ELEMEN NIL DAN RING KUADRAT GENAP BERHINGGA

SKRIPSI

oleh:

YOLA FATINAYA

145090401111041

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2018

ELEMEN NIL DAN RING KUADRAT GENAP BERHINGGA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:

YOLA FATINAYA
145090401111041

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ELEMEN NIL DAN RING KUADRAT GENAP BERHINGGA

oleh:
YOLA FATINAYA
145090401111041

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 1 Maret 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

<u>Drs. Bambang Sugandi, M.Si.</u>
NIP. 195905151992031002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

<u>Ratno Bagus Edy Wibowo, S. Si., M. Si., Ph. D.</u>
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Yola Fatinaya**
NIM	:	**145090401111041**
Jurusan	:	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	:	**Elemen Nil dan Ring Kuadrat Genap Berhingga**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.**
2. **Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, Maret 2018
yang menyatakan,

(YOLA FATINAYA)

NIM. 145090401111041

ELEMEN NIL DAN RING KUADRAT GENAP BERHINGGA

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas tentang gagasan elemen nil dan ring kuadrat genap. Ring kuadrat genap yang dinotasikan dengan R adalah perkembangan dari konsep ring dimana suatu ring dikatakan ring kuadrat genap jika elemennya adalah elemen kuadrat genap. Sedangkan elemen nil adalah tipe khusus dari elemen nilpoten dimana penjumlahan dan pergandaan dari elemennya adalah nol. Jika order dan karakteristik dari R dengan order genap adalah sama, maka R memuat elemen nil tak nol tunggal. Jika a adalah elemen nil tak nol tunggal dari ring kuadrat genap komutatif berhingga, maka a annihilat R. Selain itu, jika a adalah elemen nil dari ring kuadrat genap komutatif berhingga R dimana setiap elemen di R adalah elemen genap, maka a annihilat R.

Kata Kunci: ring, ring berhingga, elemen nilpoten, elemen nil, elemen kuadrat genap, ring kuadrat genap.

NIL ELEMENTS AND FINITE EVEN SQUARE RING

ABSTRACT

This minor thesis discussed about nil elements and even square ring. Even square ring, denoted by R, is the development of the ring concept which a ring said to be an even square ring if the element of R is an even square element. While nil elements is a special type of nilpotent element which addition and multiplication of its element equal to zero. If the order and the characteristics of R with even order are equal, then R contains a unique non-zero nil element. If a is a nil element of a finite commutative even square ring which contained a unique non-zero nil element, then a annihilate R. Moreover, if a is a nil element of a finite commutative even square ring R which the elements of R is an even element, then a annihilate R.

Keyword : ring, finite ring, nilpotent element, nil element, even square element, even square ring.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul *Elemen Nil dan Ring Kuadrat Genap Berhingga* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Drs. Bambang Sugandi, M.Si. selaku dosen pembimbing Skripsi atas segala bimbingan, motivasi, nasihat, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan Skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Dr. Noor Hidayat, M.Si. dan Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penguji Skripsi atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini.
3. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penasehat akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan sripsi ini tepat waktu.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis serta segenap staff dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Ayah (Fathur Rohman), Mama (Nurul Likhyatin), adik (Ainida Nurahma dan Triananda Alya Rahman) dan seluruh

keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan Skripsi ini.

7. Nashrul Anas yang tanpa henti selalu memberi dukungan, motivasi, dan semangat kepada penulis menjalani proses penyelesaian Skripsi ini.
8. Teman-teman CCLUB dan Keluarga Besar Matematika 2014 atas segala dukungan serta kebersamaan dalam menjalani proses perkuliahan.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk perbaikan penulisan selanjutnya dan dapat disampaikan melalui email penulis yolafatinaya@yahoo.com. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, Maret 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$\cdot$	Operasi pergandaan biasa
$\in$	Elemen atau anggota
$\subseteq$	Subset atau himpunan bagian
$O(G)$	Order grup
$O(a)$	Order elemen grup
$O(R)$	Order ring
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
$N(R)$	Himpunan elemen nilpoten dari ring R
$\mathcal{N}(R)$	Himpunan elemen nil dari ring R
$char(R)$	Karaktetistik dari ring R

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar adalah salah satu bidang ilmu matematika yang berkembang pesat. Dalam aljabar terdapat beberapa cabang ilmu salah satunya adalah aljabar abstrak. Ilmu yang dipelajari dalam aljabar abstrak, yaitu struktur aljabar.

Struktur aljabar adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Ada beberapa macam struktur aljabar, yaitu grup, ring, *field*, modul, dan lain-lain. Dalam skripsi ini dibahas struktur aljabar yang berkaitan dengan ring.

Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi aksioma grup komutatif pada operasi penjumlahan, semigrup pada operasi pergandaan dan berlaku hukum distributif. Suatu ring dikatakan komutatif apabila ring tersebut memiliki sifat komutatif pada operasi pergandaan.

Dalam ring terdapat beberapa elemen khusus, salah satunya adalah elemen nilpoten. Elemen a dalam ring R dikatakan nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$.

Konsep ring ini telah mengalami banyak perkembangan, salah satunya adalah ring kuadrat genap. Suatu ring R dikatakan ring kuadrat genap jika setiap elemen di R adalah elemen kuadrat genap.

Pandey (2017) membahas tentang ring kuadrat genap dalam artikel yang berjudul *Nil Elements and Even Square Ring*. Dalam artikel tersebut, Pandey memperkenalkan gagasan tentang elemen nil, yaitu elemen nilpoten dengan syarat $a + a = 0$ dan $a \cdot a = 0$. Dalam skripsi ini akan diulas kembali mengenai ring kuadrat genap, elemen nil dalam ring kuadrat genap serta hubungan antara elemen nil dan ring kuadrat genap yang merujuk pada artikel tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, berikut rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini adalah

1. bagaimana sifat-sifat ring kuadrat genap,
2. bagaimana sifat-sifat elemen nil dari suatu ring kuadrat genap, dan
3. bagaimana hubungan antara elemen nil dan ring kuadrat genap.

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dijelaskan sebelumnya, tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. membahas sifat-sifat ring kuadrat genap,
2. membahas sifat-sifat elemen nil dari suatu ring kuadrat genap, dan
3. membahas hubungan antara elemen nil dan ring kuadrat genap.

BAB II

DASAR TEORI

Pada bab II ini diberikan definisi-definisi beserta contoh yang digunakan sebagai dasar teori untuk menyelesaikan permasalahan pada bab III.

2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Hasil kali kartesius, relasi, pemetaan dan operasi biner merupakan hal dasar untuk mempelajari struktur aljabar. Berikut diberikan definisi-definisi yang dikutip dari Bhattacharya, dkk (1995).

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesius)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. Hasil kali kartesius antara himpunan A dan B adalah himpunan pasangan terurut (a, b) yang dituliskan

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Contoh 2.1.2
Diberikan himpunan $A = \mathbb{Z}_2$ dan $B = \mathbb{Z}_3$. Maka hasil kali kartesius $A \times B = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})\}$.

Definisi 2.1.3 (Relasi)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. R disebut relasi dari A ke B jika R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(x, y) \in R$, maka dikatakan x berelasi R dengan y, ditulis xRy.

Contoh 2.1.4
Diberikan $A = \{1,3,6\}$ dan $B = \{4,5\}$. Didefinisikan $(x, y) \in R$ yaitu $x < y$. Maka

$$A \times B = \{(1,4), (1,5), (3,4), (3,5), (6,4), (6,5)\}$$
$$R = \{(1,4), (1,5), (3,4), (3,5)\} \subseteq A \times B.$$

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. Relasi f dari A ke B disebut pemetaan dari A ke B jika untuk setiap

elemen x di A terdapat tepat satu elemen y di B sedemikian sehingga $(x, y) \in f$ atau $f(x) = y$.
Pemetaan f dari A ke B dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto f(x) = y. \end{aligned}$$

Contoh 2.1.6
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan relasi f dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^3$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa f adalah suatu pemetaan.
Bukti.
Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $x_1 = x_2$ maka $x_1^3 = x_2^3$ sehingga $f(x_1) = f(x_2)$. Jelas bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ terdapat tepat satu $f(x) \in \mathbb{Z}$. Jadi terbukti bahwa f adalah suatu pemetaan.

Definisi 2.1.7 (Operasi Biner)
Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Suatu operasi biner $*$ yang didefinisikan pada S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke himpunan S. Jika ditulis dalam notasi, maka

$$\begin{aligned} *: S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto *(a, b) = a * b. \end{aligned}$$

Contoh 2.1.8
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa operasi penjumlahan $(+)$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$.
Bukti.
Operasi penjumlahan (+) adalah suatu operasi biner pada $\mathbb{Z}$ yang dinotasikan dengan

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto +(a, b) = a + b. \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$ sehingga operasi penjumlahan $(+)$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.1.9 (Subset)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan. Jika setiap elemen pada A adalah elemen B, maka A disebut subset B, dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

Contoh 2.1.10
Diberikan $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ dan $B = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Jadi, $A \subseteq B$ karena setiap elemen pada himpunan A juga merupakan elemen pada himpunan B.

2.2 Grup

Grup merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan grup dikutip dari Andari (2015).

Definisi 2.2.1 (Semigrup)
Misalkan P adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi satu operasi biner $*$. $(P,*)$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma.

i. Tertutup,
untuk setiap $a, b \in P$, sedemikian sehingga berlaku $a * b = P$.
ii. Asosiatif,
untuk setiap $a, b, c \in P$, sedemikian sehingga berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Contoh 2.2.2
Diberikan $M_2(\mathbb{N}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}\right\}$. Akan dibuktikan $(M_2(\mathbb{N}), +)$ adalah semigrup.
Bukti.
Ambil $A, B, C \in M_2(\mathbb{N})$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ dimana $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{N}$.

i. Tertutup.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{N}$ sehingga $a + e$, $b + f$, $c + g$, $d + h \in \mathbb{N}$. Jadi, untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{N})$ berlaku $A + B \in M_2(\mathbb{N})$.

ii. Asosiatif.

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{N}$ dimana operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$ berlaku hukum asosiatif, maka

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left[\begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right] \\
&= A+(B+C).
\end{aligned}
$$

Aksioma i dan ii terpenuhi sehingga menurut Definisi 2.2.1 terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{N}), +)$ adalah semigrup.

Definisi 2.2.3 (Grup)

Misalkan G adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner $*$. $(G, *)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut.

i. Tertutup,
   untuk setiap $a, b \in G$, sedemikian sehingga berlaku $a * b \in G$.
ii. Asosiatif,
   untuk setiap $a, b, c \in G$, sedemikian sehingga berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
iii. Mempunyai elemen identitas,
   terdapat $e \in G$, untuk setiap $a \in G$, sedemikian sehingga berlaku $e * a = a * e = a$.
iv. Setiap elemen mempunyai invers,
   untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in$ G, sedemikian sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Contoh 2.2.4

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 5, $\mathbb{Z}_5$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup.

Bukti.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ dengan $\bar{a} = a + 5k_1,\ \bar{b} = b + 5k_2$, $\bar{c} = c + 5k_3$ dimana $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

i. Tertutup.

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (a + 5k_1) + (b + 5k_2)\\ &= (a + b) + 5(k_1 + k_2).\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$.

ii. Asosiatif,

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= [(a + 5k_1) + (b + 5k_2)] + (c + 5k_3)\\ &= [(a + b) + 5k_1 + 5k_2] + (c + 5k_3)\\ &= [((a + b) + c) + 5k_1 + 5k_2 + 5k_3]\end{aligned}$$

Karena $a, b \in \mathbb{Z}$ dimana operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ berlaku hukum asosiatif, maka

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= [(a + (b + c)) + 5k_1 + 5k_2 + 5k_3]\\ &= (a + 5k_1) + [(b + c) + 5k_2 + 5k_3]\\ &= (a + 5k_1) + [(b + 5k_2) + (c + 5k_3)]\\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

iii. Mempunyai elemen identitas,

elemen identitas pada $\mathbb{Z}_5$ adalah $\bar{0}$ karena untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.

Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.
Invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$, karena $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$.
Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$, karena $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$.

Invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$, karena $\bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$.
Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$, karena $\bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$.

Aksioma i, ii, iii dan iv terpenuhi sehingga menurut Definisi 2.2.3 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup.

Definisi 2.2.5 (Grup Komutatif)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup. G dikatakan grup komutatif (grup Abelian) jika berlaku hukum komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

Contoh 2.2.6
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 5, $\mathbb{Z}_5$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup komutatif.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.2.4 $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup.

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (a + 5k_1) + (b + 5k_2)\\ &= (a + b) + (5k_1 + 5k_2)\\ &= (a + b) + 5(k_1 + k_2)\end{aligned}$$

Karena $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b = b + a$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}&= (b + a) + 5(k_2 + k_1)\\ &= (b + a) + (5k_2 + 5k_1\\ &= (b + 5k_2) + (a + 5k_1)\\ &= \bar{b} + \bar{a}.\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ pada operasi penjumlahan berlaku hukum komutatif, yaitu $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ sehingga menurut Definisi 2.2.5 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup komutatif.

Definisi 2.2.7 (Order Grup)
Misalkan G adalah grup. Order dari G yang dinotasikan dengan $O(G)$ adalah banyaknya elemen dalam grup G.

Contoh 2.2.8
Berdasarkan Contoh 2.2.4, $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi penjumlahan adalah grup. Banyaknya elemen dalam grup $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah 5 yang dinotasikan $O(\mathbb{Z}_5) = 5$.

Definisi 2.2.9 (Order Elemen Grup)
Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. Order a atau $O(a)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga berlaku
1. $a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a = a^n = e$ untuk operasi pergandaan, atau
2. $a + a + \cdots + a = na = e$ untuk operasi penjumlahan.

Jika tidak terdapat n, maka dapat dikatakan bahwa a mempunyai order tak hingga.

Contoh 2.2.10
Diberikan $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup dengan elemen identitasnya adalah $\bar{0}$. Tentukan order dari masing-masing elemen.
Bukti.
Misalkan $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup dan $a \in \mathbb{Z}_5$, maka $O(a)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga berlaku $na = \bar{0}$.
$O\ (\bar{0}) = 1$ karena $1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$.
$O\ (\bar{1}) = 5$ karena $5 \cdot \bar{1} = \bar{0}$.
$O\ (\bar{2}) = 5$ karena $5 \cdot \bar{2} = \bar{0}$.
$O\ (\bar{3}) = 5$ karena $5 \cdot \bar{3} = \bar{0}$.
$O\ (\bar{4}) = 5$ karena $5 \cdot \bar{4} = \bar{0}$.

Definisi 2.2.11 (Grup Siklik)
Misalkan A himpunan bagian dari G, G adalah grup, $a \in G$.
Jika $G = \langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ maka a disebut pembangun dari G, dan grup G disebut grup siklik. Jadi grup siklik adalah grup yang dibangun oleh satu elemen.
Ada 2 kemungkinan, yaitu:
1. jika operasinya pergandaan, maka $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$,
2. jika operasinya penjumlahan, maka $G = \{na | n \in \mathbb{Z}\}$.

Contoh 2.2.12
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 5, $\mathbb{Z}_5$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_5$ adalah grup siklik terhadap operasi penjumlahan .
Bukti.
Ambil $a \in \mathbb{Z}_5$, akan dibuktikan a adalah pembangun dari $\mathbb{Z}_5$ dan $\mathbb{Z}_5 = \langle a \rangle = \{na | n \in \mathbb{Z}\}$ grup siklik.

Tabel 2.2 Hasil dari na

a	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
na	$\bar{0}\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$\bar{0}\cdot\bar{1}=\bar{0}$	$\bar{0}\cdot\bar{2}=\bar{0}$	$\bar{0}\cdot\bar{3}=\bar{0}$	$\bar{0}\cdot\bar{4}=\bar{0}$
	$\bar{1}\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$\bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}$	$\bar{1}\cdot\bar{2}=\bar{2}$	$\bar{1}\cdot\bar{3}=\bar{3}$	$\bar{1}\cdot\bar{4}=\bar{4}$
	$\bar{2}\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$\bar{2}\cdot\bar{1}=\bar{2}$	$\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{4}$	$\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{1}$	$\bar{2}\cdot\bar{4}=\bar{3}$
	$\bar{3}\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$\bar{3}\cdot\bar{1}=\bar{3}$	$\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{1}$	$\bar{3}\cdot\bar{3}=\bar{4}$	$\bar{3}\cdot\bar{4}=\bar{2}$
	$\bar{4}\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$\bar{4}\cdot\bar{1}=\bar{4}$	$\bar{4}\cdot\bar{2}=\bar{3}$	$\bar{4}\cdot\bar{3}=\bar{2}$	$\bar{4}\cdot\bar{4}=\bar{1}$
	dan seterusnya berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$				

Dari Tabel 2.2 diperoleh $\mathbb{Z}_5 = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{3}\rangle = \langle\bar{4}\rangle$.

2.3 Ring

Ring merupakan suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$ dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan contoh yang berkaitan dengan ring, berdasarkan Andari (2014), Bhattacharya (1995) dan (Pandey, 2017).

Definisi 2.3.1 (Ring)
Misalkan R adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$, ditulis $(R,+,\cdot)$. $(R,+,\cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

i. $(R,+)$ merupakan grup komutatif.
ii. $(R,\cdot)$ merupakan semigrup.
iii. Berlaku hukum distributif.
Untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku
    a. distributif kanan $(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$,
    b. distributif kiri $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$.

Contoh 2.3.2
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 5, $\mathbb{Z}_5$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ adalah ring.

Bukti :

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ dengan $\bar{a} = a + 5k_1$, $\bar{b} = b + 5k_2$, $\bar{c} = c + 5k_3$ dimana $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

i. $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.
   Berdasarkan Contoh 2.2.6 $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.

ii. $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ merupakan semigrup.

Tabel 2.3 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

a. Tertutup,

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (a + 5k_1) \cdot (b + 5k_2) \\ &= ab + 5ak_2 + 5bk_1 + 25k_1k_2 \\ &= ab + 5(ak_2 + bk_1 + 5k_1k_2). \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga berlaku $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$.

b. Asosiatif,

$$\begin{aligned} (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} &= [(a + 5k_1) \cdot (b + 5k_2)] \cdot (c + 5k_3) \\ &= [ab + 5ak_2 + 5bk_1 + 25k_1k_2] \cdot (c + 5k_3) \\ &= [abc + 5abk_3 + 5ack_2 + 25ak_2k_3 + \\ &\quad 5bck_1 + 25bk_1k_3 + 25ck_1k_2 + 125k_1k_2k_3] \\ &= [(a + 5k_1) \cdot (bc + 5bk_3 + 5ck_2 + 25k_2k_3)] \\ &= (a + 5k_1) \cdot [(b + 5k_2) \cdot (c + 5k_3)] \\ &= \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}). \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga berlaku $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c})$.

Aksioma a dan b terpenuhi sehingga menurut Definisi 2.2.1 terbukti bahwa $(Z_5, \cdot)$ merupakan semigrup.

iii. Berlaku hukum distributif.

a. Distributif kanan,

$$\begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} &= [(a + 5k_1) + (b + 5k_2)] \cdot (c + 5k_3) \\ &= [(a + b) + 5(k_1 + k_2)] \cdot (c + 5k_3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(a+b)c + 5(a+b)k_3 + 5c(k_1+k_2) + \\
&\quad 25k_3(k_1+k_2)] \\
&= [ac + bc + 5ak_3 + 5bk_3 + 5ck_1 + \\
&\quad 5ck_2 + 25k_1k_3 + 25k_1k_2] \\
&= [(ac + 5ak_3 + 5ck_1 + 25k_1k_3) + \\
&\quad (bc + 5bk_3 + 5ck_2 + 25k_1k_2)] \\
&= [(a+5k_1)(c+5k_3) + (b+5k_2) \\
&\quad (c+5k_3)] \\
&= (\bar{a}\cdot\bar{c}) + (\bar{b}\cdot\bar{c}).
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = (\bar{a}\cdot\bar{c}) + (\bar{b}\cdot\bar{c})$.

b. Distributif kiri,

$$
\begin{aligned}
\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) &= (a+5k_1)\cdot[(b+5k_2)\cdot(c+5k_3)] \\
&= (a+5k_1)\cdot[(b+c)+5(k_2+k_3)] \\
&= [a(b+c) + 5a(k_2+k_3) + 5(b+c)k_1 + \\
&\quad 25k_1(k_2+k_3)] \\
&= [ab + ac + 5ak_2 + 5ak_3 + 5bk_1 + \\
&\quad 5ck_1 + 25k_1k_2 + 25k_1k_3] \\
&= [(ab + 5ak_2 + 5bk_1 + 25k_1k_2) + \\
&\quad (ac + 5ak_3 + 5ck_1 + 25k_1k_3)] \\
&= [(a+5k_1)(b+5k_2) + (a+5k_1) \\
&\quad (c+5k_3)] \\
&= (\bar{a}\cdot\bar{b}) + (\bar{a}\cdot\bar{c}).
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$.

Aksioma i, ii, dan iii terpenuhi sehingga menurut Definisi 2.3.1 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ adalah ring.

Contoh 2.3.3

Diberikan himpunan $M_2(\mathbb{Z}_4) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_4\right\}$. Akan ditunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{Z}_4)$ adalah ring.

Bukti.

Ambil $A,B,C \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ dimana $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l \in \mathbb{Z}_4$.

i. $(M_2(\mathbb{Z}_4), +)$ merupakan grup komutatif.

a. Tertutup.

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}.$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_4$ sehingga $a + e, b + f$, $c + g, d + h \in \mathbb{Z}_4$. Jadi, untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $A + B \in M_2(\mathbb{Z}_4)$.

b. Asosiatif.

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_4$ dimana operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$ berlaku hukum asosiatif, maka

$$\begin{aligned} &= \left[\begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right] \\ &= A + (B + C).\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $(A + B) + C = A + (B + C)$.

c. Mempunyai elemen identitas,

elemen identitas pada $M_2(\mathbb{Z}_4)$ adalah $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$ karena untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + A = A + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = A$.

d. Setiap elemen mempunyai invers,

invers dari A adalah A^{-1} dimana $A^{-1} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ karena untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ terdapat $A^{-1} \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ sedemikian sehingga berlaku $A^{-1} + A = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$.

e. Berlaku hukum komutatif

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= B + A.
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $A + B = B + A$.

Aksioma-aksioma pada grup komutatif terpenuhi sehingga terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_4), +)$ merupakan grup komutatif.

ii. $(M_2(\mathbb{Z}_4), \cdot)$ merupakan semigrup.

a. Tertutup,

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_4$ sehingga $ae + bg$, $af + bh, ce + dg, cf + dh \in \mathbb{Z}_4$. Jadi, untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $AB \in M_2(\mathbb{Z}_4)$.

b. Asosiatif,

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ae+bg)i + (af+bh)k & (ae+bg)j + (af+bh)l \\ (ce+dg)i + (cf+dh)k & (ce+dg)j + (cf+dh)l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right] \\
&= A(BC).
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $(AB)C = A(BC)$.

iii. Berlaku hukum distributif.

a. Distributif kanan

$$(A+B)\cdot C = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$
$$= (A\cdot C) + (A \cdot B)$$

Jadi, untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $(A+B)\cdot C = (A\cdot C) + (A\cdot B)$.

b. Distributif kiri

$$A\cdot (B+C) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$
$$= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$
$$= (A\cdot B) + (A\cdot C).$$

Jadi, untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ berlaku $A\cdot(B+C) = (A\cdot B) + (A\cdot C)$

Jadi, aksioma i, ii dan iii terpenuhi sehingga terbukti bahwa $M_2(\mathbb{Z}_4)$ adalah ring.

Definisi 2.3.3 (Subring)

Misalkan R adalah ring. R' merupakan himpunan bagian dari R. R' disebut subring dari R jika terhadap operasi yang sama dengan R. R' merupakan ring.

Lemma 2.3.4

R' disebut subring dari R jika memenuhi:

i. untuk setiap $a, b \in R'$ berlaku $a - b \in R'$,

ii. untuk setiap $a, b \in R'$ berlaku $a \cdot b \in R'$.

Bukti.

Diketahui R' adalah subring dari R. Akan dibuktikan R' berlaku i dan ii. Karena R' subring, berarti R' merupakan ring sehingga $(R', +)$ adalah grup komutatif, $(R', \cdot)$ merupakan semigrup, dan berlaku hukum distributif. $(R', +)$ adalah grup komutatif sehingga berlaku sifat tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in R'$ berlaku $a + b \in R'$. Elemen pada R' masing-masing mempunyai invers, yaitu untuk setiap $a \in R'$ terdapat $-a \in R'$ sedemikian sehingga berlaku $a + (-a) = (-a) + a = e$. Maka diperoleh

$$a + b \in R'$$
$$a + (-b) \in R'$$
$$a - b \in R'$$

sehingga aksioma i dipenuhi.
$(R',\cdot)$ merupakan semigrup sehingga berlaku sifat tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in R'$ berlaku $a \cdot b \in R'$ sehingga jelas aksioma ii dipenuhi. Jadi, terbukti bahwa R' disebut subring jika memenuhi aksioma i dan ii.

Contoh 2.3.5

Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}_4)$ dan $K = \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}\right\}$ adalah himpunan bagian dari $M_2(\mathbb{Z}_4)$. Akan dibuktikan bahwa K adalah subring dari $M_2(\mathbb{Z}_4)$.

Bukti.

i. Untuk setiap $A, B \in K$ berlaku $A - B \in K$.

Tabel 2.4 Hasil dari $A - B$

$-$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$

Jelas dilihat dari Tabel 2.4 bahwa untuk setiap $A, B \in K$ berlaku $A - B \in K$.

ii. Untuk setiap $A, B \in K$ berlaku $A \cdot B \in K$.

Tabel 2.5 Hasil dari $A \cdot B$

$\cdot$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$

Jelas dilihat dari Tabel 2.5 bahwa untuk setiap $A, B \in K$ berlaku $A \cdot B \in K$.

Aksioma i dan ii terpenuhi sehingga menurut Lemma 2.3.4 terbukti bahwa K merupakan subring dari $M_2(\mathbb{Z}_4)$ dan menurut Definisi 2.3.3 terbukti bahwa K adalah ring.

Definisi 2.3.6 (Ring Berhingga)

Misalkan R adalah ring. Jika banyaknya elemen dari ring tersebut berhingga maka R disebut ring berhingga.

Contoh 2.3.7

Berdasarkan Contoh 2.3.2 $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah ring. Banyaknya elemen dalam $\mathbb{Z}_5$ adalah 5 sehingga $\mathbb{Z}_5$ merupakan ring berhingga.

Definisi 2.3.8 (Ring Komutatif)

Misalkan R adalah ring. R disebut ring komutatif jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku hukum komutatif pada operasi pergaandaan $(\cdot)$ yaitu $a \cdot b = b \cdot a$.

Contoh 2.3.9

Diberikan ring $K = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$. Akan dibuktikan bahwa K adalah ring komutatif.

Bukti.

Berdasarkan Tabel 2.5, untuk setiap $A, B \in K$ berlaku hukum komutatif pada pergandaan, yaitu $A \cdot B = B \cdot A$ sehingga terbukti bahwa K adalah ring komutatif.

Definisi 2.3.10 (Elemen Nilpoten)

Elemen a dalam ring R dikatakan elemen nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$. Himpunan dari semua elemen nilpoten dalam ring R dinotasikan dengan $N(R)$.

Contoh 2.3.11

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Tentukan $N(\mathbb{Z}_8)$.

Bukti.
Menurut Definisi 2.3.10 elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$ adalah
$\bar{0}$ karena $\bar{0}^n = \bar{0}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$
$\bar{2}$ karena $\bar{2}^3 = \bar{0}$ dengan $n = 3 \in \mathbb{Z}^+$
$\bar{4}$ karena $\bar{4}^2 = \bar{0}$ dengan $n = 2 \in \mathbb{Z}^+$
$\bar{6}$ karena $\bar{6}^3 = \bar{0}$ dengan $n = 3 \in \mathbb{Z}^+$
Jadi, $N(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Contoh 2.3.12
Diberikan ring $R = \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4\right\}$. Akan ditentukan semua elemen nilpoten dari R atau $N(R)$.
Bukti.
$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ karena $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$
$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$ karena $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dengan $n = 2 \in \mathbb{Z}^+$
Jadi, elemen $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$ adalah elemen nilpoten dari R sehingga $N(R) = \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}\right\}$.

Definisi 2.3.13 (Annihilat)
Misalkan R adalah ring dan $a \in R$. Elemen a dikatakan annihilat R jika $ax = xa = 0$ untuk setiap $x \in R$.

Contoh 2.3.14
Diberikan ring $R = \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4\right\}$. Akan dibuktikan bahwa elemen $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$ annihilat R.
Bukti.
Elemen $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$ dikatakan annihilat R jika berlaku $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, untuk setiap $X \in R$.

Tabel 2.6 Hasil dari AX dan XA

A	X	AX	XA
$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$

Karena elemen $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$ memenuhi $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} = 0$ untuk setiap $X \in R$ maka terbukti bahwa $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$ annihilat R.

Definisi 2.3.15 (Karakteristik)
Misalkan R adalah ring. Jika terdapat bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $na = 0$ untuk setiap $a \in R$, maka n disebut karakteristik dari R. Jika n tidak ditemukan, maka R dikatakan mempunyai karakteristik 0. Karakteristik dari R dinotasikan $char(R)$.

Contoh 2.3.16
Diberikan ring $R = \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4\right\}$. Tentukan karakteristik dari R atau $char(R)$.
Bukti.
Ambil sebarang $A \in R$, menurut Definisi 2.3.16 diperoleh
$2A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ karena $2\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dan $2\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$
$4A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ karena $4\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dan $4\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$
$6A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ karena $6\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dan $6\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$,
dan seterusnya.

Jadi karakteritik dari R atau $char(R) = 2$ karena 2 adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $2A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ setiap $A \in R$.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas definisi, contoh, proposisi dan bukti elemen nil dan ring kuadrat genap.

3.1 Ring Kuadrat Genap

Berikut dibahas definisi dan contoh yang berkaitan dengan ring kuadrat genap, berdasarkan Pandey (2017).

Definisi 3.1.1 (Elemen Genap)

Misalkan R adalah ring dan $a \in R$. Elemen a disebut elemen genap jika terdapat $b \in R$ sedemikian sehingga $a = 2b$ dengan $2b = b + b$.

Contoh 3.1.2

Diberikan himpunan bilangan riil, $\mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa elemen-elemen di $\mathbb{R}$ adalah elemen genap.

Bukti.

Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan untuk $a \in \mathbb{R}$ terdapat $b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $a = 2b$. Elemen a dapat ditulis

$$a = 2 \cdot \frac{a}{2}$$

Misalkan $\frac{a}{2} = b$ sehingga untuk $a \in \mathbb{R}$ terdapat $b = \frac{a}{2} \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga a adalah elemen genap, yaitu $a = 2b$. Jadi, terbukti bahwa elemen-elemen di $\mathbb{R}$ adalah elemen genap.

Definisi 3.1.3 (Ring Genap)

Misalkan R adalah ring. R disebut ring genap jika setiap elemen dalam R adalah elemen genap.

Contoh 3.1.4

Diberikan himpunan bilangan riil, $\mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}$ adalah ring genap.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 3.1.2 setiap elemen di $\mathbb{R}$ adalah elemen genap, sehingga terbukti bahwa $\mathbb{R}$ adalah ring genap.

Definisi 3.1.5 (Elemen Kuadrat Genap)

Misalkan R adalah ring dan $a \in R$. Elemen a disebut elemen kuadrat genap jika terdapat $b \in R$ sedemikian sehingga $a^2 = 2b$.

Contoh 3.1.6

Diberikan ring $R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$. Akan dibuktikan elemen-elemen di R adalah elemen kuadrat genap.

Bukti.

Akan dibuktikan untuk setiap $A \in R$ terdapat $B \in R$ sedemikian sehingga $A^2 = 2B$.

Tabel 3.1 Hasil dari $A^2 = 2B$

A	A^2	B	$A^2 = 2B$
$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$

Jadi, terbukti bahwa elemen-elemen di R adalah elemen kuadrat genap.

Definisi 3.1.7 (Ring Kuadrat Genap)

Misalkan R adalah ring. R dikatakan ring kuadrat genap jika setiap elemen dalam R adalah elemen kuadrat genap.

Contoh 3.1.8

Diberikan ring $R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$. Akan dibuktikan bahwa R adalah ring kuadrat genap.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 3.1.6 setiap elemen di R adalah elemen kuadrat genap, sehingga terbukti bahwa R adalah ring kuadrat genap.

Contoh 3.1.9

Diberikan ring $X = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$ dan $X \subseteq M_2(\mathbb{Z}_4)$. Akan dibuktikan bahwa X bukan ring kuadrat genap.

Bukti.

Tabel 3.2 Hasil dari $A^2 = 2B$

A	A^2	B	$A^2 = 2B$
$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$

Berdasarkan Tabel 3.2, untuk suatu $A \in X$ terdapat $B = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \notin X$ yang memenuhi $A^2 = 2B$ sehingga X bukan ring kuadrat genap.

Definisi 3.1.10 (Ring Kuadrat Genap Komutatif)

Misalkan R adalah ring kuadrat genap. R dikatakan ring kuadrat genap komutatif jika jika berlaku hukum komutatif pada operasi pergandaan $(\cdot)$ yaitu $a \cdot b = b \cdot a$.

Contoh 3.1.11

Diberikan ring kuadrat genap $R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.
Akan dibuktikan bahwa R adalah ring kuadrat genap komutatif.

Bukti.

Berdasarkan Tabel 2.5, untuk setiap $A, B \in R$ berlaku hukum komutatif pada pergandaan, yaitu $A \cdot B = B \cdot A$ sehingga terbukti bahwa R adalah ring kuadrat genap komutatif.

Definisi 3.1.12 (Ring Kuadrat Genap Berhingga)

Misalkan R adalah ring kuadrat genap. R dikatakan ring kuadrat genap berhingga jika banyaknya elemen di dalam R berhingga.

Contoh 3.1.13

Diberikan ring kuadrat genap $R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.
Akan dibuktikan bahwa R adalah ring kuadrat genap berhingga.

Bukti:

Banyaknya elemen dalam R adalah 2 sehingga R merupakan ring kuadrat genap berhingga.

Definisi 3.1.14 (Ring Kuadrat Genap Komutatif Berhingga)

Misalkan R adalah ring kuadrat genap. R dikatakan ring kuadrat genap komutatif berhingga jika

i. Berlaku hukum komutatif pada operasi pergandaan $(\cdot)$ yaitu $a \cdot b = b \cdot a$, dan
ii. Banyak elemen dalam R berhingga.

Contoh 3.1.15

Diberikan ring kuadrap genap $R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.
Akan dibuktikan bahwa R adalah ring kuadrat genap komutatif berhingga.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 3.1.11, R adalah ring kuadrat genap komutatif dan berdasarkan Contoh 3.1.13, R adalah ring kuadrat genap berhingga sehingga R adalah ring kuadrat genap komutatif berhingga.

3.2 Elemen Nil

Berikut dibahas definisi, contoh, proposisi dan bukti yang berkaitan dengan elemen nil dalam ring kuadrat genap berdasarkan (Pandey 2017).

Definisi 3.2.1 (Elemen Nil)

Misalkan R adalah ring kuadrat genap dan $a \in R$. Elemen a disebut elemen nil jika $a + a = 0$ dan $a \cdot a = 0$. Himpunan dari semua elemen nil dalam R dinotasikan dengan $\mathcal{N}(R)$.

Contoh 3.2.2

Diberikan ring kuadrat genap $R = \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4\right\}$. Tentukan elemen nil dalam R ata $\mathcal{N}(R)$.

Bukti.

Akan ditentukan $A \in R$ yang memenuhi $A + A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dan $A \cdot A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$.

Tabel 3.3 Hasil dari $A + A$ dan $A \cdot A$

A	$A + A$	$A \cdot A$
$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$

Berdasarkan Tabel 3.3, elemen $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}$ memenuhi $A + A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dan $A \cdot A = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ sehingga elemen nil dari R adalah $\mathcal{N}(R) = \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}\right\}$. Berdasarkan Contoh 2.3.12, $R = N(R)\left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix}\right\}$ adalah himpunan elemen nilpoten di R sehingga jika $\mathcal{N}(R) = N(R)$.

Contoh 3.2.3

Diberikan ring kuadrat genap $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Tentukan $\mathcal{N}(K)$.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 2.3.11 K adalah himpunan elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$. Akan dibuktikan K adalah ring kuadrat genap, yaitu untuk setiap elemen dalam K merupakan elemen genap.

Tabel 3.4 Hasil dari $a^2 = 2b$

a	a^2	b	$a^2 = 2b$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} = 2 \cdot \bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4} = 2 \cdot \bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} = 2 \cdot \bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4} = 2 \cdot \bar{2}$

Karena untuk setiap $a \in K$ terdapat $b \in K$ sedemikian sehingga $a^2 = 2b$ maka $a \in K$ adalah elemen kuadrat genap dan terbukti bahwa K adalah ring kuadrat genap.

Akan ditentukan $a \in K$ yang memenuhi $a + a = \bar{0}$ dan $a \cdot a = \bar{0}$.

Tabel 3.5 Hasil dari $a + a$ dan $a \cdot a$

a	$a + a$	$a \cdot a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 3.5, elemen $\bar{0}$ dan $\bar{4}$ memenuhi $a + a = \bar{0}$ dan $a \cdot a = \bar{0}$ sehingga elemen nil pada K adalah $\mathcal{N}(K) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$.

Remark. Elemen nil merupakan elemen nilpoten tetapi elemen nilpoten belum tentu elemen nil. Elemen nilpoten yang bukan elemen nil disebut dengan elemen nilpoten non-nil.

Proposisi 3.2.4

Jika a dan b adalah sebarang elemen nilpoten non-nil dari ring komutatif berhingga R yang memuat elemen nil, maka $a + b$ dan $a \cdot b$ tidak perlu elemen nilpoten non-nil.

Bukti.

Ambil sebarang $a, b \in N(R)$ dengan $a, b \notin \mathcal{N}(R)$. Karena $a, b \in N(R)$ berarti terdapat $n, m \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $a^n = 0$ dan $b^m = 0$.

Akan dibuktikan $a + b, a \cdot b \in N(R)$.

i. Untuk $a + b$ akan dibuktikan $a + b \in N(R)$, yaitu terdapat $n, m \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(a + b)^{n+m} = 0$.

$$(a+b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k}$$

$$= \binom{n+m}{0} a^0 b^{n+m} + \binom{j}{1} a^1 b^{n+m-1} + \dots + \binom{n+m}{n+m-1} a^{n+m-1} b^1 + \binom{n+m}{n+m} a^{n+m} b^0$$

$$= \binom{n+m}{0} a^0 b^n b^m + \binom{j}{1} a^1 b^n b^m b^{-1} + \dots + \binom{n+m}{n+m-1} a^n a^m a^{-1} b^1 + \binom{n+m}{n+m} a^n a^m b^0$$

Karena $a^n = 0$ dan $b^m = 0$ sehingga

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + 0$$
$$= 0$$

sehingga $(a + b)^{n+m} = 0$. Jadi $a + b \in N(R)$.

ii. Untuk $a \cdot b$ akan dibuktikan $a \cdot b \in N(R)$, yaitu terdapat $n, m \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(a \cdot b)^{n+m} = 0$.

Menurut Definisi 2.3.1, $(R,\cdot)$ merupakan semigrup sehingga berlaku sifat tertutup.

Misal $a \cdot b = d$, lalu gandakan persamaan tersebut dengan pangkat $n + m$ dimana $n, m \in \mathbb{Z}^+$.

$$a \cdot b = d$$
$$(a \cdot b)^{n+m} = d^{n+m}$$

Karena R komutatif maka

$$a^{n+m} \cdot b^{n+m} = d^{n+m}$$

Karena $a, b \in N(R)$ maka $a^n = 0$ dan $b^m = 0$ sehingga diperoleh

$$0 \cdot 0 = d^{n+m}$$
$$(a \cdot b)^{n+m} = 0$$

sehingga untuk $a \cdot b$ terdapat $n, m \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(a \cdot b)^{n+m} = 0$. Jadi $a \cdot b \in N(R)$.

Akan dibuktikan $a + b, a \cdot b \in \mathcal{N}(R)$.

i. Untuk $a + b$ akan dibuktikan $a + b \in \mathcal{N}(R)$, yaitu $(a + b) + (a + b) = 0$ dan $(a + b) \cdot (a + b) = 0$. $(a + b)$ dapat ditulis $(a + b)^1$. Karena $a + b \in N(R)$ sehingga untuk $(a + b)^1$ terdapat $1 \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(a + b)^1 = 0$.

   Untuk $(a + b) + (a + b) = 0$,

$$\begin{aligned}(a + b) + (a + b) &= (a + b)^1 + (a + b)^1 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Untuk $(a + b) \cdot (a + b) = 0$,

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (a + b) &= (a + b)^1 \cdot (a + b)^1 \\ &= 0 \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Karena $(a + b) + (a + b) = 0$ dan $(a + b) \cdot (a + b) = 0$ sehingga $a + b \in \mathcal{N}(R)$.

ii. Untuk $a \cdot b$ akan dibuktikan $a \cdot b \in \mathcal{N}(R)$, yaitu $(a \cdot b) + (a \cdot b) = 0$ dan $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = 0$. $(a \cdot b)$ dapat ditulis $(a \cdot b)^1$. Karena $a \cdot b \in N(R)$ sehingga untuk $(a \cdot b)^1$ terdapat $1 \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(a \cdot b)^1 = 0$.

   Untuk $(a \cdot b) + (a \cdot b) = 0$.

$$\begin{aligned}(a \cdot b) + (a \cdot b) &= (a \cdot b)^1 + (a \cdot b)^1 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Untuk $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = 0$

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot b)^1 \cdot (a \cdot b)^1 \\ &= 0 \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Karena $(a \cdot b) + (a \cdot b) = 0$ dan $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = 0$ sehingga $a + b \in \mathcal{N}(R)$.

Jadi, terbukti bahwa jika a dan b adalah sebarang elemen nilpoten non-nil dari ring komutatif berhingga R yang memuat elemen nil, maka $a + b$ dan $a \cdot b$ adalah elemen nil atau tidak perlu elemen nilpoten non-nil.

Contoh 3.2.5

Misalkan $R = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$ adalah ring komutatif dan $R \subseteq M_2(\mathbb{Z}_4)$. R memuat elemen nil, yaitu $A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$. R juga memuat elemen nilpoten non-nil, yaitu $E = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{pmatrix}$, dan $H = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix}$. Penjumlahan dan pergandaan dari sebarang dua elemen nilpoten non-nil dari R adalah elemen nil.

Proposisi 3.2.6

Jika R adalah ring kuadrat genap berhingga dengan karakteristik dua, maka setiap elemen di R adalah elemen nil.

Bukti.

R karakteristik 2, yaitu $Char(R) = 2$ sedemikian sehingga $2a = 0$. Jika a adalah elemen genap dengan $a = 2b$ untuk suatu $b \in R$, maka dengan menggandakan $a = 2b$ dengan 2 diperoleh

$$2a = 2(2b)$$
$$2a = 4b.$$

Diketahui $2a = 0$ sehingga

$$0 = 4b$$
$$b = 0.$$

Karena $b = 0$ sehingga $a = 0$, maka jelas $a \cdot a = a^2 = 0$. Elemen a memenuhi $a + a = 0$ dan $a \cdot a = 0$ sedemikian sehingga terbukti bahwa a adalah elemen nil.

Jika a bukan elemen genap, maka a adalah elemen kuadrat genap, yaitu $a^2 = 2c$ untuk suatu $c \in R$. Persamaan $a^2 = 2c$ digandakan dengan 2 sehingga diperoleh

$$2(a^2) = 2(2c)$$
$$2(a^2) = 4c.$$
Andaikan $a^2 \neq 0$ maka $2c \neq 0$. Akan dibuktikan secara kontraposisi, yaitu jika $2c = 0$ maka $a^2 = 0$.
$$4c = 0$$
$$2(2c) = 0.$$
Dapat dilihat bahwa $2c = 0$ maka diperoleh $a^2 = 0$ sedemikian sehingga a adalah elemen nil.
Jadi, terbukti bahwa jika R adalah ring kuadrat genap berhingga dengan karakteristik dua, maka setiap elemen di R adalah elemen nil.

Contoh 3.2.7

Diberikan ring kuadrat genap $R = \left\{\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4\right\}$. Telah diketahui dari Contoh 2.3.17 bahwa karakteristik dari R adalah 2, yaitu $Char(R) = 2$ dan dari Contoh 3.2.2 telah diketahui pula bahwa $\mathcal{N}(R) = \left\{\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}\right\}$ sehingga elemen dalam R adalah elemen nil atau $R = \mathcal{N}(R)$.

Contoh 3.2.8

Diberikan ring kuadrat genap $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dimana berdasarkan Contoh 2.3.11 K adalah himpunan elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$. Karakteristik dari K adalah 4 atau $Char(K) = 4$, karena untuk setiap $a \in K$ terdapat bilangan bulat positif terkecil $n = 4$ sedemikian sehingga $4a = \bar{0}$. Berdasarkan Contoh 3.2.3 elemen nil di K adalah $\mathcal{N}(K) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ sehingga $K \neq \mathcal{N}(K)$.

Proposisi 3.2.9

Misalkan R adalah ring kuadrat genap komutatif berhingga dengan order genap. Jika order dari R dan karakteristik dari R adalah sama, maka R memuat elemen nil tak nol tunggal.
Bukti.
Misalkan order dan karakteristik dari R ring kuadrat genap adalah sama. Jelas bahwa R terhadap penjumlahan adalah grup siklik, yaitu $G = \langle a \rangle = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dan terdapat elemen tak nol tunggal $a \in R$ sedemikian sehingga $a + a = 0$. Ini berarti $2a = 0$.

Jika a adalah elemen genap dengan $a = 2b$ untuk suatu $b \in R$, maka $a^2 = 0$. Jadi, a adalah elemen nil. Karena a adalah satu-satunya elemen dan $a \neq 0$ sehingga a adalah elemen nil tak nol tunggal.
Jika a bukan elemen genap, maka a adalah elemen kuadrat genap, yaitu $a^2 = 2c$ untuk suatu $c \in R$. Persamaan $a^2 = 2c$ digandakan dengan 2 sehingga diperoleh

$$2a^2 = 2(2c)$$
$$2a^2 = 4c.$$

Andaikan $a^2 \neq 0$ maka $2c \neq 0$. Akan dibuktikan secara kontraposisi, yaitu jika $2c = 0$ maka $a^2 = 0$.

$$4c = 0$$
$$2(2c) = 0.$$

Dapat dilihat bahwa $2c = 0$ sehingga $a^2 = 0$ sedemikian sehingga terbukti bahwa a adalah elemen nil. Karena a adalah satu-satunya elemen dan $a \neq 0$ sehingga a adalah elemen nil tak nol tunggal.
Jadi, terbukti bahwa jika order dari ring kuadrat genap komutatif berhingga R dan karakteristik dari R sama, maka R memuat elemen nil tak nol tunggal.

Contoh 3.2.10

Diberikan ring kuadrat genap $R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$. Telah diketahui dari Contoh 2.3.16 bahwa karakteristik dari R adalah 2, yaitu $Char(R) = 2$ dan banyaknya elemen di R adalah 2 sehingga order dan karakteristikya sama. Telah diketahui dari Contoh 3.2.2 $\mathcal{N}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \right\}$ dan $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$ adalah elemen nil tak nol tunggal.

Contoh 3.2.11

Diberikan ring kuadrat genap $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dimana K adalah himpunan elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$. Banyaknya elemen atau order dalam ring K adalah 4. Karakteristik dari $N(K)$ adalah 4 atau $Char(K) = 4$, karena untuk setiap $a \in K$ terdapat bilangan bulat positif terkecil $n = 4$ sedemikian sehingga $4a = \bar{0}$. Jadi, order dari K dan karakteristik dari K adalah sama, yaitu 4. Berdasarkan Contoh 3.2.3

elemen nil di K adalah $\mathcal{N}(K) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ sehingga K memuat elemen nil tak nol tunggal, yaitu $\bar{4}$.

3.3 Hubungan Antara Elemen Nil dan Ring Kuadrat Genap

Berikut dibahas proposisi dan bukti yang berkaitan dengan elemen nil dan ring kuadrat genap.

Proposisi 3.3.1

Jika R adalah ring kuadrat genap komutatif berhingga yang memuat elemen nil tak nol tunggal, maka elemen nilnya annihilat R.

Bukti.

R memuat elemen nil tak nol tunggal maka menurut Proposisi 3.2.8, order dan karakteristik dari ring kuadrat genap komutatif berhingga R adalah sama. Misalkan order dari R adalah $O(R) = n$ dan karakteristik dari R adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $na = 0$. Akan dibuktikan elemen nil pada R annihilat R, yaitu berlaku $ab = ba = 0$ untuk setiap $b \in R$. Ambil $a \in \mathcal{N}(R)$ sehingga $a + a = 0$ dan $a \cdot a = 0$.

i. Jika $a = 0$ maka untuk setiap $b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a = 0$.
ii. Jika $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka $a \cdot b = a \cdot b = b \cdot a = 0$.
iii. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dan R memuat elemen nil tak nol tunggal maka $a \cdot b = 0$. Karena untuk $a \neq 0$, jika $a \in \mathcal{N}(R)$ maka $a \in N(R)$ berarti terdapat bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = 0$. Karena $n > 1$, maka berlaku $a \cdot a^{n-1} = 0$, dengan $a^{n-1} \neq 0$. Misal $a^{n-1} = b$. Jadi, jika $a \neq 0$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a = 0$ dengan $b \neq 0$.

Contoh 3.3.2

Diberikan ring kuadrat genap komutatif berhingga $R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$. Telah diketahui dari Contoh 3.2.10 dan Contoh 2.3.15 bahwa elemen nil dari R adalah $\mathcal{N}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \right\}$ dan R memuat elemen nil tunggal tak nol, yaitu $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$. Untuk $A \in R$ berlaku $A \cdot B = B \cdot A = 0$ untuk setiap $B \in R$ sehingga terbukti bahwa elemen dalam R annihilat R

Contoh 3.3.3

Diberikan ring kuadrat genap komutatif berhingga $K = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ dimana K adalah himpunan elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$. Elemen nil di K adalah $\mathcal{N}(K) = \{\overline{0}, \overline{4}\}$. $\mathcal{N}(K)$ memuat elemen nil tak nol tunggal yaitu $\overline{4}$.

Tabel 3.6 Hasil dari $ab = 0$

		$b \in N(K)$			
	$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$a \in \mathcal{N}(K)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Sehingga untuk setiap $a \in \mathcal{N}(K)$ dengan $\overline{4}$ adalah elemen nil tak nol tunggal berlaku $a \cdot b = 0$ untuk setiap $b \in N(K)$. Karena K komutatif sehingga $a \cdot b = b \cdot a = 0$. Jadi terbukti bahwa $\mathcal{N}(K) = \{\overline{0}, \overline{4}\}$ annihilat $N(\mathbb{Z}_8)$.

Proposisi 3.3.4

Jika R adalah ring kuadrat genap komutatif berhingga yang setiap elemennya adalah elemen genap maka setiap elemen nil dalam R annihilat R.

Bukti.

Misalkan order dari R adalah $O(R) = n$ dan R adalah ring kuadrat genap komutatif. Akan dibuktikan elemen nil pada R annihilat R, yaitu berlaku $ab = ba = 0$ untuk setiap $b \in R$. Ambil $a \in \mathcal{N}(R)$ maka $a + a = 0$ dan $a \cdot a = 0$ dengan a adalah elemen genap, yaitu $a = 2c$ untuk suatu $c \in R$.

i. Jika $a = 0$ maka untuk setiap $b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a = 0$.
ii. Jika $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka $a \cdot b = b \cdot a = 0$.
iii. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dan setiap elemen di R adalah elemen genap maka $a \cdot b = 0$. Karena untuk $a \neq 0$, $a \in \mathcal{N}(R)$ maka $a \in N(R)$, berarti terdapat bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = 0$. Karena $n > 1$ dan $a = 2c$ maka berlaku $(2c) \cdot (2c)^{n-1} = 0$, dengan $(2c)^{n-1} \neq 0$. Misal $(2c)^{n-1} = b$. Jadi, jika $a \neq 0$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a = 0$ dengan $b \neq 0$.

Contoh 3.3.5

Diberikan ring kuadrat genap komutatif berhingga $\mathbb{Z}_5$ dimana $\mathbb{Z}_5$ juga merupakan ring genap karena elemen di $\mathbb{Z}_5$ adalah elemen genap.

Tabel 3.7 Hasil dari $a = 2b$ dan $a^2 = 2b$

a	b	$a = 2b$	a^2	b	$a^2 = 2b$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} = 2 \cdot \bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} = 2 \cdot \bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1} = 2 \cdot \bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1} = 2 \cdot \bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2} = 2 \cdot \bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4} = 2 \cdot \bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{3} = 2 \cdot \bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4} = 2 \cdot \bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4} = 2 \cdot \bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1} = 2 \cdot \bar{3}$

Akan ditentukan elemen nil di $\mathbb{Z}_5$.

Tabel 3.8 Hasil dari $a + a$ dan $a \cdot a$

a	$a + a$	$a \cdot a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Jadi $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_5) = \{\bar{0}\}$. Jelas untuk $a \in \mathcal{N}(\mathbb{Z}_5)$ berlaku $ax = xa = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_5$ sehingga terbukti bahwa $a \in \mathcal{N}(\mathbb{Z}_5)$ annihilat $\mathbb{Z}_5$.

BAB IV
KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Jika R adalah ring genap maka R adalah ring kuadrat genap tetapi ring kuadrat genap tidak perlu ring genap.
2. Setiap elemen dalam ring kuadrat genap R adalah elemen nil jika R mempunyai karakteristik dua. Kemudian, jika order dan karakteristik dari R sama, maka R memuat elemen nil tak nol tunggal.
3. Jika ring kuadrat genap komutatif berhingga R memuat elemen nil tak nol tunggal a, maka a annihilat R. Selain itu, jika a adalah elemen nil dalam ring kuadrat genap komutatif berhingga R dimana setiap elemen dalam R adalah elemen genap, maka a annihilat R.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2014. *Ring, Field dan Daerah Integral*. University of Brawijaya Press. Malang.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. University of Brawijaya Press. Malang.

Bhattacharya, P. B., S. K. Jain, dan S. R. Nagpaul. 1995. *Basic Abstract Algebra*. Second Edition. Cambridge University Press. New York.

Pandey, S.K. 2017. Nil elements and Even Square Ring. *International Journal of Algebra 11(1):1-7*.