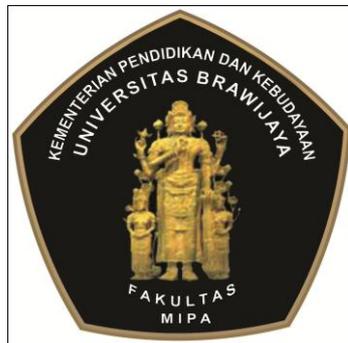


**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI
MODEL *PREDATOR-PREY* DISKRIT DENGAN
WAKTU TUNDA**

TESIS



Oleh:

**RIVA ALAWIA
116090417011001**

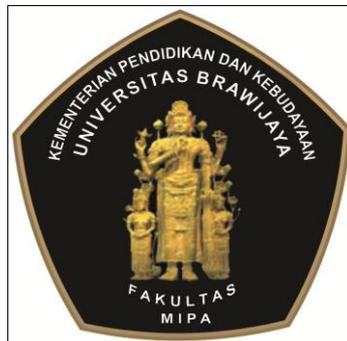
**PROGRAM STUDI ILMU MATEMATIKA
MINAT PEMODELAN MATEMATIKA**

**PROGRAM PASCASARJANA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI
MODEL *PREDATOR-PREY* DISKRIT DENGAN
WAKTU TUNDA**

TESIS

**Untuk Memenuhi Persyaratan
Memperoleh Gelar Magister**



Oleh:

**RIVA ALAWIA
116090417011001**

**PROGRAM STUDI ILMU MATEMATIKA
MINAT PEMODELAN MATEMATIKA**

**PROGRAM PASCASARJANA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

TESIS
ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI
MODEL *PREDATOR-PREY* DISKRIT DENGAN WAKTU TUNDA

Oleh:
RIVA ALAWIA

Telah dipertahankan di depan penguji
pada tanggal 31 Juli 2013
dan dinyatakan lulus

KOMISI PEMBIMBING

Ketua

Anggota

Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 196908071994121001

Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
NIP. 197312162002122001

Program Pascasarjana
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Ketua Program Studi S2 Matematika

Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes
NIP. 195305231983031002

IDENTITAS TIM PENGUJI

JUDUL:

**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI MODEL *PREDATOR-PREY*
DISKRIT DENGAN WAKTU TUNDA**

Nama Mahasiswa : Riva Alawia
NIM : 116090417011001
Program Studi : Matematika
Minat : Pemodelan Matematika

KOMISI PEMBIMBING

Ketua : Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc
Anggota : Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.

TIM DOSEN PENGUJI

Dosen Penguji 1 : Dra. Trisilowati, M.Sc
Dosen Penguji 2 : Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes

Tanggal Ujian : 31 Juli 2013
SK Penguji :

PERNYATAAN ORISINALITAS

LAPORAN PENELITIAN TESIS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, di dalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur jiplakan, saya bersedia tesis dibatalkan serta diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku.

Malang, 31 Juli 2013

Riva Alawia
116090417011001

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Nama : Riva Alawia

Tempat lahir : Kediri

Tanggal lahir : 6 Juni 1988

PENDIDIKAN

Jurusan Matematika (S2)

Universitas Brawijaya Malang, Jawa Timur

2012-2013

Jurusan Matematika (S1)

Universitas Brawijaya Malang, Jawa Timur

2008-2012

Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Pare

Kediri, Jawa Timur

2004-2007

Madrasah Tsanawiyah Negeri Model Pare

Kediri, Jawa Timur

2001-2004

Madrasah Ibtidaiyah Bustanul ‘Ulum Tuglur

Badas, Kediri, Jawa Timur

1995-2001

Malang, 31 Juli 2013

Penulis

**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI
MODEL *PREDATOR-PREY* DISKRIT DENGAN WAKTU TUNDA**

ABSTRAK

Pada tesis ini dilakukan pendekatan numerik menggunakan metode Euler pada model *predator-prey* dengan waktu tunda. Perilaku dinamik dari model diskrit yang diperoleh kemudian dianalisis, yaitu eksistensi dan kestabilan titik tetap model tersebut. Hasil analisis menunjukkan adanya bifurkasi Neimark-Sacker yang terjadi pada saat nilai parameter τ melewati suatu barisan nilai kritis. Dari simulasi numerik, dapat ditunjukkan bahwa hasil yang diperoleh sesuai dengan hasil analisis.

Kata kunci: Model *predator-prey* diskrit, Waktu tunda, Kestabilan, Bifurkasi Neimark-Sacker.

**STABILITY AND BIFURCATION ANALYSIS
ON DISCRET PREDATOR-PREY MODEL WITH DELAY**

ABSTRACT

In this paper we investigate the dynamics of Euler discretization of predator-prey model with a delay. Its dynamics are studied in term of local stability analysis and the existence of Neimark-Sacker bifurcation. By analyzing the corresponding characteristic equation, it is shown that Neimark-Sacker bifurcation occurs when τ crosses a sequence of critical values. Such analytical finding is confirmed by some numerical simulations.

Keywords: *Discrete predator-prey model, Time delay, Stability, Neimark-Sacker bifurcations.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian (tesis) dengan judul “**Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Model Predator-Prey Diskrit dengan Waktu Tunda**” ini dengan baik. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Penelitian ini merupakan salah satu bagian dari penelitian DPP/SPP yang didanai oleh Fakultas MIPA Universitas Brawijaya berdasar Surat Perjanjian Nomor : 25/UN10.9/PG/2013 yang berjudul “**Analisis Dinamik Model Hutchinson Diskrit dengan Waktu Tunda Diskrit dan Terdistribusi**”

Penulis menyadari selama penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku pembimbing I atas bimbingan, motivasi, nasehat, dan kesabarannya selama proses penyusunan tesis ini berlangsung.
2. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku pembimbing II atas segala bimbingan, nasehat, dan kesabarannya selama proses penulisan tesis ini.
3. Dra. Trisilowati, M.Sc dan Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan tesis ini.
4. Keluarga tercinta, bapak, ibu, mbak, dan mas-mas atas segala do'a, dukungan, dan nasehat yang senantiasa diberikan.

5. Teman-teman pascasarjana Matematika 2011 dan 2012, mbak Maya, Prila, mas Trija, mas Reymond, Anisah, Mazi atas berbagai diskusi dan dukungannya selama perkuliahan.
6. Semua staf FMIPA, mbak Trisna dan mas Hari atas segala bantuan dan fasilitas yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang terdapat dalam tesis ini. Oleh karena itu, penulis membuka lebar untuk berbagai kritik, saran, dan penelitian lanjutan yang membangun agar tesis ini dapat lebih bermanfaat bagi pembaca.

Malang, 31 Juli 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
IDENTITAS TIM PENGUJI	iii
PERNYATAAN ORISINALITAS	iv
RIWAYAT HIDUP PENULIS	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Sistem Dinamik	4
2.2 Sistem Dinamik Diskrit	5
2.2.1 Sistem Dinamik Diskrit Orde Satu Linear	5
2.2.2 Sistem Dinamik Diskrit Orde Satu Nonlinear	5
2.2.3 Kriteria Kestabilan Sistem Dinamik Diskrit	7
2.3 Metode Euler	11
2.4 Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda	13
2.5 Bifurkasi Neimark-Sacker	14
2.6 Model <i>Predator-Prey</i>	17
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	20
3.1 Diskritisasi Model <i>Predator-Prey</i> dengan Waktu Tunda	20
3.2 Titik Tetap	22

3.3	Kestabilan Titik Tetap	23
3.3.1	Titik tetap trivial $E_0 = (0,0)$	23
3.3.2	Titik tetap kepunahan prey $E_1 = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}\right)$	25
3.3.3	Titik tetap kepunahan predator $E_2 = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$	27
3.3.4	Titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$	29
3.4	Simulasi Numerik	37
3.4.1	Simulasi I	37
3.4.2	Simulasi II	39
3.4.3	Simulasi III	41
BAB IV	PENUTUP	45
4.1	Kesimpulan	45
4.2	Saran	45
DAFTAR PUSTAKA	46
LAMPIRAN	47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Bifurkasi Neimark-Sacker <i>Supercritical</i>	16
Gambar 2.1	Bifurkasi Neimark-Sacker <i>Subcritical</i>	16
Gambar 3.1	Potret fase model untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0, m = 20,$ dan $\tau = 1.5$	38
Gambar 3.2	Grafik solusi u_n dan v_n untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0, m = 20,$ dan $\tau = 1.5$	38
Gambar 3.3	Potret fase model untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0, m = 20,$ dan $\tau = 1.7$	40
Gambar 3.4	Grafik solusi u_n dan v_n untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0, m = 20,$ dan $\tau = 1.7$	40
Gambar 3.5	Potret fase model untuk untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 > 0$	42
	(a) $m = 5, \tau = 1$	42
	(b) $m = 5, \tau = 1.06$	42
Gambar 3.6	Potret fase model untuk untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 > 0$	43
	(a) $m = 10, \tau = 1.12$	43
	(b) $m = 20, \tau = 1.12$	43
	(c) $m = 20, \tau = 1.145$	43

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik tetap	36
Tabel 3.2 Nilai-nilai parameter	37

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Model matematika sering digunakan untuk menjelaskan fenomena-fenomena alam yang terjadi di sekitar manusia. Salah satu model yang dikaji dan diteliti adalah interaksi antar spesies yang hidup pada suatu ekosistem yang disebut dengan model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra yang sering diteliti di antaranya adalah model interaksi antara *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Model Lotka-Volterra pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926. Penelitian Lotka-Volterra menghasilkan model sederhana pemangsaan atau interaksi antar dua spesies dalam suatu ekosistem dan selanjutnya juga mengenalkan model Lotka-Volterra klasik yang akhir-akhir ini banyak dikembangkan oleh para peneliti (Murray, 2002).

Pada kenyataannya, banyak proses di alam ini yang melibatkan adanya waktu tunda, baik proses alami maupun buatan, dalam ilmu biologi, kedokteran, kimia, fisika, teknik, ekonomi, dan sebagainya. Waktu tunda sering terjadi hampir di setiap situasi. Salah satu contoh sederhana yang terjadi di alam adalah proses penyebaran suatu penyakit. Penyebaran beberapa penyakit tidak terjadi secara langsung dari populasi terinfeksi, namun masih membutuhkan suatu masa inkubasi yang merupakan salah satu bentuk waktu tunda. Oleh karena itu, beberapa model dinamik yang ada juga mempertimbangkan adanya waktu tunda. Berdasarkan beberapa penelitian, waktu tunda memiliki pengaruh besar terhadap perilaku dinamik model. Misalnya dalam model logistik, titik tetap positifnya

berubah menjadi tak stabil seiring dengan bertambahnya waktu tunda yang ada (Kuang, 1993).

Berdasarkan pertimbangan adanya pengaruh waktu tunda dalam suatu model dinamik, Zhang dkk. (2009) mengembangkan model Lotka-Volterra berupa model kompetisi antar spesies dengan adanya waktu tunda (τ) dan menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf yang terjadi pada titik tetap interior model dengan τ sebagai parameter bifurkasi. Berbeda dari Zhang dkk., Zhao dan Lin (2009) meneliti model pemangsaan *predator-prey* dengan adanya waktu tunda τ . Dalam penelitian ini, Zhao dan Lin menyajikan model dalam bentuk kontinu dan menunjukkan adanya pengaruh waktu tunda τ pada titik tetap interior, yaitu terjadinya bifurkasi Hopf.

Model-model yang telah diteliti banyak dinyatakan sebagai model kontinu berupa persamaan diferensial nonlinear. Model kontinu memiliki beberapa sifat utama yang berkaitan dengan solusi dan kestabilan titik tetapnya. Akan tetapi, solusi eksaknya sulit ditentukan secara analitik karena pada umumnya persamaan diferensial nonlinear mempunyai bentuk yang rumit. Oleh karena itu, penyelesaian secara numerik memainkan peranan penting untuk membantu mencari pendekatan solusi persamaan diferensial yang sulit ditentukan secara analitik. Pendekatan numerik yang sering digunakan adalah metode Euler yang merupakan pendekatan beda hingga standar. Model diskrit yang dihasilkan dari pendekatan metode Euler ini memiliki dinamika perilaku yang lebih kaya jika dibandingkan dengan model kontinu (Jie dkk, 2011).

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Zhao dan Lin (2009), dalam tesis ini dibahas diskritisasi model *predator-prey* dengan waktu tunda

menggunakan metode Euler. Konsistensi model diskrit yang telah diperoleh terhadap model kontinunya dan pengaruh waktu tunda juga akan diselidiki. Sebagai verifikasi hasil analisis, dilakukan simulasi numerik berdasarkan model diskrit yang diperoleh menggunakan bantuan software Matlab.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, tesis ini membahas diskritisasi model *predator-prey* dengan waktu tunda menggunakan metode Euler. Secara khusus, permasalahan yang dibahas adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana sifat-sifat dinamik model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda yang dihasilkan dari metode Euler?
2. Bagaimana simulasi numerik dan interpretasi model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda?

1.3. Tujuan

Tujuan dari penulisan tesis yang membahas diskritisasi model *predator-prey* dengan waktu tunda menggunakan metode Euler ini adalah sebagai berikut.

1. Menganalisis sifat-sifat dinamik model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda yang dihasilkan dari metode Euler.
2. Membuat simulasi numerik dan interpretasi model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik dengan variabel waktu diskrit ($t \in \mathbb{Z}$ atau \mathbb{N}) dan sistem dinamik dengan variabel waktu kontinu ($t \in \mathbb{R}$). Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$\vec{x}(n+1) = \vec{G}(\vec{x}(n)), \quad (2.1)$$

dengan $\vec{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$ dan fungsi $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_k)^T$ disebut fungsi pembangkit sistem. Titik \vec{x}^* disebut titik tetap persamaan (2.1) jika $\vec{G}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$.

Apabila t kontinu, sistem dinamik merupakan sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = G(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

Secara geometri, sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu menggambarkan pergerakan titik-titik di bidang fase sepanjang kurva penyelesaian yang didefinisikan oleh sistem persamaan diferensialnya (Perko, 1996).

2.2. Sistem Dinamik Diskrit

2.2.1. Sistem Dinamik Diskrit Orde Satu Linear

Bentuk umum persamaan beda orde satu dengan n variabel bebas adalah

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n), \quad (2.2)$$

dengan $A = (a)_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k$, adalah matriks yang bernilai real,

dan $\vec{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$ dengan T menyatakan *transpose* dari vektor. Jika diberikan nilai awal $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ maka persamaan (2.2) memiliki solusi umum

$$\vec{x}(n) = A^n \vec{x}_0.$$

Jika matriks A dapat didiagonalisasikan maka solusi umum persamaan (2.2) adalah

$$\vec{x}(n) = c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 + \dots + c_k \lambda_k^n \vec{v}_k,$$

dengan c_i adalah sembarang konstanta dan \vec{v}_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i (Elaydi, 2005).

2.2.2. Sistem Dinamik Diskrit Orde Satu Nonlinear

Perhatikan sistem dinamik diskrit (2.1). Jika G_1, G_2, \dots, G_k memuat perkalian antara variabel tak bebas, maka sistem (2.1) disebut sistem dinamik diskrit nonlinear. Untuk mengetahui jenis kestabilan titik tetap sistem dinamik diskrit nonlinear dapat dilakukan dengan menganalisis sistem hasil linearisasi. Proses linearisasi sistem dinamik diskrit nonlinear dilakukan dengan ekspansi Taylor yaitu

$$G_1(\vec{x}(n)) = G_1(\vec{x}^*) + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*) \\ + \eta_1(\vec{x}(n))$$

$$G_2(\vec{x}(n)) = G_2(\vec{x}^*) + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*) \\ + \eta_2(\vec{x}(n))$$

⋮

$$G_k(\vec{x}(n)) = G_k(\vec{x}^*) + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*) \\ + \eta_k(\vec{x}(n))$$

dengan $\eta_1(\vec{x}(n)), \eta_2(\vec{x}(n)), \dots, \eta_k(\vec{x}(n))$ adalah suku sisa yang memenuhi

$$\lim_{(\vec{x}(n) \rightarrow \vec{x}^*)} \frac{\eta_j(\vec{x}(n))}{\|\vec{x}(n) - \vec{x}^*\|} = 0,$$

untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$. Oleh karena itu $\eta_j(\vec{x}(n))$ dapat diabaikan.

Dengan mengingat bahwa \vec{x}^* adalah titik tetap, yaitu $\vec{G}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$, maka sistem (2.1) dapat dituliskan sebagai

$$x_1(n+1) = x_1^* + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*)$$

$$x_2(n+1) = x_2^* + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*)$$

⋮

$$x_k(n+1) = x_k^* + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*)$$

atau

$$x_1(n+1) - x_1^* = \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*)$$

$$x_2(n+1) - x_2^* = \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*) \quad (2.3)$$

⋮

$$x_k(n+1) - x_k^* = \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} (x_1(n) - x_1^*) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} (x_k(n) - x_k^*)$$

Dengan memisalkan $u_j(n) = x_j(n) - x_j^*$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$, maka sistem

(2.3) menjadi

$$u_1(n+1) = \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(n) + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(n) + \dots + \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(n)$$

$$u_2(n+1) = \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(n) + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(n) + \dots + \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(n)$$

⋮

$$u_k(n+1) = \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} u_1(n) + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2} u_2(n) + \dots + \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} u_k(n),$$

atau dalam bentuk matriks

$$\vec{u}(n+1) = A\vec{u}(n),$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_1(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_2(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_k(\vec{x}^*)}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

dan $u_j(n) = x_j(n) - x_j^*$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, k$.

(Elaydi, 2005)

2.2.3. Kriteria Kestabilan Sistem Dinamik Diskrit

Pandang persamaan beda berikut

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dapat juga dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai persamaan

$$Y_{n+1} = G(Y_n), n = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

dengan

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_n^0 \\ y_n^1 \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-k} \end{pmatrix},$$

dan

$$Y_{n+1}^0 = F(y_n^0, y_n^1, \dots, y_n^k)$$

$$Y_{n+1}^1 = y_n^0$$

$$Y_{n+1}^2 = y_n^1$$

$$\vdots$$

$$Y_{n+1}^k = y_n^{k-1},$$

sehingga

$$G(Y_n) = \begin{pmatrix} F(y_n^0, y_n^1, \dots, y_n^k) \\ y_n^0 \\ y_n^1 \\ \vdots \\ y_n^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan definisi titik tetap pada sistem dinamik diskrit, suatu titik x^* disebut titik tetap jika

$$Y_{n+1}^0 = F(y_n^0, y_n^1, \dots, y_n^k) = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = x^*$$

$$Y_{n+1}^1 = y_n^0 = x^*$$

$$Y_{n+1}^2 = y_n^1 = x^*$$

$$\vdots$$

$$Y_{n+1}^k = y_n^{k-1} = x^*.$$

Sebuah titik tetap persamaan (2.4) adalah titik $x^* \in R$, sehingga $x^* = F(x^*, x^*, \dots, x^*)$, dengan x^* adalah titik tetap dari fungsi $F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k})$.

Dapat juga dikatakan bahwa titik tetap pada persamaan (2.4) adalah berupa vektor $Y^* \in \mathbb{R}^{k+1}$ sehingga $Y^* = G(Y^*)$. Dapat disimpulkan bahwa x^* adalah titik tetap persamaan (2.4) jika dan hanya jika

$$Y^* = (x^*, x^*, \dots, x^*, x^*)^T$$

adalah titik tetap persamaan (2.5).

Jika persamaan (2.4) berbentuk linear

$$x_{n+1} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_k x_{n-k}, n = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

maka dengan transformasi di atas, persamaan (2.6) menjadi

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

Matriks A pada persamaan (2.7) adalah matriks berukuran $(k+1) \times (k+1)$

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

dan persamaan karakteristik matriks A adalah

$$\lambda^{k+1} + b_0 \lambda^k + \dots + b_k = 0.$$

(Kocic dan Ladas, 1993).

Untuk sebuah persamaan homogen, kestabilan dari titik tetap nol dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika setiap akar dari persamaan karakteristik terletak dalam lingkaran $|\lambda| < 1$. Sebuah persamaan linear akan dikatakan stabil, stabil asimtotik, atau tidak stabil berdasarkan pada titik tetap nol yang memenuhi kriteria tersebut. Kriteria yang menyatakan persyaratan tersebut disebut kriteria Schur-Cohn, yang menyediakan kondisi yang diperlukan dan cukup untuk semua akar dari persamaan

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2.9)$$

dengan koefisien real yang berada di dalam lingkaran buka $|\lambda| < 1$.

Teorema 2.1

Perhatikan persamaan beda nonlinear berikut

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n), n = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

dengan A adalah matriks konstan $(k + 1) \times (k + 1)$, $X_n \in \mathbb{R}^{k+1}$ untuk setiap $n \geq 0$, dan $F \in C[\mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R}^{k+1}]$, sehingga

$$F(0) = 0 \text{ dan } \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{F(u)}{\|u\|} = 0 \quad (2.11)$$

maka pernyataan berikut benar:

- a. Jika seluruh nilai eigen matriks A berada dalam lingkaran buka $|\lambda| < 1$, maka titik tetap persamaan linear

$$Y_{n+1} = AY_n, n = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

bersifat stabil asimtotik lokal. Dengan demikian, titik tetap persamaan (2.10) juga stabil asimtotik lokal.

- b. Jika terdapat nilai eigen matriks A yang memiliki nilai modulus lebih besar dari satu, maka titik tetap persamaan (2.10) dikatakan tidak stabil.
- c. Jika terdapat satu nilai eigen matriks A yang mempunyai nilai modulus satu dan nilai eigen lainnya berada pada lingkaran tertutup $|\lambda| \leq 1$, maka kestabilan titik tetap persamaan (2.10) tidak dapat ditentukan dengan kestabilan titik tetap persamaan (2.12) saja.

Teorema 2.1 berhubungan dengan kestabilan dari titik tetap pada persamaan (2.10). Ketika (2.11) benar, persamaan (2.12) disebut sebagai persamaan hasil linearisasi yang berkaitan dengan persamaan (2.10). Persamaan hasil linearisasi menentukan kestabilan lokal dari persamaan nonlinear yang terdapat pada pernyataan (a) dan (b) sebagaimana tertulis pada Teorema 2.1 (Kocic dan Ladas, 1993).

Teorema 2.2

Perhatikan persamaan beda orde $k + 1$

$$x(n + k + 1) - x(n + k) + qx(n) = 0, \quad (2.13)$$

yang mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^{k+1} - \lambda^k + q = 0.$$

Titik tetap $x^* = 0$ dari persamaan (2.13) bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$0 < q < 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2k + 1}\right).$$

(Elaydi, 2005)

2.3. Metode Euler

Metode beda hingga standar dibagi menjadi tiga yaitu beda maju, beda mundur, dan beda pusat. Pendekatan beda hingga standar didapatkan dari ekspansi Taylor $f(x)$ pada titik x_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i + h) &= f(x_i) + h \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3} + \dots \\ f(x_i - h) &= f(x_i) - h \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Berdasarkan persamaan (2.14) yang pertama, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{df(x_i)}{dx} &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3} + \dots \\ \frac{df(x_i)}{dx} &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + \sigma(h). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama fungsi f dengan beda maju adalah

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}.$$

Berdasarkan persamaan (2.14) yang kedua, diperoleh

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2!} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3} + \dots$$

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + \sigma(h).$$

Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama fungsi dengan beda mundur adalah

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h},$$

sedangkan untuk mendapatkan pendekatan beda pusat, kedua persamaan pada

(2.14) dikenakan operasi pengurangan sehingga diperoleh

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2h \frac{df(x_i)}{dx} + 2 \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3}$$

atau

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3} + \dots$$

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + \sigma(h^2).$$

Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama fungsi dengan beda pusat adalah

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

Metode *forward* Euler (selanjutnya disebut dengan metode Euler) adalah salah

satu skema diskritisasi yang paling sederhana yaitu dengan menggunakan

pendekatan beda maju. Pada metode ini, turunan pertama $\frac{dx}{dt}$ digantikan oleh

$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$ dengan h adalah ukuran langkah.

Untuk sistem persamaan diferensial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}),$$

ruas kiri digantikan oleh pendekatan beda maju yaitu

$$\frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} \approx \vec{f}(\vec{x}(t)).$$

Diskritisasi dengan metode Euler dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\vec{x}(t+h) = \vec{x}(t) + hf(\vec{x}(t)).$$

(Mathews, 2004)

2.4. Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda

Persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t-\tau) = 0, m \leq n \quad (2.15)$$

dengan τ adalah waktu tunda, $m \leq n$, dan

$$\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t).$$

Misalkan $x(t) = e^{\lambda t}$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} &= 0 \\ e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Oleh karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) disebut persamaan karakteristik persamaan (2.15).

Misalkan

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \text{ dan } P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.16) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.17)$$

(Kuang, 1993)

2.5. Bifurkasi Neimark-Sacker

Bifurkasi merupakan perubahan perilaku solusi karena nilai parameter berubah dan melampaui suatu nilai tertentu, yang nilai tersebut didefinisikan sebagai nilai bifurkasi (Robinson, 2004).

Definisi 2.1 (Bifurkasi Hopf)

Misalkan diberikan sistem otonomus nonlinear

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \tau), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

dengan \vec{f} kontinu dan titik tetap x^* . Bifurkasi yang terjadi berkaitan dengan adanya pasangan nilai eigen imajiner sekawan $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, yang dihasilkan melalui proses linearisasi pada suatu titik tetap sistem (2.18), melewati sumbu imajiner karena perubahan parameter τ . Pada waktu yang bersamaan muncul suatu orbit periodik dalam persekitarannya (Kuznetsov, 1998).

Definisi 2.2 (Nilai bifurkasi)

Berdasarkan sistem (2.18), nilai parameter $\tau = \tau_0$ disebut nilai bifurkasi jika terdapat solusi nontrivial sistem otonomus yang terdefinisi di persekitaran $(x^*, \tau_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (Verhulst, 1996).

Bifurkasi Hopf dalam sistem dinamik diskrit disebut dengan bifurkasi Neimark-Sacker.

Definisi 2.3 (Neimark-Sacker)

Menurut Kuznetsov (1998), bifurkasi yang berkaitan dengan munculnya nilai eigen $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega_0}$, $0 < \omega_0 < \pi$ disebut dengan bifurkasi Neimark-Sacker.

Diberikan suatu sistem dinamik diskrit dalam bentuk

$$\vec{x} \rightarrow \vec{f}(\vec{x}, \tau), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2. \quad (2.19)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) dengan $f(0, \tau) = 0$ untuk semua τ , terdapat asumsi sebagai berikut:

1. fungsi f memiliki matriks Jacobi A yang memenuhi

$$A(\tau) = D_x f(0, \tau),$$

dengan D_x merupakan operator turunan untuk x . $A(\tau_0)$, dengan τ_0 merupakan τ kritis, memiliki sepasang nilai eigen kompleks $\lambda(\tau_0)$ dan $\bar{\lambda}(\tau_0)$ yang tepat berada pada lingkaran satuan, sementara semua nilai eigen lainnya terletak di dalam lingkaran satuan,

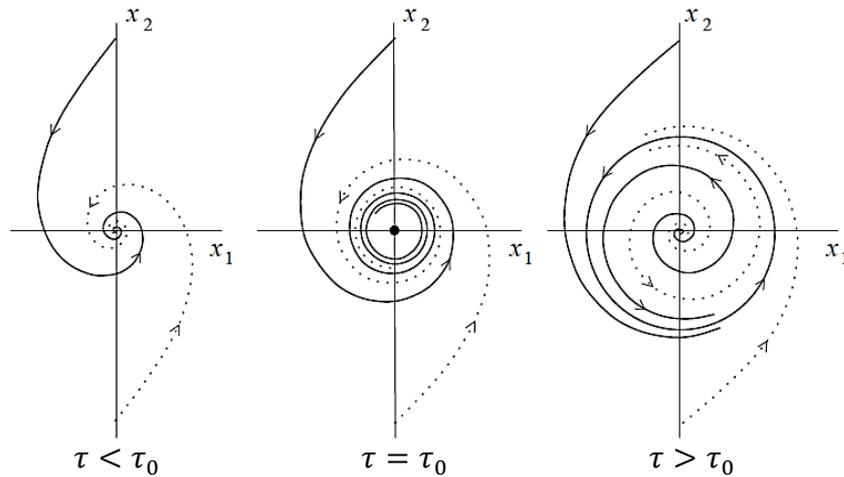
2. nilai eigen λ dan $\bar{\lambda}$ melintasi lingkaran saat $\tau = \tau_0$ dengan

$$\frac{d}{d\tau} |\lambda(\tau)|_{\tau=\tau_0} > 0,$$

3. jika $\arg(\lambda(\tau)) = \omega(\tau)$ dan $\omega_0 = \omega(\tau_0)$ maka $e^{i\omega_0 k} \neq 1$ untuk $k = 1, 2, 3, 4$.

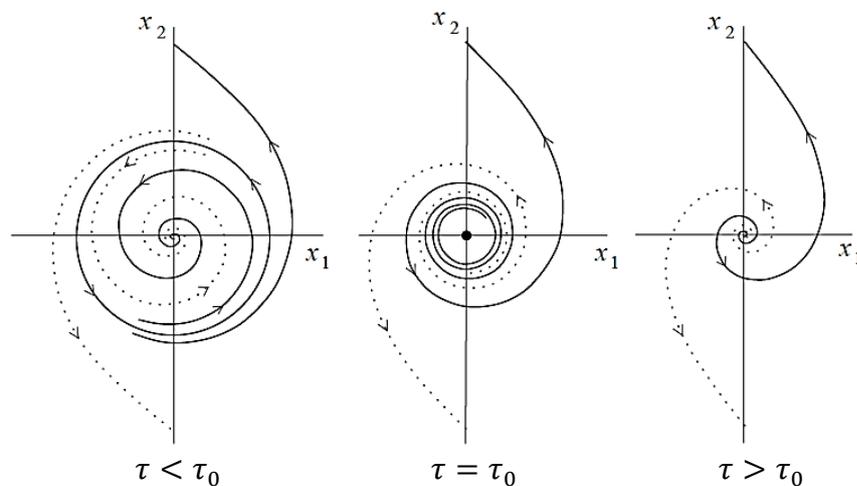
Kondisi dua menyatakan bahwa untuk $\tau < \tau_0$, τ cukup dekat dengan τ_0 , semua nilai eigen $A(\tau)$ memiliki modulus kurang dari satu. Titik tetap x^* adalah stabil asimtotik untuk τ dalam interval tersebut (Ford dan Wulf, 1998).

Menurut Kuznetsov (1998), jika terdapat $\tau = \tau_0$ sehingga muncul suatu *limit cycle* stabil pada sistem (2.19) ketika τ melewati titik kritis τ_0 maka sistem (2.19) tersebut mengalami bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical*. Parameter $\tau = \tau_0$ menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai bentuk $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega_0} > 0$. Hal ini berakibat pada perubahan struktur orbit dan munculnya *limit cycle* stabil dari sistem seiring dengan perubahan nilai parameter seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical*

Jika terdapat $\tau = \tau_0$ sehingga muncul suatu *limit cycle* tak stabil yang tereduksi pada sistem (2.19) ketika τ melewati titik kritis τ_0 maka sistem (2.19) tersebut mengalami bifurkasi Neimark-Sacker *Subcritical*. Parameter $\tau = \tau_0$ menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai bentuk $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega_0} > 0$. Sama halnya dengan bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical*, struktur orbit dan tereduksinya *limit cycle* yang tak stabil dari sistem juga akan berubah seiring dengan perubahan nilai parameter τ sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Bifurkasi Neimark-Sacker *Subcritical*

2.6. Model *Predator-Prey*

Makanan sebagai sumber energi adalah salah satu komponen esensial untuk kelangsungan hidup yang dapat membatasi pertumbuhan populasi. Pola hubungan produksi dan konsumsi bahan makanan antar spesies dalam ekosistem akan membentuk suatu rantai makanan atau jaring-jaring makanan. Model yang paling sederhana dari rantai makanan atau jaring-jaring makanan adalah model *predator-prey*. Dasar model interaksi ini adalah model Lotka-Volterra yang terdiri dari dua populasi. Dalam hal ini, populasi pertama memberi pengaruh positif terhadap populasi kedua, sedangkan populasi kedua memberi pengaruh negatif terhadap populasi pertama. Sistem persamaan sederhana dari model ini adalah sebagai berikut

$$\dot{x}(t) = x(t)(a - by(t)),$$

$$\dot{y}(t) = y(t)(-c + ex(t)),$$

dengan x menyatakan populasi *prey* dan y populasi *predator*, dengan semua parameter bernilai positif, $a, b, c, e > 0$ (Robinson, 2004).

Salah satu model Lotka-Volterra klasik yang pernah dikenalkan oleh Volterra adalah sebagai berikut

$$\dot{x}(t) = x(t)[r_1 + a_{11}x(t) + a_{12}y(t)],$$

$$\dot{y}(t) = y(t)[r_2 + a_{21}x(t) + a_{22}y(t)],$$

dengan x menyatakan kepadatan populasi *prey* dan y populasi *predator* pada saat waktu t (Zhao dan Lin, 2009).

Dalam perkembangan selanjutnya, pengaruh waktu tunda banyak mengambil perhatian para peneliti, dengan alasan waktu tunda ternyata banyak memberikan pengaruh dalam suatu sistem dinamik. Pada tahun 2009, Zhang dkk. meneliti

sebuah model Lotka-Volterra kompetisi dengan adanya pengaruh waktu tunda sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t - \tau)], \\ \dot{y}(t) &= y(t)[r_2 - a_{21}x(t - \tau) - a_{22}y(t - \tau)].\end{aligned}$$

Pemilihan waktu tunda τ sebagai parameter bifurkasi, menunjukkan adanya bifurkasi Hopf dalam analisis kestabilan titik tetap interior.

Pada tahun 2009, Zhao dan Lin juga melakukan penelitian terkait model Lotka-Volterra predator-prey dengan adanya waktu tunda sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t - \tau)], \\ \dot{y}(t) &= y(t)[r_2 + a_{21}x(t - \tau) - a_{22}y(t - \tau)],\end{aligned}\tag{2.20}$$

dengan $x(t)$ menyatakan kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ populasi *predator* pada saat waktu t , r_1 adalah laju pertumbuhan *prey*, a_{11} adalah laju kompetisi antar *prey*, a_{12} adalah laju berkurangnya *prey* karena adanya pemangsaan oleh *predator*, r_2 adalah laju pertumbuhan *predator*, a_{21} adalah laju bertambahnya *predator* karena adanya pemangsaan terhadap *prey*, a_{22} adalah laju kompetisi antar *predator*, dan τ adalah waktu tunda. Semua parameter $r_1, r_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \tau$ bernilai positif. Penelitian Zhao dan Lin juga menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf yang dipengaruhi suatu parameter bifurkasi waktu tunda τ .

Sifat utama sistem dinamik kontinu untuk model (2.20) yang dimiliki adalah

1. Sistem tersebut memiliki 4 kemungkinan jumlah titik tetap, yaitu

$$E_0(0,0), E_1(0, \frac{r_2}{a_{22}}), E_2(\frac{r_1}{a_{11}}, 0), \text{ dan } E^*(x^*, y^*), \text{ dengan}$$

$$x^* = \frac{a_{22}r_1 - a_{12}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}$$

dan

$$y^* = \frac{a_{21}r_1 + a_{11}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}.$$

2. Jenis kestabilan untuk keempat titik tetap adalah

- a) $E_0(0,0)$ tak stabil.
- b) $E_1(0, \frac{r_2}{a_{22}})$ stabil asimtotik jika jika $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0$.
- c) $E_2(\frac{r_1}{a_{11}}, 0)$ tak stabil.
- d) $E^*(x^*, y^*)$ stabil asimtotik lokal untuk $0 \leq \tau < \tau_0$ dan tak stabil ketika $\tau > \tau_0$ serta akan terjadi suatu bifurkasi Hopf ketika $\tau = \tau_0$.

(Zhao dan Lin, 2009)

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Diskritisasi Model *Predator-Prey* dengan Waktu Tunda

Pada bagian ini dibahas proses diskritisasi model *predator-prey* dengan waktu tunda (2.20) menggunakan metode Euler. Untuk mempermudah perhitungan dilakukan penskalaan pada sistem (2.20). Misalkan $\hat{t} = t\tau$, dan

$$u(t) = x(\hat{t}), v(t) = y(\hat{t}),$$

sehingga

$$x(\hat{t} - \tau) = x(t\tau - \tau) = x((t - 1)\tau) = u(t - 1),$$

$$y(\hat{t} - \tau) = y(t\tau - \tau) = y((t - 1)\tau) = v(t - 1).$$

Berdasarkan permisalan tersebut dan persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{dx(\hat{t})}{dt} = \frac{dx(\hat{t})}{d\hat{t}} \frac{d\hat{t}}{dt} = \tau \frac{dx(\hat{t})}{d\hat{t}} \\ &= \tau x(\hat{t}) [r_1 - a_{11}x(\hat{t} - \tau) - a_{12}y(\hat{t} - \tau)] \\ &= \tau u(t) [r_1 - a_{11}u(t - 1) - a_{12}v(t - 1)]. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{dv(t)}{dt} = \tau v(t) [r_2 + a_{21}u(t - 1) - a_{22}v(t - 1)].$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh hasil penskalaan sistem (2.20) sebagai berikut.

$$\frac{du(t)}{dt} = \tau u(t) [r_1 - a_{11}u(t - 1) - a_{12}v(t - 1)], \quad (3.1a)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \tau v(t) [r_2 + a_{21}u(t - 1) - a_{22}v(t - 1)]. \quad (3.1b)$$

Diskritisasi persamaan (3.1) dilakukan dengan mengubah persamaan diferensial yang kontinu terhadap waktu menjadi persamaan diskrit terhadap waktu. Metode numerik yang digunakan adalah metode Euler.

Misalkan $t = t_n$ dengan ukuran langkah (*stepsize*) h dan

$$t_n = t_0 + nh, \quad h = \frac{1}{m} \quad \text{dan} \quad hm = 1,$$

sehingga

$$\begin{aligned} t - 1 &= t_n - 1 \\ &= t_n - hm \\ &= t_0 + nh - hm \\ &= t_0 + h(n - m) \\ &= t_n - 1 = t_{n-m}, \end{aligned}$$

Oleh karena $t = t_n$ dan $t - 1 = t_{n-m}$, maka

$$u(t) = u(t_n) = u_n \quad \text{dan} \quad u(t - 1) = u(t_{n-m}) = u_{n-m},$$

$$v(t) = v(t_n) = v_n \quad \text{dan} \quad v(t - 1) = v(t_{n-m}) = v_{n-m}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$u(t) = u_n \quad \text{dan} \quad u(t - 1) = u_{n-m},$$

$$v(t) = v_n \quad \text{dan} \quad v(t - 1) = v_{n-m}.$$

Diskritisasi dilakukan dengan menggunakan pendekatan metode Euler, sehingga persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai persamaan diskrit

$$u_{n+1} = u_n + \tau h u_n (r_1 - a_{11} u_{n-m} - a_{12} v_{n-m}), \quad (3.2a)$$

$$v_{n+1} = v_n + \tau h v_n (r_2 + a_{21} u_{n-m} - a_{22} v_{n-m}). \quad (3.2b)$$

3.2. Titik Tetap

Pada dasarnya cara menentukan titik tetap untuk sistem dinamik kontinu dan sistem dinamik diskrit tidak jauh berbeda. Titik tetap suatu sistem dinamik diskrit adalah kondisi dimana $f(u^*, v^*) = u^*$ dan $g(u^*, v^*) = v^*$, sehingga diperoleh

$$u^* = u^* + \tau h u^* (r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^*), \quad (3.3a)$$

$$v^* = v^* + \tau h v^* (r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^*). \quad (3.3b)$$

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 1 diperoleh empat titik tetap sistem (3.2) yaitu titik tetap trivial $E_0 = (0,0)$, titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}\right)$, titik tetap kepunahan *predator* $E_2 = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$ dan titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$ dengan

$$u^* = \frac{a_{22} r_1 - a_{12} r_2}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}, \quad (3.4)$$

$$v^* = \frac{a_{21} r_1 + a_{11} r_2}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}.$$

Nilai u^* dan v^* disyaratkan harus positif, karena merupakan jumlah suatu populasi. Oleh karena semua parameter $r_1, r_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ bernilai positif, titik tetap E^* eksis jika dan hanya jika memenuhi

$$a_{22} r_1 - a_{12} r_2 > 0.$$

Berdasarkan hasil perhitungan, titik tetap yang diperoleh untuk sistem diskrit model *predator-prey* dengan waktu tunda sama dengan titik tetap model kontinunya. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa model diskrit *predator-prey* dengan waktu tunda ini memenuhi sifat 1 pada Subbab 2.6.1.

3.3. Kestabilan Titik Tetap

Analisis kestabilan titik tetap sistem nonlinear dapat dilakukan dengan analisis nilai eigen matriks Jacobi dari hasil linearisasi sistem. Sebagaimana uraian pada Lampiran 2, matriks Jacobi dari hasil linearisasi sistem persamaan diskrit nonlinear (3.2) adalah sebagai berikut.

$$A(E^*) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d & e & \cdots & 0 & f \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$$a = 1 + (r_1 - a_{11}u^* - a_{12}v^*)\tau h,$$

$$b = -a_{11}u^*\tau h,$$

$$c = -a_{12}u^*\tau h,$$

$$d = a_{21}v^*\tau h,$$

$$e = 1 + (r_2 + a_{21}u^* - a_{22}v^*)\tau h,$$

$$f = -a_{22}v^*\tau h.$$

Matriks Jacobi $A(E^*)$ berukuran $(2m + 2) \times (2m + 2)$.

3.3.1. Titik tetap trivial $E_0 = (0, 0)$

Sebagaimana yang telah diperoleh dalam Subbab 3.2, titik tetap trivial sistem persamaan (3.2) adalah

$$E_0 = (0, 0),$$

sehingga diperoleh matriks Jacobi

$$A(E_0) = \begin{pmatrix} 1 + r_1\tau h & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 + r_2\tau h & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen matriks $A(E_0)$ adalah solusi persamaan karakteristik $|\lambda I - A(E_0)| =$

0. Perhatikan bahwa

$$|\lambda I - A(E_0)|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - (1 + r_1\tau h) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda - (1 + r_2\tau h) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^{2m}[\lambda - (1 + r_1\tau h)][\lambda - (1 + r_2\tau h)] = 0$$

yang mempunyai akar karakteristik $\lambda_1 = (1 + r_1\tau h)$, $\lambda_2 = (1 + r_2\tau h)$ dan $\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_{2m+2} = 0$. Semua parameter bernilai positif, maka secara jelas diperoleh

$$|\lambda_1| = |1 + r_1\tau h| > 1,$$

$$|\lambda_2| = |1 + r_2\tau h| > 1,$$

$$|\lambda_3| = |\lambda_4| = \cdots = |\lambda_{2m+2}| = 0 < 1.$$

Oleh karena terdapat nilai eigen yang memiliki nilai modulus yang lebih besar dari satu, maka titik tetap $E_0 = (0,0)$ bersifat tidak stabil.

3.3.2. Titik tetap kepunahan prey $E_1 = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}\right)$

Matriks Jacobi untuk titik tetap kepunahan prey E_1 adalah

$$A(E_1) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & e_1 & \cdots & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

dengan

$$a_1 = 1 + \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}}\right)\tau h, d_1 = \frac{a_{21}r_2}{a_{22}}\tau h, e_1 = 1, \text{ dan } f_1 = -r_2\tau h,$$

sehingga diperoleh

$$|\lambda I - A(E_1)|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -d_1 & \lambda - e_1 & \cdots & 0 & -f_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dan persamaan karakteristik yang diperoleh adalah

$$\lambda^m[\lambda - a_1][\lambda^{m+1} - e_1\lambda^m - f_1] = 0,$$

atau

$$\lambda^m \left[\lambda - \left(1 + \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}}\right)\tau h\right) \right] [\lambda^{m+1} - \lambda^m + r_2\tau h] = 0.$$

Akar persamaan karakteristik tersebut adalah $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, $\lambda_{m+1} =$

$\left(1 + \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}}\right)\tau h\right)$, dan sebanyak $m + 1$ memenuhi persamaan $(\lambda^{m+1} - \lambda^m +$

$r_2\tau h) = 0$. Dengan demikian diperoleh

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_m| = 0 < 1.$$

Untuk akar persamaan yang ke- $(m + 1)$,

$$\lambda_{m+1} = \left(1 + \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}} \right) \tau h \right),$$

akan memiliki nilai modulus kurang dari satu jika memenuhi

$$\begin{aligned} \left| 1 + \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}} \right) \tau h \right| &< 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< 1 + \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}} \right) \tau h < 1 \\ \Leftrightarrow -2 &< \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}} \right) \tau h < 0 \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}} \right) \tau h &< 0 \\ \Leftrightarrow \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a_{22}r_1 - a_{12}r_2}{a_{22}} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow a_{22}r_1 - a_{12}r_2 &< 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} -2 &< \left(r_1 - \frac{a_{12}r_2}{a_{22}} \right) \tau h \\ \Leftrightarrow -2 &< \left(\frac{a_{22}r_1 - a_{12}r_2}{a_{22}} \right) \tau h \\ \Leftrightarrow h &< \frac{2a_{22}}{(a_{12}r_2 - a_{22}r_1)\tau}. \end{aligned}$$

Modulus λ_{m+1} akan bernilai kurang dari satu jika memenuhi

$$a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0 \text{ dan } h < \frac{2a_{22}}{(a_{12}r_2 - a_{22}r_1)\tau} = h_1.$$

Akar persamaan karakteristik yang memenuhi persamaan

$$\lambda^{m+1} - \lambda^m + r_2\tau h = 0,$$

berdasarkan Teorema 2.2, bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$0 < r_2\tau h < 2 \cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$

atau dapat dituliskan

$$0 < r_2\tau h \text{ (akan selalu terpenuhi)}$$

dan

$$\begin{aligned} r_2\tau h &< 2 \cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) \\ \Leftrightarrow h &< \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)}{r_2\tau}. \end{aligned}$$

Dengan demikian solusi persamaan tersebut bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$h < \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)}{r_2\tau} = h_2.$$

Berdasarkan kondisi yang ada, maka titik tetap $E_1 = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}\right)$ akan bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0$$

dan

$$h < \min\{h_1, h_2\}.$$

3.3.3. Titik tetap kepunahan predator $E_2 = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$

Matriks Jacobi untuk titik tetap kepunahan predator E_2 adalah

$$A(E_2) = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

dengan

$$a_2 = 1, b_2 = -r_1 \tau h, c_2 = -\frac{a_{12} r_1}{a_{11}} \text{ dan } e_2 = 1 + \left(r_2 + \frac{a_{21} r_1}{a_{11}} \right) \tau h,$$

sehingga diperoleh

$$|\lambda I - A(E_2)|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_2 & 0 & \cdots & 0 & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & -c_2 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda - e_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dan persamaan karakteristik yang diperoleh adalah

$$\lambda^m [\lambda - e_2] [\lambda^{m+1} - a_2 \lambda^m - b_2] = 0,$$

atau

$$\lambda^m \left[\lambda - \left(1 + \left(r_2 + \frac{a_{21} r_1}{a_{11}} \right) \tau h \right) \right] [\lambda^{m+1} - \lambda^m + r_1 \tau h] = 0.$$

Akar persamaan karakteristik tersebut adalah $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, $\lambda_{m+1} =$

$\left(1 + \left(r_2 + \frac{a_{21} r_1}{a_{11}} \right) \tau h \right)$, dan sebanyak $m + 1$ memenuhi persamaan $(\lambda^{m+1} - \lambda^m +$

$r_1 \tau h) = 0$. Semua parameter bernilai positif, maka secara jelas terlihat bahwa

$$|\lambda_{m+1}| = \left| 1 + \left(r_2 + \frac{a_{21} r_1}{a_{11}} \right) \tau h \right| > 1.$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa titik tetap $E_2 = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$ bersifat tidak stabil.

3.3.4. Titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$

Matriks Jacobi untuk titik tetap interior E^* adalah

$$A(E^*) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d & e & \cdots & 0 & f \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan

$$a = 1 + (r_1 - a_{11}u^* - a_{12}v^*)\tau h,$$

$$b = -a_{11}u^*\tau h,$$

$$c = -a_{12}u^*\tau h,$$

$$d = a_{21}v^*\tau h,$$

$$e = 1 + (r_2 + a_{21}u^* - a_{22}v^*)\tau h,$$

$$f = -a_{22}v^*\tau h.$$

Nilai eigen matriks $A(E^*)$ adalah solusi persamaan karakteristik $|\lambda I - A(E^*)| = 0$.

Perhatikan bahwa

$$|\lambda I - A(E^*)| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & \cdots & 0 & -b & 0 & \cdots & 0 & -c \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -d & \lambda - e & \cdots & 0 & -f \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^{2m+2} - (a + e)\lambda^{2m+1} + ae\lambda^{2m} - (b + f)\lambda^{m+1} + (af + be)\lambda^m + bf - cd = 0.$$

Misalkan

$$A_1 = -(a + e)$$

$$= -[(1 + (r_1 - a_{11}u^* - a_{12}v^*)\tau h) + (1 + (r_2 + a_{21}u^* - a_{22}v^*)\tau h)] = -2,$$

$$A_2 = ae = (1 + (r_1 - a_{11}u^* - a_{12}v^*)\tau h)(1 + (r_2 + a_{21}u^* - a_{22}v^*)\tau h)$$

$$= 1,$$

$$A_3 = -(b + f) = -(-a_{11}u^*\tau h - a_{22}v^*\tau h)$$

$$= (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h,$$

$$A_4 = af + be$$

$$= (1 + (r_1 - a_{11}u^* - a_{12}v^*)\tau h)(-a_{22}v^*\tau h)$$

$$+ (-a_{11}u^*\tau h)(1 + (r_2 + a_{21}u^* - a_{22}v^*)\tau h)$$

$$= -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h,$$

$$A_5 = bf - cd = (-a_{11}u^*\tau h)(-a_{22}v^*\tau h) - (-a_{12}u^*\tau h)(a_{21}v^*\tau h)$$

$$= (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*\tau^2 h^2,$$

maka persamaan karakteristik di atas dapat ditulis menjadi

$$\lambda^{2m+2} + A_1\lambda^{2m+1} + A_2\lambda^{2m} + A_3\lambda^{m+1} + A_4\lambda^m + A_5 = 0. \quad (3.5)$$

Lemma 3.1

Terdapat $\tau_0 > 0$ sedemikian hingga untuk $0 < \tau < \tau_0$ semua akar persamaan (3.5) mempunyai modulus kurang dari satu.

Bukti

Ketika $\tau = 0$, persamaan (3.5) menjadi

$$\lambda^{2m+2} - 2\lambda^{2m+1} + \lambda^{2m} = 0. \quad (3.6)$$

Persamaan (3.6) mempunyai sebanyak $2m$ akar bernilai 0 dan dua akar bernilai 1.

Hal yang perlu diperhatikan adalah akar-akar $\lambda(\tau)$ sedemikian hingga $|\lambda(0)| = 1$. Akar persamaan ini bergantung secara kontinu pada τ dan mempunyai fungsi diferensial dari τ . Berdasarkan perhitungan dalam Lampiran 3 dan persamaan (3.5) dapat ditunjukkan bahwa $\frac{d\lambda}{d\tau}$ yang memenuhi persamaan berikut

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)h\frac{d\lambda}{d\tau} + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*h^2 = 0.$$

Misalkan

$$(a_{11}u^* + a_{22}v^*)^2h^2 - 4(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*h^2 = 0, \quad (3.7)$$

maka

$$\frac{d\lambda}{d\tau}\Big|_{\tau=0, \lambda=1} = \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)}{2} \quad (3.8)$$

dan bentuk konjugatnya adalah

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\tau}\Big|_{\tau=0, \lambda=1} = \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)}{2}. \quad (3.9)$$

Dengan menggunakan prinsip operasi bilangan kompleks $|\lambda|^2 = \bar{\lambda}\lambda$, dapat diperoleh

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\tau} = \lambda \frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} + \bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}. \quad (3.10)$$

Persamaan (3.8) dan (3.9) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.10), sehingga diperoleh

$$\left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=0, \lambda=1} = -(a_{11}u^* + a_{22}v^*) < 0.$$

Nilai turunan pada saat $\tau = 0$ dan $\lambda = 1$ bernilai negatif. Berdasarkan penjelasan pada subbab 2.6.1, hal ini menunjukkan bahwa akar persamaan (3.5) berada dalam lingkaran satuan atau $|\lambda| < 1$ untuk suatu $\tau > 0$. Dengan kata lain, terdapat nilai $\tau_0 > 0$ sedemikian hingga semua akar persamaan (3.5) terletak pada $|\lambda| < 1$, yaitu ketika $0 < \tau < \tau_0$. Jadi keberadaan dari maksimal τ_0 terbukti. Dengan demikian Lemma 3.1 terbukti.

Misalkan pada saat τ_0 terdapat $\omega_0 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\lambda = e^{i\omega_0}$ adalah akar persamaan (3.5). Substitusikan akar tersebut ke dalam persamaan (3.5) menghasilkan

$$e^{i(2m+2)\omega_0} + A_1 e^{i(2m+1)\omega_0} + A_2 e^{i(2m)\omega_0} + A_3 e^{i(m+1)\omega_0} + A_4 e^{im\omega_0} + A_5 = 0$$

yang dapat pula dinyatakan dalam bentuk polar sebagai persamaan

$$\begin{aligned} &\cos(2m+2)\omega_0 + i \sin(2m+2)\omega_0 + A_1 [\cos(2m+1)\omega_0 + i \sin(2m+1)\omega_0] \\ &+ A_2 [\cos 2m\omega_0 + i \sin 2m\omega_0] + A_3 [\cos(m+1)\omega_0 + i \sin(m+1)\omega_0] \\ &+ A_4 [\cos m\omega_0 + i \sin m\omega_0] + A_5 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Karena ruas kanan persamaan (3.11) adalah bilangan real bernilai 0, persamaan (3.11) dapat dipisahkan antara bagian real dan imajinernya. Bagian real persamaan (3.11) adalah

$$\begin{aligned} &\cos(2m+2)\omega_0 + A_1 \cos(2m+1)\omega_0 + A_2 \cos 2m\omega_0 + A_3 \cos(m+1)\omega_0 \\ &+ A_4 \cos m\omega_0 + A_5 = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

dan bagian imajiner persamaan (3.11) adalah

$$\begin{aligned} \sin(2m+2)\omega_0 + A_1 \sin(2m+1)\omega_0 + A_2 \sin 2m\omega_0 + A_3 \sin(m+1)\omega_0 \\ + A_4 \sin m\omega_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Berdasarkan persamaan (3.12) dan (3.13), terdapat barisan tak terhingga nilai parameter waktu tunda $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots$ yang memenuhi.

Lemma 3.2

Jika diasumsikan ukuran langkah h bernilai cukup kecil, maka

$$d_h = \left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} > 0.$$

Bukti

Persamaan (3.5) dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned} \lambda^{2m+2} - 2\lambda^{2m+1} + \lambda^{2m} + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h \lambda^{m+1} - (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h \lambda^m \\ + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*\tau^2 h^2 = 0, \end{aligned}$$

atau dapat pula ditulis dalam bentuk

$$\lambda^{m+1} - \lambda^m + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h = \frac{-(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*\tau^2 h^2}{\lambda^m(\lambda - 1)}. \quad (3.14)$$

Oleh karena *step size* h bernilai cukup kecil, persamaan (3.14) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^{m+1} - \lambda^m + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h = o(h^2). \quad (3.15)$$

Dengan demikian ruas kanan pada persamaan (3.15) dapat diabaikan.

Berdasarkan persamaan (3.15), dapat diperoleh nilai $\frac{d\lambda}{d\tau}$ dengan menurunkan persamaan (3.15) terhadap τ , yaitu

$$(m+1)\lambda^m \frac{d\lambda}{d\tau} - m\lambda^{m-1} \frac{d\lambda}{d\tau} = -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h,$$

atau

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h}{(m+1)\lambda^m - m\lambda^{m-1}}$$

dan bentuk konjugatnya adalah

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} = \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h}{(m+1)\bar{\lambda}^m - m\bar{\lambda}^{m-1}}$$

Berdasarkan persamaan (3.15), didefinisikan

$$\begin{aligned} \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} &= \left[\lambda \frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} + \bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right] \\ &= \left[\lambda \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h}{(m+1)\bar{\lambda}^m - m\bar{\lambda}^{m-1}} + \bar{\lambda} \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h}{(m+1)\lambda^m - m\lambda^{m-1}} \right] \\ &= -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h \\ &\quad \times \frac{\lambda[(m+1)\lambda^m - m\lambda^{m-1}] + \bar{\lambda}[(m+1)\bar{\lambda}^m - m\bar{\lambda}^{m-1}]}{[(m+1)\bar{\lambda}^m - m\bar{\lambda}^{m-1}][(m+1)\lambda^m - m\lambda^{m-1}]} \\ &= -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h \\ &\quad \times \frac{(m+1)\lambda^{m+1} - m\lambda^m + (m+1)\bar{\lambda}^{m+1} - m\bar{\lambda}^m}{(m+1)^2 - (m^2+m)\lambda^{-1} - (m^2+m)\bar{\lambda}^{-1} + m^2} \\ &= -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h \\ &\quad \times \frac{(m+1)(\lambda^{m+1} + \bar{\lambda}^{m+1}) - m(\lambda^m + \bar{\lambda}^m)}{(m+1)^2 + m^2 - (m^2+m)(\lambda^{-1} + \bar{\lambda}^{-1})} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d_h &= \left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} \\ &= -((a_{11}u^* + a_{22}v^*)h) \times \frac{2(m+1)\cos(m+1)\omega_0 - 2m\cos m\omega_0}{(m+1)^2 + m^2 - 2m(m+1)\cos\omega_0}. \end{aligned}$$

(3.16)

Berdasarkan perhitungan dalam Lampiran 4, diperoleh nilai

$$\cos \omega_0 = 1 - \frac{[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h]^2}{2}, \quad (3.17)$$

$$\cos m\omega_0 = \frac{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h}{2}, \quad (3.18)$$

dan

$$\cos(m+1)\omega_0 = -\frac{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h}{2}. \quad (3.19)$$

Untuk memperoleh nilai d_h , persamaan (3.17), (3.18), dan (3.19) disubstitusi ke persamaan (3.16) (sebagaimana perhitungan dalam Lampiran 5), diperoleh

$$d_h = \frac{(2m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h][(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h]}{1 + m(m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h + o(h)]^2}. \quad (3.20)$$

Oleh karena semua nilai parameter bernilai positif, nampak jelas pada persamaan (3.20) bahwa bagian penyebut dan pembilang selalu bernilai positif, sehingga

$$d_h = \left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} > 0,$$

dan dapat disimpulkan bahwa Lemma 3.2 terbukti. Berdasarkan penjelasan dalam Subbab 2.6.1, Lemma 3.2 menunjukkan bahwa nilai eigen persamaan (3.5) melintasi lingkaran $|\lambda| = 1$ pada saat $\tau = \tau_0$.

Lemma 3.1 dan Lemma 3.2 dapat disimpulkan dalam Teorema 3.1 berikut.

Teorema 3.1

Diasumsikan kondisi (3.7) terpenuhi, maka

- i) Titik tetap interior $E^*(u^*, v^*)$ sistem (3.2) bersifat stabil asimtotik lokal untuk $\tau \in [0, \tau_0)$ dan tak stabil untuk $\tau > \tau_0$.
- ii) Titik tetap interior $E^*(u^*, v^*)$ sistem (3.2) mengalami bifurkasi Neimark-Sacker saat $\tau = \tau_0$.

Bukti

- i) Misalkan kondisi (3.7) terpenuhi. Berdasarkan Lemma 3.1 dapat diketahui bahwa semua akar persamaan (3.5) mempunyai modulus kurang dari satu ketika $\tau \in [0, \tau_0)$, dan persamaan (3.5) memiliki sedikitnya sepasang akar dengan modulus yang lebih besar dari satu ketika $\tau > \tau_0$, sehingga bagian i) Teorema 3.1 terbukti.
- ii) Berdasarkan Lemma 3.2, nilai eigen persamaan (3.5) melintasi lingkaran $|\lambda| = 1$ pada saat $\tau = \tau_0$. Sebagai akibatnya terjadi perubahan kestabilan pada titik tetap interior $E^*(u^*, v^*)$ sistem (3.2), dimana perubahan kestabilan ini dinamakan bifurkasi Neimark-Sacker. Oleh karena itu bagian ii) Teorema 3.1 terbukti.

Hasil analisis model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda secara ringkas dapat dilihat pada Tabel 3.1

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik tetap

Titik tetap	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_0 = (0,0)$	Tidak ada	Tak stabil	Tidak ada
$E_1 = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}\right)$	Tidak ada	Stabil asimtotik lokal	$a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0$ dan $h < \min\{h_1, h_2\}$
$E_2 = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$	Tidak ada	Tak stabil	Tidak ada
$E^* = (u^*, v^*)$	$a_{22}r_1 - a_{12}r_2 > 0$	<ul style="list-style-type: none"> • Stabil asimtotik lokal • Bifurkasi Neimark-Sacker <i>Supercritical</i> • Tak stabil 	<ul style="list-style-type: none"> • $0 \leq \tau < \tau_0$ • $\tau = \tau_0$ • $\tau > \tau_0$

3.4. Simulasi Numerik

Pada subbab ini, disimulasikan solusi sistem (3.2). Untuk mensimulasikan hasil analisis model secara numerik digunakan metode Euler pada *software* MATLAB. *Source code* program dapat dilihat pada Lampiran 7. Nilai τ_0 (nilai bifurkasi) diperoleh dengan menggunakan bantuan *software* MAPLE dan *source code* programnya dapat dilihat pada Lampiran 6.

Simulasi numerik berikut menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2. Nilai-nilai parameter

Simulasi	Parameter							
	r_1	r_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	m	τ
I	0.4	1	1	1	2	1	20	1.5
II	0.4	1	1	1	2	1	20	1.7
III	1	0.4	1	1	2	1	5	1
								1.06
							10	1.12
							20	1.12
							1.145	

Simulasi I dan II disajikan untuk memperlihatkan sifat kestabilan titik tetap kepunahan *prey* E_1 , sedangkan Simulasi III disajikan untuk memperlihatkan sifat kestabilan titik tetap interior titik tetap E^* .

3.4.1. Simulasi I

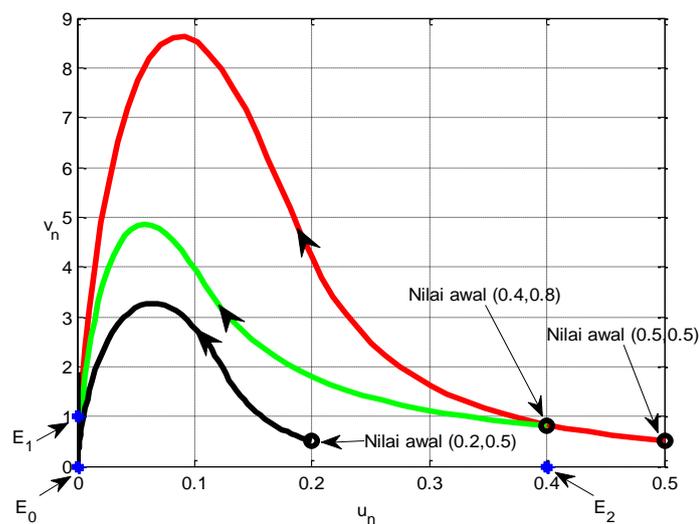
Pada simulasi ini digunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.2. Berdasarkan parameter yang ada diperoleh titik tetap trivial $E_0 = (0,0)$, titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (0,1)$, titik tetap kepunahan *predator* $E_2 = (0.4,0)$, dan

$$a_{22}r_1 - a_{12}r_2 = -0.6 < 0,$$

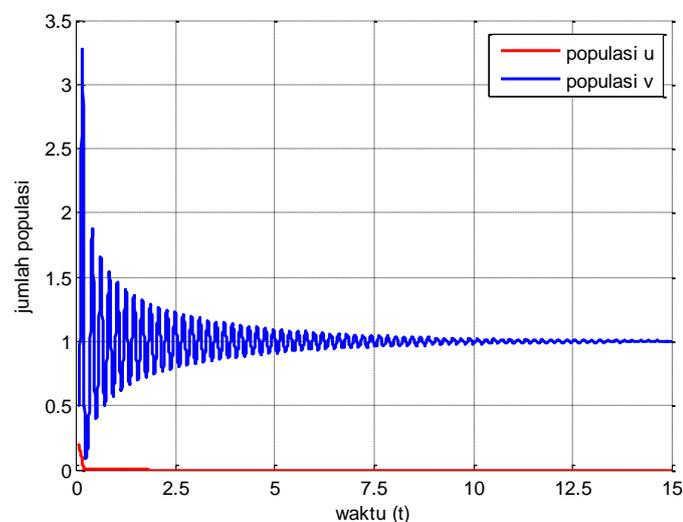
$$h_1 = \frac{2a_{22}}{(a_{12}r_2 - a_{22}r_1)\tau} = 3.334,$$

$$h_2 = \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)}{r_2\tau} = 0.051.$$

Oleh karena nilai $m = 20$, maka diperoleh $h = 0.05$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $h < \min\{h_1, h_2\}$. Berdasarkan hasil analisis, titik tetap bebas prey $E_1 = (0,1)$ akan bersifat stabil asimtotik dan titik tetap $E^* = (u^*, v^*)$ tidak akan pernah eksis untuk nilai parameter yang telah diberikan pada simulasi ini seperti ditunjukkan Gambar 3.1 dan Gambar 3.2.



Gambar 3.1 Potret fase model untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0$, $m = 20$, dan $\tau = 1.5$



Gambar 3.2 Grafik solusi u_n dan v_n untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0$, $m = 20$, dan $\tau = 1.5$

Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 memperlihatkan bahwa dengan tiga nilai awal yang diberikan, ketiga grafik solusi menuju titik $E_1 = (0,1)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $E_1 = (0,1)$ bersifat stabil asimtotik. Terlihat juga bahwa titik tetap $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (0,1)$, dan $E_2 = (0.4,0)$ eksis, namun titik tetap $E^* = (u^*, v^*)$ tidak eksis. Hal ini berarti bahwa pada kasus ini, setelah waktu yang cukup lama populasi *prey* akan punah dan hanya ada populasi *predator* dalam ekosistem.

3.4.2. Simulasi II

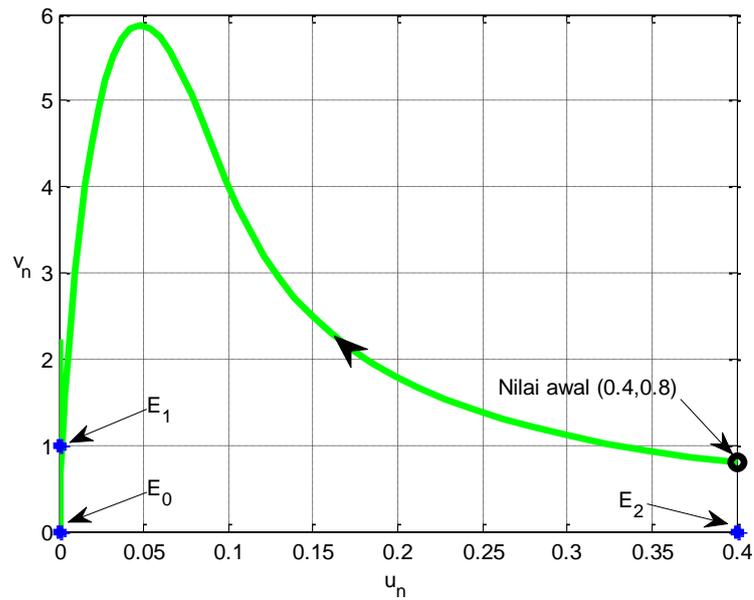
Simulasi II digunakan nilai-nilai parameter seperti pada Tabel 3.2. Berdasarkan parameter yang ada diperoleh titik tetap trivial $E_0 = (0,0)$, titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (0,1)$, titik tetap kepunahan *predator* $E_2 = (0.4,0)$, dan

$$a_{22}r_1 - a_{12}r_2 = -0.6 < 0,$$

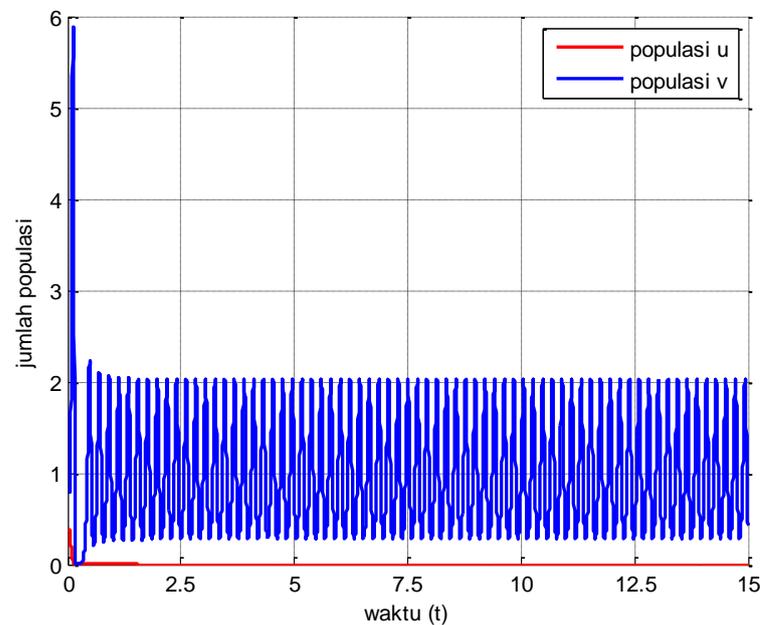
$$h_1 = \frac{2a_{22}}{(a_{12}r_2 - a_{22}r_1)\tau} = 3.334,$$

$$h_2 = \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)}{r_2\tau} = 0.045.$$

Oleh karena nilai $m = 20$, maka diperoleh $h = 0.05$. Berbeda dari simulasi I, dengan nilai-nilai parameter yang ada diperoleh $h_2 < h < h_1$. Hal ini bertentangan dengan syarat kestabilan titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (0,1)$ dan juga bertentangan dengan syarat eksistensi titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$. Berdasarkan hasil analisis titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (0,1)$ bersifat tidak stabil dan titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$ tidak eksis. Kondisi ini dapat dilihat dalam hasil simulasi pada Gambar 3.3 dan 3.4.



Gambar 3.3 Potret fase model untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0$, $m = 20$, dan $\tau = 1.7$



Gambar 3.4 Grafik solusi u_n dan v_n untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 < 0$, $m = 20$, dan $\tau = 1.7$

Berdasarkan Gambar 3.3 dan 3.4, dengan nilai awal (0.4,0.8) grafik solusi tidak menuju ke titik tetap manapun, tetapi terjadi orbit periodik di sekitar titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (0,1)$. Simulasi ini menunjukkan bahwa telah terjadi bifurkasi pada titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (0,1)$ dengan adanya perubahan

nilai parameter waktu tunda τ . Dalam hal ini, peristiwa terjadinya bifurkasi pada titik tetap bebas *prey* E_1 tidak dibahas dalam analisis.

3.4.3. Simulasi III

Pada simulasi ini digunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.2 dengan beberapa variasi nilai τ dan m . Berdasarkan parameter yang ada diperoleh titik tetap trivial $E_0 = (0,0)$, titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (0,0.4)$, titik tetap kepunahan *predator* $E_2 = (1,0)$, titik tetap interior $E^* = (0.2,0.8)$ dan

$$a_{22}r_1 - a_{12}r_2 = 0.6 > 0,$$

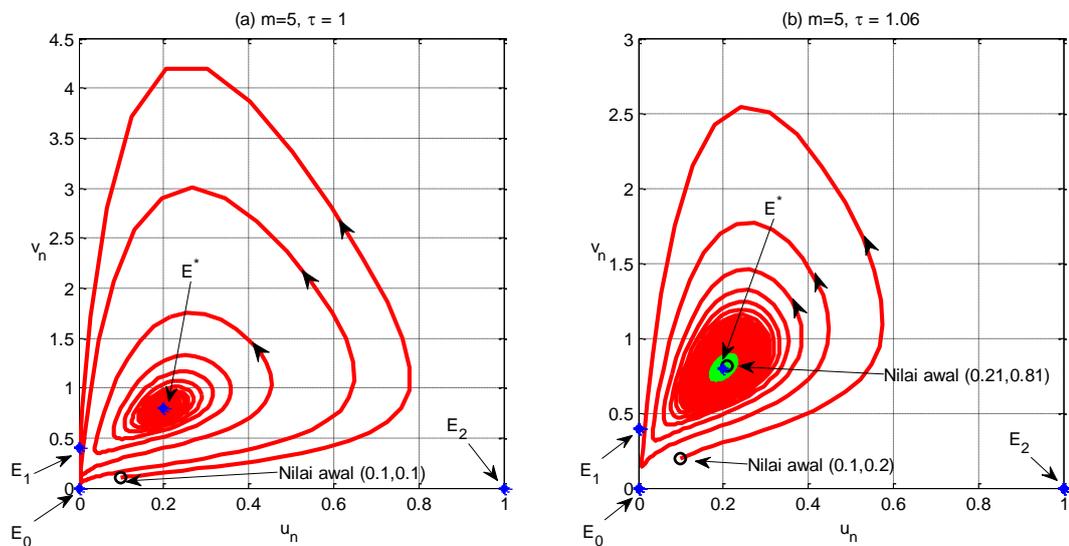
yang berarti bahwa syarat eksistensi titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$ terpenuhi dan ketiga titik tetap yang lain juga eksis.

Jika diambil nilai $m = 5$, maka diperoleh nilai $h = 0.2$, sehingga juga diperoleh nilai $\tau_0 = 1.05697$. Berdasarkan Teorema 3.1, titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$ bersifat stabil asimtotik lokal saat $0 \leq \tau < \tau_0$, terjadi bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical* saat $\tau = \tau_0$, dan bersifat tak stabil $\tau > \tau_0$ sebagaimana yang ditunjukkan dalam Gambar 3.5.

Berdasarkan Gambar 3.5a., dengan nilai awal $(0.1,0.1)$ dan waktu tunda $\tau = 1 < 1.05697 = \tau_0$ grafik solusi menuju titik tetap interior $E^* = (0.2,0.8)$. Dalam kondisi ini, jika parameter pada simulasi ini terjadi di alam, maka dalam waktu jangka panjang populasi *prey* dan populasi *predator* hidup berdampingan di alam, atau dengan kalimat lain tidak ada populasi *prey* maupun populasi *predator* yang punah.

Berdasarkan Gambar 3.5b., dengan waktu tunda $\tau = 1.06 > 1.05697 = \tau_0$ dan nilai awal $(0.1,0.1)$, grafik solusi tidak menuju titik tetap interior $E^* =$

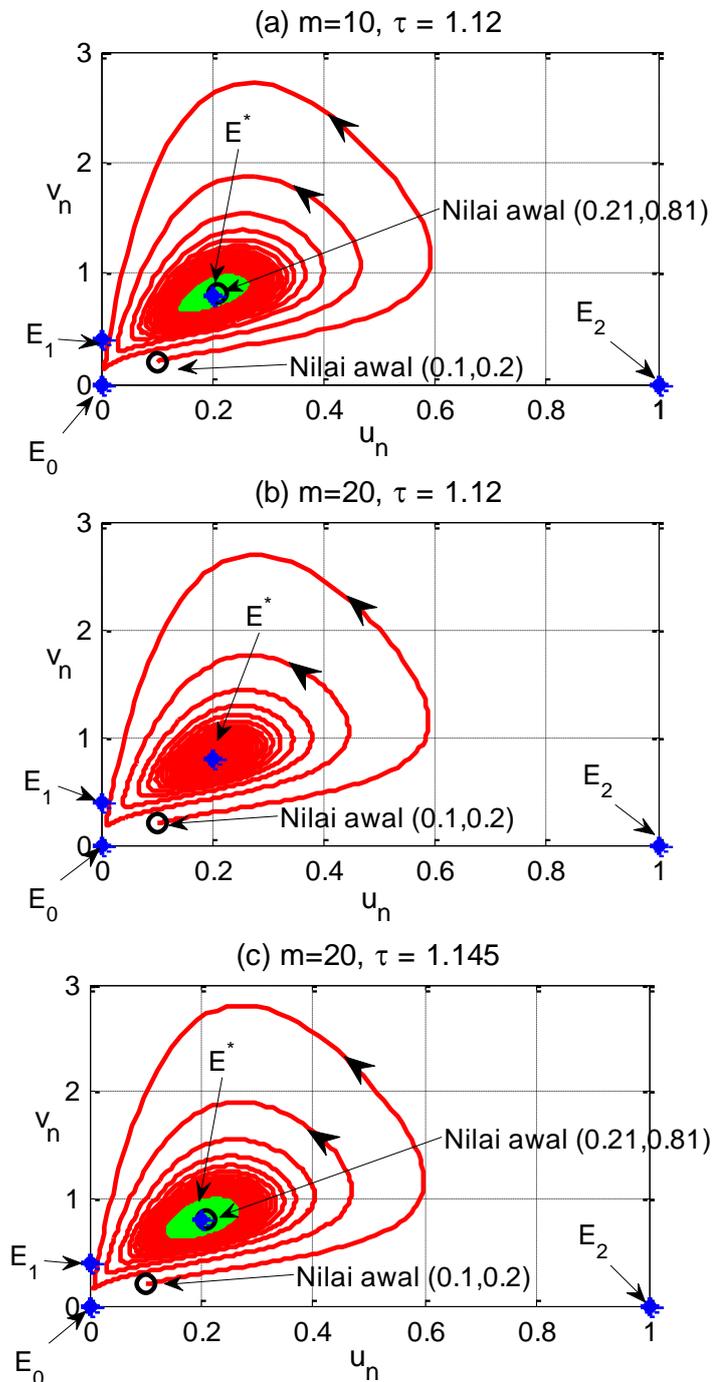
(0.2,0.8) tetapi menuju suatu orbit periodik. Begitu pula jika diambil nilai awal yang sangat dekat dengan titik tetap interior $E^* = (0.2,0.8)$, yaitu (0.21,0.81), grafik solusi menjauhi titik tetap interior $E^* = (0.2,0.8)$ dan menuju suatu orbit periodik yang sama dengan sebelumnya. Dalam kondisi ini, titik tetap interior $E^* = (0.2,0.8)$, yaitu (0.21,0.81) mengalami perubahan kestabilan seiring dengan adanya perubahan nilai parameter waktu tunda τ , dimana perubahan kestabilan ini dinamakan bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical* dengan nilai bifurkasi $\tau_0 = 1.05697$. Hal ini sesuai dengan Teorema 3.1.



Gambar 3.5 Potret fase model untuk untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 > 0$, dengan (a) $m = 5, \tau = 1$, dan (b) $m = 5, \tau = 1.06$

Dengan nilai parameter yang sama seperti sebelumnya dan dipilih nilai $m = 10$ diperoleh nilai $h = 0.1$ dan nilai τ_0 yang berbeda dari sebelumnya, yaitu $\tau_0 = 1.108017$. Berdasarkan Gambar 3.6a., apabila diambil nilai $\tau = 1.12 > \tau_0 = 1.108017$ maka grafik solusi tidak menuju titik tetap $E^* = (0.2,0.8)$ akan tetapi menuju suatu orbit periodik yang stabil. Dengan kata lain titik $E^* = (0.2,0.8)$ bersifat tak stabil saat nilai $\tau > \tau_0$. Akan tetapi jika dipilih nilai m

yang lebih besar lagi, yaitu $m = 20$, maka diperoleh nilai $h = 0.05$ dan nilai $\tau_0 = 1.13525$.



Gambar 3.6 Potret fase model untuk untuk $a_{22}r_1 - a_{12}r_2 > 0$, dengan (a) $m = 10, \tau = 1.12$, (b) $m = 20, \tau = 1.12$, dan (c) $m = 20, \tau = 1.145$

Hasil simulasi pada Gambar 3.6b. dan Gambar 3.6c., dengan nilai $\tau = 1.12 < \tau_0 = 1.13525$, menunjukkan bahwa grafik solusi menuju titik tetap $E^* = (0.2, 0.8)$, sedangkan dengan nilai $\tau = 1.145 > \tau_0 = 1.13525$, grafik solusi menuju orbit periodik stabil, sehingga dalam kasus ini titik tetap $E^* = (0.2, 0.8)$ mengalami perubahan kestabilan seiring dengan berubahnya nilai parameter waktu tunda τ yang melintasi nilai τ_0 . Dengan demikian, simulasi III juga mendukung hasil analisis dalam Teorema 3.1, bahwa titik tetap interior $E^*(u^*, v^*)$ bersifat stabil asimtotik untuk $\tau \in [0, \tau_0)$ dan tak stabil untuk $\tau > \tau_0$, serta titik tetap interior $E^*(u^*, v^*)$ mengalami bifurkasi Neimark-Sacker saat $\tau = \tau_0$. Hal ini berarti bahwa pada kasus ini, jika waktu tunda sistem yang diambil kurang dari τ_0 maka dalam waktu yang cukup lama populasi prey dan predator akan hidup berdampingan di alam dalam suatu jumlah tertentu. Jika waktu tunda sistem yang diambil adalah sebesar τ_0 atau lebih maka dalam waktu yang cukup lama jumlah populasi prey dan predator akan selalu mengalami perubahan dan tidak dapat dipastikan jumlahnya secara pasti.

Berdasarkan hasil-hasil simulasi numerik yang telah diperoleh pada simulasi III (Gambar 3.5 dan Gambar 3.6), dapat diketahui bahwa hasil-hasil tersebut sesuai dengan hasil analisis. Selanjutnya, hasil simulasi numerik juga menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter m yang digunakan, maka nilai h yang diperoleh akan semakin kecil. Akibatnya nilai τ_0 akan mendekati nilai τ_0 yang ada dalam analisis model *predator-prey* kontinu, yaitu $\tau_0 = 1.1637$.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda diperoleh dengan melakukan diskritisasi model menggunakan pendekatan metode Euler. Hasil analisis menunjukkan bahwa pada model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda terdapat empat titik tetap, yaitu titik tetap trivial E_0 , titik tetap kepunahan *prey* E_1 , titik tetap kepunahan *predator* E_2 dan titik tetap interior E^* . Titik tetap interior E^* eksis dengan syarat tertentu. Titik tetap trivial E_0 dan titik tetap kepunahan *predator* E_2 tidak pernah stabil. Kestabilan titik tetap kepunahan *prey* E_1 dan titik tetap interior E^* ditentukan oleh suatu kondisi tertentu. Titik tetap interior E^* mengalami bifurkasi Neimark-Sacker dengan parameter bifurkasi τ_0 .
2. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Selanjutnya, hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa nilai ukuran langkah h berpengaruh besar terhadap nilai bifurkasi τ_0 . Jika nilai ukuran langkah h semakin kecil maka nilai bifurkasi τ_0 yang diperoleh akan mendekati nilai bifurkasi τ_0 model kontinunya.

4.2. Saran

Pada pengkajian selanjutnya dapat dilakukan analisis terhadap arah bifurkasi dan adanya *chaos* pada titik tetap interior $E^*(u^*, v^*)$ model *predator-prey* diskrit dengan waktu tunda. Selain itu dapat pula dilakukan analisis terjadinya bifurkasi pada titik tetap kepunahan *prey*.

DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D.K. dan C. M Place. 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. USA.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Third edition, Springer. New York.
- Ford, N.J., dan V. Wulf. 1998. Numerical Hopf Bifurcation for The Delay Logistic Equation. *MCCM Numerical Analysis Report* No. 323. Manchester University. Inggris.
- Jie, W., Z. Xi-Sheng, Z. Xian-He, dan G. Hong-Liang. 2011. Stability and Hopf Bifurcation Analysis on a Numerical Discretization of the Distributed Delay Equation. *Chinese Physic Letter*, vol. 29: 050203 doi:10.1088/0256-307X/29/5/050203.
- Kocic, V.L. dan G. Ladas. 1993. *Global Behaviour of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Kuang, Y. 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Inc. London.
- Kuznetsov, Y.A. 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory, Second Edition*. Springer Verlag. New York.
- Mathews, J.H. 2004. *Numerical Methods Using Matlab*. Fourth Edition, Pearson Prentice Hall. New Jersey.
- Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction Third Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Perko, L. 1996. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition, Springer-Verlag. New York.
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. Prentice Hall, Reading, MA.
- Verhulst, F. 1996. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg. New York.
- Zhang, J., Z. Jin, J. Yan, dan G. Sun. 2009. Stability and Bifurcation Analysis for A Delayed Lotka-Volterra Predator-Prey System. *J. Comput. Appl. Math.*, vol.70: 658-670.
- Zhao, H. dan Y.Lin. 2009. Hopf Bifurcation in A Partial Dependent Predator-Prey System with Delay. *Chaos Solitons and Fractal*, vol.42: 896-900.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan Nilai Titik Tetap

Titik tetap sistem (3.2) adalah saat memenuhi kondisi dimana $f(u^*, v^*) = u^*$ dan $g(u^*, v^*) = v^*$, sehingga diperoleh

$$u^* = u^* + \tau h u^* (r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^*), \quad (1)$$

$$v^* = v^* + \tau h v^* (r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^*). \quad (2)$$

Persamaan (1) dan (2) dapat dinyatakan dalam

$$0 = \tau h u^* (r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^*), \quad (3)$$

$$0 = \tau h v^* (r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^*). \quad (4)$$

Dari persamaan (3) diperoleh

$$u^* = 0, \quad (5)$$

atau

$$r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^* = 0. \quad (6)$$

Dari persamaan (4) diperoleh

$$v^* = 0, \quad (7)$$

atau

$$r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^* = 0. \quad (8)$$

Titik tetap persamaan (3.2) diperoleh dari kombinasi persamaan (5)-(8), yaitu

$$(u^* = 0 \vee r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^* = 0) \wedge (v^* = 0 \vee r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^* = 0).$$

1. Dari persamaan (5) dan (7)

$$u^* = 0 \text{ dan } v^* = 0,$$

diperoleh titik tetap trivial $E_0 = (u_0^*, v_0^*) = (0, 0)$, dimana jumlah populasi *prey* dan *predator* bernilai nol.

2. Dari persamaan (5) dan (8)

$$u^* = 0 \text{ dan } r_2 + a_{21}u^* - a_{22}v^* = 0,$$

diperoleh

$$v^* = \frac{r_2}{a_{22}}.$$

Dengan demikian diperoleh titik tetap kepunahan *prey* $E_1 = (u_1^*, v_1^*) = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}\right)$, dimana dalam sistem populasi *prey* bernilai nol.

3. Dari persamaan (6) dan (7)

$$r_1 - a_{11}u^* - a_{12}v^* = 0 \text{ dan } v^* = 0,$$

diperoleh

$$u^* = \frac{r_1}{a_{11}}.$$

Dengan demikian diperoleh titik tetap kepunahan *predator* $E_2 = (u_2^*, v_2^*) = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$, dimana dalam sistem populasi *predator* bernilai nol.

4. Dari persamaan (6)

$$u^* = \frac{r_1 - a_{12}v^*}{a_{11}} \tag{9}$$

disubstitusi ke persamaan (8) diperoleh

$$r_2 + a_{21} \frac{r_1 - a_{12}v^*}{a_{11}} - a_{22}v^* = 0,$$

$$v^* = \frac{a_{21}r_1 + a_{11}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}. \tag{10}$$

Persamaan (10) disubstitusikan ke persamaan (9) diperoleh

$$u^* = \frac{a_{22}r_1 - a_{12}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}.$$

Dengan demikian diperoleh titik tetap interior $E^* = (u^*, v^*)$

$$u^* = \frac{a_{22}r_1 - a_{12}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}},$$

$$v^* = \frac{a_{21}r_1 + a_{11}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}.$$

Titik tetap interior menunjukkan bahwa populasi *prey* dan *predator* hidup berdampingan dalam sistem.

Lampiran 2. Linearisasi Sistem (3.2) Hingga Pembentukan Matriks Jacobi $A(E^*)$

Sistem persamaan (3.2) merupakan sistem persamaan nonlinear, sehingga perlu dilakukan linearisasi terlebih dahulu untuk memeriksa kestabilan titik-titik tetapnya sebagaimana yang telah dijelaskan dalam subbab 2.2.2. Sistem persamaan (3.2) yang akan dilinearisasi adalah

$$u_{n+1} = u_n + \tau h u_n (r_1 - a_{11} u_{n-m} - a_{12} v_{n-m}) \quad (1a)$$

$$v_{n+1} = v_n + \tau h v_n (r_2 + a_{21} u_{n-m} - a_{22} v_{n-m}) \quad (1b)$$

Jika

$$u_n = u^* + \varepsilon \tilde{u}_n, \quad (2)$$

$$v_n = v^* + \varepsilon \tilde{v}_n,$$

dengan $\varepsilon \ll 1$ dan (u^*, v^*) adalah titik tetap sistem (1), maka persamaan (1a) menjadi

$$u^* + \varepsilon \tilde{u}_{n+1}$$

$$= (u^* + \varepsilon \tilde{u}_n) + \tau h (u^* + \varepsilon \tilde{u}_n) [r_1 - a_{11} (u^* + \varepsilon \tilde{u}_{n-m}) - a_{12} (v^* + \varepsilon \tilde{v}_{n-m})]$$

$$\varepsilon \tilde{u}_{n+1} = \varepsilon \tilde{u}_n + \tau h [r_1 u^* - a_{11} u^* (u^* + \varepsilon \tilde{u}_{n-m}) - a_{12} u^* (v^* + \varepsilon \tilde{v}_{n-m}) + \varepsilon r_1 \tilde{u}_n - \varepsilon a_{11} \tilde{u}_n (u^* + \varepsilon \tilde{u}_{n-m}) - \varepsilon a_{12} \tilde{u}_n (v^* + \varepsilon \tilde{v}_{n-m})]$$

$$\varepsilon \tilde{u}_{n+1} = \varepsilon \tilde{u}_n + \tau h [r_1 u^* - a_{11} u^{*2} - \varepsilon a_{11} u^* \tilde{u}_{n-m} - a_{12} u^* v^* - \varepsilon a_{12} u^* \tilde{v}_{n-m} + \varepsilon r_1 \tilde{u}_n - \varepsilon a_{11} u^* \tilde{u}_n - \varepsilon^2 a_{11} \tilde{u}_n \tilde{u}_{n-m} - \varepsilon a_{12} v^* \tilde{u}_n - \varepsilon^2 a_{12} \tilde{u}_n \tilde{v}_{n-m}]$$

$$\varepsilon \tilde{u}_{n+1} = [1 + (r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^*) \tau h] \varepsilon \tilde{u}_n - \varepsilon a_{11} \tau h u^* \tilde{u}_{n-m} - \varepsilon a_{12} \tau h u^* \tilde{v}_{n-m}$$

$$\tilde{u}_{n+1} = [1 + (r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^*) \tau h] \tilde{u}_n - a_{11} \tau h u^* \tilde{u}_{n-m} - a_{12} \tau h u^* \tilde{v}_{n-m},$$

dan persamaan (1b) menjadi

$$\begin{aligned}
v^* + \varepsilon \tilde{v}_{n+1} &= (v^* + \varepsilon \tilde{v}_n) + \tau h (v^* + \varepsilon \tilde{v}_n) [r_2 + a_{21}(u^* + \varepsilon \tilde{u}_{n-m}) - a_{22}(v^* + \varepsilon \tilde{v}_{n-m})] \\
\varepsilon \tilde{v}_{n+1} &= \varepsilon \tilde{v}_n + \tau h [r_2 v^* + a_{21} v^* (u^* + \varepsilon \tilde{u}_{n-m}) - a_{22} v^* (v^* + \varepsilon \tilde{v}_{n-m}) + \varepsilon r_2 \tilde{v}_n \\
&\quad + \varepsilon a_{21} \tilde{v}_n (u^* + \varepsilon \tilde{u}_{n-m}) - \varepsilon a_{22} \tilde{v}_n (v^* + \varepsilon \tilde{v}_{n-m})] \\
\varepsilon \tilde{v}_{n+1} &= \varepsilon \tilde{v}_n + \tau h [r_2 v^* + a_{21} u^* v^* + \varepsilon a_{21} v^* \tilde{u}_{n-m} - a_{22} v^{*2} - \varepsilon a_{22} v^* \tilde{v}_{n-m} \\
&\quad + \varepsilon r_2 \tilde{v}_n + \varepsilon a_{21} u^* \tilde{v}_n + \varepsilon^2 a_{21} \tilde{u}_{n-m} \tilde{v}_n - \varepsilon a_{22} v^* \tilde{v}_n \\
&\quad - \varepsilon^2 a_{22} \tilde{v}_n \tilde{v}_{n-m}] \\
\varepsilon \tilde{v}_{n+1} &= [1 + (r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^*) \tau h] \varepsilon \tilde{v}_n + \varepsilon a_{21} \tau h v^* \tilde{u}_{n-m} - \varepsilon a_{22} \tau h v^* \tilde{v}_{n-m} \\
\tilde{v}_{n+1} &= a_{21} \tau h v^* \tilde{u}_{n-m} + [1 + (r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^*) \tau h] \tilde{v}_n - a_{22} \tau h v^* \tilde{v}_{n-m}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, hasil linearisasi sistem persamaan (1) adalah

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{n+1} &= [1 + (r_1 - a_{11} u^* - a_{12} v^*) \tau h] \tilde{u}_n - a_{11} u^* \tau h \tilde{u}_{n-m} - a_{12} u^* \tau h \tilde{v}_{n-m} \\
\tilde{v}_{n+1} &= a_{21} v^* \tau h \tilde{u}_{n-m} + [1 + (r_2 + a_{21} u^* - a_{22} v^*) \tau h] \tilde{v}_n - a_{22} v^* \tau h \tilde{v}_{n-m}
\end{aligned} \tag{3}$$

Misalkan $Z_n = (\tilde{u}_n, \tilde{u}_{n-1}, \dots, \tilde{u}_{n-m}, \tilde{v}_n, \tilde{v}_{n-1}, \dots, \tilde{v}_{n-m})^T$. Sistem persamaan

(3) dapat ditulis dalam bentuk

$$Z_{n+1} = F(Z_n, \tau)$$

atau

$$Z_{n+1} = A(E^*) Z_n,$$

dengan

$$A(E^*) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d & e & \cdots & 0 & f \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$a = 1 + (r_1 - a_{11}u^* - a_{12}v^*)\tau h,$$

$$b = -a_{11}u^*\tau h,$$

$$c = -a_{12}u^*\tau h,$$

$$d = a_{21}v^*\tau h,$$

$$e = 1 + (r_2 + a_{21}u^* - a_{22}v^*)\tau h,$$

$$f = -a_{22}v^*\tau h.$$

Matriks $A(E^*)$ adalah matriks Jacobi hasil linearisasi sistem persamaan (1).

Matriks $A(E^*)$ berukuran $(2m + 2) \times (2m + 2)$.

Lampiran 3. Perhitungan Bukti Lemma 3.1

Persamaan (3.5)

$$\lambda^{2m+2} + A_1\lambda^{2m+1} + A_2\lambda^{2m} + A_3\lambda^{m+1} + A_4\lambda^m + A_5 = 0,$$

dengan

$$A_1 = -2,$$

$$A_2 = 1,$$

$$A_3 = (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h,$$

$$A_4 = -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h,$$

$$A_5 = (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*\tau^2h^2,$$

diturunkan terhadap τ diperoleh

$$\begin{aligned} & \left[(2m+2)\lambda^{2m+1} \frac{d\lambda}{d\tau} \right] - \left[2(2m+1)\lambda^{2m} \frac{d\lambda}{d\tau} \right] + \left[2m\lambda^{2m-1} \frac{d\lambda}{d\tau} \right] \\ & + \left[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h\lambda^{m+1} + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h(m+1)\lambda^m \frac{d\lambda}{d\tau} \right] \\ & + \left[-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h\lambda^m - (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau hm\lambda^{m-1} \frac{d\lambda}{d\tau} \right] \\ & + 2(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*\tau h^2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Selanjutnya persamaan (1) diturunkan lagi terhadap τ , dan diperoleh

$$\begin{aligned} & \left[(2m+2)(2m+2)\lambda^{2m} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 + (2m+2)\lambda^{2m+1} \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} \right] \\ & + \left[-2(2m+1)(2m)\lambda^{2m-1} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 - 2(2m+1)\lambda^{2m} \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} \right] \\ & + \left[2m(2m-1)\lambda^{2m-2} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 + 2m\lambda^{2m-1} \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} \right] \\ & + \left[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h(m+1)\lambda^m \frac{d\lambda}{d\tau} \right] + \left[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h(m+1)\lambda^m \frac{d\lambda}{d\tau} \right] \\ & + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h(m+1) \left(m\lambda^{m-1} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 + \lambda^m \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} \right) \\ & + \left[-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)hm\lambda^{m-1} \frac{d\lambda}{d\tau} \right] + \left[-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)hm\lambda^{m-1} \frac{d\lambda}{d\tau} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau hm \left((m-1)\lambda^{m-2} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 + \lambda^{m-1} \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} \right) \\
& + 2(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*h^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Jika persamaan (2) disubstitusi oleh $\tau = 0$ dan $\lambda = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
& (2m+2)(2m+2) \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 + (2m+2) \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} - 4m(2m+1) \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 \\
& - 2(2m+1) \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} + 2m(2m-1) \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 + 2m \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} \\
& + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)h(m+1) \frac{d\lambda}{d\tau} + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)h(m+1) \frac{d\lambda}{d\tau} + 0 \\
& - (a_{11}u^* + a_{22}v^*)hm \frac{d\lambda}{d\tau} - (a_{11}u^* + a_{22}v^*)hm \frac{d\lambda}{d\tau} - 0 \\
& + 2(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*h^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Persamaan (3) dapat ditulis ulang menjadi

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)h \frac{d\lambda}{d\tau} + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*h^2 = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=0, \lambda=1} \\
& = \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*) \pm \sqrt{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)^2 - 4(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*h^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Misalkan

$$(a_{11}u^* + a_{22}v^*)^2 - 4(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})u^*v^*h^2 = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=0, \lambda=1} = \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)}{2}$$

dan bentuk konjugatnya adalah

$$\left. \frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} \right|_{\tau=0, \lambda=1} = \frac{-(a_{11}u^* + a_{22}v^*)}{2}.$$

Lampiran 4. Perhitungan Nilai $\cos \omega_0$, $\cos m\omega_0$, dan $\cos(m + 1)\omega_0$

Misalkan $\lambda = e^{i\omega_0}$ adalah akar persamaan (3.15) saat $\tau = \tau_0$, maka persamaan (3.15) menjadi

$$e^{i(m+1)\omega_0} - e^{im\omega_0} + (a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h = 0,$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu

$$\begin{aligned} \cos(m + 1)\omega_0 + i \sin(m + 1)\omega_0 - (\cos m\omega_0 + i \sin m\omega_0) \\ = -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h. \end{aligned} \quad (1)$$

Persamaan (1) dapat dipisahkan antara bagian real dan imajiner. Bagian real persamaan (1) adalah

$$\cos(m + 1)\omega_0 - \cos m\omega_0 = -(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h \quad (2)$$

dan bagian imajiner persamaan (1) adalah

$$\sin(m + 1)\omega_0 - \sin m\omega_0 = 0. \quad (3)$$

Untuk memperoleh nilai $\cos \omega_0$, persamaan (2) dan (3) dikuadratkan kemudian dijumlahkan

$$\begin{aligned} \cos^2(m + 1)\omega_0 - 2(\cos(m + 1)\omega_0)(\cos m\omega_0) + \cos^2 m\omega_0 \\ = ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)^2 \end{aligned}$$

$$\sin^2(m + 1)\omega_0 - 2(\sin(m + 1)\omega_0)(\sin m\omega_0) + \sin^2 m\omega_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 - 2[(\cos(m + 1)\omega_0)(\cos m\omega_0) + (\sin(m + 1)\omega_0)(\sin m\omega_0)] + 1 \\ = ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2[\cos((m + 1)\omega_0 - m\omega_0)] = ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 \cos \omega_0 = ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \omega_0 = 2 - ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos \omega_0 = 1 - \frac{((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)^2}{2} \quad (4)$$

Untuk memperoleh nilai $\cos m\omega_0$, persamaan (2) dikalikan dengan $\cos m\omega_0$ dan persamaan (3) dikalikan dengan $\sin m\omega_0$, kemudian dijumlahkan

$$(\cos(m+1)\omega_0)(\cos m\omega_0) - \cos^2 m\omega_0 = -((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h) \cos m\omega_0$$

$$(\sin(m+1)\omega_0)(\sin m\omega_0) - \sin^2 m\omega_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \omega_0 - 1 = -((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h) \cos m\omega_0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)^2}{2} - 1 = -((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h) \cos m\omega_0$$

$$\Leftrightarrow \cos m\omega_0 = \frac{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h}{2} \quad (5)$$

Berdasarkan persamaan (2) dan (5)

$$\cos(m+1)\omega_0 - \cos m\omega_0 = -((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)$$

diperoleh

$$\Leftrightarrow \cos(m+1)\omega_0 = \cos m\omega_0 - ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)$$

$$\Leftrightarrow \cos(m+1)\omega_0 = \frac{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h}{2} - ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h)$$

$$\Leftrightarrow \cos(m+1)\omega_0 = -\frac{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h}{2} \quad (6)$$

Lampiran 5. Perhitungan nilai $d_h = \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0}$

Nilai $d_h = \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0}$ yang diperoleh dari perhitungan sebelumnya

sebagaimana dalam persamaan (3.16) adalah

$$d_h = -((a_{11}u^* + a_{22}v^*)h) \times \frac{2(m+1)\cos(m+1)\omega_0 - 2m\cos m\omega_0}{(m+1)^2 + m^2 - 2m(m+1)\cos\omega_0}$$

Untuk memperoleh nilai d_h , persamaan (3.17), (3.18), dan (3.19) disubstitusikan ke persamaan (3.16). Untuk mempermudah perhitungan, perhitungan dibagi menjadi dua bagian yaitu bagian pembilang dan penyebut.

a. Bagian pembilang

$$\begin{aligned} & 2(m+1)\cos(m+1)\omega_0 - 2m\cos m\omega_0 \\ &= 2(m+1) \left[-\frac{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h}{2} \right] - 2m \left[\frac{(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h}{2} \right] \\ &= -(2m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h] \end{aligned} \quad (1)$$

b. Bagian penyebut

$$\begin{aligned} & (m+1)^2 + m^2 - 2m(m+1)\cos\omega_0 \\ &= (m+1)^2 + m^2 - 2m(m+1) \left[1 - \frac{[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h + o(h)]^2}{2} \right] \\ &= m^2 + 2m + 1 + m^2 - 2m^2 - 2m + m(m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h + o(h)]^2 \\ &= 1 + m(m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h]^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$d_h = ((a_{11}u^* + a_{22}v^*)h) \times \frac{(2m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h]}{1 + m(m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h]^2}$$

$$d_h = \frac{(2m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)h][(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h]}{1 + m(m+1)[(a_{11}u^* + a_{22}v^*)\tau h]^2}$$

Lampiran 6. Perhitungan Nilai τ_0 Menggunakan Maple 15

Berdasarkan persamaan (3.12) dan (3.13), nilai τ_0 dapat diperoleh dengan menyelesaikannya menggunakan bantuan *software* Maple. Maple *command* yang digunakan dituliskan sebagai berikut

```

> restart;
> Digits:= 40;
> eq1:=cos((2*m+2)*w)+A1*cos((2*m+1)*w)+A2*cos(2*m*w)
  +A3*cos((m+1)*w)+A4*cos(m*w)+A5;
> eq2:=sin((2*m+2)*w)+A1*sin((2*m+1)*w)+A2*sin(2*m*w)
  +A3*sin((m+1)*w)+A4*sin(m*w);
> r1:=1; r2:=0.4; a11:=1; a12:=1; a21:=2; a22:=1; m:=20; h:=1/m;
> u:= evalf((a22*r1-a12*r2)/(a11*a22+a12*a21));
> v:= evalf((a21*r1+a11*r2)/( a11*a22+a12*a21));
> A1:=-2; A2:=1; A3:=(a11*u+a22*v)*t*h; A4:=-A3;
  A5:=(a11*a22+a12*a21)*u*v*t^2*h^2;
> eq1;
> eq2;
> solve({eq1, eq2}, {t, w});

```

Dari hasil perhitungan Maple, dipilih nilai τ_0 yang bernilai positif dan paling kecil.

Lampiran 7. Source Code Program Menggunakan Matlab 2008a

```

clear all;clc;

%Parameter yang digunakan
tau=1.145;
m=20;
h=1/m;
r1=1;
r2=0.4;
a11=1;
a12=1;
a21=2;
a22=1;

t=0:h:1000;          %Lama waktu yang dipilih
M=length(t);
U=zeros(1,M);
U(1:m+1)=0.21;      %Nilai awal u
V=zeros(1,M);
V(1:m+1)=0.81;      %Nilai awal v

for i=m+1:M-1
    U(i+1)=U(i)+tau*h*U(i)*(r1-a11*U(i-m)-a12*V(i-m));
    V(i+1)=V(i)+tau*h*V(i)*(r2+a21*U(i-m)-a22*V(i-m));
end;

%Plot grafik solusi u(t) dan v(t)
figure(1);
hold on;
plot(t,U,'r','linewidth',1.5);
plot(t,V,'b','linewidth',1.5);
title(tau);
xlabel('waktu');
ylabel('jumlah populasi');
grid on;

%Plot potret fase/ solusi orbit sistem
figure(2);
plot(U,V,'g','LineWidth',3);
title(tau);
xlabel('x(t)');
ylabel('y(t)');
grid on; hold on;

%Nilai dari titik tetap E*=(u*,v*)
u=(a22*r1-a12*r2)/(a11*a22+a12*a21);
v=(a21*r1+a11*r2)/(a11*a22+a12*a21);

plot(0.1,0.1,'ok','LineWidth',3); %Plot nilai awal
plot(0,0,'b*','LineWidth',3); %Plot titik E0
plot(0,r2/a22,'b*','LineWidth',3); %Plot titik E1
plot(r1/a11,0,'b*','LineWidth',3); %Plot titik E2
plot(u,v,'b*','LineWidth',3); %Plot titik E*

```