

**SKEMA PREDIKTOR-KOREKTOR UNTUK
SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *GOOD BOUSSINESQ***

SKRIPSI

oleh:

JULITA AYU ARDHINI
145090401111031



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**



**SKEMA PREDIKTOR-KOREKTOR UNTUK
SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *GOOD BOUSSINESQ***

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:

JULITA AYU ARDHINI

145090401111031



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

SKEMA PREDIKTOR-KOREKTOR UNTUK SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *GOOD BOUSSINESQ*

oleh
JULITA AYU ARDHINI
145090401111031

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 16 Juli 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 196908071994121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Julita Ayu Ardhini
NIM : 145090401111031
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Skema Prediktor-Korektor
Untuk Solusi Numerik
Persamaan *Good Boussinesq*

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 19 Juli 2018
yang menyatakan,

Julita Ayu Ardhini
NIM. 145090401111031



SKEMA PREDIKTOR-KOREKTOR UNTUK SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *GOOD BOUSSINESQ*

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas solusi numerik persamaan *good Boussinesq* nonlinear. Persamaan *good Boussinesq* merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear yang umumnya sulit untuk ditentukan solusi analitikanya, sehingga perlu dilakukan pendekatan numerik. Konstruksi skema numerik yang dihasilkan merupakan skema beda hingga implisit nonlinear. Berdasarkan hasil dan pembahasan, skema beda hingga stabil dengan syarat dan memiliki kesalahan pemotongan orde empat terhadap waktu dan orde dua terhadap ruang. Untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan beda hingga implisit nonlinear diperlukan metode iterasi, dalam skripsi ini digunakan skema prediktor-korektor. Berdasarkan analisis kestabilan von Neumann, skema prediktor-korektor stabil bersyarat dengan rentang kestabilan lebih lebar daripada skema beda hingga. Dengan melakukan beberapa simulasi menggunakan nilai ukuran langkah spasial dan langkah temporal tertentu dapat ditunjukkan bahwa metode yang diusulkan cukup akurat.

Kata kunci: *persamaan good Boussinesq, skema prediktor-korektor*



PREDICTOR-CORRECTOR SCHEME FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF GOOD BOUSSINESQ EQUATION

ABSTRACT

This final project discusses numerical solutions of nonlinear *good* Boussinesq equation. *Good* Boussinesq equation is a nonlinear partial differential equation which is generally difficult to determine its analytical solution, so numerical approximation is needed. The result of numerical scheme construction is a nonlinear implicitly finite difference scheme. Based on the results and discussion, the proposed finite difference scheme is conditionally stable and the truncation error is fourth order accurate to time and second order accurate to space. Iteration method is needed to get the solution of nonlinear implicitly finite difference. In this final project a predictor-corrector scheme is implemented. From the results of von Neumann stability analysis, the predictor-corrector scheme is conditionally stable with the stability range is wider than finite difference scheme. By take some simulations using the spatial step size and temporal step size it can be shown that the proposed method is quite accurate.

Keywords: *Boussinesq equations, predictor-corrector schemes.*



KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus yang telah melimpahkan kasih dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Skema Prediktor-Korektor untuk Solusi Numerik Persamaan Good Boussinesq* dengan lancar dan sesuai waktu yang diharapkan. Penulisan skripsi ini diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains di bidang Matematika.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, motivasi, saran dan kesabaran selama penyusunan skripsi ini.
2. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Syaiful Anam, S.Si., M.T., Ph.D selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah menginspirasi, memberikan ilmu pengetahuan yang bermanfaat dan membimbing penulis untuk belajar banyak hal serta seluruh staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
6. Ibu (Darsiswati) dan seluruh keluarga besar yang selalu memberikan cinta kasih, motivasi, semangat, dukungan, dan doa kepada penulis.

7. Teman-teman Matematika 2014 yang bersama-sama menempuh program studi Matematika Universitas Brawijaya dengan luar biasa dan yang memberikan dukungan, motivasi, serta semangat selama penulisan skripsi ini.
8. Cici, Nike, Theda, Anis, Arin, Vita, Tanty, Mbak Astrid, dan As'adah yang selalu memberikan semangat, menghibur penulis ketika jenuh, dan selalu mengingatkan apabila penulis berbuat salah.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email penulis julitaayuardhini@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 19 Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
BAB II DASAR TEORI	3
2.1 Persamaan Diferensial	3
2.2 Persamaan Diferensial Parsial	4
2.3 Deret Taylor	4
2.4 Kesalahan Pemotongan	5
2.5 Metode Beda Hingga	5
2.5.1 Pendekatan beda hingga dimensi satu	6
2.5.2 Pendekatan beda hingga dimensi dua	7
2.6 Metode Prediktor-Korektor	8
2.7 Analisis Kestabilan von Neumann	8
2.8 Persamaan Good Boussinesq	10
BAB III PEMBAHASAN	11
3.1 Konstruksi Skema Numerik	11
3.2 Analisis Kestabilan Skema Beda Hingga	14
3.3 Kesalahan Pemotongan Skema Beda Hingga	18
3.4 Skema Prediktor-Korektor	18
3.5 Analisis Kestabilan Skema Prediktor-Korektor	19
3.6 Simulasi Numerik	23
3.6.1 Solusi Numerik <i>Single-Soliton</i>	23
3.6.2 Solusi Numerik <i>Double-Soliton</i>	26
BAB IV KESIMPULAN	29

DAFTAR PUSTAKA
LAMPIRAN

31

33



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Solusi persamaan <i>Good Boussinesq</i> saat $k = 0.005$, $h = 0.4$ dan $t = 60$	24
Gambar 3.2	Solusi persamaan <i>Good Boussinesq</i> saat $k = 0.01$, $h = 0.4$ dan $t = 60$	24
Gambar 3.3	Solusi numerik persamaan <i>Good Boussinesq</i> saat $k = 0.005$ dan $h = 0.4$	25
Gambar 3.4	Solusi persamaan <i>Good Boussinesq</i> dengan $k = 0.05$, $h = 0.4$ dan $A_1 = A_2 = 0.2$	27
Gambar 3.5	Solusi persamaan <i>Good Boussinesq</i> dengan $k = 0.05$, $h = 0.4$, $A_1 = 0.2$ dan $A_2 = 0.4$. .	28





DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Kesalahan Numerik Persamaan <i>Good</i> Boussinesq saat $k = 0.005$	26
Tabel 3.2	Kesalahan Numerik Persamaan <i>Good</i> Boussinesq saat $k = 0.01$	26





DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Kesalahan Pemotongan	33
Lampiran 2. Program Simulasi Numerik	36





BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gelombang pertama kali diteliti oleh John Scott Russel pada tahun 1834 secara eksperimental. Beberapa tahun kemudian J. Boussinesq berhasil menurunkan secara matematis persamaan gelombang yang diteliti oleh John Scott Russel. Persamaan Boussinesq pertama kali diperkenalkan oleh J. Boussinesq pada tahun 1870. Persamaan Boussinesq merupakan persamaan yang menggambarkan perambatan gelombang air dangkal dua arah (Whitham, 1999). Persamaan Boussinesq nonlinear ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g(u)}{\partial x^2} + q \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad (1.1)$$

dimana $g(u) = u(1 + u)$ dan $|q| = 1$. Dengan mengambil $q = -1$ persamaan (1.1) menjadi persamaan *Good Boussinesq* (GB) nonlinear, sementara dengan mengambil $q = 1$ persamaan (1.1) menjadi persamaan *Bad Boussinesq* (BB) nonlinear (Ismail dan Bratsos, 2003).

Model Boussinesq (1.1) merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear yang umumnya sangat sulit untuk ditentukan solusi analitikanya, sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk menyelesaikan model tersebut. Metode numerik yang telah digunakan untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq adalah *method of line* oleh Bratsos (1998). Selain itu, Febrian (2014) dalam skripsinya melakukan kaji ulang tentang persamaan Boussinesq yang telah diselesaikan oleh Ismail dan Mosally pada tahun 2014. Pada penelitian tersebut, Febrian menggunakan skema beda hingga orde empat untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan *Good Boussinesq*.

Dalam skripsi ini akan dilakukan kaji ulang tentang persamaan *good Boussinesq* yang telah diselesaikan oleh Ismail dan Bratsos (2003), yang mana penyelesaian persamaan *good Boussinesq*

menggunakan skema prediktor-korektor. Selanjutnya pembahasan akan dilakukan bagaimana mengonstruksi skema, kestabilan, dan kesalahan pemotongan dari persamaan *good Boussinesq*. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *software* Matlab untuk mengetahui keakuratan metode prediktor-korektor dalam penyelesaian persamaan *good Boussinesq*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi skema numerik persamaan *good Boussinesq*?
2. Bagaimana kestabilan dari skema numerik persamaan *good Boussinesq*?
3. Bagaimana kesalahan pemotongan dari skema numerik persamaan *good Boussinesq*?
4. Bagaimana hasil simulasi pada skema numerik persamaan *good Boussinesq*?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi skema numerik persamaan *good Boussinesq*.
2. Menentukan kestabilan dari skema numerik persamaan *good Boussinesq*.
3. Menentukan kesalahan pemotongan dari skema numerik persamaan *good Boussinesq*.
4. Menginterpretasikan simulasi dari skema numerik persamaan *good Boussinesq*.

BAB II

DASAR TEORI

Pada bab ini disajikan teori-teori dasar secara umum yang digunakan untuk menjawab masalah yang telah diuraikan pada bab sebelumnya. Persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial, deret Taylor, kesalahan pemotongan, metode beda hingga, metode prediktor-korektor, dan analisis kestabilan von Neumann merupakan konsep-konsep dasar yang diperlukan untuk memahami persoalan yang dibahas pada skripsi ini.

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan dari beberapa variabel yang tidak diketahui. Beberapa contoh persamaan diferensial adalah sebagai berikut.

$$y' + xy = 3 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Pada persamaan (2.1), fungsi yang tidak diketahui diwakili oleh y dan diasumsikan sebagai fungsi dari satu variabel bebas x , yaitu $y = y(x)$. Sedangkan pada persamaan (2.2), fungsi yang tidak diketahui diwakili oleh u dan diasumsikan sebagai fungsi dari dua variabel bebas t dan x , yaitu $u(x, t)$. Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial biasa karena melibatkan turunan biasa dan persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial parsial karena melibatkan turunan parsial (Finizio dan Ladas, 1982).

Suatu persamaan diferensial disebut memiliki tingkat atau orde ke- m apabila orde dari turunan tertinggi yang muncul merupakan turunan ke- m (Boyce dan DiPrima, 2012). Persamaan (2.1) merupakan contoh persamaan diferensial orde satu dan persamaan (2.2) merupakan contoh dari persamaan diferensial orde dua.

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial untuk fungsi $u(x, y, \dots)$ adalah hubungan antara u dan turunan parsialnya $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$, dan dapat ditulis sebagai berikut.

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.3)$$

dimana F adalah beberapa fungsi, $x, y, \dots$ adalah variabel bebas dan $u(x, y, \dots)$ disebut variabel tak bebas. Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial parsial

$$u_x x + 2x u_y y + u = 1 \quad (2.4)$$

$$u_{xxx}^3 + x u u_y = x \quad (2.5)$$

Orde dari persamaan diferensial parsial adalah orde turunan tertinggi dari turunan parsial yang muncul dalam suatu persamaan. Orde dari persamaan (2.4) adalah orde dua dan orde dari persamaan (2.5) adalah orde tiga.

Suatu persamaan diferensial parsial dikatakan linear jika fungsi yang tidak diketahui dan semua turunannya dalam keadaan linear, dengan koefisien hanya bergantung pada variabel bebas. Sedangkan suatu persamaan yang tidak linear disebut persamaan nonlinear. Persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial parsial linear, sedangkan persamaan (2.5) merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear.

(Debnath, 2012)

2.3 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret yang salah satunya mendasari perhitungan numerik. Secara umum deret Taylor satu variabel dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x_j + \Delta x) = & f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{f''(x_j)}{2!} (\Delta x)^2 \\ & + \frac{f'''(x_j)}{3!} (\Delta x)^3 + \dots + \frac{f^{(i)}(x_j)}{i!} (\Delta x)^i + R_i \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan suku sisa

$$R_i = \frac{f^{(i+1)}(x)}{(i+1)!} (\Delta x)^{i+1}, x_j < x < x_j + \Delta x. \quad (2.7)$$

(Chapra dan Canale, 2010)

Deret Taylor satu variabel (2.6) dapat diperluas menjadi deret Taylor dua variabel yang dituliskan Cheney dan Kincaid (2012) sebagai berikut.

$$f(x_j + \Delta x, y_j + \Delta y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^i f(x_j, y_j). \quad (2.8)$$

2.4 Kesalahan Pemotongan

Kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang dihasilkan dari penggunaan suatu hampiran dalam mencari nilai eksak suatu fungsi. Secara matematis kesalahan pemotongan dapat dicari menggunakan deret Taylor, yaitu dengan memperhatikan suku sisa dari deret tersebut. Misal suku sisa (2.7) ditulis sebagai berikut.

$$R_i = O(\Delta x^{i+1}),$$

dengan $O(\Delta x^{i+1})$ adalah kesalahan pemotongan dengan order Δx^{i+1} (Chapra dan Canale, 2010).

2.5 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menentukan solusi hampiran dari persamaan diferensial. Konsep dasar dari metode beda hingga adalah membagi domain dari penyelesaian persamaan diferensial menjadi sejumlah berhingga *grid*, kemudian dengan memanfaatkan prinsip deret Taylor pada masing-masing titik *grid* diperoleh rumusan beda hingga (Lapidus dan Pinder, 1999).

2.5.1 Pendekatan beda hingga dimensi satu

Suatu fungsi $u(x)$ di titik x_m dapat dinotasikan dengan u_m . Jika u_{m+1} dan u_{m-1} diekspansikan ke dalam deret Taylor disekitar u_m maka diperoleh

$$u_{m+1} = u_m + \Delta x \frac{du_m}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 u_m}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 u_m}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 u_m}{dx^4} + \dots \quad (2.9)$$

$$u_{m-1} = u_m - \Delta x \frac{du_m}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 u_m}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 u_m}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 u_m}{dx^4} + \dots \quad (2.10)$$

Selanjutnya dengan memanipulasi persamaan (2.9) diperoleh beda maju sebagai berikut.

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.11)$$

Dengan cara yang sama, dari persamaan (2.10) diperoleh beda mundur sebagai berikut.

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.12)$$

Beda pusat diperoleh dengan mengurangkan persamaan (2.9) terhadap persamaan (2.10) sebagai berikut.

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.13)$$

Beda pusat untuk turunan kedua diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.9) dan (2.10) sebagai berikut.

$$\frac{d^2 u_m}{dx^2} = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (2.14)$$

(Chung, 2010)

2.5.2 Pendekatan beda hingga dimensi dua

Pendekatan beda hingga dimensi dua merupakan perluasan konsep pendekatan beda hingga dimensi satu. Hasil yang diperoleh pada pendekatan beda hingga dimensi satu dapat dimanfaatkan secara langsung untuk menurunkan pendekatan beda hingga suatu fungsi $u(x, t)$ di titik *grid* (x_m, t_n) dengan notasi yang digunakan adalah u_m^n (Noye, 1982).

Pada turunan parsial terdapat konsep bahwa untuk menurunkan fungsi $u(x, t)$ terhadap x , variabel t dianggap sebagai konstanta dan sebaliknya. Menggunakan konsep turunan parsial pada persamaan (2.11) maka pendekatan beda maju turunan parsial pertama terhadap x dan t secara berturut-turut dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial u_m^n}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial u_m^n}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.15b)$$

Secara sama, dari persamaan (2.12) diperoleh pendekatan beda mundur untuk turunan parsial pertama terhadap x dan t secara berturut-turut dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial u_m^n}{\partial x} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial u_m^n}{\partial t} = \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.16b)$$

Secara sama pula, dari persamaan (2.13) diperoleh pendekatan beda pusat untuk turunan parsial pertama terhadap x dan t secara berturut-turut dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial u_m^n}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial u_m^n}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (2.17b)$$

Demikian pula, dari persamaan (2.14) diperoleh hasil pendekatan beda pusat turunan parsial kedua terhadap x yaitu

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (2.18)$$

(Lapidus dan Pinder, 1999)

2.6 Metode Prediktor-Korektor

Metode yang dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik, terbagi atas dua yaitu metode satu langkah (*one-step*) dan metode banyak langkah (*multi-step*). Metode satu langkah membutuhkan satu nilai awal untuk mendapatkan nilai sekarang, dengan kata lain hanya dibutuhkan nilai y_r untuk mendapatkan nilai y_{r+1} sedangkan metode banyak langkah membutuhkan dua atau lebih nilai sebelumnya untuk mendapatkan nilai sekarang, dengan kata lain dibutuhkan nilai $y_0, y_1, \dots, y_r$ dengan $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ untuk menghitung nilai y_{r+1} . Nilai-nilai awal tersebut diperoleh dari metode satu langkah. Metode banyak langkah disebut metode prediktor-korektor, karena dalam penyelesaiannya digunakan persamaan prediktor dan persamaan korektor. Metode prediktor-korektor menggunakan skema eksplisit untuk memperkirakan perkiraan awal untuk y_{r+1} dan kemudian menggunakan skema implisit untuk memperbaiki y_{r+1} .

(Ralston dan Rabinowitz, 2001)

2.7 Analisis Kestabilan von Neumann

Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan kestabilan suatu metode beda hingga adalah analisi kestabilan von Neumann. Kesalahan pemotongan yang terdapat pada titik *grid* saat langkah waktu ke- n pada metode von Neumann dinyatakan sebagai kombinasi linear dari deret Fourier berhingga yaitu

$$\epsilon(x_m, t_n) = \sum_{j=0}^N a_j \exp i(\beta_j x_m + \gamma_j t_n),$$

atau dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\epsilon(x_m, t_n) = \sum_{j=0}^N a_j \exp(i\gamma_j t_n) \exp(i\beta_j x_m) \quad (2.19)$$

dengan N adalah jumlah *grid* pada garis x , dan a_j adalah koefisien Fourier yang bernilai konstan, dan diasumsikan bahwa β_j bernilai real. Sifat-sifat moda Fourier adalah sama sehingga untuk analisis cukup dilihat salah satu komponen saja, yaitu

$$\epsilon_m^n \approx \exp(i\gamma t_n) \exp(i\beta x_m).$$

Oleh karena $x_m = m\Delta x$ dan $t_n = n\Delta t$, maka

$$\begin{aligned} \epsilon_m^n &\approx \exp(i\gamma(n\Delta t)) \exp(i\beta(m\Delta x)) \\ \epsilon_m^n &= (\lambda)^n \exp(i\beta(m\Delta x)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

dengan $\lambda = \exp(i\gamma(n\Delta t))$. Agar kesalahan dari persamaan (2.20) tidak meningkat, maka nilai λ harus memenuhi:

$$|\lambda| \leq 1.$$

Kondisi tersebut merupakan kondisi kestabilan von Neumann (Morton dan Mayers, 2005).

Syarat kestabilan yaitu λ dipengaruhi oleh ukuran langkah spasial Δx dan temporal Δt . Berikut adalah suatu kriteria skema numerik dikatakan stabil, stabil bersyarat maupun tidak stabil. Suatu skema dikatakan

1. stabil tanpa syarat, jika semua nilai dari Δx dan Δt mengakibatkan $|\lambda| \leq 1$,
2. stabil bersyarat, jika ada nilai tertentu dari Δx dan/atau Δt mengakibatkan $|\lambda| \leq 1$,
3. tidak stabil, jika tidak dapat ditemukan nilai dari Δx dan Δt mengakibatkan $|\lambda| \leq 1$.

2.8 Persamaan Good Boussinesq

Persamaan *good Boussinesq* nonlinear yang menggambarkan perambatan gelombang air dangkal dua arah, diberikan sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g(u)}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad (2.21)$$

dimana $g(u) = u(1 + u)$.

Kondisi awal persamaan *good Boussinesq* nonlinear adalah

$$u(x, t_0) = f(x); L_0 \leq x \leq L_1,$$

dan kondisi batas

$$u(L_0, t) = \delta_1, u(L_1, t) = \delta_2; t > t_0,$$

$$\frac{\partial u(L_0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(L_1, t)}{\partial x} = 0; t > t_0.$$

Menurut Manoranjan dkk. (1984), solusi eksak dari persamaan *good Boussinesq* adalah

$$u(x, t) = -A \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{A}{6}} (x - ct + x^0) \right] + \left(b + \frac{1}{2} \right), \quad (2.22)$$

dengan A adalah amplitudo gelombang dan c adalah kecepatan gelombang. Solusi dari persamaan (2.22) merupakan soliton, yaitu gelombang nonlinear yang menjalar dengan bentuk tak berubah. Selanjutnya, solusi *double-soliton* dapat dinyatakan sebagai

$$u(x, t) = \Sigma_{i=1}^2 - A_i \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{A_i}{6}} (x - c_i t + x_i^0) \right] + \left(b + \frac{1}{2} \right) \quad (2.23)$$

dengan c_1 adalah kecepatan gelombang yang merambat ke arah kanan dan c_2 adalah kecepatan gelombang yang merambat ke arah kiri. A_i adalah amplitudo gelombang dan x_i^0 adalah posisi awal gelombang.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas penyelesaian numerik persamaan *good* Boussinesq. Pertama, dengan menggunakan metode beda hingga, ditentukan skema prediktor-korektor dari persamaan *good* Boussinesq. Kemudian dilakukan analisis kestabilan dengan menggunakan metode kestabilan von Neumann. Selanjutnya, dilakukan ekspansi deret Taylor untuk mengetahui orde kesalahan dari skema numerik. Pada bagian terakhir, dilakukan simulasi numerik untuk memperlihatkan akurasi dari skema numerik.

3.1 Konstruksi Skema Numerik

Beda pusat untuk turunan kedua u terhadap t di titik (x_m, t_n) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2} \delta_t^2 u_m^n \quad (3.1)$$

dengan $k = \Delta t$ dan

$$\delta_t^2 u_m^n = u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}. \quad (3.2)$$

Jika persamaan (3.2) dilakukan ekspansi Taylor di sekitar u_m^n , maka

$$\begin{aligned} \delta_t^2 u_m^n &= u_m^n + k \frac{\partial u_m^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} \\ &\quad + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u_m^n}{\partial t^3} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 u_m^n}{\partial t^4} + \dots - 2u_m^n \\ &\quad + u_m^n - k \frac{\partial u_m^n}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} \\ &\quad - \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u_m^n}{\partial t^3} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 u_m^n}{\partial t^4} + \dots \\ &= k^2 \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + \frac{k^4}{12} \frac{\partial^4 u_m^n}{\partial t^4} + O(k^6) \end{aligned}$$

$$= k^2 \left(1 + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + O(k^6) \quad (3.3)$$

Dengan menerapkan persamaan (3.1) maka persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \delta_t^2 u_m^n &= k^2 \left(1 + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} + O(k^6) \\ \delta_t^2 u_m^n + O(k^6) &= k^2 \left(1 + \frac{1}{12} \delta_t^2 \right) \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} &= \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{1}{12} \delta_t^2 \right)^{-1} (\delta_t^2 u_m^n + O(k^6)) \\ \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial t^2} &= \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{1}{12} \delta_t^2 \right)^{-1} \delta_t^2 u_m^n + O(k^4) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Turunan terhadap ruang (x) jika didekati dengan beda pusat adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} &= \frac{1}{h^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + O(h^2) \\ &= \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_m^n + O(h^2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (u_m^n)^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{h^2} ((u_{m+1}^n)^2 - 2(u_m^n)^2 + (u_{m-1}^n)^2) + O(h^2) \\ &= \frac{1}{h^2} \delta_x^2 (u_m^n)^2 + O(h^2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} &= \frac{1}{h^4} (u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) \\ &\quad + O(h^2) \\ &= \frac{1}{h^4} \delta_x^4 u_m^n + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan $h = \Delta x$.

Dengan mensubstitusi persamaan (3.4)-(3.7) ke persamaan *good Boussinesq* (1.1), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{1}{12} \delta_t^2\right)^{-1} \delta_t^2 U_m^n &= \frac{1}{h^2} \delta_x^2 [g(U_m^n)] - \frac{1}{h^4} \delta_x^4 U_m^n \\ \delta_t^2 U_m^n &= \left(1 + \frac{1}{12} \delta_t^2\right) \left\{ \frac{k^2}{h^2} \delta_x^2 [g(U_m^n)] - \frac{k^2}{h^4} \delta_x^4 U_m^n \right\} \\ \delta_t^2 U_m^n &= \left(1 + \frac{1}{12} \delta_t^2\right) \{ r^2 \delta_x^2 [g(U_m^n)] - p^2 \delta_x^4 U_m^n \} \\ \delta_t^2 U_m^n &= r^2 \delta_x^2 [g(U_m^n)] - p^2 \delta_x^4 U_m^n + \frac{r^2}{12} \delta_x^2 (\delta_t^2 [g(U_m^n)]) \\ &\quad - \frac{1}{12} p^2 \delta_x^4 (\delta_t^2 U_m^n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

untuk $m = 1, 2, \dots, N$ dengan $g(U) = U(1 + U)$, $r = \frac{k}{h}$ dan $p = \frac{k}{h^2}$.

Selanjutnya, dengan menerapkan persamaan (3.2) ke persamaan (3.8) diperoleh skema beda hingga nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1} &= r^2 \delta_x^2 [g(U_m^n)] - p^2 \delta_x^4 U_m^n \\ &\quad + \frac{r^2}{12} \delta_x^2 [g(U_m^{n+1}) - 2g(U_m^n) + g(U_m^{n-1})] \\ &\quad - \frac{1}{12} p^2 \delta_x^4 [U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1}] \\ &= \frac{r^2}{12} \{ \delta_x^2 [g(U_m^{n+1}) + 10g(U_m^n) + g(U_m^{n-1})] \} \\ &\quad - \frac{p^2}{12} \delta_x^4 [U_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

untuk $m = 1, 2, \dots, N$.

Persamaan (3.9) merupakan skema implisit nonlinear yang sulit didapat solusinya, sehingga perlu digunakan metode iterasi. Dalam skripsi ini digunakan skema prediktor-korektor, yang akan dipaparkan pada bagian selanjutnya. Namun sebelumnya akan dibahas mengenai

analisis kestabilan dan kesalahan pemotongan dari skema beda hingga nonlinear (3.9).

3.2 Analisis Kestabilan Skema Beda Hingga

Dengan mengingat bahwa analisis kestabilan von Neumann hanya dapat diterapkan untuk persamaan linear, maka pada skripsi ini dilakukan analisis kestabilan von Neumann pada persamaan (3.9) linear berikut

$$\begin{aligned}
 U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1} &= \frac{r^2}{12} \bar{U} \{ \delta_x^2 [U_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}] \} \\
 &\quad - \frac{p^2}{12} \delta_x^4 [U_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}] \\
 &= \frac{r^2}{12} \bar{U} [(U_{m+1}^{n+1} + 10U_{m+1}^n + U_{m+1}^{n-1}) \\
 &\quad - 2(U_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}) \\
 &\quad + (U_{m-1}^{n+1} + 10U_{m-1}^n + U_{m-1}^{n-1})] \\
 &\quad - \frac{1}{12} p^2 [(U_{m+2}^{n+1} + 10U_{m+2}^n + U_{m+2}^{n-1}) \\
 &\quad - 4(U_{m+1}^{n+1} + 10U_{m+1}^n + U_{m+1}^{n-1}) \\
 &\quad + 6(U_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}) \\
 &\quad - 4(U_{m-1}^{n+1} + 10U_{m-1}^n + U_{m-1}^{n-1}) \\
 &\quad + (U_{m-2}^{n+1} + 10U_{m-2}^n + U_{m-2}^{n-1})]
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

dengan $\bar{U} = 1 + U_B$ dan $U_B = \max_{m=1,2,\dots,N} \{U_m^{n+1}, U_m^n, U_m^{n-1}\}$.

Pada analisis kestabilan von Neumann, diasumsikan $U_m^n = \lambda^n e^{i\beta m h}$, sehingga persamaan (3.10) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 &\lambda^{n+1} e^{i\beta(m)h} - 2\lambda^n e^{i\beta(m)h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta(m)h} \\
 &= \frac{r^2}{12} \bar{U} [(\lambda^{n+1} e^{i\beta(m+1)h} + 10\lambda^n e^{i\beta(m+1)h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta(m+1)h}) \\
 &\quad - 2(\lambda^{n+1} e^{i\beta(m)h} + 10\lambda^n e^{i\beta(m)h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta(m)h}) \\
 &\quad + (\lambda^{n+1} e^{i\beta(m-1)h} + 10\lambda^n e^{i\beta(m-1)h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta(m-1)h})] \\
 &\quad - \frac{1}{12} p^2 [(\lambda^{n+1} e^{i\beta(m+2)h} + 10\lambda^n e^{i\beta(m+2)h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta(m+2)h})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4(\lambda^{n+1}e^{i\beta(m+1)h} + 10\lambda^n e^{i\beta(m+1)h} + \lambda^{n-1}e^{i\beta(m+1)h}) \\
 & + 6(\lambda^{n+1}e^{i\beta(m)h} + 10\lambda^n e^{i\beta(m)h} + \lambda^{n-1}e^{i\beta(m)h}) \\
 & - 4(\lambda^{n+1}e^{i\beta(m-1)h} + 10\lambda^n e^{i\beta(m-1)h} + \lambda^{n-1}e^{i\beta(m-1)h}) \\
 & + (\lambda^{n+1}e^{i\beta(m-2)h} + \lambda^n e^{i\beta(m-2)h} + \lambda^{n-1}e^{i\beta(m-2)h})] \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika persamaan (3.11) dibagi dengan $\lambda^n e^{i\beta m h}$, maka

$$\begin{aligned}
 & \lambda \left[1 - \frac{r^2}{12} \bar{U}(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} p^2 (e^{2i\beta h} - 4e^{i\beta h} + 6 - 4e^{-i\beta h} + e^{-2i\beta h}) \right] \\
 & - \left[2 + \frac{r^2}{12} \bar{U}(10e^{i\beta h} - 20 + 10e^{-i\beta h}) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{12} p^2 (10e^{2i\beta h} - 40e^{i\beta h} + 60 - 40e^{-i\beta h} + 10e^{-2i\beta h}) \right] \quad (3.12) \\
 & + \lambda^{-1} \left[1 - \frac{r^2}{12} \bar{U}(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} p^2 (e^{2i\beta h} - 4e^{i\beta h} + 6 - 4e^{-i\beta h} + e^{-2i\beta h}) \right] = 0
 \end{aligned}$$

Perlu diketahui bahwa $e^{i\beta h} + e^{-i\beta h} = 2\cos\beta h$, $e^{2i\beta h} + e^{-2i\beta h} = 2\cos 2\beta h$, $\cos\beta h - 1 = \sin^2 \frac{\beta h}{2}$ dan $\cos 2\beta h = 2\cos^2 \beta h - 1$, maka persamaan (3.12) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
 & \lambda \left[1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \right] \\
 & - \left[2 - \frac{10}{3} r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \frac{40}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \right] \quad (3.13) \\
 & \lambda^{-1} \left[1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Jika persamaan (3.13) dikalikan dengan λ maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \right] \lambda^2 \\ & - 2 \left[1 - \frac{5}{3} r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \frac{20}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \right] \lambda \\ & \left[1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) dapat ditulis dalam bentuk

$$\Gamma \lambda^2 - 2\Delta \lambda + \Gamma = 0 \quad (3.15)$$

dengan $\Gamma = 1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2}$,
 $\Delta = 1 - \frac{5}{3} r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \frac{20}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2}$, $\Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$. Kondisi yang diperlukan agar memenuhi kondisi kestabilan von Neumann adalah

$$|\lambda| \leq 1 \quad (3.16)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.16), persamaan (3.15) dapat dinyatakan sebagai

$$|\Delta| \leq |\Gamma| \quad (3.17)$$

sehingga,

$$\begin{aligned} & - \left(1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \right) \\ & \leq 1 - \frac{5}{3} r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \frac{20}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \\ & \leq 1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.18) dapat diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} 1 - \frac{5}{3} r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \frac{20}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} & \leq 1 + \frac{r^2}{3} \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \frac{4}{3} p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \\ 3 - 5r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} - 20p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} & \leq 3 + r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + 4p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \\ 0 & \leq 6r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + 24p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} \\ 0 & \leq r^2 \bar{U} + 4p^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pertidaksamaan (3.19) akan selalu terpenuhi, karena ruas kanan dari pertidaksamaan (3.19) bernilai positif .

Demikianpula, pertidaksamaan (3.18) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} -1 - \frac{r^2}{3}\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2} - \frac{4}{3}p^2\sin^4\frac{\beta h}{2} &\leq 1 - \frac{5}{3}r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2} - \frac{20}{3}p^2\sin^4\frac{\beta h}{2} \\ \frac{4}{3}r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2} + \frac{16}{3}p^2\sin^4\frac{\beta h}{2} &\leq 2 \\ \frac{2}{3}(r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2} + 4p^2\sin^4\frac{\beta h}{2}) &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ruas kiri dari pertidaksamaan (3.20) akan bernilai maksimum jika $\sin^2\frac{\beta h}{2} = 1$, akibatnya

$$\frac{2}{3}(r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2} + 4p^2\sin^4\frac{\beta h}{2}) \leq \frac{2}{3}(r^2\bar{U} + 4p^2) \leq 1$$

sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(r^2\bar{U} + 4p^2) &\leq 1 \\ \frac{2}{3}\left(\frac{k^2}{h^2}\bar{U} + 4\frac{k^2}{h^4}\right) &\leq 1 \\ \frac{2k^2h^2\bar{U} + 8k^2}{3h^4} &\leq 1 \\ k^2(2h^2\bar{U} + 8) &\leq 3h^4 \\ k^2 &\leq \frac{3h^4}{2h^2\bar{U} + 8} \\ k^2 &\leq h^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h^2}{h^2\bar{U} + 4} \right) \right] \\ k &\leq h \left[\frac{2}{3} \left(\bar{U} + \frac{4}{h^2} \right) \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3 Kesalahan Pemotongan Skema Beda Hingga

Dari subbab (3.1) diperoleh skema numerik seperti pada persamaan (3.9). Kemudian, dengan melakukan ekspansi Taylor pada masing-masing suku seperti pada lampiran 1, diperoleh kesalahan pemotongan

$$L(x, t) = \frac{k^4}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^4 (u^2)}{\partial x^4} \right) + O(k^6 + h^4) \quad (3.22)$$

Artinya, kesalahan pemotongan skema beda hingga implisit nonlinear adalah orde empat terhadap waktu dan orde dua terhadap ruang.

3.4 Skema Prediktor-Korektor

Dengan mengingat bahwa hasil konstruksi skema numerik pada persamaan (3.9) merupakan skema beda hingga implisit nonlinear dan diperlukan metode iterasi untuk mendapatkan solusinya, maka pada bagian ini dipaparkan skema prediktor-korektor. Persamaan prediktor diperoleh dengan menerapkan beda pusat pada masing-masing ruas pada persamaan *good Boussinesq* (1.1), sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 g(u)}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ \frac{1}{k^2} (U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1}) &= \frac{1}{h^2} [g(U_{m+1}^n) - 2g(U_m^n) + g(U_{m-1}^n)] \\ &\quad - \frac{1}{h^4} (U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n) \\ U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1} &= \frac{k^2}{h^2} [g(U_{m+1}^n) - 2g(U_m^n) + g(U_{m-1}^n)] \\ &\quad - \frac{k^2}{h^4} (U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n) \\ U_m^{n+1} &= 2U_m^n - U_m^{n-1} + r^2 [g(U_{m+1}^n) - 2g(U_m^n) + g(U_{m-1}^n)] \\ &\quad - p^2 (U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n) \end{aligned} \quad (3.23)$$

untuk $m = 1, 2, \dots, N$. Persamaan prediktor (3.23) merupakan skema eksplisit untuk vektor solusi $\tilde{U}^{n+1}$.

Persamaan korektor merupakan persamaan (3.9) yang merupakan hasil dari konstruksi skema numerik dengan vektor yang tidak diketahui U^{n+1} sama dengan $\tilde{U}^{n+1}$, sehingga

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} = & 2U_m^n - U_m^{n-1} + \frac{r^2}{12}\delta_x^2 \left[g(\tilde{U}_m^{n+1}) + 10g(U_m^n) + g(U_m^{n-1}) \right] \\ & - \frac{1}{12}p^2\delta_x^4(\tilde{U}_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

untuk $m = 1, 2, \dots, N$. Persamaan korektor (3.24) adalah eksplisit dan solusinya bisa didapat secara langsung.

3.5 Analisis Kestabilan Skema Prediktor-Korektor

Dengan melakukan proses linierisasi yang sama dengan analisis kestabilan skema beda hingga, persamaan prediktor menjadi

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m^{n+1} - 2U_m^n - U_m^{n-1} = & r^2\bar{U}(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n) \\ & - p^2(U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n) \end{aligned} \quad (3.25)$$

dengan $\bar{U} = 1 + U_B$ dan $U_B = \max_{m=1,2,\dots,N} \{U_m^{n+1}, U_m^n, U_m^{n-1}\}$.

Selanjutnya, persamaan korektor menjadi

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} - 2U_m^n - U_m^{n-1} = & \frac{r^2}{12}\delta_x^2 \left[g(\tilde{U}_m^{n+1}) + 10g(U_m^n) + g(U_m^{n-1}) \right] \\ & - \frac{1}{12}p^2\delta_x^4(\tilde{U}_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}) \\ = & \frac{r^2}{12}\delta_x^2 U_m^n \left[\frac{g(\tilde{U}_m^{n+1}) + 10g(U_m^n) + g(U_m^{n-1})}{U_m^n} \right] \\ & - \frac{1}{12}p^2\delta_x^4 U_m^n \left(\frac{\tilde{U}_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}}{U_m^n} \right) \\ = & \frac{r^2}{12}(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n) \\ & \bar{U} \left[\frac{\tilde{U}_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}}{U_m^n} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{12}p^2 \left(U_{m+2}^n - 4U_{m+1}^n + 6U_m^n - 4U_{m-1}^n + U_{m-2}^n \right) \left(\frac{\tilde{U}_m^{n+1} + 10U_m^n + U_m^{n-1}}{U_m^n} \right) \quad (3.26)$$

dengan $\bar{U} = 1 + U_B$ dan $U_B = \max_{m=1,2,\dots,N} \{U_m^{n+1}, U_m^n, U_m^{n-1}\}$.

Dengan mengasumsikan $U_m^n = \lambda^n e^{i\beta m h}$, kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.25) dan persamaan (3.26), secara berturut-turut diperoleh

$$\begin{aligned} & \tilde{\lambda}^{n+1} e^{i\beta m h} - 2\lambda^n e^{i\beta m h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta m h} \\ &= r^2 \bar{U} (\lambda^n e^{i\beta(m+1)h} - 2\lambda^n e^{i\beta m h} + \lambda^n e^{i\beta(m-1)h}) \\ & \quad - p^2 (\lambda^n e^{i\beta(m+2)h} - 4\lambda^n e^{i\beta(m+1)h} + 6\lambda^n e^{i\beta m h} \\ & \quad - 4\lambda^n e^{i\beta(m-1)h} + \lambda^n e^{i\beta(m-2)h}) \\ \tilde{\lambda} - 2 + \lambda^{-1} &= r^2 \bar{U} (e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}) \\ & \quad - p^2 (e^{2i\beta h} - 4e^{i\beta h} + 6 - 4e^{-i\beta h} + e^{-2i\beta h}) \\ &= -(4r^2 \bar{U} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + 16p^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2}) \\ &= -(\xi + \mu) \\ \tilde{\lambda} &= 2 - \lambda^{-1} - (\xi + \mu) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^{n+1} e^{i\beta m h} - 2\lambda^n e^{i\beta m h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta m h} \\ &= \frac{r^2}{12} \bar{U} (\lambda^n e^{i\beta(m+1)h} - 2\lambda^n e^{i\beta m h} + \lambda^n e^{i\beta(m-1)h}) \\ & \quad \left(\frac{\tilde{\lambda}^{n+1} e^{i\beta m h} + 10\lambda^n e^{i\beta m h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta m h}}{\lambda^n e^{i\beta m h}} \right) \\ & \quad - \frac{1}{12} p^2 \left(\lambda^n e^{i\beta(m+2)h} - 4\lambda^n e^{i\beta(m+1)h} \right. \\ & \quad \left. + 6\lambda^n e^{i\beta m h} - 4\lambda^n e^{i\beta(m-1)h} + \lambda^n e^{i\beta(m-2)h} \right) \\ & \quad \left(\frac{\tilde{\lambda}^{n+1} e^{i\beta m h} + 10\lambda^n e^{i\beta m h} + \lambda^{n-1} e^{i\beta m h}}{\lambda^n e^{i\beta m h}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda - 2 + \lambda^{-1} &= -\frac{1}{12}(4r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2})(\tilde{\lambda} + 10 + \lambda^{-1}) \\
 &\quad -\frac{1}{12}(16p^2\sin^4\frac{\beta h}{2})(\tilde{\lambda} + 10 + \lambda^{-1}) \\
 \lambda - 2 + \lambda^{-1} &= -\frac{1}{12}(\xi + \mu)(\tilde{\lambda} + 10 + \lambda^{-1}) \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

dengan $\xi = 4r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2}$ dan $\mu = 16p^2\sin^4\frac{\beta h}{2}$.

Selanjutnya, jika persamaan (3.27) disubstitusikan ke persamaan (3.28), maka

$$\begin{aligned}
 \lambda - 2 + \lambda^{-1} &= -\frac{1}{12}(\xi + \mu)(2 - \xi - \mu + 10) \\
 &= -\frac{1}{12}(\xi + \mu)(12 - \xi - \mu) \\
 \lambda - 2 + \lambda^{-1} &= -2\omega \\
 \lambda^2 - 2(1 - \omega)\lambda + 1 &= 0 \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

dengan $\omega = \frac{1}{24}(\xi + \mu)[12 - (\xi + \mu)]$.

Persamaan (3.29) dapat dibentuk seperti persamaan (3.15) dengan $\Gamma = 1$ dan $\Delta = 1 - \omega$, dan dapat dinyatakan seperti persamaan (3.17) sehingga

$$0 \leq \omega \leq 2 \quad (3.30)$$

dengan $\omega = \frac{1}{24}(\xi + \mu)[12 - (\xi + \mu)]$.

Berdasarkan pertidaksamaan (3.30), diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{24}(\xi + \mu)(12 - \xi - \mu) &\leq 2 \\
 (\xi + \mu)(12 - \xi - \mu) &\leq 48 \\
 \xi^2 + \mu^2 + 2\xi\mu - 12\xi - 12\mu + 48 &\geq 0 \\
 (\xi + \mu - 6)^2 + 12 &\geq 0 \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Pertidaksamaan (3.31) akan selalu terpenuhi, karena ruas kiri pertidaksamaan (3.31) bernilai positif.

Demikianpula, pertidaksamaan (3.30) dapat ditulis

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}(\xi + \mu)(12 - \xi - \mu) &\geq 0 \\ (\xi + \mu)(12 - \xi - \mu) &\geq 0\end{aligned}\quad (3.32)$$

Dengan mengingat kembali bahwa $\xi = 4r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2}$ dan $\mu = 16p^2\sin^4\frac{\beta h}{2}$, maka pertidaksamaan (3.32) akan membuat nilai $(\xi + \mu) \geq 0$, sehingga pertidaksamaan (3.32) akan menjadi

$$\begin{aligned}(12 - \xi - \mu) &\geq 0 \\ \xi + \mu &\leq 12 \\ 4r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2} + 16p^2\sin^4\frac{\beta h}{2} &\leq 12\end{aligned}\quad (3.33)$$

Ruas kiri dari pertidaksamaan (3.33) akan bernilai maksimum jika $\sin^2\frac{\beta h}{2} = 1$, akibatnya

$$4r^2\bar{U}\sin^2\frac{\beta h}{2} + 16p^2\sin^4\frac{\beta h}{2} \leq 4r^2\bar{U} + 16p^2 \leq 12$$

sehingga,

$$\begin{aligned}4r^2\bar{U} + 16p^2 &\leq 12 \\ \frac{k^2}{h^2}\bar{U} + 4\frac{k^2}{h^4} &\leq 3 \\ h^2k^2\bar{U} + 4k^2 &\leq 3h^4 \\ k^2 &\leq \frac{3h^4}{h^2\bar{U} + 4} \\ k^2 &\leq 3h^2\left(\frac{h^2}{h^2\bar{U} + 4}\right) \\ k &\leq h\left(\frac{1}{3}\left(\bar{U} + \frac{4}{h^2}\right)\right)^{-1/2}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Berdasarkan hasil analisis kestabilan skema beda hingga pada pertidaksamaan (3.21) dan hasil analisis kestabilan skema prediktor-korektor pada pertidaksamaan (3.34), dapat disimpulkan bahwa rentang kestabilan skema prediktor-korektor lebih lebar dibandingkan dengan rentang kestabilan skema beda hingga.

3.6 Simulasi Numerik

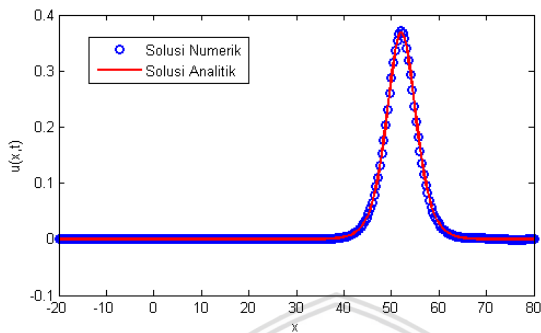
Pada subbab ini dilakukan simulasi numerik skema prediktor-korektor menggunakan *software* MATLAB. Skema numerik yang diusulkan dalam program tersebut adalah persamaan (3.23) dan persamaan (3.24) dengan kondisi awal dan kondisi batas yang telah diketahui. Selanjutnya, solusi numerik yang telah diperoleh akan dibandingkan dengan solusi eksak persamaan *good* Boussinesq.

Pada simulasi numerik berikut digunakan waktu awal $t_0 = 0$, $L_0 = -20$, $L_1 = 80$, kondisi awal $U(x, 0) = u(x, 0)$ dan $U(x, 1) = u(x, 1)$, serta $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

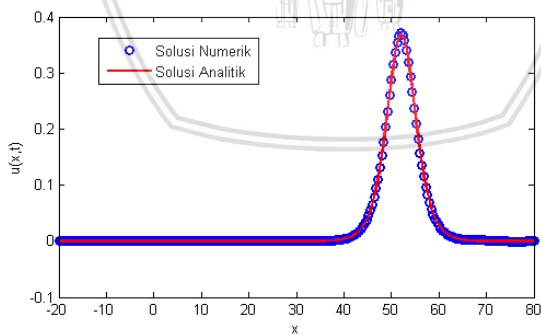
3.6.1 Solusi Numerik *Single-Soliton*

Solusi numerik *single-soliton* untuk persamaan *Good* Boussinesq digunakan parameter $U_B \approx -0.77 \times 10^{-47}$, $b = -0.5$, $A = 0.369$, $x_0 = 0$, dan $c = 0.868$. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi numerik persamaan (3.23)-(3.24) dengan kondisi awal dan kondisi batas yang telah diketahui serta dipilih $h = 0.4$ dan $h = 0.2$. Berdasarkan hasil analisis kestabilan pada pertidaksamaan (3.34), diperoleh syarat kestabilan yang bergantung pada h dan k . Untuk $h = 0.4$ skema numerik akan stabil jika nilai $k \leq 0.1358$, sedangkan untuk $h = 0.2$ skema numerik akan stabil jika nilai $k \leq 0.0344$. Pada simulasi ini dipilih nilai $k = 0.005$ dan $k = 0.01$.

Pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 disajikan solusi eksak dan solusi numerik *single-soliton* dari persamaan *good* Boussinesq secara berturut-turut saat $t = 60$. Gambar 3.1 dan 3.2 merepresentasikan bahwa soliton merambat dengan kecepatan konstan dan tidak mengalami perubahan bentuk selama merambat.

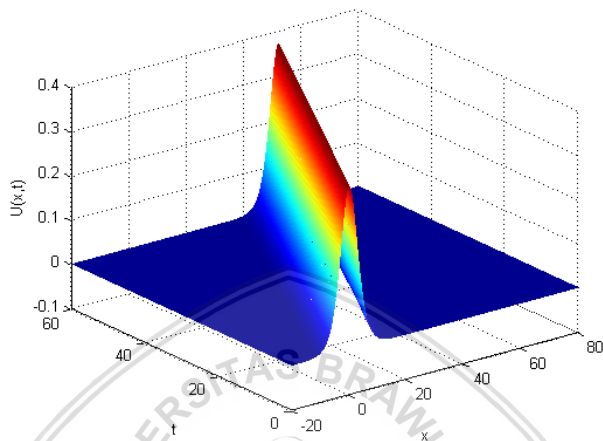


Gambar 3.1: Solusi persamaan *Good Boussinesq* saat $k = 0.005$, $h = 0.4$ dan $t = 60$.



Gambar 3.2: Solusi persamaan *Good Boussinesq* saat $k = 0.01$, $h = 0.4$ dan $t = 60$.

Pada Gambar 3.3 disajikan solusi numerik persamaan *good* Boussinesq dalam selang waktu $t \in [0, 60]$.



Gambar 3.3: Solusi numerik persamaan *Good* Boussinesq saat $k = 0.005$ dan $h = 0.4$.

Pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 ditunjukkan kesalahan numerik yang merupakan selisih antara solusi numerik dan solusi eksak. Berdasarkan kesalahan numerik tersebut dapat ditentukan orde kesalahan. Hal ini diperlukan untuk memverifikasi apakah metode prediktor-korektor telah diimplementasikan dengan baik. Menurut Suryanto (2017), penentuan orde kesalahan dapat ditentukan dengan membandingkan kesalahan numerik $\tilde{y}_{h_1}$ dan $\tilde{y}_{h_2}$. Dengan demikian orde kesalahan dapat ditentukan dengan menggunakan

$$p + O(h) = \log_a \frac{|y - \tilde{y}_{h_1}|}{|y - \tilde{y}_{h_2}|}$$

dengan p =orde kesalahan dan $a = \frac{h_1}{h_2}$.

Tabel 3.1: Kesalahan Numerik Persamaan *Good Boussinesq* saat $k = 0.005$.

t	$h = 0.4$	$h = 0.2$	orde kesalahan (n)
	kesalahan maksimum	kesalahan maksimum	
10	0.0015529	0.0002261	2.779
30	0.0027799	0.0004588	2.559
60	0.0037741	0.0008454	2.158

Tabel 3.2: Kesalahan Numerik Persamaan *Good Boussinesq* saat $k = 0.01$.

t	$h = 0.4$	$h = 0.2$	orde kesalahan (n)
	kesalahan maksimum	kesalahan maksimum	
10	0.0015527	0.0002261	2.779
30	0.0027798	0.0004587	2.599
60	0.0037742	0.0008453	2.158

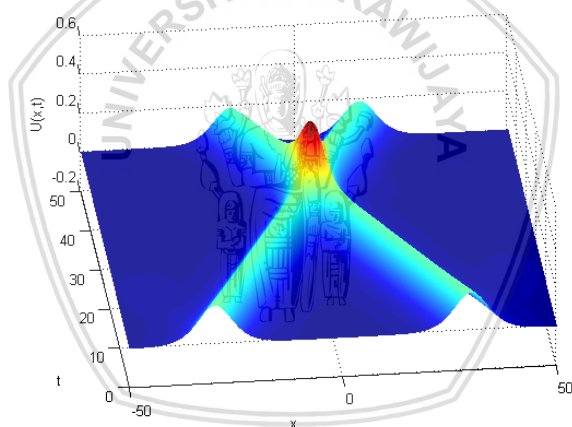
Pada subbab 3.1 ditunjukkan bahwa hasil konstruksi skema numerik pada persamaan (3.9) merupakan skema beda hingga implisit nonlinear, yang mempunyai kesalahan berorde dua terhadap ruang dan berorde empat terhadap waktu. Skema tersebut tidak mudah untuk diimplementasikan, sehingga pada simulasi numerik ini digunakan skema prediktor-korektor. Dari Tabel 3.1 dan Tabel 3.2, diperoleh bahwa skema prediktor-korektor mempunyai kesalahan berorde dua terhadap ruang dan berorde nol terhadap waktu, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa skema prediktor-korektor mempunyai orde kesalahan yang tidak sama dengan skema beda hingga implisit nonlinear.

3.6.2 Solusi Numerik *Double-Soliton*

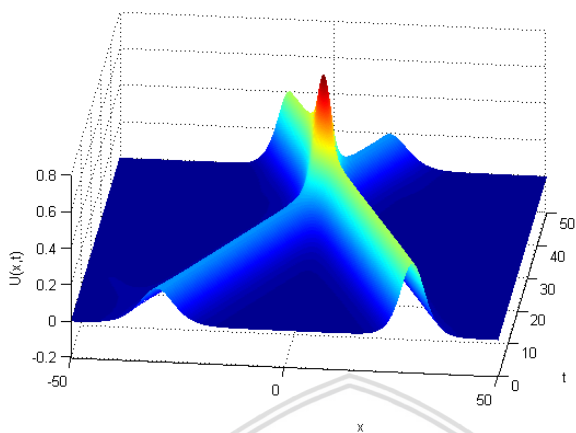
Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik *double-soliton* untuk persamaan *good Boussinesq* dengan kondisi awal dan kondisi batas yang telah diketahui. Selanjutnya, disimulasikan *double-soliton* simetris dan *double-soliton* asimetris dengan nilai $k = 0.05$ dan $h = 0.4$. Masing-masing gelombang merambat dari titik awal $x_1 = -30$, $x_2 = 30$ dengan arah berlawanan $c_1 = -c_2 = 0.868$.

Double-soliton simetri digunakan nilai $A_1 = A_2 = 0.2$ sedangkan *double-soliton* asimetris digunakan nilai $A_1 = 0.2$ dan $A_2 = 0.4$.

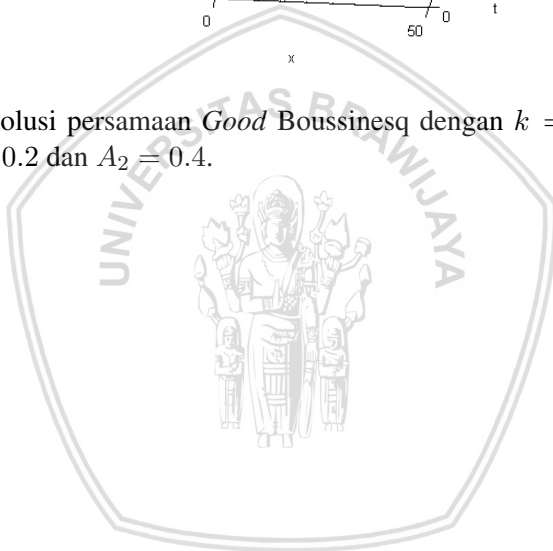
Pada Gambar 3.4 dan Gambar 3.5 disajikan solusi numerik *double-soliton* dari persamaan *good* Boussinesq secara berturut-turut saat selang waktu $t \in [0, 50]$. Gambar 3.4 dan 3.5 merepresentasikan bahwa kedua soliton semula berada pada jarak yang cukup jauh kemudian merambat dengan arah berlawanan dengan kecepatan konstan. Kemudian kedua soliton saling berinteraksi dimana jumlah amplitudo gabungan lebih besar daripada amplitudo tunggalnya. Setelah berinteraksi, soliton kembali saling terpisah dengan arah berlawanan dan merambat dengan bentuk dan kecepatan seperti semula.



Gambar 3.4: Solusi persamaan *Good* Boussinesq dengan $k = 0.05$, $h = 0.4$ dan $A_1 = A_2 = 0.2$.



Gambar 3.5: Solusi persamaan *Good Boussinesq* dengan $k = 0.05$, $h = 0.4$, $A_1 = 0.2$ dan $A_2 = 0.4$.



BAB IV

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab tiga, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Hasil konstruksi skema numerik persamaan *good* Boussinesq merupakan skema beda hingga implisit nonlinear.
2. Berdasarkan hasil analisis kestabilan von Neumann, skema beda hingga stabil dengan syarat.
3. Skema beda hingga memiliki kesalahan pemotongan orde empat terhadap waktu dan orde dua terhadap ruang.
4. Untuk mendapatkan solusi dari persamaan beda hingga implisit nonlinear diperlukan metode iterasi, dalam skripsi ini digunakan skema prediktor-korektor.
5. Skema prediktor-korektor stabil bersyarat dengan rentang kestabilan lebih lebar daripada skema beda hingga.
6. Simulasi numerik menggunakan skema prediktor-korektor. Dengan melakukan beberapa simulasi menggunakan nilai ukuran langkah spasial (h) dan langkah temporal (k) tertentu, dapat ditunjukkan bahwa metode yang diusulkan cukup akurat.



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. John Willey and Sons Inc. New York.
- Bratsos, A. G. 1998. The Solution of Boussinesq Equation Using the Method of Lines. *Computer Methods in Applied Mechanic and Engineering*. 157:33-44.
- Chapra, S. C dan R. P. Canale. 2010. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw Hill, Inc. New York.
- Cheney, E. W dan D. R. Kincaid. 2012. *Numerical Mathematics and Computing*. Brooks Cole. USA.
- Chung, T. J. 2010. *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press. New York.
- Debnath, L. 2012. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineer*. Birkhäuser. New York.
- Febrian, H. 2014. Skema Beda Hingga Orde Empat untuk Persamaan Good Boussinesq. *Skripsi*. FMIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.
- Finizio, N dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equations*. Wadsworth Inc. California.
- Ismail, M. S dan A. G. Bratsos. 2003. A Predictor-Corrector Scheme for the Numerical Solution of the Boussinesq Equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. vol13:11-27.
- Lapidus, L dan G. F. Pinder. 1999. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. John Wiley and Sons, Inc. Toronto.

- Lapidus, L dan J. H. Seinfeld. 1971. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Academic Press. USA.
- Manoranjan, V. S, A. R. Mitchell, dan J. Li. Morris. 1984. Numerical Solutions of the *Good Boussinesq Equation*. *Journal of Industrial and Applied Mathematics*. vol5:947-957.
- Morton, K. W dan D. Mayers. 2005. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press. New York.
- Noye, J. 1982. *Numerical Solution of Partial Differential Equation*. North-Holland Publishing. Holland.
- Ralston, A dan P. Rabinowitz. 2001. *A First Course in Numerical Analysis*. Dover Publications, Inc. New York.
- Suryanto, A. 2017. *Metode Numerik Untuk Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya dengan MATLAB*. Universitas Negeri Malang. Malang.
- Whitham, G.B. 1999. *Linear and Nonlinear Waves*. John Willey and Sons, Inc. California.