-Kutta orde 4 langkah mundur.

Langkah 4

Memperbarui nilai kontrol u dan v dengan memasukkan nilai S , I , R , λ_1 , λ_2 , dan λ_3 yang baru ke dalam karakteristik kontrol optimal.

Langkah 5

Jika nilai eror pada variabel *state*, *costate*, dan kontrol dari iterasi saat ini dengan sebelumnya lebih kecil 10^{-4} maka cetak nilai-nilai saat ini, namun jika nilai erornya lebih dari 10^{-4} maka proses kembali ke langkah 2.



Simulasi numerik dilakukan untuk memberikan gambaran pengaruh pemberian kontrol vaksinasi dan pengobatan terhadap model. Kontrol u menyatakan vaksinasi dan kontrol v menyatakan pengobatan. Simulasi dilakukan pada waktu $t_0 = 0$ hingga waktu akhir $T = 180$ (hari) dengan $h = 0.1$. Kondisi awal yang digunakan yaitu $S_0 = 50$, $I_0 = 10$, $R_0 = 0$. Pada simulasi ini, digunakan nilai parameter seperti yang digunakan oleh Bashier dan Patidar (2017), yaitu

$$\begin{aligned} \Omega &= 0.95, & \alpha_1 &= \alpha_2 = 0.25, \\ \beta &= 0.08, & \alpha &= 0.1, \\ \mu &= 0.01, & \gamma &= 0.005. \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh angka reproduksi dasar $R_0 = \frac{\Omega\beta}{(\mu+\alpha+\gamma)(\lambda_1\Omega+\mu)} = 2.6702 > 1$ sehingga terjadi endemi. Oleh karena itu, diperlukan suatu kontrol untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi.

3.3.1 Simulasi I

Pada simulasi I diterapkan kontrol vaksinasi ($u(t)$) saja tanpa pengobatan ($v(t)$). Vaksinasi diberikan dengan bobot biaya $C_1 = 1500$ dengan batas $0 \leq v(t) \leq 1$. Hasil simulasi numerik dapat dilihat pada Gambar 3.2.

Gambar 3.2(a) menunjukkan grafik subpopulasi rentan. Sebelum diberi kontrol, jumlah subpopulasi rentan turun hingga $S = 5$ individu dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 30$ (hari), kemudian meningkat pada selang waktu antara $t = 30$ dan $t = 75$ (hari). Subpopulasi rentan mencapai kondisi stabil setelah $t = 75$ (hari) dengan jumlah $S = 6.6$. Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi rentan turun hingga mencapai $S = 3.65$ individu dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 16$ (hari). Lalu sedikit meningkat hingga waktu akhir $T = 180$ (hari) mencapai $S = 6.6$. Pemberian kontrol vaksinasi yang telah dilakukan dapat menurunkan jumlah subpopulasi rentan dalam waktu 14 hari lebih cepat daripada yang tanpa kontrol karena individu yang sudah divaksinasi tidak akan terinfeksi dan langsung masuk ke subpopulasi sembuh.

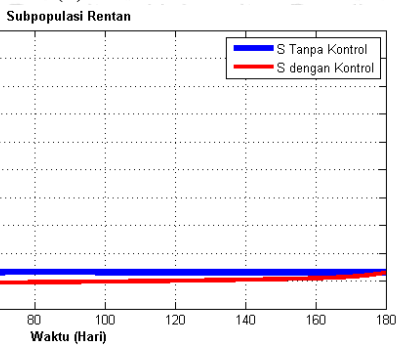
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya

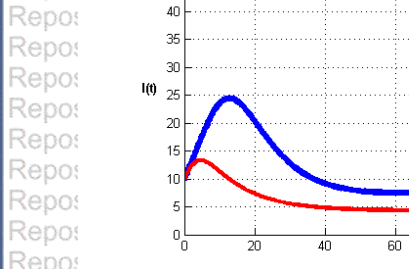


Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:

Repository Universitas Brawijaya
Repository Universitas Brawijaya



Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:



Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:
Repo:

Gambar 3.2: Dinamika model SIR dengan kontrol vaksinasi

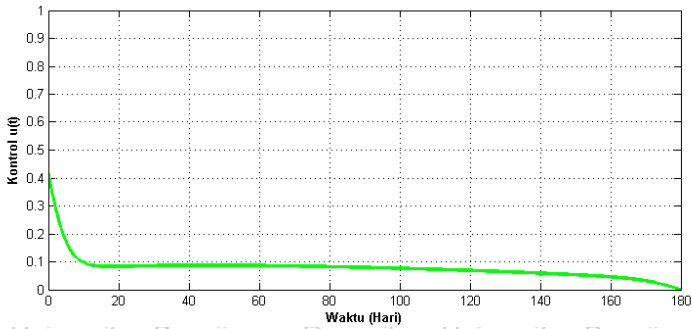


Grafik subpopulasi terinfeksi ditunjukkan oleh Gambar 3.2(b). Sebelum diberi kontrol, jumlah subpopulasi terinfeksi naik mencapai $I = 24.42$ pada selang waktu antara $t = 0$ dan $t = 12.8$ (hari). Kemudian grafik tersebut turun hingga $t = 60$ (hari), lalu naik sedikit sampai $t = 98$ (hari) dan setelah itu mencapai kondisi stabil hingga waktu akhir saat jumlah subpopulasi $I = 7.7$. Setelah diberi kontrol vaksinasi, jumlah subpopulasi terinfeksi hanya naik hingga $I = 13.3$ dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 4.5$ (hari), kemudian turun hingga $t = 64$ (hari) saat mencapai jumlah subpopulasi $I = 4.4$. Setelah itu naik secara perlahan hingga waktu akhir $T = 180$ (hari) dengan jumlah subpopulasi terinfeksi mencapai $I = 6$. Pemberian kontrol vaksinasi mengakibatkan individu rentan tidak dapat terinfeksi penyakit sehingga jumlah individu yang terinfeksi sedikit. Pemberian kontrol vaksinasi saja tanpa ada pengobatan dapat menurunkan jumlah subpopulasi terinfeksi lebih cepat daripada tanpa kontrol karena individu rentan yang sudah divaksinasi tidak dapat terinfeksi penyakit sehingga jumlah individu terinfeksi menjadi lebih sedikit.

Grafik subpopulasi pulih atau sembuh ditunjukkan oleh Gambar 3.2(c). Sebelum diberi kontrol, jumlah subpopulasi sembuh meningkat dari nol individu hingga mencapai $R = 2.8$ individu dalam rentan waktu antara $t = 0$ dan $t = 40$ (hari) karena terjadi penyembuhan alami. Grafik meningkat secara perlahan setelah $t = 40$ hingga $T = 180$ (hari) dengan jumlah subpopulasi $I = 3.6$. Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi sembuh meningkat secara signifikan dari nol individu hingga mencapai $R = 36$ individu selama 10 hari. Kemudian, grafik perlahan turun hingga saat $t = 27$ (hari) dan akan terus naik hingga $R = 37$ saat $t = 110$ (hari). Setelah itu, jumlah subpopulasi rentan turun hingga waktu akhir dengan $R = 33.3$. Individu rentan yang telah diberi vaksinasi tidak dapat terinfeksi penyakit, sehingga individu tersebut langsung menjadi individu sembuh. Oleh karena itu, pemberian kontrol vaksinasi saja tanpa ada pengobatan dapat meningkatkan jumlah subpopulasi sembuh secara signifikan.

Gambar 3.3 menunjukkan profil kontrol vaksinasi selama 180 hari atau 6 bulan. Dari gambar tersebut, dapat dilihat bahwa vaksinasi diberikan mulai dari 0.35 lalu turun menjadi 0.068 pada 18 hari

pertama. Kemudian pemberian vaksinasi sedikit naik lalu turun secara perlahan sampai waktu akhir.



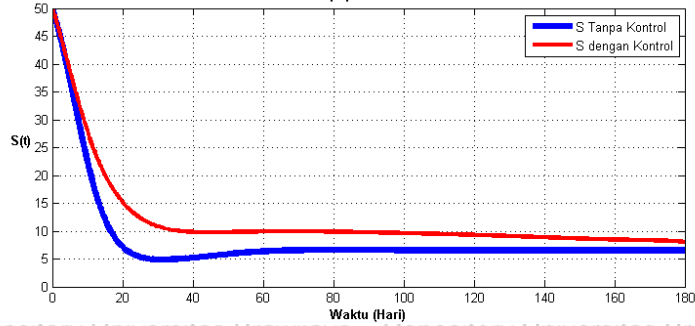
Gambar 3.3: Profil kontrol vaksinasi ($u(t)$)

3.3.2 Simulasi II

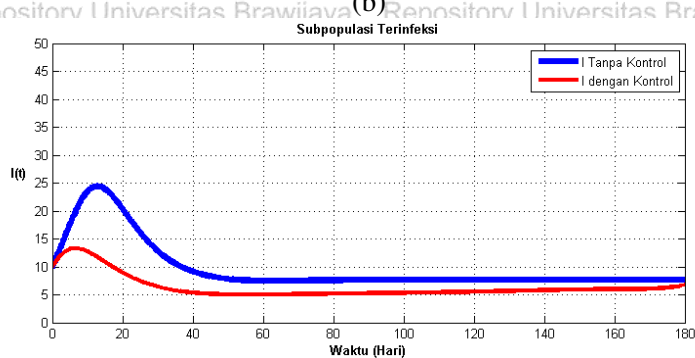
Pada simulasi II diterapkan kontrol pengobatan ($v(t)$) tanpa vaksinasi. Bobot biaya kontrol pengobatan diberikan sebesar $C_2 = 1500$ dengan batas $0 \leq v(t) \leq 1$. Hasil simulasi numerik dapat dilihat pada Gambar 3.4.

Gambar 3.4(a) menunjukkan grafik subpopulasi rentan. Sebelum diberi kontrol, jumlah subpopulasi rentan turun hingga $S = 5$ individu dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 30$ (hari), kemudian meningkat pada selang waktu antara $t = 30$ dan $t = 75$ (hari). Subpopulasi rentan mencapai kondisi stabil setelah $t = 75$ (hari) dengan jumlah $S = 6.6$. Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi rentan turun hingga mencapai jumlah subpopulasi $S = 9.8$ individu dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 45$ (hari), kemudian sedikit meningkat pada selang waktu antara $t = 45$ dan $t = 65$ (hari) dengan $S = 10$. Subpopulasi rentan turun lagi secara perlahan hingga waktu akhir dengan jumlah subpopulasi $S = 8.7$. Pemberian kontrol pengobatan saja tidak dapat menurunkan jumlah subpopulasi rentan lebih cepat daripada tanpa kontrol karena tidak diberikan vaksinasi sehingga membutuhkan waktu lebih lama untuk menurunkan individu rentan.

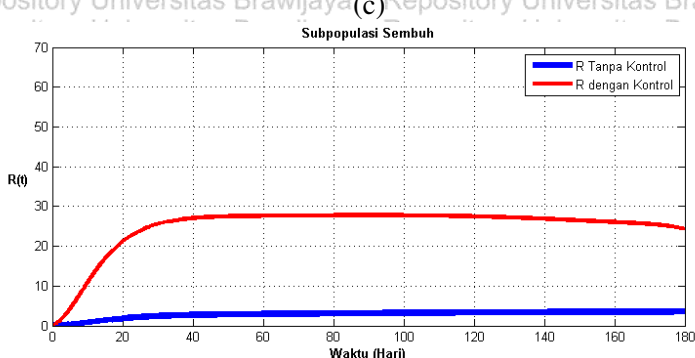
(a) Subpopulasi Rentan



(b) Subpopulasi Terinfeksi



(c) Subpopulasi Sembuh



Gambar 3.4: Dinamika model *SIR* dengan kontrol pengobatan



Grafik subpopulasi terinfeksi ditunjukkan oleh Gambar 3.4(b). Sebelum diberi kontrol, jumlah subpopulasi terinfeksi naik mencapai $I = 24.42$ dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 12.8$ (hari). Kemudian grafik tersebut turun hingga $t = 60$ (hari), lalu naik sedikit sampai $t = 98$ (hari) dan mencapai kondisi stabil saat jumlah subpopulasi $I = 7.7$. Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi terinfeksi naik hanya mencapai $I = 13.3$ pada selang waktu antara $t = 0$ dan $t = 6.5$ (hari), kemudian turun hingga $t = 50$ (hari) dengan jumlah subpopulasi $I = 5$ dan naik lagi secara perlahan hingga waktu akhir dengan jumlah subpopulasi $I = 6.7$. Pemberian kontrol pengobatan kepada individu yang terinfeksi mengakibatkan individu dapat langsung sembuh sehingga menurunkan jumlah subpopulasi terinfeksi. Selain kontrol pengobatan, terdapat penyembuhan alami yang juga dapat menurunkan jumlah subpopulasi terinfeksi. Pemberian kontrol pengobatan saja tanpa vaksinasi dapat menurunkan jumlah subpopulasi terinfeksi lebih cepat daripada tanpa kontrol karena individu terinfeksi diberi pengobatan dan juga terdapat penyembuhan alami.

Grafik subpopulasi sembuh ditunjukkan oleh Gambar 3.4(c). Sebelum diberi kontrol, jumlah subpopulasi sembuh meningkat dari nol hingga mencapai $R = 2.8$ dalam rentang waktu $t = 0$ hingga $t = 40$ (hari) karena terjadi penyembuhan alami. Grafik meningkat secara perlahan setelah $t = 40$ hingga $t = 180$ (hari) dengan jumlah subpopulasi $I = 3.6$. Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi sembuh meningkat secara signifikan dari nol individu hingga mencapai $R = 27.5$ selama 50 hari, kemudian turun secara perlahan hingga waktu akhir dengan $R = 24.4$. Individu yang terinfeksi dapat sembuh lebih cepat karena terdapat kontrol pengobatan dan penyembuhan alami. Oleh karena itu, pemberian kontrol pengobatan saja tanpa ada vaksinasi dapat meningkatkan jumlah subpopulasi sembuh secara signifikan.

Gambar 3.5 menunjukkan profil kontrol pengobatan selama 180 hari atau 6 bulan. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa pengobatan dimulai dari 0.037. Kemudian naik hingga batas 0.109 pada selang waktu antara $t = 0$ dan $t = 11$ (hari) dan turun secara perlahan hingga waktu akhir.



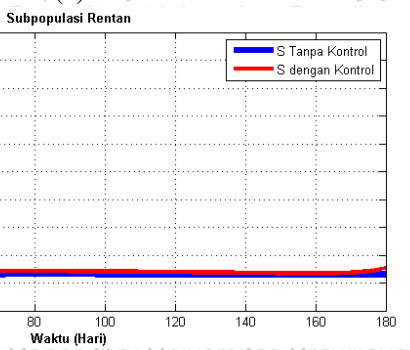
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository
 Repository
 Repository
 Repository

Repo:
 Repo:
 Repo:
 Repo:
 Repo:
 Repo:
 Repo:
 Repo:
 Repo:
 Repo:

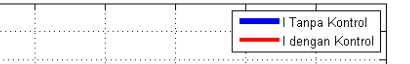
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



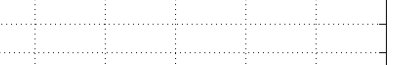
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



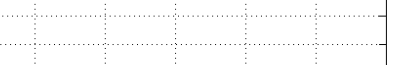
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



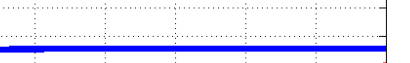
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



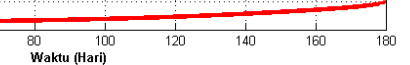
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



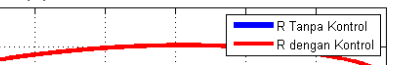
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



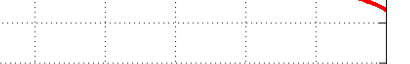
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



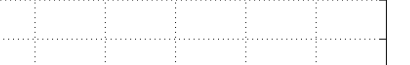
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



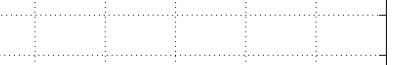
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



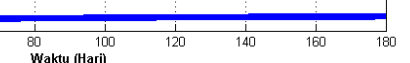
Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya



Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Gambar 3.6: Dinamika model SIR dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan

Grafik subpopulasi terinfeksi ditunjukkan oleh Gambar 3.6(b). Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi terinfeksi naik mencapai

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository
 Repository

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository
 Repository

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository
 Repository

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

Repository Universitas Brawijaya
 Repository Universitas Brawijaya

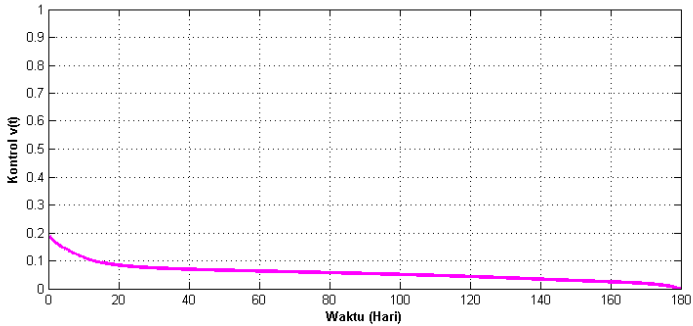
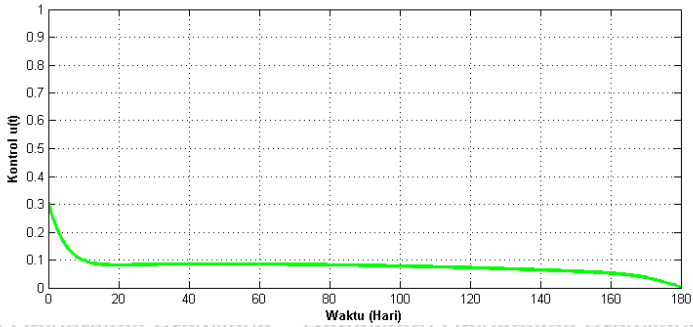
Repository
 Repository



$I = 24.42$ dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 12.8$ (hari). Kemudian grafik tersebut turun hingga $t = 60$ (hari), lalu naik sedikit sampai $t = 98$ (hari) dan setelah itu mencapai kondisi stabil saat jumlah subpopulasi $I = 7.7$. Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi terinfeksi turun mencapai jumlah $I = 1.5$ pada selang waktu antara $t = 0$ dan $t = 48$ (hari), kemudian naik secara perlahan hingga waktu akhir dengan jumlah subpopulasi $I = 5$, namun tidak sampai melewati grafik tanpa kontrol. Pemberian vaksinasi kepada individu rentan dan pengobatan kepada individu yang terinfeksi mengakibatkan jumlah subpopulasi terinfeksi tidak meningkat. Pemberian kombinasi kontrol vaksinasi dan pengobatan langsung dapat menurunkan jumlah subpopulasi terinfeksi lebih cepat daripada tanpa kontrol karena terdapat pengobatan dan penyembuhan alami sehingga individu terinfeksi lebih cepat sembuh.

Grafik subpopulasi sembuh ditunjukkan oleh Gambar 3.6(c). Sebelum diberi kontrol, jumlah subpopulasi sembuh meningkat dari nol hingga mencapai $R = 2.8$ dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 40$ (hari) karena terjadi penyembuhan alami. Grafik meningkat secara perlahan hingga $t = 180$ (hari) dengan jumlah subpopulasi $I = 3.6$. Setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi sembuh meningkat secara signifikan hanya dalam waktu 15 hari dari nol individu hingga mencapai $R = 47,1$, kemudian naik secara perlahan hingga $t = 125$ dengan jumlah subpopulasi $R = 60.5$. Subpopulasi rentan turun secara perlahan hingga waktu akhir sehingga mencapai $R = 53.3$. Individu rentan yang telah diberi kontrol vaksinasi dapat menjadi individu sembuh dan individu terinfeksi dapat sembuh karena penyembuhan alami dan kontrol pengobatan sehingga mengakibatkan jumlah subpopulasi sembuh lebih banyak. Oleh karena itu, pemberian kombinasi kontrol vaksinasi dan pengobatan dapat meningkatkan jumlah subpopulasi sembuh secara signifikan.

Gambar 3.7 menunjukkan profil kontrol vaksinasi dan pengobatan selama 180 hari. Dari gambar tersebut, dapat dilihat bahwa vaksinasi dimulai dari 0.3 lalu turun selama $t = 0$ hingga $t = 18$ (hari) dengan laju 0.083 dan sedikit meningkat hingga $t = 55$ (hari). Setelah itu, laju vaksinasi turun hingga waktu akhir yaitu $t = 180$ (hari). Laju pengobatan dimulai dari 0.19 lalu turun terus secara perlahan hingga waktu akhir.

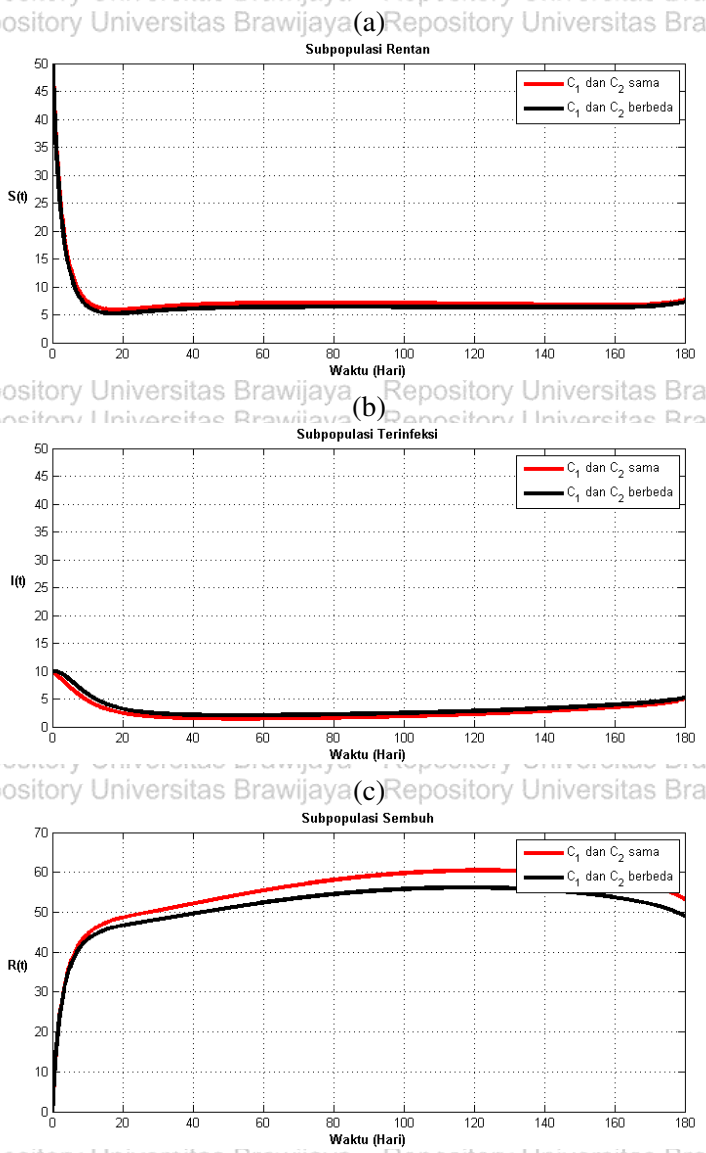


Gambar 3.7: Profil kontrol vaksinasi $u(t)$ dan pengobatan $v(t)$

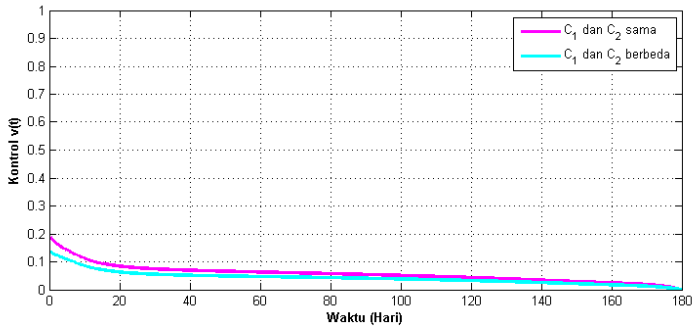
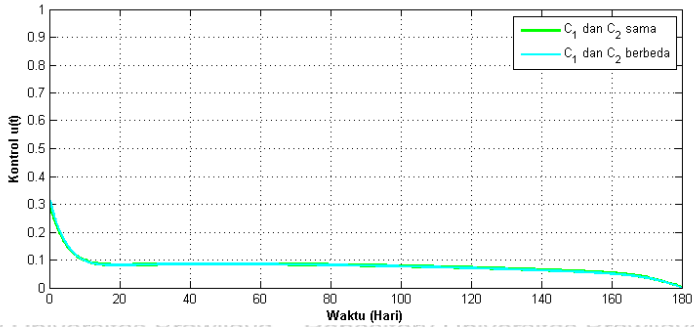
Disimulasikan juga saat bobot biaya pengobatan lebih besar daripada vaksinasi yaitu $C_1 = 1500$ dan $C_2 = 2500$. Hasil simulasi ketika $C_1 = C_2$ dan $C_1 < C_2$ ditunjukkan pada Gambar 3.8.

Grafik 3.8(a) menunjukkan bahwa setelah diberi kontrol, jumlah subpopulasi rentan saat $C_1 < C_2$ turun hingga waktu $t = 16$ (hari) dengan jumlah $S = 5.3$. Kemudian naik sedikit dan konstan hingga $t = 160$ (hari), lalu naik hingga waktu akhir dengan $t = 7.3$. Grafik 3.8(b) menunjukkan bahwa jumlah subpopulasi terinfeksi saat $C_1 < C_2$ turun menjadi $I = 2.08$ dalam rentan waktu $t = 0$ hingga $t = 48$, lalu naik secara perlahan hingga waktu akhir dengan jumlah subpopulasi $I = 5.3$. Grafik 3.8(c) menunjukkan bahwa jumlah subpopulasi sembuh saat $C_1 < C_2$ mencapai $R = 45.5$ pada selang waktu antara $t = 0$ dan $t = 10$, kemudian naik perlahan hingga $R = 56.2$ dalam rentan waktu $t = 10$ hingga $t = 120$, lalu turun juga secara perlahan hingga waktu akhir dengan $R = 49$. Pemberian kedua kontrol dengan bobot biaya yang berbeda memberikan pengaruh yang

kurang maksimal bila dibandingkan dengan bobot biaya $C_1 = C_2$.



Gambar 3.8: Dinamika model SIR dengan kontrol vaksinasi dan pengobatan saat $C_1 < C_2$



Gambar 3.9: Profil kontrol vaksinasi $u(t)$ dan pengobatan $v(t)$ saat $C_1 < C_2$

Pemberian bobot biaya yang berbeda dapat mempengaruhi laju kontrol keduanya. Saat bobot biaya pengobatan yang diberikan besar maka $v(t)$ cukup kecil, sedangkan saat bobot biaya pengobatan yang diberikan kecil maka pemberian kontrol $v(t)$ cukup besar. Begitu pula untuk vaksinasi, saat bobot biaya vaksinasi yang diberikan besar maka $u(t)$ cukup kecil, sedangkan saat bobot biaya vaksinasi yang diberikan kecil maka pemberian kontrol $u(t)$ cukup besar. Hasil simulasi numerik yang ditunjukkan oleh Gambar 3.9 menunjukkan bahwa saat $C_1 < C_2$, vaksinasi dimulai dari 0.32 dan pengobatan dimulai dari 0.135.

Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, pemberian kontrol vaksinasi dan pengobatan dapat mempengaruhi dinamika penyebaran penyakit. Pemberian kontrol vaksinasi dan pengobatan secara terpisah dapat menurunkan jumlah subpopulasi rentan dan terinfeksi, serta meningkatkan jumlah subpopulasi sembuh secara signifikan.



Pemberian kombinasi kontrol antara vaksinasi dan pengobatan dengan bobot biaya yang sama memberikan hasil yang lebih efektif karena dapat menurunkan jumlah subpopulasi individu rentan dan terinfeksi serta meningkatkan jumlah subpopulasi sembuh dengan waktu yang lebih cepat jika dibandingkan dengan pemberian kontrol secara terpisah. Pemberian kombinasi kontrol antara vaksinasi dan pengobatan dengan bobot biaya yang berbeda juga dapat menurunkan jumlah subpopulasi individu rentan dan terinfeksi serta meningkatkan jumlah subpopulasi sembuh dengan waktu yang lebih cepat jika dibandingkan dengan pemberian kontrol secara terpisah, namun belum optimal jika dibandingkan dengan biaya kedua kontrol sama.



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Telah dikonstruksi model epidemi *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi yang dikendalikan dengan pemberian kontrol berupa vaksinasi dan pengobatan. Vaksinasi diberikan untuk individu rentan dan pengobatan diberikan untuk individu yang terinfeksi penyakit dengan tetap mempertahankan penyembuhan alami.
2. Telah diperoleh kontrol yang optimal yaitu u^* dan v^* pada model epidemi *SIR* dengan tujuan untuk meminimumkan jumlah subpopulasi rentan dan terinfeksi, memaksimumkan jumlah subpopulasi sembuh, serta meminimumkan vaksinasi dan pengobatan. Kontrol vaksinasi dan pengobatan yang optimal dipengaruhi oleh bobot biaya kedua kontrol tersebut yaitu C_1 dan C_2 . Jika bobot biaya vaksinasi atau pengobatan lebih besar, maka nilai u^* atau v^* cukup kecil, dan sebaliknya.
3. Hasil simulasi numerik menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur menunjukkan bahwa pemberian kontrol vaksinasi dan pengobatan yang dilakukan secara terpisah dapat mempengaruhi jumlah subpopulasi rentan, terinfeksi, maupun sembuh. Hasil yang lebih efektif diperoleh bila kedua kontrol dikombinasikan dengan bobot biaya sama maupun berbeda. Pemberian bobot biaya yang berbeda dapat menurunkan jumlah subpopulasi rentan dan terinfeksi serta meningkatkan jumlah subpopulasi sembuh dengan waktu yang cepat. Namun, jika bobot biaya yang diberikan sama dapat diperoleh hasil yang lebih optimal karena waktu yang dibutuhkan lebih cepat dibandingkan saat bobot biaya yang diberikan berbeda.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, dapat dilakukan pengembangan model *SIR* menggunakan waktu tunda berupa masa inkubasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Bashier, E. B. M. dan K. C. Patidar. 2017. Optimal Control of an Epidemiological Model with Multiple Time Delays. *Applied Mathematics and Computation*. 292:47-56.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equation*. Tenth Edition. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation with Difference Equations, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California. United States of America.
- Heffernan, J. M., R. J. Smith, dan L. M. Wahl. 2005. Perspectives on the Basic Reproductive Ratio. *Journal of the Royal Society Interface*. 281-293.
- Hethcote, H. W. dan P. Van Den Driache. 1990. Some Epidemiological Models with Nonlinear Incidence. 1-35.
- Kaddar, A. 2010. Stability Analysis in a Delayed *SIR* Epidemic Model with Saturated Incidence Rate. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. Vol. 15. 3:299-306.
- Laraabi, H., E. H. Labriji, M. Rachik, dan A. Kaddar. 2012. Optimal Control of an Epidemic Model with a Saturated Incidence Rate. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. Vol. 17. 4:448-459.
- Lenhart, S. dan J. T. Workman. 2007. *Optimal Control Applied to Biological Models*. CRC Press. United States.
- Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Sixth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.



Neilan, R. M. dan S. Lenhart. 2010. An Introduction to Optimal Control with an Application in Disease Modeling. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. Vol. 75. 67-81.

Rihan, F. A. dan M. N. Anwar. 2012. Qualitative Analysis of Delayed SIR Epidemic Model with a Saturated Incidence Rate. *International Journal of Differential Equation*. Hindawi Publishing Cooperation. 408637