

**MODEL PENYEBARAN VIRUS PADA TANAMAN  
DENGAN WAKTU TUNDA**

**SKRIPSI**

oleh  
**RIZQIYATUL ULA**  
**145090401111013**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**MODEL PENYEBARAN VIRUS PADA TANAMAN  
DENGAN WAKTU TUNDA**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika

oleh

**RIZQIYATUL ULA**

**145090401111013**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI****MODEL PENYEBARAN VIRUS PADA TANAMAN DENGAN  
WAKTU TUNDA**

oleh  
**RIZQIYATUL ULA**  
**145090401111013**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 21  
Maret 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika

**Pembimbing**

**Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.**  
**NIP. 197312162002122001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.**  
**NIP. 197509082000031003**



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rizqiyatul Ula  
NIM : 145090401111013  
Jurusan : Matematika  
Penulis Skripsi berjudul : Model Penyebaran Virus pada  
Tanaman dengan Waktu Tunda

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 21 Maret 2018  
yang menyatakan,

Rizqiyatul Ula  
145090401111013



# MODEL PENYEBARAN VIRUS PADA TANAMAN DENGAN WAKTU TUNDA

## ABSTRAK

Pada skripsi ini, dibahas model penyebaran virus pada tanaman dengan waktu tunda. Pada model diasumsikan bahwa populasi tanaman dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu tanaman *Susceptible*, *Infected* dan *Recovered*, sedangkan untuk populasi serangga dibagi menjadi dua yaitu *Susceptible* dan *Infected*. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan syarat eksistensinya, penentuan angka reproduksi dasar  $R_0$  dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya serta analisis kestabilan lokal. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan model, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemi eksis dengan syarat tertentu. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit bergantung pada angka reproduksi dasar, sedangkan kestabilan titik kesetimbangan endemi bergantung pada syarat tertentu. Selanjutnya, diberikan waktu tunda dalam model, dimana waktu tunda menunjukkan lamanya periode suatu tanaman menjadi subpopulasi *infectious* setelah terinfeksi oleh serangga. Pada model dengan waktu tunda, ketika  $R_0 > 1$ , titik kesetimbangan endemi bersifat stabil asimtotik. Hasil analisis dan simulasi numerik menunjukkan bahwa waktu tunda tidak berpengaruh pada kestabilan titik kesetimbangan endemi.

**Kata kunci:** penyebaran virus, angka reproduksi, matriks generasi selanjutnya, waktu tunda.



# MODELING PLANT VIRUS PROPAGATIONS WITH DELAY

## ABSTRACT

This final project discussed dynamical system modeling plant virus propagation with delay. In the model it is assumed that the population of the plant is divided into three plant subpopulations, namely Susceptible, Infected and Recovered, while for the insect subpopulation is divided into two, namely Susceptible and Infected. Dynamical analysis is performed by finding the equilibria point and the terms of existence, determining the basic reproduction number  $R_0$  using the next generation matrix, and analyzing the stability of equilibria. Dynamical analysis shows that there are two equilibrium, namely the disease free equilibrium and the endemic equilibrium point. The disease free equilibrium always exist, but the endemic equilibrium point exist under certain conditions. The stability of the disease free equilibria depend on the basic reproduction number, meanwhile the endemic equilibria point depend on under certain conditions. Furthermore, given the delay time in the model, the delay time indicates the length of the period of a plant becoming infectious subpopulation after infection by insects. On models with time delay when the basic reproduction number  $R_0 > 1$ , endemic equilibrium will be asymptotically stable. The results of numerical analysis and simulation show that the delay time has no effect on the endemic equilibrium point.

**Kata kunci:** virus propagation, basic reproduction number, next generation matrix, delay.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **MODEL PENYEBARAN VIRUS PADA TANAMAN DENGAN WAKTU TUNDA** dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Isnani Darti S.Si, M.Si. selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan.
2. Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. dan Nur Shofianah, S.Si.,M.Si.,Ph.D. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi tepat waktu.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Pak Syahrani serta seluruh staff Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Bapak, ibu, mas(M. Khairur Raziq dan M. Syahril Huda) dan keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan moril serta materiil.
6. Mega Rachmawati L, Rica Uswatun C, Noraniza Bahrotul Ilmi atas segala waktu, kesabaran dan bantuan yang telah diberikan.
7. Rifdah 'Abid Aadilah, Khoirunisa, Yuzrina Dewi S, Meyta Nur Safrina, Nungky Hendarti, Virga Retha A.M, Miftahul Firdaus, Purwaningtias A, Yola Fatinaya atas segala bantuan yang telah diberikan dalam proses pengerjaan skripsi ini.

8. Teman-teman Matematika 2014 yang mendukung dan mendoakan kelancaran pengerjaan skripsi ini.

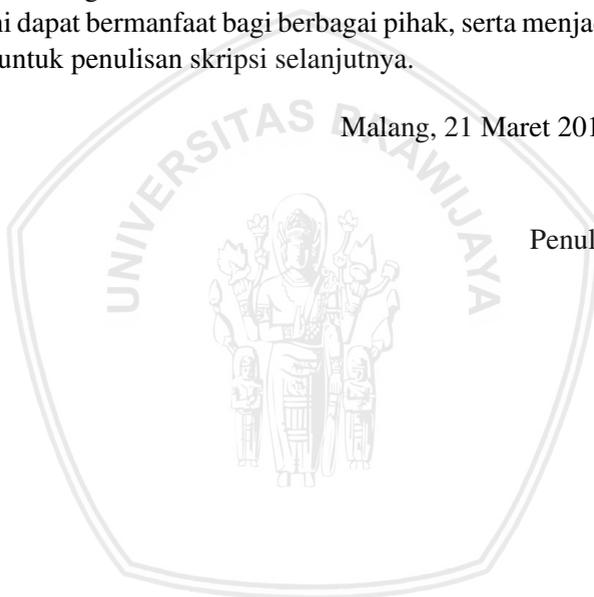
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Sebagai manusia yang tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email [rizqiyatulula10@gmail.com](mailto:rizqiyatulula10@gmail.com), untuk perbaikan di masa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 21 Maret 2018

Penulis



## DAFTAR ISI

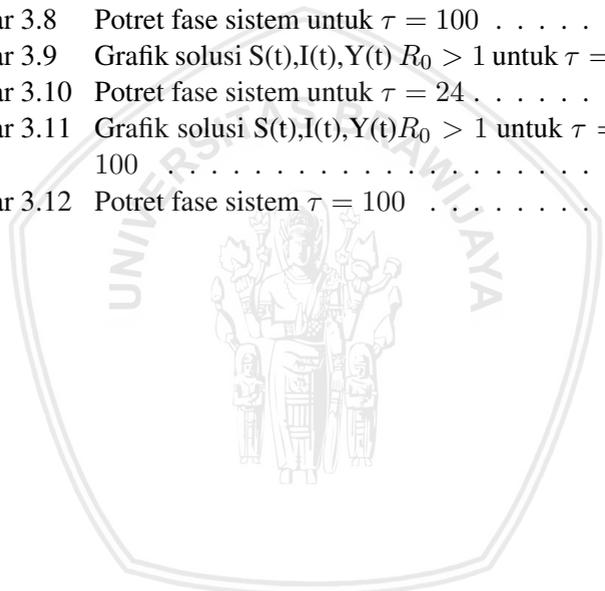
<b>JUDUL</b> . . . . .	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI</b> . . . . .	v
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> . . . . .	vii
<b>ABSTRAK</b> . . . . .	ix
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	xi
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	xiii
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	xiv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> . . . . .	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> . . . . .	1
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Batasan Masalah . . . . .	3
1.4 Tujuan . . . . .	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> . . . . .	5
2.1 Persamaan Diferensial . . . . .	5
2.1.1 Persamaan Diferensial . . . . .	5
2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa . . . . .	5
2.2 Sistem Dinamik . . . . .	6
2.2.1 Sistem Dinamik . . . . .	6
2.2.2 Sistem <i>Autonomous</i> . . . . .	6
2.2.3 Titik Kesetimbangan . . . . .	6
2.2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan . . . . .	7
2.2.5 Sistem <i>Autonomous</i> Linear . . . . .	7
2.2.6 Sistem <i>Autonomous</i> Nonlinear . . . . .	8
2.3 Kriteria Routh Hurwitz . . . . .	10
2.4 Angka Reproduksi Dasar . . . . .	11
2.5 Matriks Generasi Selanjutnya . . . . .	11
2.6 Persamaan Diferensial Waktu Tunda . . . . .	12
2.7 Nilai Kritis Waktu Tunda . . . . .	14
2.8 Model Penyebaran Virus Tanaman . . . . .	16
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> . . . . .	19
3.1 Titik Kesetimbangan dan Angka Reproduksi Dasar . . . . .	19
3.2 Analisis Kestabilan Lokal tanpa Waktu Tunda . . . . .	23
3.2.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_0 = (K, 0, 0)$ . . . . .	24

3.2.2	Kestabilan Titik Keseimbangan $E^* = (S^*, I^*, Y^*)$ . . . . .	25
3.3	Analisis Kestabilan Lokal dengan Waktu Tunda . . . . .	26
3.3.1	Kestabilan Titik Keseimbangan $E_0 = (K, 0, 0)$ . . . . .	28
3.3.2	Kestabilan Titik Keseimbangan $E^* = (S^*, I^*, Y^*)$ . . . . .	29
3.3.3	Penentuan Waktu Tunda Kritis . . . . .	31
3.4	Simulasi Numerik . . . . .	33
3.4.1	Simulasi untuk $R_0 < 1$ model dengan $\tau = 0$ . . . . .	33
3.4.2	Simulasi untuk $R_0 > 1$ model dengan $\tau = 0$ . . . . .	34
3.4.3	Simulasi untuk $R_0 < 1$ model dengan $\tau = 24$ . . . . .	36
3.4.4	Simulasi untuk $R_0 < 1$ model dengan $\tau = 100$ . . . . .	37
3.4.5	Simulasi untuk $R_0 > 1$ model dengan $\tau = 24$ . . . . .	38
3.4.6	Simulasi untuk $R_0 > 1$ model dengan $\tau = 100$ . . . . .	39
<b>BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .		43
4.1	Kesimpulan . . . . .	43
4.2	Saran . . . . .	43
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .		45



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Gambar Kompartemen Penyebaran Virus . . .	17
Gambar 3.1	Grafik solusi sistem $R_0 < 1$ untuk $\tau = 0$ . . .	34
Gambar 3.2	Potret fase sistem $R_0 < 1$ untuk $\tau = 0$ . . . .	34
Gambar 3.3	Grafik solusi sistem $R_0 > 1$ untuk $\tau = 0$ . . .	35
Gambar 3.4	Potret fase sistem $R_0 > 1$ untuk $\tau = 0$ . . . .	35
Gambar 3.5	Grafik solusi $S(t), I(t), Y(t)$ $R_0 < 1$ untuk $\tau = 24$	36
Gambar 3.6	Potret fase sistem untuk $\tau = 24$ . . . . .	36
Gambar 3.7	Grafik solusi $S(t), I(t), Y(t)$ $R_0 < 1$ untuk $\tau =$ 100 . . . . .	37
Gambar 3.8	Potret fase sistem untuk $\tau = 100$ . . . . .	38
Gambar 3.9	Grafik solusi $S(t), I(t), Y(t)$ $R_0 > 1$ untuk $\tau = 24$	38
Gambar 3.10	Potret fase sistem untuk $\tau = 24$ . . . . .	39
Gambar 3.11	Grafik solusi $S(t), I(t), Y(t)$ $R_0 > 1$ untuk $\tau =$ 100 . . . . .	40
Gambar 3.12	Potret fase sistem $\tau = 100$ . . . . .	40





## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Titik Kesetimbangan $E^*$ .....	48
Lampiran 2. Analisis Titik Kesetimbangan $E^*$ .....	53
Lampiran 3. Penurunan Linearisasi Model dengan Waktu Tunda .....	56
Lampiran 4. Penurunan Persamaan Karakteristik Model .....	58
Lampiran 5. Eliminasi $\tau$ pada persamaan (3.12) .....	59
Lampiran 6. Program Model Tanpa Waktu Tunda .....	61
Lampiran 7. Program Model dengan Waktu Tunda .....	64





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, keberadaan tanaman sebagai produsen sangat penting untuk manusia dan makhluk hidup lainnya. Tanaman dapat terinfeksi oleh virus atau penyakit. Penyebaran virus pada tanaman dapat disebabkan oleh angin, air maupun serangga. Virus, bakteri dan jamur dapat ditularkan serangga dari satu tanaman ke tanaman lainnya. Salah satu contohnya adalah bakteri *Magna porthae* yang menyebabkan rusaknya beras sehingga produksi beras menurun hingga 90 % (Ellur, dkk., 2015). Penyebab lainnya yaitu jamur *Bothrytis cinerea* yang dapat merusak buah dan produksi tanaman (Leontopoulou, dkk., 2015). Menurut Fereres (2015) lebih dari 70% virus pada tanaman disebabkan oleh serangga.

Model penyebaran virus pada tanaman dengan perantara serangga merupakan salah satu kajian dalam bidang eko-epidemiologi. Hubungan timbal balik antar makhluk hidup dalam suatu populasi dikaji dalam bidang ekologi, sedangkan dinamika penyebaran penyakit pada suatu populasi dikaji dalam bidang epidemiologi. Kajian tentang ekologi dengan adanya penyebaran penyakit dalam populasi dikenal sebagai eko-epidemiologi (Xiao dan Chen, 2001). Salah satu contohnya adalah penyebaran virus pada tanaman. Virus dapat memperbanyak diri dengan menyerang sel yang sehat, kemudian DNA atau RNA sel sehat digunakan untuk bereproduksi. Sel yang terinfeksi tersebut pecah dan beberapa replika virus keluar. Selanjutnya, partikel virus yang baru menginfeksi sel lainnya. Virus melanjutkan proses tersebut hingga tidak ada lagi sel sehat yang dapat diserang. Dalam menginfeksi tanaman lainnya, virus pada tanaman harus menginfeksi tanaman yang masih sehat. Terdapat beberapa cara penyebaran infeksi virus, yaitu kontak antara pekerja ladang dengan tanaman yang terinfeksi atau interaksi yang lebih organik yaitu penularan virus melalui serangga (Wodarz, 2007).

Penyebaran virus dengan perantara serangga dapat dilakukan dengan cara serangga mengkonsumsi sari dari suatu tanaman yang terinfeksi, lalu virus dalam sari tersebut memasuki kelenjar ludah

serangga dan menyebar. Kemudian serangga menginfeksi tanaman yang sehat, selanjutnya beberapa partikel virus keluar dan menyerang tanaman. Proses ini berlangsung beberapa jam bahkan hari tergantung interaksi serangga. Virus disimpan oleh serangga selama masa hidupnya. Dalam kasus penyebaran virus, virus membutuhkan beberapa waktu untuk menyerang sel sehat, bereproduksi, dan menyebar dalam sel. Proses waktu tersebut dinamakan waktu tunda. Proses dengan waktu tunda dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan diferensial tundaan. Pemberian waktu tunda dapat menyebabkan osilasi pada solusi, sehingga solusi dapat mengalami perubahan termasuk kestabilan (Culshaw dan Ruan, 2000).

Model penyebaran virus tanaman dengan perantara serangga dibahas oleh Shi, dkk. (2014). Namun dalam penelitian tersebut, tanaman *Susceptible* langsung menjadi tanaman *Infected* setelah terinfeksi. Padahal dalam kenyataannya, ketika tanaman *Susceptible* terinfeksi, terdapat waktu sebelum akhirnya menjadi tanaman *Infected*. Model dengan waktu tunda biasanya lebih realistis, karena pada kenyataannya waktu tunda terjadi hampir di setiap situasi biologi (MacDonald, 1989). Sama halnya pada penelitian *predator-prey*, tanaman berperan sebagai *prey* sedangkan serangga berperan sebagai *predator*. Pada penelitian Xiao dan Chen (2001) dibahas tentang sistem eko-epidemiologi tiga spesies, dan diasumsikan *prey* yang terinfeksi tidak dapat sembuh dan predasi menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Bairagi, dkk. (2008) membahas tentang dampak waktu tunda pada sistem dinamik eko-epidemiologi dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan populasi *susceptible(S)*, *infected(I)* dan *Predator(P)*.

Pada skripsi ini dibahas tentang model penyebaran virus tanaman dengan waktu tunda yang mengkaji kembali pada artikel Jackson dan Chen-Charpentier (2017). Interaksi antara serangga dan tanaman menggunakan fungsi respon Holling tipe II, karena serangga hanya dapat menularkan virus pada tanaman dengan jumlah yang terbatas. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan syarat eksistensi, penentuan angka reproduksi dasar menggunakan matriks generasi selanjutnya, serta analisis kestabilan lokal tanpa atau dengan adanya waktu tunda. Simulasi numerik dilakukan mendukung hasil analisis yang diperoleh.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana titik kesetimbangan pada model penyebaran virus tanaman tanpa atau dengan adanya waktu tunda?
2. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model ?
3. Bagaimana simulasi numerik dan interpretasi model penyebaran virus pada tanaman tanpa atau dengan adanya waktu tunda?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada skripsi ini adalah.

1. Laju kelahiran dan perpindahan konstan.
2. Tidak ada penularan secara vertikal oleh virus.
3. Serangga tidak mati oleh virus melainkan karena kematian alami.
4. Serangga yang terinfeksi hanya dapat menularkan ke tanaman bukan ke serangga lain.
5. Tanaman terinfeksi yang memiliki imunitas akan menjadi sembuh, sedangkan yang tidak memiliki imunitas akan kembali menjadi tanaman rentan.

## 1.4 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah.

1. Menentukan titik kesetimbangan pada model penyebaran virus pada tanaman tanpa atau dengan adanya waktu tunda.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model.
3. Mensimulasikan dan menginterpretasikan model penyebaran virus pada tanaman tanpa atau dengan adanya waktu tunda secara numerik.



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Diferensial

##### 2.1.1 Persamaan Diferensial

Persamaan yang memuat turunan suatu fungsi yang tak diketahui disebut persamaan diferensial. Pada persamaan diferensial, orde adalah tingkat tertinggi dari turunan yang terdapat pada persamaan. Secara umum, persamaan diferensial orde  $n$  memiliki bentuk:

$$F[t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)] = 0, \quad (2.1)$$

dengan  $F$  adalah fungsi yang terdiri dari  $(n + 2)$  variabel dan turunan ke- $n$  adalah turunan tertinggi pada persamaan.

(Edwards dan Penney, 2001)

##### 2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial dengan variabel tak bebas yang hanya bergantung pada satu variabel bebas. Persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial biasa jika  $t \in \mathbb{R}$ . Persamaan diferensial biasa disebut juga linear jika  $F$  pada persamaan tersebut adalah fungsi linear dari  $x, x', \dots, x^{(n)}$ . Bentuk umum persamaan diferensial biasa linear orde  $k$  adalah :

$$a_0(t) \frac{d^k x}{dt^k} + a_1(t) \frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}} + \dots + a_k(t)x = g(t).$$

Apabila suatu persamaan diferensial biasa tidak memenuhi bentuk umum persamaan diferensial biasa linear maka persamaan tersebut disebut nonlinear.

(Boyce dan DiPrima, 2012).

## 2.2 Sistem Dinamik

### 2.2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang, jika diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu. Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Alligood, dkk., 2000)

### 2.2.2 Sistem *Autonomous*

Sistem *Autonomous* merupakan sistem dinamik yang secara eksplisit tidak bergantung pada waktu. Sistem *autonomous* berdimensi  $n$  mempunyai bentuk umum

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

Titik  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  merupakan titik kesetimbangan sistem (2.2) jika

$$F_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

(Finizio dan Ladas, 1982)

### 2.2.3 Titik Kesetimbangan

Titik  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  adalah titik kritis sistem *autonomous* (2.2), jika  $F_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pada kondisi  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$  solusi  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  tidak mengalami perubahan nilai seiring dengan peningkatan nilai  $t$ , sehingga titik kritis  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  juga disebut titik kesetimbangan sistem.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

## 2.2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan  $(x^*, y^*, z^*)$  dikatakan

1. Stabil, jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. Stabil asimtotik, jika stabil dan  $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$  sedemikian sehingga sebuah solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

3. Tak stabil, apabila titik tersebut tidak memenuhi kriteria stabil.

Titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik berarti bahwa titik kesetimbangan stabil dan trayektori solusi-solusi lain di sekitarnya akan konvergen menuju titik kesetimbangan untuk  $t \rightarrow \infty$ .

(Boyce dan DiPrima, 2012)

## 2.2.5 Sistem *Autonomous* Linear

Sistem *autonomous* linear dengan  $n$  persamaan

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sistem persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Jika  $\det(A) \neq 0$ , maka titik  $\vec{x}^* = \vec{0}$  adalah satu satunya titik kesetimbangan sistem (2.3). Kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3) dapat ditentukan melalui nilai eigen matriks  $A$

**Teorema 2.2.1** Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = \vec{0}$  sistem (2.3) bersifat :

1. Stabil, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen matriks  $A$  mempunyai bagian riil tak positif,
2. Stabil asimtotik, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen matriks  $A$  mempunyai bagian riil negatif,
3. Tak stabil, jika terdapat nilai eigen matriks  $A$  yang mempunyai bagian riil positif,

(Finizio dan Ladas, 1982)

## 2.2.6 Sistem Autonomous Nonlinear

Perhatikan sistem *autonomous* nonlinear dengan  $n$  persamaan berikut,

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.4) dan  $F_i$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan  $\vec{x}$ . Deret Taylor fungsi  $F_i$  di sekitar  $\vec{x}^*$  adalah

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}). \quad (2.5)$$

Dengan  $\eta_i(\vec{x})$  adalah suku sisa, untuk  $i = 1, 2, \dots, n..$  Suku sisa pada hampiran orde satu memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan  $\|\vec{w}\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2}$  dan  $i = 1, 2, \dots, n$

Berdasarkan persamaan (2.5) dan mengingat bahwa  $F_i = 0$  serta  $\frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i - x_i^*)}{dt}$ , maka sistem (2.4) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}^*) \\ \eta_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}, \quad (2.6)$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi.

Jika  $\vec{x}$  berada dekat dengan  $\vec{x}^*$  maka  $\vec{\eta}$  bernilai kecil, sehingga  $\vec{\eta} \rightarrow 0$ . Oleh karena itu,  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.4) dapat dihipotesis oleh sistem linear berikut,

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}, \quad (2.7)$$

Jika  $\vec{x} = \vec{x}^*$ , maka diperoleh  $(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$  sehingga titik kesetimbangan (2.7) adalah  $(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$ . Proses menghampiri persamaan (2.4) dengan sistem persamaan (2.7) disebut linearisasi.

**Teorema 2.2.2** *Kestabilan sistem Autonomous Nonlinear titik kesetimbangan sistem autonomous nonlinear bersifat,*

1. *Stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat stabil asimtotik.*
2. *Tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat tidak stabil.*

(Boyce dan DiPrima, 2012)

### 2.3 Kriteria Routh Hurwitz

Sistem linear berdimensi  $n$  memiliki persamaan karakteristik yang secara umum dapat ditulis dalam bentuk

$$P(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + \dots + A_n = 0, \quad (2.8)$$

dengan koefisien  $A_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  adalah bilangan real. Kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous* linear dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa menentukan nilai eigen matriks koefisien, seperti yang dinyatakan dalam

**Teorema 2.3.1** *Kriteria Routh Hurwitz*

*Perhatikan polinom pada persamaan karakteristik sistem linear (2.8). Semua nilai eigen matriks koefisien sistem linear (2.3) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika*

$$D_1 = A_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ 1 & A_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ 1 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & A_2 & A_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_1 & A_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad a_j = 0, \quad j > n.$$

sebagai contoh persamaan karakteristik dengan  $n = 3$  yaitu  $r^3 + A_1 r^2 + A_2 r + A_3 = 0$ , memiliki nilai eigen yang semuanya memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika  $A_1 > 0, A_3 > 0$  dan  $A_1 A_2 > A_3$ .

(Murray, 2002)

## 2.4 Angka Reproduksi Dasar

Pada model endemi, angka reproduksi dasar dapat menyatakan banyaknya individu baru yang terinfeksi oleh satu individu yang terinfeksi sebelumnya dalam proses penularan penyakit pada suatu populasi rentan. Dalam hal ini angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) digunakan untuk menentukan terjadi atau tidaknya wabah penyakit dalam suatu populasi. Jika  $R_0 < 1$  maka setiap individu terinfeksi menghasilkan rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru. Dengan kata lain, infeksi akan bersih dari populasi atau sering disebut dengan bebas penyakit. Jika  $R_0 > 1$  maka individu terinfeksi akan meluas dan menjadi wabah dalam suatu populasi. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan dapat diselidiki dengan menggunakan angka reproduksi dasar.

(Heffernan, dkk., 2005)

## 2.5 Matriks Generasi Selanjutnya

Metode matriks generasi selanjutnya adalah suatu metode yang digunakan untuk memperoleh nilai pendekatan dari angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) pada model kompartemen penyebaran penyakit. Pada metode ini populasi model kompartemen penyebaran penyakit dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok kompartemen penyakit dan kelompok kompartemen non penyakit.

Suatu kompartemen disebut kompartemen penyakit jika terdapat individu-individu yang terinfeksi, misalkan terdapat  $1, \dots, m, m + 1, \dots, n$  kompartemen dengan kompartemen pertama sampai dengan  $m$  terdiri dari individu terinfeksi dan kompartemen  $m + 1$  sampai dengan  $n$  terdiri dari individu tidak terinfeksi. Model kompartemen dapat ditulis dalam bentuk

$$x'_i = F_i - V_i, i = 1, 2, \dots, m$$

dengan  $x_i$  menyatakan jumlah individu pada setiap kompartemen  $i$ . Parameter  $F_i$  menyatakan komponen pembentuk matriks  $F$ , dengan komponen  $F_i$  merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke- $i$ . Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari populasi individu rentan dan  $F_i$  tidak boleh negatif. Parameter  $V_i$  menyatakan komponen berbentuk matriks  $V$ , dengan  $V_i$  merupakan transfer keluar atau

masuk dari kompartemen satu ke lainnya. Transfer infeksi dapat terjadi apabila terdapat proses penularan penyakit dari satu kompartemen ke lainnya. Jika  $V_i$  menyatakan transfer keluar dari kompartemen ke  $i$  maka  $V_i$  bernilai positif, jika masuk pada satu kompartemen maka  $V_i$  bernilai negatif.

Didefinisikan  $F$  dan  $V$  adalah matriks  $m \times m$  sebagai berikut

$$F = \left[ \frac{dF_i(E_0)}{dx_j} \right],$$

$$V = \left[ \frac{dV_i(E_0)}{dx_j} \right],$$

dengan  $i, j = 1, \dots, m$  dan  $E_0$  adalah titik kesetimbangan bebas penyakit,  $F$  non negatif dan  $V$  matriks non singular. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan

$$K = FV^{-1}$$

dan angka reproduksi dasar yang diperoleh dari perhitungan matriks generasi selanjutnya dapat ditulis sebagai berikut

$$R_0 = \rho(R)$$

dengan  $\rho(R)$  adalah *spectral radius* matriks  $K$  yaitu nilai terbesar dari modulus nilai eigen matriks  $K$ .

(Brauer dkk., 2010)

## 2.6 Persamaan Diferensial Waktu Tunda

Persamaan diferensial dengan turunan fungsi yang tak diketahui yang bergantung pada nilai fungsi di periode waktu sebelumnya disebut persamaan diferensial waktu tunda. Persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0, m \leq n \quad (2.9)$$

dengan  $\tau$  adalah waktu tunda,  $m \leq n$ , dan

$$\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t).$$

Misalkan  $x(t) = e^{\lambda t}$ , maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0,$$
$$e^{\lambda t} \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0.$$

Oleh karena  $e^{\lambda t} \neq 0$ ,

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) disebut persamaan karakteristik persamaan (2.9). Misalkan

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \text{ dan } P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.10) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.11)$$

Sistem persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_t, x_{t-\tau}), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_t, x_{t-\tau}), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_t, x_{t-\tau}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

(Kuang, 1993)

## 2.7 Nilai Kritis Waktu Tunda

Misalkan terdapat sistem persamaan diferensial tundaan linear yang memiliki persamaan karakteristik

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (2.13)$$

dengan

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j,$$

$$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^m b_j \lambda^j.$$

Nilai kritis tundaan ( $\tau_0$ ) pada sistem adalah suatu nilai yang menandai perubahan kestabilan solusi saat nilai  $\tau$  melampaui  $\tau_0$ .

Apabila sistem memiliki nilai eigen  $\lambda = \alpha \pm i\omega$ , akan terjadi perubahan kestabilan akibat perubahan nilai  $\alpha < 0$  menuju  $\alpha > 0$  atau sebaliknya. Perubahan tersebut menunjukkan adanya nilai kritis tundaan. Untuk mengamati eksistensi nilai kritis tundaan, terlebih dahulu ditentukan akar persamaan karakteristik yang bernilai imajiner murni ( $\lambda = \pm i\omega$ ). Oleh karena itu, penentuan nilai kritis tundaan dilakukan dengan mensubstitusikan  $\lambda = i\omega$  pada persamaan (2.13), sehingga diperoleh

$$P(i\omega) + Q(i\omega)e^{-i\omega\tau} = 0. \quad (2.14)$$

Jika bagian real dan imajiner pada persamaan (2.14) dipisahkan yaitu  $P(i\omega) = R_1(\omega) + iQ_1(\omega)$  dan  $Q(i\omega) = R_2(\omega) + iQ_2(\omega)$  dengan suku eksponen yang dinyatakan sebagai fungsi trigonometri, maka diperoleh

$$R_1(\omega) + iQ_1(\omega) + (R_2(\omega) + iQ_2(\omega))(\cos \omega t - i \sin \omega t) = 0, \quad (2.15)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 R_1(\omega) &= \sum_j (-1)^{j+1} a_j \omega^{2j}, \\
 Q_1(\omega) &= \sum_j (-1)^j a_{j+1} \omega^{2j+1}, \\
 R_2(\omega) &= \sum_j (-1)^{j+1} b_j \omega^{2j}, \\
 Q_2(\omega) &= \sum_j (-1)^j b_{j+1} \omega^{2j+1},
 \end{aligned}$$

Persamaan (2.15) harus memenuhi persamaan (2.14), sehingga bagian real maupun bagian imajiner harus bernilai nol, yaitu

$$\begin{aligned}
 R_1(\omega) + R_2(\omega) \cos \omega\tau + Q_2(\omega) \sin \omega\tau &= 0, \\
 Q_1(\omega) - R_2(\omega) \sin \omega\tau + Q_2(\omega) \cos \omega\tau &= 0,
 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
 -R_1(\omega) &= R_2(\omega) \cos \omega\tau + Q_2(\omega) \sin \omega\tau. \\
 Q_1(\omega) &= R_2(\omega) \sin \omega\tau - Q_2(\omega) \cos \omega\tau.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Jika persamaan (2.16) dikuadratkan diperoleh

$$\begin{aligned}
 (R_1(\omega))^2 &= (R_2(\omega))^2 \cos^2 \omega\tau + (Q_2(\omega))^2 \sin^2 \omega\tau \\
 &\quad + 2R_2(\omega)Q_2(\omega) \sin \omega\tau \cos \omega\tau.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
 (Q_1(\omega))^2 &= (R_2(\omega))^2 \sin^2 \omega\tau + (Q_2(\omega))^2 \cos^2 \omega\tau \\
 &\quad + 2R_2(\omega)Q_2(\omega) \sin \omega\tau \cos \omega\tau.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Hasil penjumlahan dari (2.17) dan (2.18) adalah

$$(R_1(\omega))^2 + (Q_1(\omega))^2 = (R_2(\omega))^2 + (Q_2(\omega))^2. \tag{2.19}$$

Misalkan  $\xi = \sqrt{(R_2(\omega_0))^2 + Q_2(\omega_0))^2}$  dengan  $\omega_0$  memenuhi persamaan (2.19) maka persamaan (2.16) dapat ditulis kembali sebagai

$$-R_1(\omega_0) = \xi \left( \frac{R_2(\omega_0)}{\xi} \cos \omega_0\tau + \frac{Q_2(\omega_0)}{\xi} \sin \omega_0\tau \right),$$

$$Q_1(\omega_0) = \xi \left( \frac{R_2(\omega_0)}{\xi} \sin \omega_0 \tau - \frac{Q_2(\omega_0)}{\xi} \cos \omega_0 \tau \right).$$

Misalkan  $\frac{R_2(\omega_0)}{\xi} = \cos \beta$  dan  $\frac{Q_2(\omega_0)}{\xi} = \sin \beta$ , diperoleh

$$-R_1(\omega_0) = \xi (\cos \beta \cos \omega_0 \tau + \sin \beta \sin \omega_0 \tau), \quad (2.20)$$

$$Q_1(\omega_0) = \xi (\cos \beta \sin \omega_0 \tau - \sin \beta \cos \omega_0 \tau). \quad (2.21)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (2.20) dengan  $\cos \beta$  dan persamaan (2.21) dengan  $\sin \beta$  serta mengurangkan persamaan (2.20) dengan persamaan (2.21) diperoleh

$$-R_1(\omega_0) \cos \beta - Q_1(\omega_0) \sin \beta = \xi \cos \omega_0 \tau.$$

dan nilai kritis tundaan yaitu,

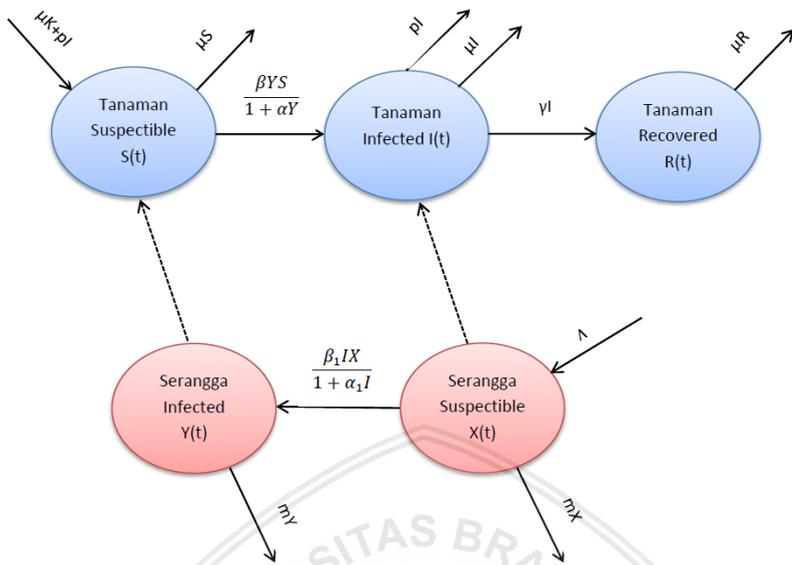
$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left( \frac{-R_1(\omega_0) \cos \beta - Q_1(\omega_0) \sin \beta}{\xi} \right) + \frac{2n\pi}{\omega_0}, n = 0, 1, \dots \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) menunjukkan terdapat tak berhingga nilai  $\tau_0$  sehingga dipilih nilai  $\tau_0$  yang paling minimum.

(Forde, 2005)

## 2.8 Model Penyebaran Virus Tanaman

Berikut model penyebaran virus pada tanaman dengan waktu tunda merujuk pada artikel Jackson dan Chen-Charpentier (2017) menggunakan beberapa asumsi yaitu populasi tanaman dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu tanaman *Susceptible*  $S(t)$ , *Infected*  $I(t)$  dan *Recovered*  $R(t)$ . Total jumlah tanaman dalam suatu populasi merupakan konstanta positif  $K$ ,  $K = S + I + R$ . Sedangkan untuk populasi serangga dibagi menjadi dua subpopulasi yaitu serangga *Susceptible*  $X(t)$  dan *Infected*  $Y(t)$ . Total jumlah serangga dalam suatu populasi yaitu  $N = X + Y$ .



Gambar 2.1: Gambar Kompartemen Penyebaran Virus

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu(K - S) - \frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} + pI \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} - (p + \mu + \gamma)I \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \\
 \frac{dX}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta_1 I X}{1 + \alpha_1 I} - mX \\
 \frac{dY}{dt} &= \frac{\beta_1 I X}{1 + \alpha_1 I} - mY
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

dengan

- $K$  = Total jumlah populasi tanaman
- $N$  = Total jumlah populasi serangga
- $\beta$  = Laju infeksi tanaman akibat serangga
- $\beta_1$  = Laju infeksi serangga akibat tanaman
- $\alpha$  = Konstanta saturasi tanaman akibat serangga
- $\alpha_1$  = Konstanta saturasi serangga akibat tanaman
- $\mu$  = Laju kematian alami tanaman

- $m$  = Laju kematian alami serangga  
 $\gamma$  = Laju penyembuhan tanaman  
 $\Lambda$  = Laju rekrutmen serangga (kelahiran dan atau imigrasi)  
 $p$  = Laju tanaman terinfeksi sembuh (tidak ada imunitas)  
 $\mu K$  = Laju kelahiran populasi tanaman.



### BAB III PEMBAHASAN

#### 3.1 Titik Kesetimbangan dan Angka Reproduksi Dasar

Pada bab ini, dibahas analisis dinamik model penyebaran virus pada tanaman tanpa waktu tunda yang ditunjukkan oleh sistem (2.23). Oleh karena pada  $\frac{dS}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt}$  dan  $\frac{dY}{dt}$  tidak memuat variabel  $R$  dan nilai  $\frac{dR}{dt}$ ,  $\frac{dX}{dt}$  dapat diketahui apabila nilai subpopulasi  $I$  diketahui, nilai  $\frac{dR}{dt}$ ,  $\frac{dX}{dt}$  dapat diabaikan. Diketahui bahwa  $N = X + Y$ , apabila dijumlahkan nilai  $\frac{dX}{dt}$  dan  $\frac{dY}{dt}$  diperoleh  $\frac{dN}{dt} = \Lambda - mN$ . Jika nilai  $t$  menuju tak hingga, maka  $N$  mendekati  $\frac{\Lambda}{m}$ , sehingga  $N$  dapat diganti  $\frac{\Lambda}{m}$ . Adapun sistem (2.23) dengan mempertimbangkan adanya waktu tunda dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu(K - S) - \frac{\beta Y(t - \tau)S(t - \tau)}{1 + \alpha Y(t - \tau)} + pI, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta Y(t - \tau)S(t - \tau)}{1 + \alpha Y(t - \tau)} - (p + \mu + \gamma)I, \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Y \right) - mY, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan  $q = p + \mu + \gamma$ .

Berdasarkan definisi, untuk nilai  $\tau = 0$  titik kesetimbangan sistem persamaan (3.1) diperoleh apabila memenuhi  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dY}{dt} = 0$ , yaitu

$$\mu(K - S) - \frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} + pI = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} - qI = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Y \right) - mY = 0, \tag{3.4}$$

Untuk  $I = 0$  pada persamaan (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} - qI &= 0, \\ \frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} &= qI, \\ \frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} &= 0.\end{aligned}$$

Oleh karena  $I^* = 0$  maka diperoleh  $Y^* = 0$ . Dengan mensubstitusi nilai  $I^* = Y^* = 0$  pada persamaan (3.2) diperoleh

$$\begin{aligned}\mu(K - S) - \frac{\beta Y S}{1 + \alpha Y} + pI &= 0, \\ \mu K + pI - S \left( \mu + \frac{\beta Y}{1 + \alpha Y} \right) &= 0, \\ \frac{\mu K + pI}{\mu + \frac{\beta Y}{1 + \alpha Y}} &= S, \\ \frac{\mu K}{\mu} &= S,\end{aligned}$$

dan diperoleh nilai  $S^* = K$ . Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0(S, I, Y) = E_0(K, 0, 0)$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0(K, 0, 0)$  menyatakan bahwa dalam keadaan ini jumlah populasi tanaman terinfeksi dan serangga terinfeksi bernilai nol. Hal ini menunjukkan keadaan tidak adanya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Titik kesetimbangan ini selalu eksis karena nilai dari masing-masing elemennya bernilai positif. Apabila nilai  $I \neq 0$ , diperoleh titik kesetimbangan endemi  $E^* = (S^*, I^*, Y^*)$  dimana

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{q(\alpha\beta_1 K \Lambda \mu + m(mq + K\mu(\beta_1 + \alpha_1 m) - pm))}{\beta\beta_1 \Lambda (\mu + \gamma) + \alpha\beta_1 \Lambda \mu q + \beta_1 m \mu q + \alpha_1 m^2 \mu q}, \\ I^* &= \frac{\beta\beta_1 \Lambda \mu K - q\mu m^2}{\beta\beta_1 \Lambda \mu + \beta\beta_1 \Lambda \gamma + q\mu m^2 \alpha_1 + q\mu \alpha \beta_1 \Lambda + q\mu m \beta_1}, \\ Y^* &= \frac{\mu(\beta\beta_1 K \Lambda - qm^2)}{m(\alpha m \mu q + \beta(mq + K\mu(\beta_1 + \alpha_1 m) - pm))},\end{aligned}$$

perhitungan selengkapnya diberikan pada Lampiran 1.

Angka reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai  $K = FV^{-1}$ . Langkah awal untuk memperoleh nilai pendekatan angka reproduksi dasar  $R_0$  yaitu dengan membentuk matriks Jacobi dari  $F$  dan  $V$ . Komponen pembentuk matriks  $F$  dan  $V$  terdiri dari subpopulasi individu yang terinfeksi, yaitu subpopulasi individu terpapar dan subpopulasi individu terinfeksi.

Berdasarkan komponen matriks  $F$  dan  $V$  dapat dibentuk matriks Jacobi  $F$  dan  $V$  dari titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (K, 0, 0)$ . Matriks Jacobi dapat diperoleh  $F$  dan  $V$  dapat diperoleh dengan penurunan terhadap masing masing subpopulasi sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dI} & \frac{df_1}{dY} \\ \frac{df_2}{dI} & \frac{df_2}{dY} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta Y S}{1+\alpha Y} \\ \frac{\beta_1 I \Lambda}{m(1+\alpha_1 I)} - \frac{\beta_1 I Y}{1+\alpha_1 I} \end{bmatrix},$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dI} & \frac{dv_1}{dY} \\ \frac{dv_2}{dI} & \frac{dv_2}{dY} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qI \\ mY \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh matriks  $F$  dan  $V$  sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta S(1+\alpha Y) - \alpha \beta Y S}{(1+\alpha Y)^2} \\ \frac{\beta_1 \Lambda(m+m\alpha_1 I) - m\alpha_1 \beta_1 I \Lambda}{(m+m\alpha_1 I)^2} - \frac{\beta_1 Y(1+\alpha_1 I) - \alpha_1 \beta_1 I Y}{(1+\alpha_1 I)^2} & \frac{-\beta_1 I}{1+\alpha_1 I} \end{bmatrix},$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (K, 0, 0)$  diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta K \\ \frac{\beta_1 \Lambda}{m} & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

Sebelum menentukan matriks generasi selanjutnya, terlebih dahulu ditentukan invers dari matriks  $V$  sebagai berikut

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks  $F$  dan  $V^{-1}$ , dapat dibentuk matriks generasi selanjutnya ( $K = FV^{-1}$ ), yaitu

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta K}{m} \\ \frac{\beta_1 \Lambda}{mq} & 0 \end{bmatrix},$$

kemudian ditentukan nilai eigen matriks  $K$ , sebagai berikut

$$\begin{aligned} |K - \lambda I| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta K}{m} \\ \frac{\beta_1 \Lambda}{mq} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0, \\ \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\beta K}{m} \\ \frac{\beta_1 \Lambda}{mq} & -\lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{\beta \beta_1 \Lambda K}{m^2 q}}. \end{aligned}$$

Angka reproduksi dasar  $R_0$  adalah maksimum modulus nilai eigen dari matriks generasi selanjutnya, yaitu

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho(K), \\ &= \max(\lambda_1, \lambda_2), \\ &= \max\left(-\sqrt{\frac{\beta \beta_1 \Lambda K}{m^2 q}}, \sqrt{\frac{\beta \beta_1 \Lambda K}{m^2 q}}\right), \\ R_0 &= \sqrt{\frac{\beta \beta_1 \Lambda K}{m^2 q}}. \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan  $E^*$  disebut titik kesetimbangan endemi karena pada titik tersebut menunjukkan bahwa populasi tanaman rentan, tanaman terinfeksi dan serangga terinfeksi akan selalu ada pada kondisi setimbang.

Titik kesetimbangan  $E^*$  akan dipenuhi jika masing-masing nilai elemennya bernilai positif. Titik kesetimbangan endemi akan eksis jika memenuhi

$$\begin{aligned}
 I^* &= \frac{\beta\beta_1\Lambda\mu K - q\mu m^2}{z_1} \\
 &= \frac{q\mu m^2}{z_1} \left[ \frac{\beta\beta_1\Lambda\mu K}{m^2\mu q} - 1 \right] > 0 \\
 &= \frac{q\mu m^2}{z_1} (R_0^2 - 1) > 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sedangkan untuk titik kesetimbangan  $Y^*$  eksis apabila

$$\begin{aligned}
 Y^* &= \frac{\mu(\beta\beta_1 K \Lambda - qm^2)}{z_2} \\
 &= \frac{\mu q m^2}{z_2} \left[ \frac{\mu\beta\beta_1 K \Lambda}{\mu q m^2} - 1 \right] > 0 \\
 &= \frac{\mu q m^2}{z_2} (R_0^2 - 1) > 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

dimana

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \beta\beta_1\Lambda(\mu + \gamma) + \alpha\beta_1\Lambda\mu q + \beta_1 m \mu q + \alpha_1 m^2 \mu q \\
 z_2 &= m(\alpha m \mu q + \beta(mq + K\mu(\beta_1 + \alpha_1 m) - pm))
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan mengenai angka reproduksi dasar  $R_0$ , titik kesetimbangan endemi akan eksis jika dan hanya jika memenuhi

1.  $mq + K\mu(\beta_1 + \alpha_1 m) > pm$
2.  $R_0 > 1$

### 3.2 Analisis Kestabilan Lokal tanpa Waktu Tunda

Pada bagian ini, dibahas analisis kestabilan titik kesetimbangan tanpa waktu tunda yaitu ketika  $\tau = 0$ . Model (3.1) merupakan sistem dinamik *autonomous* nonlinear, sehingga untuk mengetahui sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model, dilakukan proses linearisasi di sekitar titik kesetimbangan  $(S^*, I^*, Y^*)$  sehingga

diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta Y^*}{1+\alpha Y^*} & p & \frac{-\beta S^*}{(1+\alpha Y^*)^2} \\ \frac{\beta Y^*}{1+\alpha Y^*} & -q & \frac{\beta S^*}{(1+\alpha Y^*)^2} \\ 0 & \frac{\beta_1}{(1+\alpha I^*)^2} \left( \frac{\Lambda}{m} - Y^* \right) & \frac{-\beta_1 I^*}{1+\alpha I^*} - m \end{bmatrix}$$

### 3.2.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_0 = (K, 0, 0)$

Matriks Jacobi di titik  $E_0(S, I, Y) = (K, 0, 0)$  adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & p & -\beta K \\ 0 & -q - \lambda & \beta K \\ 0 & \frac{\beta_1 \Lambda}{m} & -m - \lambda \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi  $J(E_0)$  adalah

$$(-\mu - \lambda)(qm + q\lambda + \lambda m + \lambda^2 - \beta K \beta_1 \frac{\Lambda}{m}) = 0$$

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \frac{-m^2 - mq + \sqrt{4m\beta_1\beta K\Lambda + m^4 - 2m^3q + m^2q^2}}{2m},$$

$$\lambda_3 = \frac{-m^2 - mq - \sqrt{4m\beta_1\beta K\Lambda + m^4 - 2m^3q + m^2q^2}}{2m}$$

Titik kesetimbangan  $E_0$  dikatakan stabil apabila  $\lambda_i < 0$  untuk  $i = 1, 2, 3$ . Nilai eigen  $\lambda_1 = -\mu < 0$  dan  $\lambda_3$  bernilai negatif untuk setiap parameter yang positif, sementara nilai pada  $\lambda_2$  dapat bernilai negatif, positif atau nol. Oleh karena itu nilai  $\lambda_2$  akan bernilai negatif ketika

$$\sqrt{4m\beta_1\beta K\Lambda + m^4 - 2m^3q + m^2q^2} < m^2 + mq,$$

yaitu apabila

$$\sqrt{4m\beta_1\beta K\Lambda + m^4 - 2m^3q + m^2q^2} < m^2 + mq,$$

$$4m\beta_1\beta K\Lambda + m^4 - 2m^3q + m^2q^2 < (m^2 + mq)^2,$$

$$4m\beta\beta_1 K\Lambda < 4m^3q,$$

$$\frac{\beta\beta_1 K\Lambda}{m^2q} < 1.$$

Dengan demikian  $\lambda_2$  dapat bernilai negatif jika memenuhi  $R_0 < 1$ . Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ .

### 3.2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E^* = (S^*, I^*, Y^*)$

Matriks Jacobi di titik  $E^*(S, I, Y) = (S^*, I^*, Y^*)$  adalah

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta Y^*}{1+\alpha Y^*} & p & \frac{-\beta S^*}{(1+\alpha Y^*)^2} \\ \frac{\beta Y^*}{1+\alpha Y^*} & -q & \frac{\beta S^*}{(1+\alpha Y^*)^2} \\ 0 & \frac{\beta_1}{(1+\alpha_1 I^*)^2} \left( \frac{\Lambda}{m} - Y^* \right) & \frac{-\beta_1 I^*}{1+\alpha_1 I^*} - m \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2, persamaan karakteristik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$|J(E^*) - \lambda I| = 0$$

sehingga dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (3.7)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_1 &= \mu + \frac{\beta Y^*}{1+\alpha Y^*} + q + \frac{\beta_1 I^*}{1+\alpha_1 I^*} + m \\ A_2 &= \mu q + \mu m + \frac{\mu \beta_1 I^*}{1+\alpha_1 I^*} + \frac{\beta Y^* q}{1+\alpha Y^*} + \frac{\beta \beta_1 Y^* I^*}{(1+\alpha Y^*)(1+\alpha_1 I^*)} \\ &\quad + \frac{\beta Y^* m}{1+\alpha Y^*} + \frac{q \beta_1 I^*}{1+\alpha_1 I^*} + m q - \frac{p \beta Y^*}{1+\alpha Y^*} - \frac{\beta \beta_1 S^* \Lambda}{(1+\alpha Y^*)^2 (1+\alpha_1 I^*)^2 m} \\ &\quad + \frac{\beta \beta_1 S^* Y^*}{(1+\alpha Y^*)^2 (1+\alpha_1 I^*)^2} \\ A_3 &= \frac{\mu q \beta_1 I^*}{1+\alpha_1 I^*} + \mu q m + \frac{\beta \beta_1 Y^* q I^*}{(1+\alpha Y^*)(1+\alpha_1 I^*)} + \frac{\beta Y q m}{1+\alpha Y^*} \\ &\quad + \frac{p \beta \beta_1 Y^* I^*}{(1+\alpha Y^*)(1+\alpha_1 I^*)} + \frac{p \beta Y^* m}{1+\alpha Y^*} - \frac{\beta \beta_1 S^* \mu \Lambda}{(1+\alpha Y^*)^2 (1+\alpha_1 I^*)^2 m} \\ &\quad - \frac{\beta \beta_1 \mu S^* Y^*}{(1+\alpha Y^*)^2 (1+\alpha_1 I^*)^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, titik kesetimbangan sistem stabil jika dan hanya jika

1.  $A_1 > 0$ ,
2.  $A_3 > 0$ ,
3.  $\Delta = A_1 A_2 - A_3 > 0$ .

1.  $A_1 = \mu + a_2 + q + a_1 + m > 0$
2.  $A_3 = qm + a_3q + a_2qm + a_3p + pma_2 - a_4\mu - a_5\mu > 0$   
 $A_3 > 0$  jika  $qm + a_3q + a_2qm + a_3p + pma_2 > a_4\mu + a_5\mu$
3.  $\Delta = A_1A_2 - A_3 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5$   
 $\Delta > 0$  jika  $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 > \Delta_5$

dengan

$$\Delta_1 = a_1(a_4\mu + a_5 + \mu^2 + q^2\mu + \mu a_1 + a_3 + q\mu^2 a_1 + 2\mu m + 2\mu q + a_2q + 2qm + 2a_2q + a_2qm)$$

$$\Delta_2 = \mu m^2 + qm^2 + 2\mu^2 q + \mu^2 m + q^2 + q^2 m + 2\mu qm$$

$$\Delta_3 = a_3(m + \mu + a_2q + p) + a_4\mu m + a_5 + a_5q$$

$$\Delta_4 = a_2(m^2 + qa_2 + 2q + 2\mu m + 2qm + 2\mu q + 2mp)$$

$$\Delta_5 = -a_1 a_2 q p - a_2 \mu p - a_2 q p - a_4 q$$

$$a_1 = \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I}, \quad a_2 = \frac{\beta Y}{1 + \alpha Y}, \quad a_3 = \frac{\beta \beta_1 Y I}{(1 + \alpha Y)(1 + \alpha_1 I)}$$

$$a_4 = \frac{\beta \beta_1 S \Lambda}{m(1 + \alpha Y)^2(1 + \alpha_1 I)^2}, \quad a_5 = \frac{\beta \beta_1 S Y}{(1 + \alpha Y)^2(1 + \alpha_1 I)^2}$$

Nilai  $A_1 > 0$  dikarenakan semua nilai parameternya positif, sedangkan untuk nilai  $A_3 > 0$  dan  $A_1A_2 - A_3 > 0$  dengan syarat tertentu. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (3.7) mempunyai nilai eigen negatif  $r_1, r_2, r_3 < 0$  jika dan hanya jika  $A_1 > 0, A_3 > 0$  dan  $A_1A_2 - A_3 > 0$ .

### 3.3 Analisis Kestabilan Lokal dengan Waktu Tunda

Pada bagian ini akan dibahas analisis kestabilan dengan waktu tunda dari sistem (3.1) yaitu ketika  $\tau > 0$ . Dalam kajian biologi, waktu tunda merupakan salah satu faktor penting dalam analisis model. Virus membutuhkan beberapa waktu untuk masuk dan menyebar dalam sel tanaman, waktu tersebut yang dinamakan waktu tunda.

Sistem (3.1) juga mempunyai titik kesetimbangan yang sama pada sistem tanpa waktu tunda yaitu  $E_0 = (K, 0, 0)$  dan  $E^*(S^*, I^*, Y^*)$ . Tujuan utama pembahasan model dengan waktu tunda ini adalah untuk mempelajari perilaku kestabilan  $E^*(S^*, I^*, Y^*)$  dengan memperhitungkan adanya waktu tunda ( $\tau > 0$ ).

Sistem (3.1) dilinearisasi dengan memisalkan

$$S(t) = S^* + \varepsilon \bar{S}$$

$$I(t) = I^* + \varepsilon \bar{I}$$

$$Y(t) = Y^* + \varepsilon \bar{Y}$$

dengan  $\varepsilon \ll 0$ . Setelah dilakukan linearisasi pada Lampiran 3, diperoleh hasil linearisasi

$$U'(t) = AU(t) + BU(t - \tau), \tag{3.8}$$

dimana

$$\begin{bmatrix} S' \\ I' \\ Y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} S \\ I \\ Y \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} S_\tau \\ I_\tau \\ Y_\tau \end{bmatrix},$$

dengan

$$U = \begin{bmatrix} S \\ I \\ Y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\mu & p & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{(1+\alpha_1 I)^2} \left( \frac{\Lambda}{m} - Y \right) & \frac{-\beta_1 I}{1+\alpha_1 I} - m \end{bmatrix},$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-\beta Y}{1+\alpha Y} & 0 & \frac{-\beta S}{(1+\alpha Y)^2} \\ \frac{\beta Y}{1+\alpha Y} & 0 & \frac{\beta S}{(1+\alpha Y)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

dengan memisalkan  $U(t) = Ce^{\lambda t}$ , persamaan (3.8) dapat ditulis sebagai:

$$\lambda Ce^{\lambda t} = ACe^{\lambda t} + BCe^{\lambda(t-\tau)},$$

$$\lambda Ce^{\lambda t} = ACe^{\lambda t} + BCe^{\lambda t} e^{-\lambda \tau},$$

$$\lambda Ce^{\lambda t} = e^{\lambda t} (AC + BCe^{-\lambda \tau}),$$

$$\lambda C = (AC + BCe^{-\lambda \tau}),$$

$$0 = (A + Be^{-\lambda \tau} - \lambda I)C.$$

Oleh karena nilai  $C \neq 0$  maka diperoleh

$$A + Be^{-\lambda \tau} - \lambda I = 0.$$

Kemudian seperti diuraikan pada Lampiran 4, diperoleh persamaan karakteristik sistem (3.1) sebagai berikut

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.9)$$

dimana

$$P_1(\lambda, \tau) = \lambda^3 + \lambda^2 D_1 + \lambda D_2 + D_3,$$

$$P_2(\lambda, \tau) = \lambda^2 D_4 + \lambda D_5 + D_6,$$

dan

$$D_1 = \left[ \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m + \mu + q \right],$$

$$D_2 = \left[ \frac{\mu \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \frac{q \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \mu m + qm + \mu q \right],$$

$$D_3 = \frac{\mu q \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \mu qm,$$

$$D_4 = \left( -\frac{\beta Y^*}{1 + \alpha Y^*} \right),$$

$$D_5 = \left[ \frac{\beta Y^* \beta_1 I^*}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} + \frac{\beta Y^* m}{1 + \alpha Y^*} + \frac{\beta Y^* q}{1 + \alpha Y^*} - \frac{p \beta Y^*}{1 + \alpha Y^*} \right. \\ \left. - \frac{\beta \beta_1 S^* \Lambda}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2 m} + \frac{\beta \beta_1 S^* Y^*}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2} \right],$$

$$D_6 = \frac{\beta Y^* q \beta_1 I^*}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} + \frac{\beta Y^* qm}{1 + \alpha Y^*} - \frac{p \beta Y^* m}{1 + \alpha Y^*} - \frac{p \beta \beta_1 Y^* I^*}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} \\ - \frac{\mu \beta \beta_1 S^* I^* \Lambda}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2 m} + \frac{\mu \beta \beta_1 S^* Y^* I^*}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2}.$$

### 3.3.1 Kestabilan Titik Keseimbangan $E_0 = (K, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan  $E_0 = (K, 0, 0)$  ke dalam persamaan (3.9) diperoleh persamaan karakteristik berikut:

$$(-\mu - \lambda)(-q - \lambda)(-m - \lambda) = 0.$$

Dapat dilihat bahwa akar karakteristik pada titik kesetimbangan  $E_0 = (K, 0, 0)$  adalah  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_2 = -q$  sedangkan  $\lambda_3 = -m$ . Dengan demikian semua nilai akar karakteristik  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  bernilai negatif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan  $(K, 0, 0)$  bersifat stabil asimtotik.

### 3.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E^* = (S^*, I^*, Y^*)$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan  $E^* = (S^*, I^*, Y^*)$  ke dalam persamaan (3.9) diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) = & \lambda^3 + \lambda^2 \left[ \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m + \mu + \frac{\beta Y^*}{1 + \alpha Y^*} e^{-\lambda\tau} + q \right] \\ & + \lambda \left[ \frac{\mu \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \frac{\beta \beta_1 Y^* I^* e^{-\lambda\tau}}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} + \frac{q \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \mu m \right. \\ & + \frac{\beta Y^* m e^{-\lambda\tau}}{1 + \alpha Y^*} + qm + \mu q + \frac{\beta Y^* q e^{-\lambda\tau}}{1 + \alpha Y^*} - \frac{p \beta Y^* e^{-\lambda\tau}}{1 + \alpha Y^*} \\ & - \frac{\beta \beta_1 S^* \Lambda e^{-\lambda\tau}}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2 m} + \frac{\beta \beta_1 S^* Y^* e^{-\lambda\tau}}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2} \left. \right] \\ & + \frac{\mu q \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \mu qm + \frac{\beta \beta_1 Y^* q I^* e^{-\lambda\tau}}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} \\ & + \frac{\beta Y^* q m e^{-\lambda\tau}}{1 + \alpha Y^*} + \frac{p \beta \beta_1 Y^* I^* e^{-\lambda\tau}}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} + \frac{p \beta Y^* m e^{-\lambda\tau}}{1 + \alpha Y^*} \\ & - \frac{\beta \beta_1 S^* \mu \Lambda e^{-\lambda\tau}}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2 m} + \frac{\beta \beta_1 S^* \mu Y^* e^{-\lambda\tau}}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2}. \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{q(\alpha \beta_1 K \Lambda \mu + m(mq + K\mu(\beta_1 + \alpha_1 m) - pm))}{\beta \beta_1 \Lambda (\mu + \gamma) + \alpha \beta_1 \Lambda \mu q + \beta_1 m \mu q + \alpha_1 m^2 \mu q}, \\ I^* &= \frac{\beta \beta_1 \Lambda \mu K - q \mu m^2}{\beta \beta_1 \Lambda \mu + \beta \beta_1 \Lambda \gamma + q \mu m^2 \alpha_1 + q \mu \alpha \beta_1 \Lambda + q \mu m \beta_1}, \\ Y^* &= \frac{\mu(\beta \beta_1 K \Lambda - qm^2)}{m(\alpha m \mu q + \beta(mq + K\mu(\beta_1 + \alpha_1 m) - pm))}, \\ a_1 &= \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I}, a_2 = \frac{\beta Y}{1 + \alpha Y}, a_3 = \frac{\beta \beta_1 Y I}{(1 + \alpha Y)(1 + \alpha_1 I)} \\ a_4 &= \frac{\beta \beta_1 S \Lambda}{m(1 + \alpha Y)^2 (1 + \alpha_1 I)^2}, a_5 = \frac{\beta \beta_1 S Y}{(1 + \alpha Y)^2 (1 + \alpha_1 I)^2} \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dalam polinomial  $\lambda$  dan  $\tau$  adalah

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.10)$$

dimana

$$\begin{aligned}
 P(\lambda, \tau) &= \lambda^3 + \lambda^2 \left[ \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m + \mu + q \right] - \lambda \left[ \frac{\mu \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \frac{q \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} \right. \\
 &\quad \left. + \mu m + qm + \mu q \right] + \frac{\mu q \beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + \mu qm, \\
 Q(\lambda, \tau) &= \lambda^2 \left( \frac{\beta Y^*}{1 + \alpha Y^*} \right) + \lambda \left[ \frac{\beta Y^* \beta_1 I^*}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} + \frac{\beta Y^* m}{1 + \alpha Y^*} \right. \\
 &\quad + \frac{\beta Y^* q}{1 + \alpha Y^*} - \frac{p \beta Y^*}{1 + \alpha Y^*} - \frac{\beta \beta_1 S^* \Lambda}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2 m} \\
 &\quad \left. + \frac{\beta \beta_1 S^* Y^*}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] + \frac{\beta Y^* q \beta_1 I^*}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} + \frac{\beta Y^* qm}{1 + \alpha Y^*} \\
 &\quad + \frac{p \beta Y^* m}{1 + \alpha Y^*} + \frac{p \beta \beta_1 Y^* I^*}{(1 + \alpha Y^*)(1 + \alpha_1 I^*)} - \frac{\mu \beta \beta_1 S^* I^* \Lambda}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2 m} \\
 &\quad + \frac{\mu \beta \beta_1 S^* Y^* I^*}{(1 + \alpha Y^*)^2 (1 + \alpha_1 I^*)^2},
 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \Delta(\lambda, \tau) &= -\lambda^3 - \lambda^2 \left[ a_1 + m + \mu + a_2 e^{-\lambda \tau} + q \right] - \lambda \left[ \mu a_1 + a_3 e^{-\lambda \tau} \right. \\
 &\quad + q a_1 + \mu m + a_2 m e^{-\lambda \tau} + qm + \mu q + a_2 q e^{-\lambda \tau} - a_2 p e^{-\lambda \tau} \\
 &\quad \left. - a_4 e^{-\lambda \tau} + a_5 e^{-\lambda \tau} \right] - q \mu a_1 - \mu qm - a_3 q e^{-\lambda \tau} - a_2 q m e^{-\lambda \tau} \\
 &\quad + a_3 p e^{-\lambda \tau} + p m a_2 e^{-\lambda \tau} + a_4 \mu e^{-\lambda \tau} - a_5 \mu e^{-\lambda \tau}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Persamaan karakteristik untuk titik  $(S^*, I^*, Y^*)$  memuat waktu tunda, sehingga adanya waktu tunda memungkinkan terjadinya perubahan kestabilan. Dengan demikian perlu ditunjukkan adanya titik kritis tundaan.

### 3.3.3 Penentuan Waktu Tunda Kritis

Misal  $\lambda = i\omega$  dengan  $\omega > 0$  dan  $\lambda$  memenuhi persamaan (3.10), dan nilai  $\lambda$  disubstitusikan ke persamaan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) = & i\omega^3 + \omega^2 \left[ a_1 + m + \mu + a_2(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) + q \right] \\ & - i\omega \left[ \mu a_1 + a_3(\cos(\omega\tau) - i (\sin(\omega\tau))) + qa_1 + \mu m \right. \\ & + a_2 m(\cos(\omega\tau) - i (\sin(\omega\tau))) + qm + \mu q + a_2 q(\cos(\omega\tau) \\ & - i (\sin(\omega\tau))) - pa_2(\cos(\omega\tau) - i(\sin(\omega\tau))) - a_4(\cos(\omega\tau) \\ & \left. - i (\sin(\omega\tau))) + a_5(\cos(\omega\tau) - i (\sin(\omega\tau))) \right] \\ & - a_1\mu q - \mu qm - a_3q(\cos(\omega\tau) - i (\sin(\omega\tau))) - a_2qm(\cos(\omega\tau) \\ & - i (\sin(\omega\tau))) + pa_3(\cos(\omega\tau) - i (\sin(\omega\tau))) + pma_2(\cos(\omega\tau) \\ & - i (\sin(\omega\tau))) + a_4\mu(\cos(\omega\tau) - i (\sin(\omega\tau))) - a_5\mu(\cos(\omega\tau) \\ & - i (\sin(\omega\tau))). \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, dapat diperoleh bagian riil dan imajinerinya sebagai berikut

$$\begin{aligned} R(\omega) = & \omega^2(a_1 + m + \mu + q) - q\mu a_1 - \mu qm - \cos(\omega\tau)(-a_3q + a_2qm \\ & - a_3p - a_2pm - \omega^2 a_2 - a_4\mu + a_5\mu) - \sin(\omega\tau)(\omega a_3 + \omega a_2m \\ & + \omega a_2q - \omega a_2p - \omega a_4 + \omega a_5), \\ Q(\omega) = & \omega^3 - \omega\mu a_1 - \omega q a_1 - \omega\mu m - \omega qm - \omega\mu q - \cos(\omega\tau)(\omega a_3 \\ & + \omega a_2m + \omega a_2q - \omega a_2p - \omega a_4 + \omega a_5) - \sin(\omega\tau)(\omega^2 a_2 + a_3p \\ & + a_2pm + a_4\mu - a_5\mu - a_3q - a_2qm). \end{aligned}$$

Agar persamaan (3.10) terpenuhi, maka bagian riil dan imajinerinya harus sama dengan nol

$$\begin{aligned} \omega^2(a_1 + m + \mu + q) - q\mu a_1 - \mu qm = & \cos(\omega\tau)(-a_3q + a_2qm - a_3p - a_2pm \\ & - \omega^2 a_2 - a_4\mu + a_5\mu) + \sin(\omega\tau)(\omega a_3 + \omega a_2m + \omega a_2q - \omega a_2p \\ & - \omega a_4 + \omega a_5), \\ \omega^3 - \omega\mu a_1 - \omega q a_1 - \omega\mu m - \omega qm - \omega\mu q = & \cos(\omega\tau)(\omega a_3 \\ & + \omega a_2m + \omega a_2q - \omega a_2p - \omega a_4 + \omega a_5) + \sin(\omega\tau)(\omega^2 a_2 + a_3p \\ & + a_2pm + a_4\mu - a_5\mu - a_3q - a_2qm) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Selanjutnya seperti pada Lampiran 5, untuk mengeliminasi  $\tau$ , persamaan (3.12) dikuadratkan, kemudian hasilnya dijumlahkan sehingga diperoleh

$$\omega^6 + \omega^4 B_1 + \omega^2 B_2 + B_3 = 0, \quad (3.13)$$

dengan nilai  $B_1, B_2, B_3$  terlampir pada Lampiran 4. Misalkan  $z = \omega^2$ , persamaan (3.13) menjadi

$$z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 = 0, \quad (3.14)$$

Oleh karena semua nilai  $B_1, B_2, B_3$  bernilai positif untuk semua nilai parameter yang positif, maka titik kesetimbangan dari model tundaan (3.14) adalah stabil asimtotik untuk semua nilai tundaan dan tidak bergantung pada nilai tundaan.

Dengan memisalkan

$$\begin{aligned} R_1(\omega) &= \omega^2(a_1 + m + \mu + q) - q\mu a_1 - \mu q m \\ Q_1(\omega) &= \omega^3 - \omega\mu a_1 - \omega q a_1 - \omega\mu m - \omega q m - \omega\mu q \\ R_2(\omega) &= -a_3 q - a_2 q m + \omega^2 a_2 + a_4 \mu - a_5 \mu + a_3 q + a_2 q m s \\ &\quad + a_3 p + p m a_2 \\ Q_2(\omega) &= \omega a_3 + \omega a_2 m + \omega a_2 q - \omega a_2 p - \omega a_4 + \omega a_5 \end{aligned}$$

pada persamaan (3.12), maka kedua persamaan tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned} -R_1(\omega) &= R_2(\omega)\cos\omega\tau + Q_2(\omega)\sin\omega\tau. \\ Q_1(\omega) &= R_2(\omega)\sin\omega\tau - Q_2(\omega)\cos\omega\tau. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Misal  $\omega_0$  memenuhi persamaan (3.12) dengan memisalkan  $\xi = \sqrt{(R_2(\omega))^2 + (Q_2(\omega))^2}$  maka persamaan (3.15) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned} -R_1(\omega_0) &= \xi \left( \frac{R_2(\omega_0)}{\xi} \cos\omega_0\tau + \frac{Q_2(\omega_0)}{\xi} \sin\omega_0\tau \right), \\ Q_1(\omega_0) &= \xi \left( \frac{R_2(\omega_0)}{\xi} \sin\omega_0\tau - \frac{Q_2(\omega_0)}{\xi} \cos\omega_0\tau \right). \end{aligned}$$

Misalkan  $\frac{R_2(\omega_0)}{\xi} = \cos\beta$  dan  $\frac{Q_2(\omega_0)}{\xi} = \sin\beta$ , diperoleh

$$-R_1(\omega_0) = \xi(\cos\beta\cos\omega_0\tau + \sin\beta\sin\omega_0\tau), \quad (3.16)$$

$$Q_1(\omega_0) = \xi(\cos\beta\sin\omega_0\tau - \sin\beta\cos\omega_0\tau). \quad (3.17)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (3.16) dengan  $\cos\beta$  dan persamaan (3.17) dengan  $\sin\beta$  serta mengurangkan persamaan (3.16) dengan persamaan (3.17) diperoleh

$$-R_1(\omega_0)\cos\beta - Q_1(\omega_0)\sin\beta = \xi\cos\omega_0\tau.$$

dan nilai kritis tundaan yaitu,

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{-R_1(\omega_0)\cos\beta - Q_1(\omega_0)\sin\beta}{\xi}\right) \\ &+ \frac{2n\pi}{\omega_0}, n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

dengan  $n = 0, 1, 2, \dots$

Persamaan (3.18) menunjukkan terdapat tak berhingga nilai kritis tundaan yang diperoleh, sehingga dipilih nilai kritis tundaan yang paling minimum.

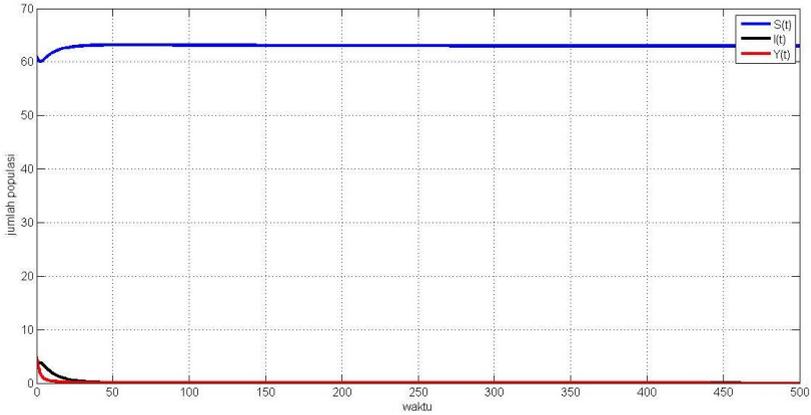
### 3.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini dibahas simulasi numerik untuk analisis sistem dinamik pada persamaan (3.1) tanpa dan dengan adanya waktu tunda. Untuk mensimulasikan hasil analisis model tanpa waktu tunda secara numerik digunakan metode Runge Kutta orde 4 pada *software* MATLAB R2010a. Sedangkan untuk model dengan adanya waktu tunda digunakan *package dde* pada *software* MATLAB R2010a

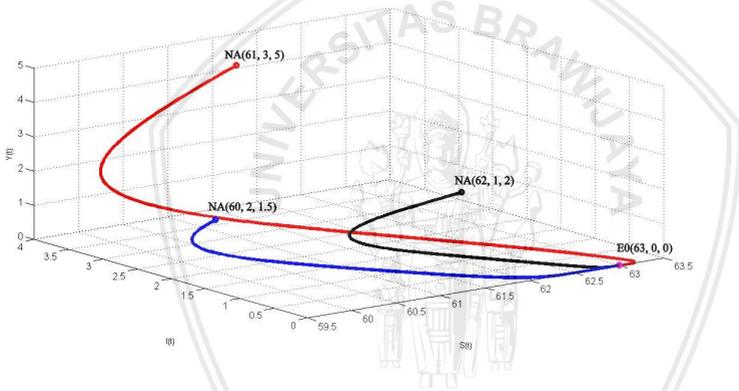
#### 3.4.1 Simulasi untuk $R_0 < 1$ model dengan $\tau = 0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter  $K = 63, \alpha = 0.2, \alpha_1 = 0.1, \beta = 0.01, \beta_1 = 0.01, \mu = 0.01, \Lambda = 5, p = 0.2, \gamma = 0.01, q = 0.22, m = 0.5$ . Dengan menggunakan parameter tersebut diperoleh  $R_0 = 0.7567 < 1$  sehingga berdasarkan syarat eksistensi hanya ada satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (K, 0, 0)$ .  $E_0$  akan bersifat stabil asimtotik untuk nilai parameter yang telah diberikan seperti ditunjukkan pada Gambar 3.1, solusi sistem menuju titik kesetimbangan  $E_0 = (63, 0, 0)$ . Oleh karena  $R_0 < 1$  dimana tidak ada penyebaran penyakit yang terjadi sehingga jumlah populasi tanaman terinfeksi dan serangga terinfeksi akan mengalami penurunan hingga menuju nol.

Pada Gambar 3.2 terlihat bahwa dengan menggunakan tiga nilai awal yaitu  $(61, 3, 5), (60, 2, 1.5)$  dan  $(62, 1, 2)$ , ketiga nilai menuju titik kesetimbangan yang sama yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $E_0 = (K, 0, 0)$ .



Gambar 3.1: Grafik solusi sistem  $R_0 < 1$  untuk  $\tau = 0$



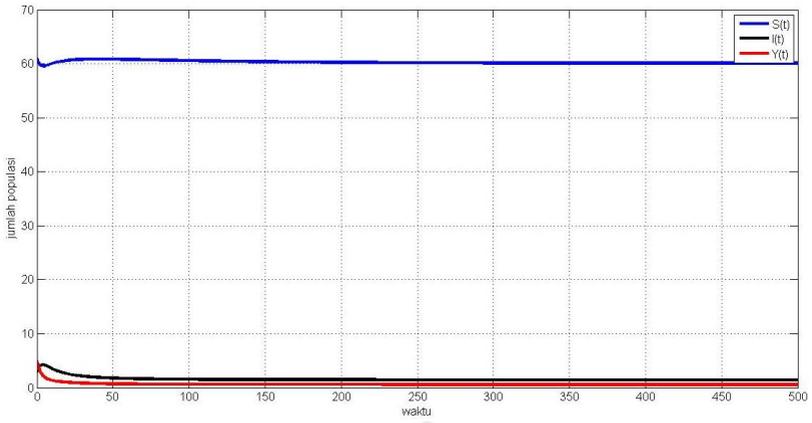
Gambar 3.2: Potret fase sistem  $R_0 < 1$  untuk  $\tau = 0$

### 3.4.2 Simulasi untuk $R_0 > 1$ model dengan $\tau = 0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter  $K = 63, \alpha = 0.2, \alpha_1 = 0.1, \beta = 0.01, \beta_1 = 0.01, \mu = 0.01, \Lambda = 5, p = 0.2, \gamma = 0.01, q = 0.22, m = 0.32$ . Dengan menggunakan nilai parameter tersebut diperoleh  $R_0 = 1.183 > 1$ . Berdasarkan subbab 3.3.2 diperoleh

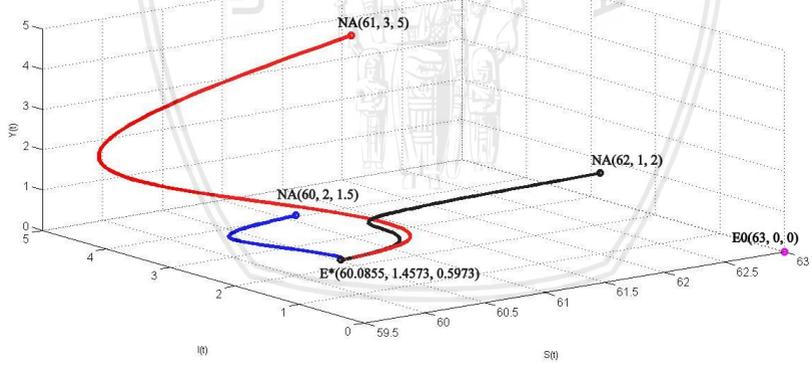
$$A_1 = 0.5680546734, A_3 = 0.1591734802, \\ A_1 A_2 - A_3 = 0.01370801860$$

Pada Gambar 3.3 dapat terlihat bahwa dengan menggunakan nilai awal  $(61,3,5)$  jumlah populasi tanaman rentan dan terinfeksi akan stabil di titik



Gambar 3.3: Grafik solusi sistem  $R_0 > 1$  untuk  $\tau = 0$

60.0855 dan 1.4573, sedangkan jumlah populasi serangga terinfeksi stabil di titik 0.5973 dalam waktu yang berhingga.

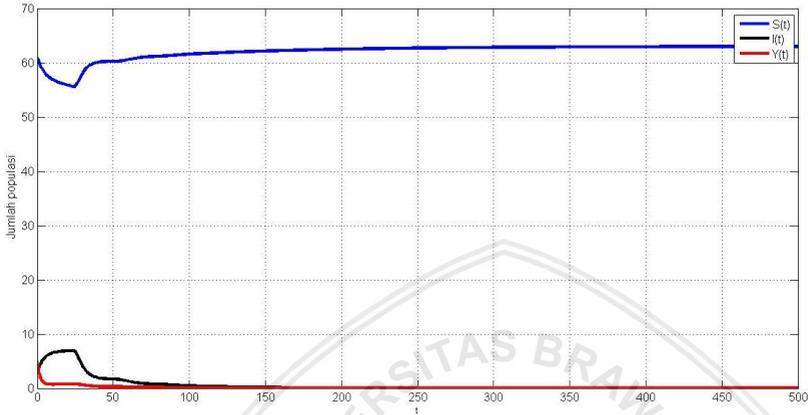


Gambar 3.4: Potret fase sistem  $R_0 > 1$  untuk  $\tau = 0$

Berdasarkan syarat eksistensi diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemi, dengan menggunakan tiga nilai awal yang sama, ketiga nilai menuju titik kesetimbangan endemi  $E^* = (60.0855, 1.4573, 0.5973)$ . Hal ini sesuai dengan hasil secara analitik bahwa ketika  $A_1, A_2, A_3 > 0$  titik kesetimbangan  $E^*$  bersifat stabil asimtotik lokal.

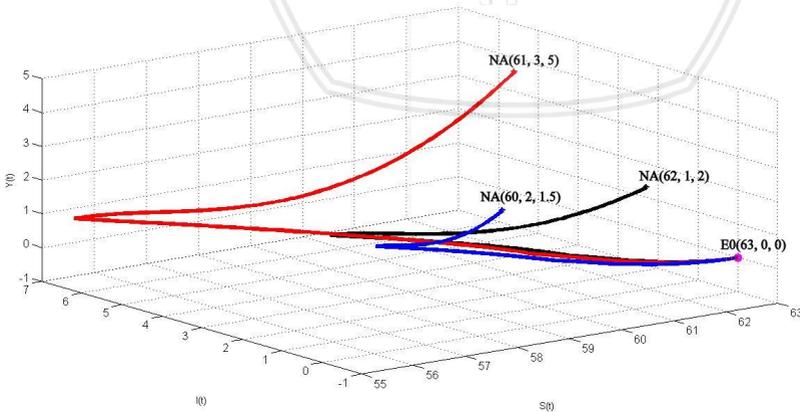
### 3.4.3 Simulasi untuk $R_0 < 1$ model dengan $\tau = 24$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter  $K = 63, \alpha = 0.2, \alpha_1 = 0.1, \beta = 0.01, \beta_1 = 0.01, \mu = 0.01, \Lambda = 5, p = 0.2, \gamma = 0.01, q = 0.22, m = 0.5, \tau = 24$ . dan diperoleh  $R_0 = 0.7567 < 1$



Gambar 3.5: Grafik solusi  $S(t), I(t), Y(t)$   $R_0 < 1$  untuk  $\tau = 24$

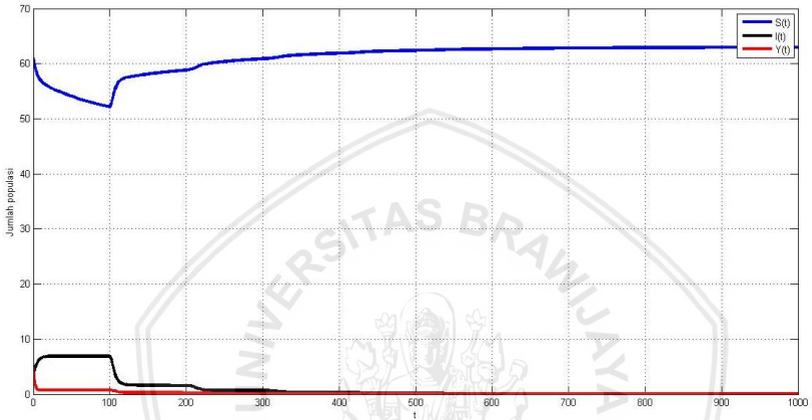
Dapat dilihat pada Gambar 3.5 bahwa dengan menggunakan nilai awal  $(61, 3, 5)$  jumlah populasi tanaman rentan akan konvergen ke nilai kesetimbangannya yakni 63, sedangkan untuk jumlah populasi tanaman terinfeksi akan stabil di titik nol. Untuk jumlah populasi serangga terinfeksi akan mengalami penurunan dan stabil di titik nol.



Gambar 3.6: Potret fase sistem untuk  $\tau = 24$

Pada Gambar 3.6 dapat ditunjukkan bahwa dengan menggunakan tiga titik awal yaitu  $(61,3,5)$ ,  $(60,2,1.5)$  dan  $(62,1,2)$ , hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan ketiga titik menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (K, 0, 0)$ .

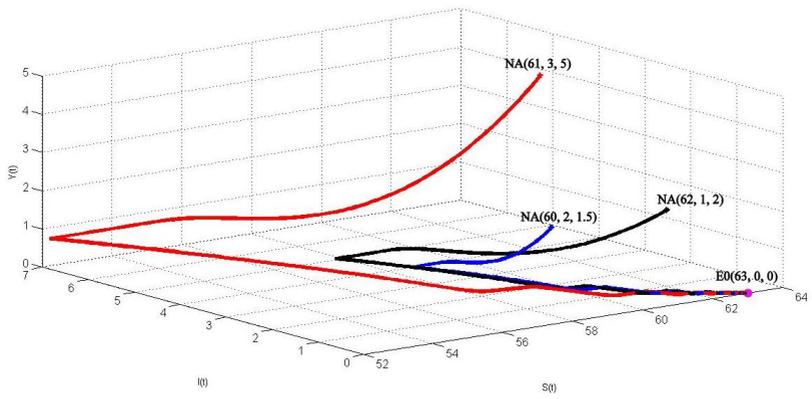
### 3.4.4 Simulasi untuk $R_0 < 1$ model dengan $\tau = 100$



Gambar 3.7: Grafik solusi  $S(t), I(t), Y(t)$   $R_0 < 1$  untuk  $\tau = 100$

Dapat dilihat pada Gambar 3.7 bahwa dengan menggunakan nilai awal  $(61, 3, 5)$  jumlah populasi tanaman rentan akan mengalami penurunan di awal lalu konvergen pada satu titik kesetimbangannya yakni  $S^* = 63$ , sedangkan untuk jumlah populasi tanaman terinfeksi dan serangga terinfeksi bernilai nol. Hal ini berarti jika parameter pada simulasi ini terjadi di alam, jumlah populasi tanaman terinfeksi dan serangga terinfeksi akan punah dalam jangka waktu yang panjang.

Pada Gambar 3.8 dapat ditunjukkan bahwa dengan menggunakan tiga titik awal yaitu  $(61,3,5)$ ,  $(60,2,1.5)$  dan  $(62,1,2)$ , hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan ketiga nilai awal menuju titik kesetimbangan yang sama yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = (K, 0, 0)$ . Dari hasil simulasi numerik pada subbab 3.4.3 dan 3.4.4, dapat disimpulkan bahwa penambahan waktu tunda pada sistem tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan, berlaku juga untuk pengurangan waktu tunda.



Gambar 3.8: Potret fase sistem untuk  $\tau = 100$

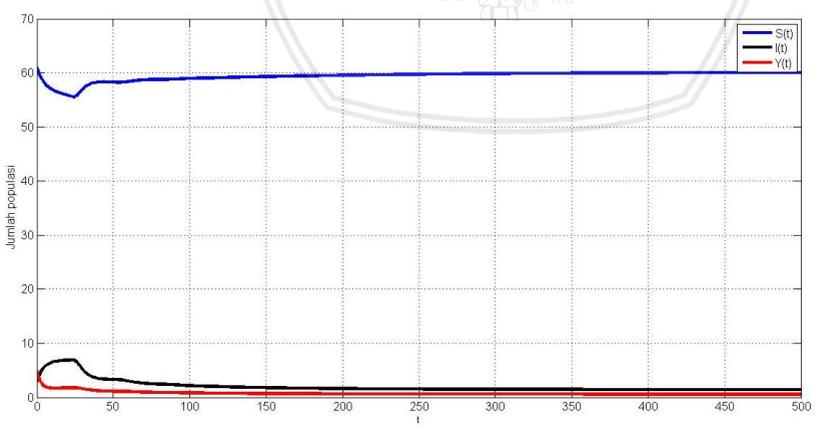
### 3.4.5 Simulasi untuk $R_0 > 1$ model dengan $\tau = 24$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter  $K = 63, \alpha = 0.2, \alpha_1 = 0.1, \beta = 0.01, \beta_1 = 0.01, \mu = 0.01, \Lambda = 5, p = 0.2, \gamma = 0.01, q = 0.22, m = 0.32$ , dan diperoleh  $R_0 = 1.183 > 1$

$$A_1 = 0.5680546734,$$

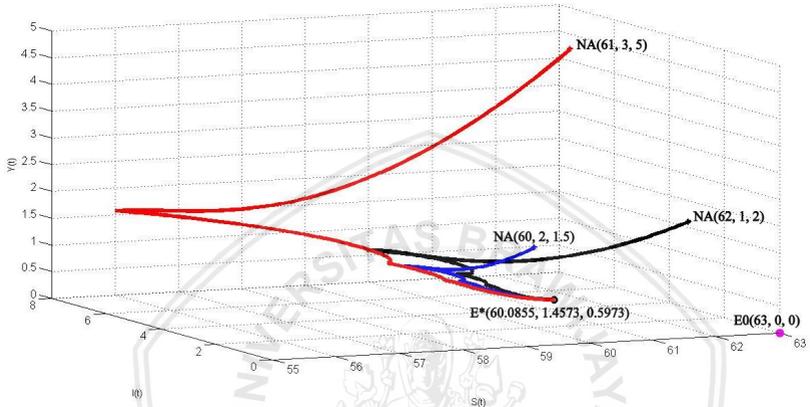
$$A_3 = 0.1591734802,$$

$$A_1 A_2 - A_3 = 0.01370801860$$



Gambar 3.9: Grafik solusi  $S(t), I(t), Y(t)$   $R_0 > 1$  untuk  $\tau = 24$

Dapat dilihat pada Gambar 3.9 bahwa dengan menggunakan nilai awal  $(61,3,5)$  jumlah populasi tanaman rentan akan mengalami penurunan lalu mengalami kenaikan hingga stabil pada titik  $60.0855$ , sedangkan jumlah populasi tanaman terinfeksi akan mengalami kenaikan dan akan menurun hingga stabil pada titik  $1.4573$ , dan untuk jumlah populasi serangga terinfeksi akan mengalami penurunan dan stabil pada titik  $0.5973$ .

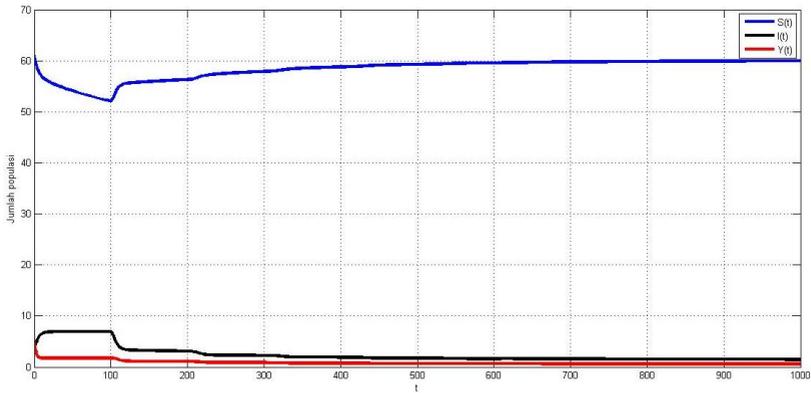


Gambar 3.10: Potret fase sistem untuk  $\tau = 24$

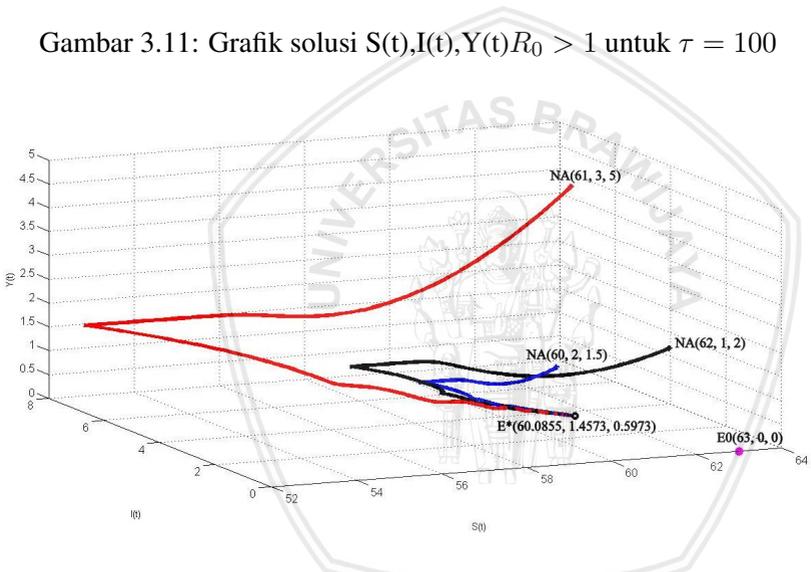
Dapat dilihat pada Gambar 3.10 menunjukkan bahwa dengan menggunakan tiga nilai awal yaitu  $(61,3,5)$ ,  $(60,2,1.5)$  dan  $(62,1,2)$  dan ketika  $R_0 > 1$  terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Dari ketiga nilai awal tersebut menuju titik kesetimbangan yang sama yaitu titik kesetimbangan endemi  $E^* = (60.0855, 1.4573, 0.5973)$

### 3.4.6 Simulasi untuk $R_0 > 1$ model dengan $\tau = 100$

Dapat dilihat pada Gambar 3.11 bahwa dengan menggunakan nilai awal  $(61,3,5)$  jumlah populasi tanaman rentan akan mengalami penurunan lalu mengalami kenaikan hingga stabil pada titik  $60.0855$ , sedangkan jumlah populasi tanaman terinfeksi akan mengalami kenaikan dan akan menurun hingga stabil pada titik  $1.4573$ , dan untuk jumlah populasi serangga terinfeksi akan mengalami penurunan dan stabil pada titik  $0.5973$ .



Gambar 3.11: Grafik solusi  $S(t), I(t), Y(t) R_0 > 1$  untuk  $\tau = 100$



Gambar 3.12: Potret fase sistem  $\tau = 100$

Gambar 3.12 menunjukkan bahwa dengan menggunakan tiga nilai awal yaitu  $(61,3,5), (60,2,1.5)$  dan  $(62,1,2)$  dan ketika  $R_0 > 1$  terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Dari ketiga nilai awal tersebut menuju titik kesetimbangan yang sama yaitu titik kesetimbangan endemi  $E^* = (60.0855, 1.4573, 0.5973)$ . Dari hasil simulasi numerik pada subbab 3.4.5 dan 3.4.6, dapat disimpulkan bahwa ketika  $R_0 > 1$  terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi, dimana titik kesetimbangan endemi bersifat stabil asimtotik. Dari hasil perhitungan, tidak diperoleh nilai  $\omega_0$  dan  $\tau_0$  yang

sesuai, sehingga titik kesetimbangan akan stabil asimtotik tanpa bergantung pada nilai tundaan  $\tau$ .

Bila disimulasikan untuk  $\tau = 24$ , diperoleh potret fase sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.6 dan Gambar 3.10. Dari Gambar 3.5 ditunjukkan dengan jelas bahwa solusi  $S(t), I(t)$  dan  $Y(t)$  mencapai titik kesetimbangan  $E_0 = (63, 0, 0)$  dalam waktu berhingga untuk  $\tau = 24$ , sedangkan untuk Gambar 3.9 solusi  $S(t), I(t)$  dan  $Y(t)$  mencapai titik  $E^* = (60.0855, 1.4573, 0.5973)$  dalam waktu berhingga.

Bila waktu tunda dinaikkan secara signifikan menjadi  $\tau = 100$ , titik kesetimbangan  $E_0$  dan  $E^*$  tetap bersifat stabil asimtotik. Penambahan waktu tunda pada sistem tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan. Jika nilai  $\tau$  semakin besar (waktu tundanya semakin lama) dengan nilai awal yang sama, maka waktu yang dibutuhkan untuk mencapai titik kesetimbangan semakin lama.





## BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan skripsi ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Model penyebaran virus pada tanaman memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  dan titik kesetimbangan endemi  $E^*$ . Kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut bergantung pada nilai  $R_0$ . Jika  $R_0 < 1$  maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$ , sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi.
2. Pada model tanpa waktu tunda analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik ketika  $R_0 < 1$ , sedangkan titik kesetimbangan endemi  $E^*$  bersifat stabil asimtotik dengan syarat tertentu.
3. Simulasi numerik yang dilakukan baik untuk model dengan waktu tunda atau tanpa waktu tunda menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Penambahan waktu tunda pada simulasi yang dilakukan dalam skripsi ini tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan.

### 4.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas tentang penggunaan waktu tunda, pengaruh waktu tunda hanya terjadi pada subpopulasi tanaman rentan dan tanaman terinfeksi. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya penggunaan waktu tunda diterapkan juga pada subpopulasi serangga terinfeksi.



## DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K.T., T.D. Sauer, dan J.A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Bairagi, N., R.R. Sarkar, J. Chattopadhyay. 2008. Impacts of Incubation Delay on the Dynamics of an Eco-Epidemiological System-A Theoretical Study. *Bull. Math. Biol.* vol. 70. hal. 23.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Tenth Edition*. John Willey & Sons, Inc. New York.
- Brauer, F. dan C. C. Charlos. 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer-Verlag. New York.
- Culshaw, R.V dan S. Ruan. 2000. A delay differential equation model of HIV infection of  $CD4^+$  T-cells. *Math Biosci.* vol. 165. hal. 27-39.
- Edwards, C.H dan D.E. Penney. 2001. *Differential Equation and Linear Algebra*. New Jersey:Prentice Hall, Inc.
- Ellur, R.K., A. Khanna, A. Yadav, S. Pathania, H. Rajashekara, V.K. Singh, S. Gopalakrishnan, P.K. Bhowmick, M. Nagarajan, K.K. Vinod, G. Prakash, K.K. Mondal, N.K. Singh, A.K. Singh. 2015. Improvement of Basmati rice varieties for resistance to blast and bacterial blight disease using marker assisted backcross breeding. *Plant Sci.* vol. 242.hal. 330-341.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmont, California.
- Fereres, A. 2015. Insect vector as drivers of plant virus emergence. *Current Opinion in Virology.* vol. 10. hal. 42-46.
- Forde, J. E. 2005. *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*. Disertasi. Michigan: University of Michigan.
- Heffernan, J.M, R.J. Smith, dan L.M. Wahl. 2005. Perspective on the Basic Reproduction Ratio. *The Royal Society Interface.* vol. 2. hal.

281-293.

Jackson, M. dan B. M. Chen-Charpentier. 2017. Modeling plant virus propagation with delays. *Computational and Applied Mathematics*. vol. 309. hal. 611-621.

Kuang, Y. 1993. *Delays Differential Equations with Application in Population Dynamics*. San Diego: Academic Press, Inc.

Leontopoulou, S.V.,I. Giavasis, K. Petrotos,M. Kokkora dan Ch. Makridis. 2015. Effect of different formulations of polyphenolic compounds obtained from OMWW on the growth of several fungal plant and food borne pathogens. Studies in vitro and in vivo. *Agriculture and Agricultural Science Procedia* 4. vol. 4. hal. 327-337.

MacDonald, N. 1989. *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*. New York:Cambridge University Press.

Murray. J. D. 2002. *Mathematical Biology: An Introduction, Third Edition*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Shi, R, H. Zhao dan S. Tang. 2014. Global dynamic analysis of vector-borne plant disease model. *Advance in Difference Equations*. vol. 59. 16 page

Wodarz, D. 2007. *Killer Cell Dynamics: Mathematical and Computational Approach to Immunology*. New York: Springer.

Xiao, Y.N, L.S. Chen. 2001. Analysis of a three species eco-epidemiological model. *J.Math.Anal.Appl*. vol. 258(2). hal. 733-754.