UNIVERSITAS BRAWIJAYA
REPOSITORY.UB.AC.ID
Repository Universitas Brawijaya

TESIS

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL *ECONOMIC ORDER QUANTITY (EOQ)*

DENGAN INISIATIF TIM PENJUALAN

Oleh :

ABDUL LATIF AL FAUZI

146090400111013

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji

pada tanggal 30 Januari 2017

dan dinyatakan lulus

Menyetujui,
Komisi Pembimbing

Ketua	Anggota
Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.	Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
NIP. 197312162002122001	NIP. 196908071994121001

Mengetahui,
Ketua Program Studi S2 Matematika

Dr. Drs. Noor Hidayat, M.Si.
NIP. 196112041988021001

Repository Universitas Brawijaya

IDENTITAS TIM PENGUJI

JUDUL TESIS :

Kontrol Optimal pada Model *Economic Order Quantity (EOQ)* dengan Inisiatif Tim Penjualan

Nama Mahasiswa	:	Abdul Latif Al Fauzi
NIM	:	146090400111013
Program Studi	:	S2 Matematika
Minat	:	Pemodelan Matematika

KOMISI PEMBIMBING

Ketua	:	Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
Anggota	:	Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.

TIM DOSEN PENGUJI

Dosen Penguji 1	:	Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D.
Dosen Penguji 2	:	Dr. Nur Shofianah, M.Si.

Tanggal Ujian	:	30 Januari 2017

Repository Universitas Brawijaya

PERNYATAAN ORISINALITAS TESIS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, di dalam Naskah Tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu Perguruan Tinggi, dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah Tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur jiplakan, saya bersedia Tesis (MAGISTER) dibatalkan, serta diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku (UU No. 20 Tahun 2003, pasal 25 ayat 2 dan pasal 70).

Malang, 30 Januari 2017
Mahasiswa,

Abdul Latif Al Fauzi
146090400111013

Repository Universitas Brawijaya

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis bernama lengkap Abdul Latif Al Fauzi dilahirkan di Tulungagung Jawa Timur pada tanggal 01 Nopember 1975, anak kedua dari dua bersaudara, pasangan Bapak H. Muhammad Ma'shum dan Hj. Siti Almuayyidah.

Pendidikan dasar (MI) ditempuh dikampung halamannya sendiri di Madrasah Ibtidaiyyah Hidayatul Mubtadiin (MIHM) tamat pada tahun 1987, kemudian pada tahun itu melanjutkan ke Madrasah Tsanawiyah Negeri (MTsN) di Kunir Wonodadi Blitar dan tamat pada tahun 1990, setelah itu pada tahun itu pula melanjutkan ke Madrasah Aliyah Negeri (MAN) I Tulungagung tamat pada tahun 1993. Pendidikan berikutnya pada tahun 1995 melanjutkan ke IKIP MALANG (sekarang UNIVERSITAS NEGERI MALANG) dengan mengambil jurusan Matematika – Program Studi Pendidikan Matematika (s_1) Fakultas MIPA dan lulus tahun ajaran 2001/2002.

Pada tahun 2002-2004 penulis bekerja di MTs WAHID HASYIM Setinggil Gandekan Kec.Wonodadi Kab. Blitar. Kemudian pada tahun 2004 – sekarang bekerja di MAN 2 TULUNGAGUNG. Pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan Pascasarjana di UNIVERSITAS BRAWIJAYA pada Fakultas MIPA Jurusan Matematika.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu menyelesaikan tesis ini, khususnya kepada,

Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku ketua Komisi Pembimbing dan Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku anggota Komisi Pembimbing yang telah memberikan ilmu, bimbingan, dan arahan dalam penyusunan tesis ini.

Dr. Drs. Noor Hidayat, M.Si. selaku Ketua Program Studi Pasca Sarjana Matematika Universitas Brawijaya yang telah memberikan motivasi kepada penulis.

Dr. Trisilowati, M.Sc., Ph.D. dan Dr. Nur Shofianah, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan untuk perbaikan tesis ini.

Kepala MAN 2 Tulungagung yang telah memberikan ijin dan dukungan untuk studi lanjut di Universitas Brawijaya.

Istri dan anak-anak Penulis, Orang tua dan Mertua, serta keluarga besar, berkat do’a dan ridho mereka pula Allah memberi berbagai kemudahan pada penulis.

Teman-teman Pascasarjana Fakultas MIPA Program Studi Matematika Angkatan 2014 yang selalu memberikan motivasi, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu sehingga penulisan tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.

RINGKASAN

ABDUL LATIF AL FAUZI, Program Pascasarjana Universitas Brawijaya, Nopember 2016. Kontrol Optimal pada Model Economic Order Quantity (EOQ) dengan Inisiatif Tim Penjualan; Komisi Pembimbing, Ketua: Isnani Darti, Anggota: Agus Suryanto

Model *Economic Order Quantity (EOQ)* merupakan salah satu model persediaan barang yang sering digunakan untuk pengendalian persedian barang. Model ini mengasumsikan bahwa kapasitas produksi terbatas dan permintaan barang tergantung pada tingkat pengadaan barang dan inisiatif tim penjualan pada masing-masing produk secara terpisah. Pada tesis ini dibahas kontrol optimal pada model EOQ dengan inisiatif tim penjualan tidak hanya pada saat kondisi setimbang saja, tetapi kontrol optimal dengan usaha tim penjualan pada setiap saat. Strategi kontrol optimal dilakukan dengan meminimumkan biaya persediaan, biaya pembelian, biaya penjualan dan biaya usaha tim penjualan. Masalah kontrol optimal diselesaikan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Solusi optimal yang diperoleh disimulasikan secara numerik menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur. Berdasarkan hasil simulasi numerik dapat diketahui bahwa semakin besar koefisien tingkat permintaan barang, maka proses persediaan barang akan lebih cepat berkurang. Selain itu semakin besar usaha tim penjualan, maka proses persediaan barang akan lebih sedikit bahkan lebih cepat habis. Semua itu tidak lepas dari pengontrolan mulai awal hingga akhir waktu.

SUMMARY

ABDUL LATIF AL FAUZI, *Post Graduate Program Brawijaya University, Nopember 2016. Optimal Control of Economic Order Quantity (EOQ) model by the inisiatives of sales team; Supervisor:* Isnani Darti, *Co-Supervisor :* Agus Suryanto

Economic Order Quantity model (EOQ) is one of inventory model that is often used to control the supply of goods. This model assumes that the production capacity is limited and the demand for goods depending on the level of procurement and sales team initiative on each product separately. In this thesis, we discussed the optimal control in the EOQ model with sales team initiatives not only at equilibrium conditions, but also the optimal control with business sales team at any time. The optimal control strategy is done by minimizing inventory costs, purchase costs, cost of sales and operating expenses sales team. Optimal control problem is solved using Pontryagin maximum principle, and numerically simulated using the Sweep Forward-Backward method. Based on numerical simulation results, the greater the level of demand coefficients, the faster the inventory level will be reduced. Besides the more work the sales team so the process will be less inventory even faster. All was not out of control from the beginning to the end of time.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT. Yang telah memberikan segala kemudahan dan ridho-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan tesis ini dengan judul "Kontrol Optimal pada Model *Economic Order Quantity (EOQ)* dengan Inisiatif Tim Penjualan". Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW., keluarga dan para sahabat beliau.

Tesis ini disusun sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika Program Pascasarjana Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya Malang. Penelitian ini bertujuan melakukan kontrol terhadap persediaan barang. Dengan demikian, hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi pembaca.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang dapat disampaikan melalui email yulialfauzi@gmail.com.

Malang, 30 Januari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL ii
HALAMAN PENGESAHAN iii
IDENTITAS TIM PENGUJI iv
PERNYATAAN ORISINALITAS v
RIWAYAT HIDUP PENULIS vi
UCAPAN TERIMA KASIH vii
RINGKASAN viii
SUMMARY ix
KATA PENGANTAR x
DAFTAR ISI xi
DAFTAR TABEL xii
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR SIMBOL xv

BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3

BAB II DASAR TEORI **4**
2.1 Persamaan Diferensial 4
2.2 Turunan Parsial suatu Fungsi 5
2.3 Teori Kontrol Optimal 6
2.3.1 Syarat Perlu Kontrol Optimal 6
2.3.2 Teori Kontrol Optimal untuk Beberapa Variabel 10
2.3.3 Prosedur Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal 12
2.4 Metode *Sweep* Maju-Mundur 12
2.5 Metode Runge-Kutta 13
2.6 Model *Economic Order Quantity (EOQ)* 16

BAB III PEMBAHASAN **24**
3.1 Formulasi Model EOQ (*Economic Order Quantity*) 24
3.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal 24
3.3 Penyelesaian Kontrol Optimal 25
3.4 Simulasi Numerik 32
3.4.1 Simulasi I 35
3.4.2 Simulasi II 37
3.4.3 Simulasi III 40
3.4.4 Simulasi IV 42
3.4.5 Simulasi V 45

BAB IV PENUTUP **48**
4.1 Kesimpulan 48
4.2 Saran 48

DAFTAR PUSTAKA **49**
LAMPIRAN – LAMPIRAN **50**

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.1 Nilai Parameter untuk Simulasi Numerik 34
Tabel 3.2 Perubahan Nilai Parameter r_1, r_2 dan C_1, C_2 34

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.1 Hasil persediaan barang 1 dengan r_1 = 0.1, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 36

Gambar 3.2. Hasil persediaan barang 2 dengan r_1 = 0.1, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 36

Gambar 3.3. Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan r_1 = 0.1, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 37

Gambar 3.4. Kontrol optimal E_2 terhadap model dengan r_1 = 0.1, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 37

Gambar 3.5. Hasil persediaan barang 1 dengan r_1 = 1.2, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 38

Gambar 3.6. Hasil persediaan barang 2 dengan r_1 = 1.2, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 39

Gambar 3.7. Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan r_1 = 1.2, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 39

Gambar 3.8. Kontrol optimal E_2 terhadap model dengan r_1 = 1.2, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 39

Gambar 3.9. Hasil persediaan barang 1 dengan r_1 = 2, c_1 = 0.6, r_2 = 1.2, c_2 = 0.6 dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 41

Gambar 3.10. Hasil persediaan barang 2 dengan r_1 = 2, c_1 = 0.6, r_2 = 1.2, c_2 = 0.6 dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 41

Gambar 3.11. Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan r_1 = 2, c_1 = 0.6, r_2 = 1.2, c_2 = 0.6 41

Gambar 3.12. Kontrol optimal E_2 terhadap model dengan r_1 = 2, c_1 = 0.6, r_2 = 1.2, c_2 = 0.6 42

Gambar 3.13. Hasil persediaan barang 1 terhadap waktu dengan r_1 = 1.2, c_1 = 2, r_2 = 2, c_2 = 5 dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 43

Gambar 3.14. Hasil persediaan barang 2 terhadap waktu dengan r_1 = 1.2, c_1 = 2, r_2 = 2, c_2 = 5 dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 44

Gambar 3.15. Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan r_1 = 1.2, c_1 = 2, r_2 = 2, c_2 = 5 44

Gambar 3.16. Kontrol optimal E_2 terhadap model dengan r_1 = 1.2, c_1 = 2, r_2 = 2, c_2 = 5 44

Gambar 3.17. Hasil persediaan barang 1 terhadap waktu dengan r_1 = 1.2, c_1 = 5, r_2 = 2, c_2 = 2 dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 46

Gambar 3.18. Hasil persediaan barang 2 terhadap waktu dengan r_1 = 1.2, c_1 = 5, r_2 = 2, c_2 = 2 dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 46
Gambar 3.19. Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan r_1 = 1.2, c_1 = 5, r_2 = 2, c_2 = 2 47
Gambar 3.20. Kontrol optimal E_2 terhadap model dengan r_1 = 1.2, c_1 = 5, r_2 = 2, c_2 = 2 47

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$x_1(t)$	: persediaan barang 1 yang ada pada waktu t
$x_2(t)$	: persediaan barang 2 yang ada pada waktu t
P_1	: tingkat pengadaan barang 1
P_2	: tingkat pengadaan barang 2
r_1	: laju intrinsik pengadaan barang 1
r_2	: laju intrinsik pengadaan barang 2
L_1	: total kapasitas maksimum barang 1 yang bisa ditampung di gudang
L_2	: total kapasitas maksimum barang 2 yang bisa ditampung di gudang
L	: total kapasitas maksimum barang 1 dan barang 2 yang bisa ditampung di gudang ($L = L_1 + L_2$)
$u(t)$	: fungsi usaha bersama tim penjualan barang pada waktu t
$u_1(t)$	: fungsi usaha bersama tim penjualan untuk barang 1 pada waktu t
$u_2(t)$	: fungsi usaha bersama tim penjualan untuk barang 2 pada waktu t
c_1	: koefisien positif tingkat permintaan barang 1
c_2	: koefisien positif tingkat permintaan barang 2
e_1	: konstanta penghambat tingkat permintaan barang 1 yang berkaitan dengan E_1
e_2	: konstanta penghambat tingkat permintaan barang 1 yang berkaitan dengan persediaan barang 1
e_3	: konstanta penghambat tingkat permintaan barang 2 yang berkaitan dengan E_2
e_4	: konstanta penghambat tingkat permintaan barang 2 yang berkaitan dengan persediaan barang 2
h_1	: biaya penyimpanan persediaan per unit barang 1 per waktu
h_2	: biaya penyimpanan persediaan per unit barang 2 per waktu
s_1	: biaya penjualan per unit barang 1
s_2	: biaya penjualan per unit barang 2
p_1	: biaya pembelian per unit barang 1
p_2	: biaya pembelian per unit barang 2

[illegible] : biaya dari energi dan kerja untuk mendistribusikan persediaan barang 1

[illegible] : biaya dari energi dan kerja untuk mendistribusikan persediaan barang 2

[illegible] : koefisien laju pertumbuhan produksi barang 1

[illegible] : koefisien laju pertumbuhan produksi barang 2

[illegible] : biaya ekstra untuk membayar tenaga kerja ketika persediaan barang 1 banyak

[illegible] : biaya ekstra untuk membayar tenaga kerja ketika persediaan barang 2 banyak

[illegible] : biaya per unit usaha [illegible]

[illegible] : biaya per unit usaha [illegible]

[illegible] : tingkat inflasi

[illegible] : tingkat bunga

[illegible] : tingkat bunga dan inflasi per satuan mata uang ([illegible])

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengendalian persediaan barang merupakan salah satu masalah yang sering dihadapi oleh suatu perusahaan, karena sejumlah barang sangat diharapkan dapat diperoleh pada tempat dan waktu yang tepat, dengan ongkos yang murah. Persedian barang ini sangat diperlukan karena dalam pengadaan barang dibutuhkan sejumlah waktu untuk proses pemesanan barang tersebut. Adanya permintaan barang oleh konsumen pada perusahaan diharapkan dapat dipenuhi dengan segera. Selain itu, pengendalian persediaan barang juga dapat menekan biaya produksi, biaya pemesanan dan biaya penyimpanan menjadi seminimal mungkin (Ristono, 2013).

Upaya pengendalian persediaan barang dapat dilakukan melalui beberapa cara, salah satunya melalui pemodelan matematika. Beberapa model matematika tentang persediaan barang adalah model EOQ (*Economic Order Quantity*), model EPQ (*Economic Production Quantity*) dan model EOI (*Economic Order Interval*). Salah satu model matematika tentang persediaan barang yang sering digunakan adalah model EOQ (*Economic Order Quantity*). Model ini dapat digunakan untuk menentukan jumlah pesanan yang memenuhi total biaya penyimpanan, sehingga tidak ada kekurangan persediaan. Baker dan Urban (1988) membahas model persediaan dengan memperhatikan tingkat persediaan bergantung pada tingkat permintaan. Datta dan Pal (1990) mengembangkan model tersebut dengan mempertimbangkan tingkat permintaan ketika barang-barang habis dimana faktor-faktor lain diasumsikan konstan. Selain itu Ghosh

dan Chaudhuri (2004) mengembangkan model persediaan dengan dua tingkat penyimpanan.

Model EOQ dapat dianalisis melalui pendekatan sistem dinamik, diantaranya Sana (2011a) yang membahas tentang analisis dinamik dan kontrol optimal model persediaan yang dipengaruhi inisiatif tim penjualan bersama untuk dua produk yang serupa. Selanjutnya Sana (2011b) menambahkan harga produk pada model EOQ. Pada penelitian selanjutnya, Sana (2012) mengembangkan analisis dinamik dan kontrol optimal model persediaan untuk produk yang serupa, tetapi dengan mengasumsikan bahwa kapasitas produksi terbatas dan permintaan barang tergantung pada tingkat pengadaan barang, serta inisiatif tim penjualan pada masing-masing produk secara terpisah. Anggraini dkk. (2015) juga membahas analisis dinamik dan kontrol optimal pada model pengendalian persedian dua produk berbeda dengan kapasitas produksi terbatas serta inisiatif tim penjualan bersama. Penelitian yang dilakukan mulai tahun 2011 sampai dengan 2015 di atas membahas kontrol optimal dengan inisiatif tim penjualan hanya pada saat kondisi setimbang saja, sehingga diperoleh kesetimbangan optimal.

Berbeda dengan penelitian sebelumnya, pada tesis ini akan dikaji tentang kontrol optimal dengan inisiatif tim penjualan tidak hanya pada saat kondisi setimbang saja, tetapi kontrol optimal dengan usaha tim penjualan pada setiap saat. Dalam hal ini diasumsikan bahwa kapasitas produksi terbatas dan permintaan barang tergantung pada tingkat pengadaan barang dan inisiatif tim penjualan pada masing-masing produk secara terpisah. Strategi kontrol optimal dilakukan dengan meminimumkan biaya persediaan, biaya pembelian, biaya penjualan dan biaya usaha tim penjualan. Masalah kontrol optimal diselesaikan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Solusi optimal yang diperoleh akan

disimulasikan secara numerik menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur dengan bantuan software MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan sebelumnya, rumusan masalah pada tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana formulasi masalah kontrol optimal pada model EOQ dengan inisiatif tim penjualan?
2. Bagaimana penyelesaian kontrol optimal pada model EOQ dengan inisiatif tim penjualan?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik pada model EOQ dengan inisiatif tim penjualan tanpa dan dengan kontrol?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memperoleh formulasi masalah kontrol optimal pada model EOQ dengan inisiatif tim penjualan.
2. Menentukan penyelesaian kontrol optimal pada model EOQ dengan inisiatif tim penjualan.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik pada model EOQ dengan inisiatif tim penjualan tanpa dan dengan kontrol.

Repository Universitas Brawijaya
REPOSITORY.UB.AC.ID UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB II

DASAR TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari fungsi yang tidak diketahui. (Edwards dan Penney, 2008).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya bergantung pada satu variabel bebas. Tingkat dari turunan tertinggi dalam persamaan diferensial disebut orde. Secara umum, persamaan diferensial biasa orde n berbentuk

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

dengan variabel bebas t, variabel tak bebas x, dan $x^{(n)}$ menyatakan turunan ke n dari x terhadap t. Persamaan diferensial biasa dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear. Persamaan diferensial biasa linear jika F pada persamaan (2.1) merupakan fungsi linear dari variabel $x, x', \dots, x^{(n)}$. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear orde n yaitu

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = g(t) \tag{2.2}$$

(Boyce dan Diprima, 2001)

Definisi 2.1.3 (Sistem Persamaan Diferensial)

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui dimana $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi n dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2.3}$$

dimana f merupakan fungsi bernilai real dari $n+1$ variabel yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t. Sistem persamaan diferensial biasanya digunakan untuk membentuk sistem dinamik. (Hirsch dkk, 2004).

2.2 Turunan Parsial suatu Fungsi

Misalkan y adalah fungsi n variabel yaitu $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Turunan parsial fungsi y terhadap variabel x_i didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \tag{2.4}$$

dan dinotasikan sebagai

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f x_i.$$

Dengan kata lain, turunan parsial terhadap variabel x_i diperoleh dengan menganggap variabel selain x_i sebagai konstanta. (Stewart, 2008).

Repository Universitas Brawijaya

2.3 Teori Kontrol Optimal

Kontrol optimal bertujuan untuk menentukan hasil yang paling optimal dengan memperhatikan kondisi dan kendala yang ada. Pada masalah kontrol optimal dengan persamaan diferensial biasa, $x(t)$ merupakan notasi dari variabel *state* memenuhi suatu persamaan diferensial yang bergantung pada variabel kontrol $u(t)$ sebagai berikut

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \tag{2.5}$$

dengan nilai awal

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = k,$$

dimana k sembarang.

Dasar dari masalah kontrol optimal adalah menentukan variabel kontrol $u(t)$ dan variabel *state* terkait $x(t)$ yang memberikan nilai optimal pada fungsi tujuan

$$J(u) = \int_{t0}^{t1} f(t, x(t), u(t))dt. \tag{2.6}$$

(Lenhart dan Workman, 2007)

2.3.1 Syarat Perlu Kontrol Optimal

Teknik utama untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah menentukan syarat perlu yang memenuhi kondisi optimal dan *state*. Syarat perlu yang diusulkan oleh Pontryagin pada tahun 1950 disebut sebagai fungsi *adjoint*. Fungsi *adjoint* digunakan untuk menambahkan persamaan diferensial pada fungsional objektif. (Lenhart dan Workman, 2007).

Dimisalkan u^* adalah kondisi optimal, x^* adalah *state* yang sesuai dengan kondisi optimal, dan diasumsikan u^* dan x^* eksis. Misalkan $h(t)$ adalah fungsi kontinu dan $\epsilon \in \mathbb{R}$ adalah suatu konstanta, maka dapat dibentuk suatu kontrol baru sebagai berikut

$$u^{\epsilon}(t) = u^*(t) + \epsilon h(t). \tag{2.7}$$

Misalkan x^{ϵ} adalah *state* yang bersesuaian dengan u^{ϵ}, maka persamaan *state* dapat ditulis

$$\frac{d}{dt}x^{\epsilon}(t) = g(t, x^{\epsilon}(t), u^{\epsilon}(t)). \tag{2.8}$$

Ketika x^{ϵ} dan x^* dimulai dari titik awal yang sama $x^{\epsilon}(t_0) = x_0$, maka berlaku $u^{\epsilon}(t) \rightarrow u^*(t)$ untuk semua t ketika $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\left.\frac{\partial u^{\epsilon}(t)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = h(t). \tag{2.9}$$

Adapun fungsi objektif variabel u^{ϵ} adalah

$$J(u^{\epsilon}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^{\epsilon}(t), u^{\epsilon}(t))\,dt. \tag{2.10}$$

Diperkenalkan suatu fungsi adjoint yang dinotasikan dengan $\sigma(t)$, yang merupakan fungsi kontinu sepotong-sepotong (*piecewise continuous*) pada $[t_0, t_1]$. Berdasarkan teorema dasar kalkulus diperoleh

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[\sigma(t)x^{\epsilon}(t)]dt = \sigma(t_1)x^{\epsilon}(t_1) - \sigma(t_0)x^{\epsilon}(t_0),$$

atau dapat dituliskan

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[\sigma(t)x^{\epsilon}(t)]dt + \sigma(t_0)x^{\epsilon}(t_0) - \sigma(t_1)x^{\epsilon}(t_1) = 0.$$

Tanpa mengubah nilai fungsional objektif, $J(u^{\epsilon})$ dapat dinyatakan sebagai

Repository Universitas Brawijaya

$$J(u^{\epsilon}) = \int_{t_0}^{t_1}\left[f\big(t, x^{\epsilon}(t), u^{\epsilon}(t)\big) + \frac{d}{dt}[\sigma(t)x^{\epsilon}(t)]\right]dt$$

$$+\ \sigma(t_0)x^{\epsilon}(t_0) - \sigma(t_1)x^{\epsilon}(t_1),$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[f\big(t, x^{\epsilon}(t), u^{\epsilon}(t)\big) + \sigma'(t)x^{\epsilon}(t) + \sigma(t)g\big(t, x^{\epsilon}(t), u^{\epsilon}(t)\big)\right]dt$$

$$+\ \sigma(t_0)x^{\epsilon}(t_0) - \sigma(t_1)x^{\epsilon}(t_1),$$

Diketahui bahwa nilai optimum J terhadap variabel kontrol u adalah u^*. Berdasarkan kondisi perlu nilai optimum suatu fungsional, maka turunan $J(u^{\epsilon})$ terhadap ϵ adalah 0. Secara matematis dituliskan sebagai

$$\frac{d}{d\epsilon}J(u^{\epsilon})\Big|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{J(u^{\epsilon}) - J(u^{*})}{\epsilon} = 0. \qquad (2.11)$$

Persamaan (2.11) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\frac{d}{d\epsilon}J(u^{\epsilon})\Big|_{\epsilon=0} = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[f\big(t, x^{\epsilon}(t), u^{\epsilon}(t)\big) + \sigma'(t)x^{\epsilon}(t) + \sigma(t)g\big(t, x^{\epsilon}(t), u^{\epsilon}(t)\big)\right]dt\Big|_{\epsilon=0}$$

$$-\frac{d}{d\epsilon}\sigma(t_1)x^{\epsilon}(t_1)\Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

Berdasarkan aturan rantai untuk fungsi f dan g diperoleh

$$\frac{d}{d\epsilon}J(u^{\epsilon})\Big|_{\epsilon=0} = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(f_x\frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial\epsilon} + f_u\frac{\partial u^{\epsilon}}{\partial\epsilon} + \sigma'(t)\frac{\partial u^{\epsilon}}{\partial\epsilon} + \sigma(t)\left[g_x\frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial\epsilon} + g_u\frac{\partial u^{\epsilon}}{\partial\epsilon}\right]\right)\Bigg|_{\epsilon=0} dt$$

$$-\sigma(t_1)\frac{dx^{\epsilon}}{d\epsilon}(t_1)\Big|_{\epsilon=0} = 0,$$

Repository Universitas Brawijaya
UNIVERSITAS BRAWIJAYA REPOSITORY.UB.AC.ID

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[[f_x + \sigma(t) g_x + \sigma'(t)] \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \Big|_{\epsilon \to 0} + (f_u + \sigma(t) g_u) h(t) \right] dt$$

$$- \sigma(t_1) \frac{dx^\epsilon}{d\epsilon}(t_1) \Big|_{\epsilon = 0} = 0.$$

Persamaan di atas disederhanakan dengan memilih fungsi *adjoint* sedemikian sehingga koefisien $\frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t)\Big|_{\epsilon \to 0}$ adalah nol. Dipilih persamaan *adjoint* sebagai berikut

$$\sigma'(t) = -[f_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \sigma(t) g_x(t, x^*(t), u^*(t))] dt.$$

Selain itu diambil pula nilai batas yang disebut kondisi transversal, yaitu

$$\sigma(T) = 0.$$

Karena $h(t)$ adalah sebarang fungsi, maka $h(t)$ dapat dipilih sebagai berikut

$$h(t) = f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \sigma(t) g_u(t, x^*(t), u^*(t)). \quad (2.12)$$

sehingga berlaku

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \sigma(t) g_u(t, x^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0. \quad (2.13)$$

Berdasarkan persamaan (2.13) diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi optimal, yaitu

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \sigma(t) g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0. \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) merupakan syarat perlu kontrol optimal, yang mana kondisi optimal dan *state* harus memenuhi persamaan tersebut. Syarat perlu ini dapat dibangkitkan oleh fungsi Hamilton yang didefinisikan sebagai berikut

$$H(t, x, u, \sigma) = f(t, x, u) + \sigma g(t, x, u). \quad (2.15)$$

Fungsi Hamilton akan dioptimalkan terhadap u pada u^*. Kondisi ini dapat dituliskan sebagai berikut

- Kondisi Optimal: $$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow f_u + \sigma(t) g_u = 0, \tag{2.16}$$
- Persamaan *Adjoint*: $$\sigma' = -\frac{\partial H}{\partial x} \rightarrow \sigma' = -(f_x + \sigma(t) g_x), \tag{2.17}$$
- Kondisi transversal: $$\sigma(T) = 0, \tag{2.18}$$

dengan persamaan *state* didefinisikan sebagai berikut

$$x' = g(t, x, u) = \frac{\partial H}{\partial \sigma}, \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.19}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa Pontryagin mengusulkan syarat perlu kontrol optimal dengan suatu fungsi adjoint untuk menambahkan persamaan *state* pada fungsional objektif, yang secara sederhana dapat dibangkitkan oleh fungsi Hamilton.

2.3.2 Teori Kontrol Optimal untuk Beberapa Variabel

Misalkan dengan $\vec{x}(t) = [x_1(t), \dots x_n(t)]$, $\vec{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]$, $\vec{x}_0(t) = [x_{10}(t), \dots, x_{n0}(t)]$, dan $\vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u}) = [g_1(t, \vec{x}, \vec{u}), \dots, g_n(t, \vec{x}, \vec{u})]$, maka masalah kontrol optimal secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\min_{\vec{u}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t))\,dt \tag{2.20}$$

dengan kendala

$$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \tag{2.21}$$

(Lenhart dan Workman, 2007)

Misalkan $\vec{u}^*$ adalah vektor yang memuat variabel kontrol pada kondisi optimal dan $\vec{x}^*$ adalah vektor yang bersesuaian dengan variabel state optimal.

Berdasarkan kendala pada persamaan (2.21) dibutuhkan n *adjoint* untuk n *state*. Dibentuk vektor yang memuat variabel *adjoint* $\vec{\sigma}(t) = [\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t)]$, dimana masing-masing σ_i adalah variabel *adjoint* yang bersesuaian dengan x_i.

Didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut

$$H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\sigma}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\sigma}(t) \cdot \vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u}), \tag{2.22}$$

dimana notasi (·) merupakan perkalian dalam vektor atau dapat dituliskan sebagai

$$H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\sigma}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t) g^i(t, \vec{x}, \vec{u}). \tag{2.23}$$

Selanjutnya akan ditentukan variabel $\vec{u}^*$ yang meminimumkan $H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\sigma})$ berkenaan dengan $\vec{u}$ pada setiap t. Dalam hal ini $\vec{u}^*$, $\vec{x}^*$ dan σ harus memenuhi kondisi-kondisi berikut

(i) $x_i'(t) = \frac{\partial H}{\partial \sigma_i} = g_i(t, \vec{x}, \vec{u}),$ $\quad x_i(t_0) = x_{i0}(t), \quad \forall i = 1, \ldots, n,$ (2.24)

(ii) $\sigma_i'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j'},$ $\quad \sigma_i(T) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n,$ (2.25)

(iii) $\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0,$ pada $u_k^*, \quad \forall k = 1, \ldots, m.$ (2.26)

Jika batas yang terdapat pada variabel kontrol adalah $a_k \leq u_k \leq b_k$, maka kondisi optimal berubah menjadi bentuk sebagai berikut

$$u_k^* = \begin{cases} a_k, & u_k^* < a_k \\ u_k^*, & a_k \leq u_k^* \leq b_k \\ b_k, & u_k^* > b_k \end{cases} \tag{2.27}$$

(Lenhart dan Workman, 2007)

2.3.3 Prosedur Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal

Langkah penyelesaian masalah kontrol optimal dengan menggunakan syarat perlu prinsip maksimum Pontryagin sebagai berikut

1. Membentuk fungsi Hamilton

$$H(t,\vec{x},\vec{u},\vec{\sigma}) = f(t,\vec{x},\vec{u}) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t) g_i(t,\vec{x},\vec{u}),$$

2. Menentukan persamaan *state* dan persamaan *adjoint*

$$x_i'(t) = \frac{\partial H}{\partial \sigma_i} = g_i(t,\vec{x},\vec{u}), \quad x_i(t_0) = x_{i0}(t), \quad \forall i = 1,\dots,n,$$

$$\sigma_i'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j'} \quad \sigma_i(T) = 0, \quad \forall j = 1,\dots,n,$$

3. Menentukan u_k^* yang memenuhi kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0, \quad \forall u_k^*,\ k = 1,\dots,m.$$

4. Menentukan kondisi sistem optimal dengan mensubsitusikan u_k^* pada persamaan *state* dan persamaan *adjoint*.

2.4 Metode *Sweep* Maju-Mundur

Pada masalah kontrol optimal telah diketahui kondisi awal untuk persamaan *state* dan kondisi akhir untuk persamaan *adjoint*. Oleh karena itu, metode yang tepat digunakan untuk menyelesaikan perhitungan adalah metode *Sweep* Maju-Mundur. Misalkan akan dilakukan sejumlah k iterasi untuk n variabel *state* dan n variabel *adjoint*, vektor aproksimasi untuk variabel *state* dan variabel *adjoint* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{x}_i(t) = [x_{i(1)}(t),\dots,x_{i(k)}(t)] \text{ dan } \vec{\sigma}_i(t) = [\sigma_{i(1)}(t),\dots,\sigma_{i(k)}(t)]$$

dengan $i = 1,2,3,\dots,n$. (Lenhart dan Workman, 2007).

Prosedur yang digunakan pada metode *Sweep* Maju-Mundur adalah:

1. Mengambil nilai tebakan awal untuk masing-masing variabel kontrol $\vec{u}_j$ untuk $j = 1, \dots, m$ sesuai interval yang telah ditentukan.
2. Menyelesaikan $\vec{x}_i$ secara maju dengan kondisi awal $x_{i(1)} = x_i(t_0) = a_i$ dan nilai $\vec{u}_j$ menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.
3. Menyelesaikan $\vec{\sigma}_i$ secara mundur dengan kondisi tranversal $\vec{\sigma}_i(T) = 0$, nilai $\vec{u}_j$ dan $\vec{x}_i$ menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.
4. Memperbarui nilai $\vec{u}_j$ dengan mensubstitusikan nilai $\vec{x}_i$ dan $\vec{\sigma}_i$ pada persamaan karakteristik kontrol optimal.
5. Memeriksa kekonvergenan solusi. Apabila nilai variabel-variabel *state* maupun *adjoint* pada iterasi terakhir sangat dekat dengan nilai pada iterasi sebelumnya, maka nilai tersebut merupakan solusi, jika tidak maka kembali ke langkah 2.

2.5 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah teknik numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi. Bentuk umum metode Runge-Kutta orde-n adalah:

$$y_{i+1} = y_i + F(x_i, y_i, h) \tag{2.28}$$

dengan $F(x_i, y_i, h)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rata-rata pada interval. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$F = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

Repository Universitas Brawijaya

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta dan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah:

$$k_1 = hf(x_i + y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_n = hf(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1}).$$

Nilai a_i, p_i, q_{ij} dipilih sedemikian rupa sehingga kesalahan tiap langkah dapat diminimumkan dan h adalah lebar sub interval yang sering disebut ukuran langkah. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa nilai k mempunyai hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2, yang juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta adalah efisien dalam hitungan. Galat per langkah metode Runge-Kutta orde-n : $O(h^{n+1})$. Galat global metode Runge-Kutta orde-n : $O(h^n)$.

Adapun metode Runge-Kutta orde satu berbentuk

$$k_1 = hf(x_i + y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1), \qquad (2.29)$$

dan yang termasuk metode ini adalah metode Euler, berbentuk:

$$k_1 = hf(x_i + y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + k_1. \qquad \text{(dalam hal ini } a_1 = 1\text{)}$$

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde dua adalah:

$$k_1 = hf(x_i + y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1) \qquad (2.30)$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + (a_2 k_2)$$

dan salah satu contohnya adalah metode Heun yang berbentuk:

$k_1 = hf(x_i + y_i)$

$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ (dalam hal ini $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $p_1 = q_{11} = 1$)

Metode Runge-Kutta yang terkenal dan banyak dipakai dalam praktek adalah metode Runge-Kutta order 4 yang mempunyai bentuk umum:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2.31)$$

dengan

$k_1 = hf(x_i + y_i)$

$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$

$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$

Galat per langkah metode Runge-Kutta orde-4 adalah $O(h^5)$. Galat global metode Runge-Kutta orde-4 adalah $O(h^4)$.

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa nilai k mempunyai hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2, yang juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta Orde 4 adalah efisien dalam hitungan dan mempunyai tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi dibandingkan metode Runge-Kutta orde sebelumnya. (Munir, 2003).

2.6 Model *Economic Order Quantity* (EOQ)

Model EOQ merupakan model yang arahnya untuk menemukan jumlah pesanan yang ekonomis, yaitu jumlah pesanan yang memenuhi total biaya persediaan minimal dengan mempertimbangkan biaya pemesanan dan penyimpanan, sehingga diharapkan tidak ada kekurangan persediaan (Ristono, 2013). Model persediaan ini menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Kebutuhan (permintaan) setiap periode diketahui, relatif tetap dan terus-menerus.
2. Barang yang dipesan diasumsikan dapat tersedia secara langsung atau berlimpah.
3. Waktu tenggang (*lead time*) bersifat konstan.
4. Setiap pesanan diterima dalam sekali pengiriman dan langsung dapat digunakan.
5. Tidak ada pesanan ulang (*back order*) karena kehabisan persediaan.
6. Tidak ada *quantity discount*.

Model EOQ yang diteliti oleh Sana (2011a) merupakan model EOQ dengan dua produk yang serupa dengan asumsi tambahan bahwa permintaan produk pertama dipengaruhi secara positif oleh usaha bersama dan dipengaruhi secara negatif oleh jumlah persediaan produk kedua yang sejenis. Modelnya dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dX}{dt} = r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]X-\frac{C_1EX}{l_1E+l_2X}+\left[1-\frac{a_2}{a_2+Y}\right]X,$$
$$\frac{dY}{dt} = r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]Y-\frac{C_2EY}{l_3E+l_4Y}+\left[1-\frac{a_1}{a_1+X}\right]Y. \quad (2.32)$$

dengan

X : Persediaan barang 1 yang ada pada waktu t,

Y : Persediaan barang 2 yang ada pada waktu t,

r_1 : Laju intrinsik pengadaan barang 1,

r_2 : Laju intrinsik pengadaan barang 2,

L_1 : Kapasitas maksimum penyimpanan barang 1,

L_2 : Kapasitas maksimum penyimpanan barang 2,

E : Fungsi usaha bersama tim penjualan barang pada waktu t,

c_1 : Koefisien positif tingkat permintaan barang 1,

c_2 : Koefisien positif tingkat permintaan barang 2,

l_1 : Konstanta penghambat tingkat permintaan barang 1 yang berkaitan dengan E,

l_2 : Konstanta penghambat tingkat permintaan barang 1 yang berkaitan dengan persediaan barang 1,

l_3 : Konstanta penghambat tingkat permintaan barang 2 yang berkaitan dengan E,

l_4 : Konstanta penghambat tingkat permintaan barang 2 yang berkaitan dengan persediaan barang 2,

a_1 : Koefisien laju pertumbuhan produksi barang 1,

a_2 : Koefisien laju pertumbuhan produksi barang 2.

Misalkan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (2.32) adalah (X^*, Y^*), maka $\frac{dX}{dt}(X^*, Y^*) = \frac{dY}{dt}(X^*, Y^*) = 0$. Titik kesetimbangan (X^*, Y^*) diperoleh dari persamaan

$$r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]X-\frac{c_1 E X}{l_1 E+l_2 X}+\left[1-\frac{a_2}{a_2+Y}\right]X=0, \quad (2.33)$$

$$r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]Y-\frac{c_2 E Y}{l_3 E+l_4 Y}+\left[1-\frac{a_1}{a_1+X}\right]Y=0. \quad (2.34)$$

Berdasarkan persamaan (2.33) diperoleh $X = 0$ atau

$$r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]-\frac{C_1E}{l_1E+l_2X}+\left[1-\frac{Q_2}{a_2+Y}\right]=0 \qquad (2.35)$$

Berdasarkan persamaan (2.34) diperoleh $Y=0$ atau

$$r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]-\frac{C_2E}{l_3E+l_4Y}+\left[1-\frac{Q_1}{a_1+X}\right]=0 \qquad (2.36)$$

Sana (2011a) memaksimalkan fungsi tujuan dari kedua produk menggunakan prinsip maksimal Pontryagin dan melakukan analisis sistem dinamik. Berdasarkan model (2.32), Sana menunjukkan bahwa titik kesetimbangan model bersifat stabil asimtotik global dengan syarat tertentu. Solusi titik kesetimbangan optimal yang diperoleh adalah (X, Y, E) dengan menyelesaikan persamaan (2.35), (2.36) dan persamaan

$$\left[(s_1-p_1)\frac{C_1l_2X^2}{(l_1E+l_2X)^2}+(s_2-p_2)\frac{C_2l_4Y^2}{(l_3E+l_4Y)^2}-\gamma\right]$$

$$=\left[\frac{Q_1}{\delta^2-\psi_1\delta+\psi_2}\right]\frac{C_1l_2X^2}{(l_1E+l_2X)^2}+\left[\frac{Q_2}{\delta^2-\psi_1\delta+\psi_2}\right]\frac{C_2l_4Y^2}{(l_3E+l_4Y)^2}.$$

Selanjutnya, Sana (2011b) mengkaji model EOQ dengan menambahkan harga produk yang diproduksi pada dua produk yang serupa. Asumsi yang digunakan sama dengan Sana (2011a). Modelnya dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dX}{dt}=r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]X-\frac{C_1EX\left(1-\frac{Y}{L_2}\right)}{l_1E+l_2X},$$

$$\frac{dY}{dt}=r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]Y-\frac{C_2EY\left(1-\frac{X}{L_1}\right)}{l_3E+l_4Y}, \qquad (2.37)$$

dengan

: kapasitas maksimum penyimpanan barang 1 dan 2

Misalkan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (2.37) adalah (X^*, Y^*), maka $\frac{dX}{dt}(X^*, Y^*)=\frac{dY}{dt}(X^*, Y^*)=0$. Titik kesetimbangan (X^*, Y^*) diperoleh dari persamaan

$$r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]X-\frac{c_1EX(1-\frac{Y}{L})}{l_1E+l_2X}=0, \quad (2.38)$$

$$r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]Y-\frac{c_2EY(1-\frac{X}{L})}{l_3E+l_4Y}=0, \quad (2.39)$$

Sana menunjukkan bahwa titik kesetimbangan model (2.37), bersifat stabil asimtotik global dengan syarat tertentu. Adapun solusi titik kesetimbangan optimal yang diperoleh adalah (X, Y, E, s_1, s_2) dengan menyelesaikan persamaan (2.38), (2.39) dan persamaan

$$\left[(s_1-p_1)\frac{C_1l_2X^2(1-\frac{Y}{L})}{(l_1E+l_2X)^2}+(s_2-p_2)\frac{C_2l_4Y^2(1-\frac{X}{L})}{(l_3E+l_4Y)^2}-\gamma\right]$$

$$-\left[\frac{Q_1}{\delta^2-\psi_1\delta+\psi_2}\right]\frac{C_1l_2X^2(1-\frac{Y}{L})}{(l_1E+l_2X)^2}-\left[\frac{Q_2}{\delta^2-\psi_1\delta+\psi_2}\right]\frac{C_2l_4Y^2(1-\frac{X}{L})}{(l_3E+l_4Y)^2}=0$$

dengan

$s_1=\frac{1}{2}\left(s_1^{max}+p_1+\frac{Q_1}{\delta^2-\psi_1\delta+\psi_2}\right)$ dan $s_2=\frac{1}{2}\left(s_2^{max}+p_2+\frac{Q_2}{\delta^2-\psi_1\delta+\psi_2}\right)$.

Pada Sana (2011a) dan (2011b) analisis dinamik dilakukan terhadap model dengan produk yang sama tetapi jenis fungsi permintaannya berbeda. Pada kedua model diperhatikan usaha gabungan dari tim penjualan dan biaya persediaan per unitnya tetap.

Selanjutnya, Sana (2012) mengkaji lebih lanjut model EOQ untuk dua tipe produk yang serupa, dengan X menyatakan persedian barang 1 yang ada pada waktu t dan Y menyatakan persediaan barang 2 yang ada pada waktu t. Sistem dinamik dari persamaan diferensial dari dua jenis produk yang sama telah dipertimbangkan ketika tingkat permintaan setiap produk tergantung pada inisiatif

tim penjualan dan tingkat persediaan barang. Tingkat pengadaan barang tergantung pada persediaan barang.

Tingkat pengadaan barang 1 dan 2 dinyatakan sebagai model logistik dengan kapasitas gudang yang terbatas L. Kapasitas maksimum barang 1 yang bisa ditampung gudang dinyatakan dengan L_1 dan kapasitas maksimum barang 2 yang bisa ditampung gudang dinyatakan dengan L_2. Jika dalam suatu gudang terdapat X unit persediaan barang 1, maka gudang masih dapat menampung barang 1 sebanyak $(L_1 - X)$ unit. Jadi masih ada bagian gudang yang bisa ditempati sebesar $\frac{(L_1-X)}{L_1}$. Bagian ini sebanding dengan tingkat pengadaan per unit barang 1. Begitu pula jika dalam suatu gudang terdapat Y unit persediaan barang 2, maka gudang masih dapat menampung barang 2 sebanyak $(L_2 - Y)$ unit. Jadi masih ada bagian gudang yang bisa ditempati sebesar $\frac{(L_2-Y)}{L_2}$. Bagian ini juga sebanding dengan tingkat pengadaan per unit barang 2. Persamaan logistik tingkat pengadaan barang 1 (R_1) dan barang 2 (R_2) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}\frac{dX}{dt} &= \frac{1}{X}R_1 = r_1\frac{(L_1 - X)}{L_1}, \\ \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} &= \frac{1}{Y}R_2 = r_2\frac{(L_2 - Y)}{L_2}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

dengan r_1 dan r_2 adalah konstanta positif tingkat pengadaan barang. Persamaan (2.40) dapat ditulis

$$\begin{aligned} R_1 &= r_1\left[1 - \frac{X}{L_1}\right]X, \\ R_2 &= r_2\left[1 - \frac{Y}{L_2}\right]Y. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Tingkat permintaan barang 1 (D_1) dan tingkat permintaan barang 2 (D_2) dipengaruhi oleh inisiatif tim penjualan (E_1, E_2), total kapasitas maksimum gudang (L), dan jumlah persediaan barang lain. Tingkat permintaan barang 1 bertambah dengan adanya inisiatif tim penjualan (E_1) dan berkurang karena ada persediaan barang 2. Begitu juga dengan tingkat permintaan barang 2 bertambah dengan adanya inisiatif tim penjualan $(E2)$ dan berkurang karena ada persediaan barang 1. Tingkat permintaan barang dapat ditulis sebagi berikut

$$D_1 = \frac{C_1 E_1 X(1-\frac{Y}{L})}{l_{11}E_1 + l_{12}X},$$
$$D_2 = \frac{C_2 E_2 Y(1-\frac{X}{L})}{l_{21}E_2 + l_{22}Y}, \qquad (2.42)$$

dengan $C_1, C_2, l_{11}, l_{12}, l_{21}$ dan l_{22} adalah koefisien positif dari tingkat permintaan barang 1 dan 2. l_{11} dan l_{21} sebanding dengan perbandingan tingkat persediaan dengan tingkat permintaan pada tingkat inisiatif tim penjualan yang paling tinggi, sedangkan l_{12} dan l_{21} sebanding dengan perbandingan tingkat inisiatif tim penjualan dengan tingkat permintaan pada tingkat persediaan yang paling tinggi. Jika l semakin besar, maka tingkat permintaan akan menurun. Sebaliknya, jika l semakin kecil maka tingkat permintaan akan meningkat.

Sistem dinamik model EOQ menyatakan tingkat persediaan barang 1 dan 2 sebagai hasil pengurangan dari tingkat pengadaan dan tingkat permintaan barang. Jadi sistem dinamik yang diperoleh dengan mengurangkan persamaan di atas sebagai berikut

$$\frac{dX}{dt} = r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]X - \frac{C_1E_1X(1-\frac{Y}{L})}{l_{11}E_1+l_{12}X},$$
$$\frac{dY}{dt} = r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]Y - \frac{C_2E_2Y(1-\frac{X}{L})}{l_{21}E_2+l_{22}Y}, \qquad (2.43)$$

dengan

E_1 : Fungsi usaha bersama tim penjualan untuk barang 1 pada waktu t

E_2 : Fungsi usaha bersama tim penjualan untuk barang 2 pada waktu t

Misalkan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (2.43) adalah (X^*, Y^*), maka $\frac{dX}{dt}(X^*, Y^*) = \frac{dY}{dt}(X^*, Y^*) = 0$. Titik kesetimbangan (X^*, Y^*) diperoleh dari persamaan

$$r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]X - \frac{c_1 E_1 X\left(1-\frac{Y}{L_2}\right)}{l_{11}E_1 + l_{12}X} = 0, \quad (2.44)$$

$$r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]Y - \frac{c_2 E_2 Y\left(1-\frac{X}{L_1}\right)}{l_{21}E_2 + l_{22}Y} = 0, \quad (2.45)$$

Berdasarkan persamaan (2.44) diperoleh $X = 0$ atau

$$r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right] - \frac{c_1 E_1\left(1-\frac{Y}{L_2}\right)}{l_{11}E_1 + l_{12}X} = 0. \quad (2.46)$$

Berdasarkan persamaan (2.45) diperoleh $Y = 0$ atau

$$r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right] - \frac{c_2 E_2\left(1-\frac{X}{L_1}\right)}{l_{21}E_2 + l_{22}Y} = 0. \quad (2.47)$$

Selain itu, fungsi biaya persediaan juga digunakan pada fungsi tujuan yang dioptimalkan dengan prinsip maksimum Pontryagin. Biaya persediaan dipengaruhi oleh biaya pembelian, biaya energi dan kerja, dan biaya ekstra yang dikeluarkan. Biaya persediaan (h_1, h_2) ditulis sebagai berikut

$$h_1 = p_1 b + \frac{g_1}{X} + \alpha_1 X,$$
$$h_2 = p_2 b + \frac{g_2}{Y} + \alpha_2 Y. \quad (2.48)$$

dengan (p_1, p_2), b, (g_1, g_2) masing-masing menyatakan biaya pembelian, tingkat inflasi dan biaya energi dan kerja. Dalam hal ini $(\alpha_1 X, \alpha_2 Y)$ sebanding dengan persediaan yang ada karena biaya ekstra yang dikeluarkan.

Selanjutnya, ruas kanan persamaan (2.43) dituliskan sebagai suatu fungsi f_1 dan f_2, sehingga persamaan(2.43) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y, E_1, E_2),$$
$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y, E_1, E_2). \qquad (2.49)$$

Model (2.43) dapat ditunjukkan oleh Sana bahwa titik kesetimbangan model bersifat stabil asimtotik global dengan syarat tertentu dengan titik kesetimbangan optimal yang diperoleh adalah (X, Y, E_1, E_2) dengan menyelesaikan persamaan (2.46), (2.47),

$$\left[(s_1 - p_1)\frac{C_1 l_2 X^2 (1 - \frac{Y}{L})}{(l_1 E_1 + l_2 X)^2} - \gamma_1\right] - \left[\frac{Q_1}{\delta^2 - \psi_1 \delta + \psi_2}\right]\frac{C_1 l_2 X^2 (1 - \frac{Y}{L})}{(l_1 E_1 + l_2 X)^2} = 0,$$

dan

$$\left[(s_2 - p_2)\frac{C_2 l_4 Y^2 (1 - \frac{X}{L})}{(l_3 E_2 + l_4 Y)^2} - \gamma_2\right] - \left[\frac{Q_2}{\delta^2 - \psi_1 \delta + \psi_2}\right]\frac{C_2 l_4 Y^2 (1 - \frac{X}{L})}{(l_3 E_2 + l_4 Y)^2} = 0.$$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dikaji formulasi model EOQ (*Economic Order Quantity*) dan kontrol optimal. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk mendapatkan hasil yang optimal.

3.1 Formulasi Model EOQ (*Economic Order Quantity*)

Model kontrol optimal yang dikaji pada tesis ini merupakan model yang dikemukakan oleh Sana (2012) dengan mengasumsikan bahwa kapasitas produksi terbatas dan permintaan barang tergantung pada tingkat pengadaan barang dan inisiatif tim penjualan pada masing-masing produk secara terpisah. Model yang digunakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= r_1\left[1-\frac{X}{L_1}\right]X-\frac{C_1E_1X(1-\frac{Y}{L})}{I_{11}E_1+I_{12}X}, \\ \frac{dY}{dt} &= r_2\left[1-\frac{Y}{L_2}\right]Y-\frac{C_2E_2Y(1-\frac{X}{L})}{I_{21}E_2+I_{22}Y}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan variabel dan parameter pada persamaan (3.1) memiliki pengertian yang sama seperti yang diberikan pada bab sebelumnya.

3.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Tujuan kontrol optimal pada tesis ini adalah memaksimalkan fungsi keuntungan perdagangan (π) yang mempertimbangkan biaya persediaan, biaya pembelian, biaya untuk usaha tim penjualan. Masalah kontrol optimal dari kasus ini adalah memaksimalkan fungsi tujuan

$$J(E_1, E_2) = \int_0^T \pi(X, Y, E_1, E_2) e^{-\delta t} dt \tag{3.2}$$

dengan

δ = tingkat bunga(r) – tingkat inflasi (b).

Fungsi keuntungan perdagangan dari kasus ini adalah hasil penjualan barang 1 dan hasil penjualan barang 2, kemudian dikurangi biaya persediaan barang 1, biaya persediaan barang 2, dan biaya usaha tim penjualan. Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\pi(X, Y, E_1, E_2) = (s_1 - p_1)\left[\frac{c_1 E_1 X\left(1 - \frac{X}{L}\right)}{I_{11}E_1 + I_{12}X}\right] + (s_2 - p_2)\left[\frac{c_2 E_2 Y\left(1 - \frac{Y}{L}\right)}{I_{21}E_2 + I_{22}Y}\right]$$

$$- h_1 X - h_2 Y - \gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2$$

$$\pi(X, Y, E_1, E_2) = (s_1 - p_1)\left[\frac{c_1 E_1 X\left(1 - \frac{X}{L}\right)}{I_{11}E_1 + I_{12}X}\right] + (s_2 - p_2)\left[\frac{c_2 E_2 Y\left(1 - \frac{Y}{L}\right)}{I_{21}E_2 + I_{22}Y}\right] \tag{3.3}$$

$$- \left(p_1 b + \frac{g_1}{X} + \alpha_1 X\right)X - \left(p_2 b + \frac{g_2}{Y} + \alpha_2 Y\right)Y$$

$$- \gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2$$

dengan

s_1 = biaya penjualan per unit barang 1,

s_2 = biaya penjualan per unit barang 2,

p_1 = biaya pembelian per unit barang 1,

p_2 = biaya pembelian per unit barang 2.

3.3 Penyelesaian Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal pada model EOQ ini diselesaikan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Variabel kontrolnya adalah (E_1, E_2) dan kendalanya $(0,0) \leq (E_1, E_2) \leq (E_1^{max}, E_2^{max})$ dengan (E_1^{max}, E_2^{max}) merupakan batas atas usaha tim penjualan barang 1 dan 2. Variabel *state* pada masalah ini

adalah persamaan (3.1). Didefinisikan variabel *adjoint* yang bersesuaian untuk variabel *state* adalah σ_1 dan σ_2. Selanjutnya, dapat dibentuk fungsi Hamilton sebagai berikut

$$H = \pi(X, Y, E_1, E_2)e^{-\delta t} + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(t) f_i(X, Y, E_1, E_2) \tag{3.4}$$

dengan kondisi batas transversal adalah

$$\sigma_i(T) = 0, \quad i = 1,2 \tag{3.5}$$

Turunan parsial fungsi Hamilton pada persamaan (3.4) terhadap masing-masing variabel *adjoint* membentuk sistem persamaan *state* sebagai berikut

$$\frac{\partial H}{\partial \sigma_1} = \frac{dX}{dt} = f_1(X, Y, E_1, E_2),$$
$$\frac{\partial H}{\partial \sigma_2} = \frac{dY}{dt} = f_2(X, Y, E_1, E_2). \tag{3.6}$$

Nilai negatif turunan parsial fungsi Hamilton pada persamaan (3.4) terhadap masing-masing variabel *state* membentuk sistem persamaan *adjoint* seperti pada persamaan 3.7 dan 3.8. (Perhitungan selengkapnya dapat dilihat di Lampiran 2).

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\left[-\frac{(s_2 - p_2)C_2 E_2{}^2}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)L} - (p_1 b + 2\alpha_1 X) \right] e^{-\delta t}$$
$$-\sigma_1 \left[r_1 \left[1 - \frac{2X}{L_1}\right] - \frac{C_1 I_{11} E_1{}^2 \left(1 - \frac{Y}{L}\right)}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} \right] - \sigma_2 \left[\frac{C_2 E_2 Y}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)L} \right]. \tag{3.7}$$

dengan

$$B_7 = \frac{(s_1 - p_1)C_1 I_{11} E_1{}^2 (L - Y)}{L(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}.$$

Selanjutnya

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -\left[\frac{(s_1 - p_1)C_1E_1X}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)L} + \frac{(s_2 - p_2)C_2I_{21}E_2^2(L - X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - D_{10}\right]e^{-\delta t}$$
$$-\sigma_1\left[\frac{C_1E_1X}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)L}\right] - \sigma_2\left[r_2\left[1 - \frac{2Y}{L_2}\right] - \frac{C_2I_{21}E_2^2(L - X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2}\right]. \quad (3.8)$$

dengan

$$D_{10} = (p_2b + 2\alpha_2 Y).$$

Langkah selanjutnya menentukan kondisi $(E_1\ , E_2)$ yang membuat sistem optimal. Kondisi optimal diperoleh ketika fungsi Hamilton memenuhi kondisi stasioner, yaitu

$$\frac{\partial H}{\partial E_k} = 0, \ \forall E_k, k = 1,2. \quad (3.9)$$

Adapun turunan parsial fungsi Hamilton terhadap masing-masing variabel kontrol adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial H}{\partial E_1} = \left[\frac{(s_1 - p_1)C_1X\left(1 - \frac{Y}{L}\right)(I_{11}E_1 + I_{12}X) - (s_1 - p_1)C_1E_1X\left(1 - \frac{Y}{L}\right)I_{11}}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} - \gamma_1\right]e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1\frac{C_1X\left(1 - \frac{Y}{L}\right)(I_{11}E_1 + I_{12}X) - C_1E_1X\left(1 - \frac{Y}{L}\right)I_{11}}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2},$$

$$= \left[\frac{F_1 + F_2 - F_3}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} - \gamma_1\right]e^{-\delta t} - \sigma_1\frac{F_4}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2},$$

dengan

$$F_1 = (s_1 - p_1)C_1I_{12}X^2\left(1 - \frac{Y}{L}\right),$$

$$F_2 = (s_1 - p_1)C_1E_1I_{11}X\left(1 - \frac{Y}{L}\right),$$

$$F_3 = (s_1 - p_1)C_1E_1I_{11}X\left(1 - \frac{Y}{L}\right),$$

$$F_4 = C_1I_{12}X^2\left(1 - \frac{Y}{L}\right) + C_1E_1I_{11}X\left(1 - \frac{Y}{L}\right) - C_1E_1I_{11}X\left(1 - \frac{Y}{L}\right).$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_1}=\left[\frac{(s_1-p_1)C_1I_{12}X^2\left(1-\frac{Y}{L}\right)}{(I_{11}E_1+I_{12}X)^2}-\gamma_1\right]e^{-\delta t}-\sigma_1\frac{C_1I_{12}X^2\left(1-\frac{Y}{L}\right)}{(I_{11}E_1+I_{12}X)^2},$$

$$=\left[\frac{\frac{(s_1-p_1)C_1I_{12}X^2(L-Y)}{L}}{(I_{11}E_1+I_{12}X)^2}-\gamma_1\right]e^{-\delta t}-\sigma_1\frac{\frac{C_1I_{12}X^2(L-Y)}{L}}{(I_{11}E_1+I_{12}X)^2},$$

$$=\left[\frac{(s_1-p_1)C_1I_{12}X^2(L-Y)}{L(I_{11}E_1+I_{12}X)^2}-\gamma_1\right]e^{-\delta t}-\sigma_1\frac{C_1I_{12}X^2(L-Y)}{L(I_{11}E_1+I_{12}X)^2}. \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_2}=\left[\frac{(s_2-p_2)C_2Y\left(1-\frac{X}{L}\right)(I_{21}E_2+I_{22}Y)-(s_2-p_2)C_2E_2Y\left(1-\frac{X}{L}\right)I_{21}}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2}-\gamma_2\right]e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_2\frac{C_2Y\left(1-\frac{X}{L}\right)(I_{21}E_2+I_{22}Y)-C_2E_2Y\left(1-\frac{X}{L}\right)I_{21}}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2},$$

$$=\left[\frac{G_1+(s_2-p_2)C_2E_2I_{21}Y\left(1-\frac{X}{L}\right)-(s_2-p_2)C_2E_2I_{21}Y\left(1-\frac{X}{L}\right)}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2}-\gamma_2\right]e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_2\frac{C_2I_{22}Y^2\left(1-\frac{X}{L}\right)+C_2E_2I_{21}Y\left(1-\frac{X}{L}\right)-C_2E_2I_{21}Y\left(1-\frac{X}{L}\right)}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2},$$

dengan

$$G_1=(s_2-p_2)C_2I_{22}Y^2\left(1-\frac{X}{L}\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_2}=\left[\frac{(s_2-p_2)C_2I_{22}Y^2\left(1-\frac{X}{L}\right)}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2}-\gamma_2\right]e^{-\delta t}-\sigma_2\frac{C_2I_{22}Y^2\left(1-\frac{X}{L}\right)}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2},$$

$$=\left[\frac{\frac{(s_2-p_2)C_2I_{22}Y^2(L-X)}{L}}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2}-\gamma_2\right]e^{-\delta t}-\sigma_2\frac{\frac{C_2I_{22}Y^2(L-X)}{L}}{(I_{21}E_2+I_{22}Y)^2},$$

$$\frac{\partial I}{\partial E_2} = \left[\frac{(s_2 - p_2)C_2 I_{22} X^2 (L - Y)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - \gamma_2\right] e^{-\delta t} - \sigma_2 \frac{C_2 I_{22} X^2 (L - X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2}. \tag{3.11}$$

Berdasarkan kondisi stasioner pada persamaan (3.9) terhadap persamaan (3.10) dan persamaan (3.11), maka dapat ditentukan kondisi E_1^* dan E_2^* agar diperoleh sistem optimal dengan uraian sebagai berikut

$$\left[\frac{(s_1 - p_1)C_1 I_{12} X^2 (L - Y)}{L(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} - \gamma_1\right] e^{-\delta t} - \sigma_1 \frac{C_1 I_{12} X^2 (L - Y)}{L(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} = 0,$$

$$\frac{(s_1 - p_1)C_1 I_{12} X^2 (L - Y)e^{-\delta t} - \sigma_1 C_1 I_{12} X^2 (L - Y)}{L(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} = \gamma_1 e^{-\delta t},$$

$$(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2 L\gamma_1 e^{-\delta t} = (s_1 - p_1)C_1 I_{12} X^2 (L - Y)e^{-\delta t} - \sigma_1 C_1 I_{12} X^2 (L - Y),$$

$$\begin{aligned}&\left({I_{11}}^2{E_1}^2 + {I_{12}}^2 X^2 + 2E_1 I_{11} I_{12} X\right) L\gamma_1 e^{-\delta t} \\ &\qquad = (s_1 - p_1)C_1 I_{12} X^2 (L - Y)e^{-\delta t} - \sigma_1 C_1 I_{12} X^2 (L - Y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&{I_{11}}^2{E_1}^2 L\gamma_1 e^{-\delta t} + 2E_1 I_{11} I_{12} X L\gamma_1 e^{-\delta t} + {I_{12}}^2 X^2 L\gamma_1 e^{-\delta t} \\ &\qquad = (s_1 - p_1)C_1 I_{12} X^2 (L - Y)e^{-\delta t} - \sigma_1 C_1 I_{12} X^2 (L - Y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&{I_{11}}^2 L\gamma_1 e^{-\delta t}{E_1}^2 + 2I_{11} I_{12} X L\gamma_1 e^{-\delta t} E_1 + {I_{12}}^2 X^2 L\gamma_1 e^{-\delta t} \\ &\qquad - (s_1 - p_1)C_1 I_{12} X^2 (L - Y)e^{-\delta t} + \sigma_1 C_1 I_{12} X^2 (L - Y) = 0.\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$E_1^* = \frac{-A_2 \pm \sqrt{{A_2}^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}, \tag{3.12}$$

dengan $A_1 = {I_{11}}^2 L\gamma_1 e^{-\delta t}$,

$A_2 = 2I_{11} I_{12} X L\gamma_1 e^{-\delta t}$,

$A_3 = {I_{12}}^2 X^2 L\gamma_1 e^{-\delta t} - (s_1 - p_1)C_1 I_{12} X^2 (L - Y)e^{-\delta t} + \sigma_1 C_1 I_{12} X^2 (L - Y)$,

Repository Universitas Brawijaya

Selanjutnya nilai E_2^* ditentukan seperti uraian berikut:

$$\left[\frac{(s_2 - p_2)C_2 I_{22} Y^2 (L-X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - \gamma_2\right] e^{-\delta t} - \sigma_2 \frac{C_2 I_{22} Y^2 (L-X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} = 0,$$

$$\frac{(s_2 - p_2)C_2 I_{22} Y^2 (L-X) e^{-\delta t} - \sigma_2 C_2 I_{22} Y^2 (L-X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} = \gamma_2 e^{-\delta t},$$

$$(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2 L\gamma_2 e^{-\delta t} = (s_2 - p_2)C_2 I_{22} Y^2 (L-X) e^{-\delta t} - \sigma_2 C_2 I_{22} Y^2 (L-X),$$

$$\left({I_{21}}^2 {E_2}^2 + {I_{22}}^2 Y^2 + 2 I_{21} E_2 I_{22} Y\right) \ L\gamma_2 e^{-\delta t}$$

$$= (s_2 - p_2)C_2 I_{22} Y^2 (L-X) e^{-\delta t} - \sigma_2 C_2 I_{22} Y^2 (L-X),$$

$${I_{21}}^2 {E_2}^2 L\gamma_2 e^{-\delta t} + 2 I_{21} E_2 I_{22} Y L \gamma_2 e^{-\delta t} + {I_{22}}^2 Y^2 L \gamma_2 e^{-\delta t}$$

$$= (s_2 - p_2)C_2 I_{22} Y^2 (L-X) e^{-\delta t} - \sigma_2 C_2 I_{22} Y^2 (L-X),$$

$${I_{21}}^2 L\gamma_2 e^{-\delta t} {E_2}^2 + 2 I_{21} I_{22} Y L \gamma_2 e^{-\delta t} E_2 + {I_{22}}^2 Y^2 L \gamma_2 e^{-\delta t}$$

$$- (s_2 - p_2)C_2 I_{22} Y^2 (L-X) e^{-\delta t} + \sigma_2 C_2 I_{22} Y^2 (L-X) = 0.$$

Berdasarkan persamaan kuadrat di atas diperoleh solusi

$$E_2^* = \frac{-B_2 \pm \sqrt{{B_2}^2 - 4 B_1 B_3}}{2 B_1}, \tag{3.13}$$

dengan $B_1 = {I_{21}}^2 L \gamma_2 e^{-\delta t}$,

$B_2 = 2 I_{21} I_{22} Y L \gamma_2 e^{-\delta t}$,

$B_3 = {I_{22}}^2 Y^2 L \gamma_2 e^{-\delta t} - (s_2 - p_2)C_2 I_{22} Y^2 (L-X) e^{-\delta t} + \sigma_2 C_2 I_{22} Y^2 (L-X)$,

Berdasarkan batasan nilai kontrol yaitu pada $0 \le E_k \le E_{max}$ untuk $k = 1,2$, maka nilai kondisi optimal yang sesuai dengan persamaan (2.26) disajikan sebagai berikut

$$E_k^* = \begin{cases} 0, & E^k < 0 \\ E_k^*, & 0 \le E_k^* \le E_{max} \\ E_{max}, & E_k^* > E_{max} \end{cases} \tag{3.14}$$

Berdasarkan persamaan (3.12), (3.13) dan (3.14) maka perhitungan nilai E_1^* dan E_2^* dapat dilakukan menggunakan persamaan dibawah ini:

$$E_1^* = min\left\{max\left(0, \frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}, 1\right)\right\} \tag{3.15}$$

$$E_2^* = min\left\{max\left(0, \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1}, 1\right)\right\} \tag{3.16}$$

dengan

$A_2^2 - 4A_1A_3 > 0, A_3 < 0$,

$B_2^2 - 4B_1B_3 > 0, B_3 < 0.$

Misalkan X^* dan Y^* adalah kondisi *state* optimal dan σ_1^* dan σ_2^* adalah kondisi variabel *adjoint* yang bersesuaian. Kondisi optimal diperoleh dengan menyelesaikan sistem yang telah disubtitusikan nilai E_1^* dan E_2^* sebagai berikut

$$\frac{dX^*}{dt} = f1(X^*, Y^*, E1^*, E2^*)$$
$$\frac{dY^*}{dt} = f2(X^*, Y^*, E1^*, E2^*) \tag{3.17}$$

Kondisi variabel *adjoint* (σ_1^*) ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \sigma_1^*}{\partial t} = -\Big[[illegible] - ([illegible] - p_2) \frac{C_2 E_2^* Y^*}{(I_{21}E_2^* + I_{22}Y^*)L} - (p_1 b [illegible]) \Big] e [illegible]$$

$$-\sigma_1\left[r_1\left[1 - \frac{2X^*}{L}\right] - \frac{C_1 I_{11} E_1^{*2}\left(1 - \frac{Y^*}{L}\right)}{(I_{11}E_1^* + I_{12}X^*)^2}\right] - \sigma_2\left[\frac{C_2 E_2^* Y^*}{(I_{21}E_2^* + I_{22}Y^*)L}\right] \tag{3.18}$$

dengan

$$H_1 = (s_1 - p_1)\frac{C_1 I_{11} E_1^{*2}\left(1 - \frac{Y^*}{L}\right)}{(I_{11}E_1^* + I_{12}X^*)^2}$$

Sedangkan kondisi variabel *adjoint* (σ_2^*) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \sigma_2^*}{\partial t} = -\Big[\text{[illegible]} (s_1 - p_1) \frac{C_1 I \; X^*}{(I_{11}E_1^* + \text{[illegible]}} \text{[illegible]} (p_2 b + 2\alpha_2 Y^*)\Big] e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1\left[\frac{C_1 E_1^* X^*}{(I_{11}E_1^* + I_{12}X^*)L}\right] - \sigma_2\left[r_2\left[1 - \frac{2Y^*}{L}\right] - \frac{C_2 I_{21} E_2^{*2}\left(1 - \frac{X^*}{L}\right)}{(I_{21}E_2^* + I_{22}Y^*)^2}\right] \quad (3.19)$$

dengan

$$H_2 = (s_2 - p_2)\frac{C_2 I_{21} E_2^{*2}\left(1 - \frac{X^*}{L}\right)}{(I_{21}E_2^* + I_{22}Y^*)^2}.$$

Berdasarkan uraian penyelesaian masalah kontrol optimal yang telah dilakukan, maka dapat dibentuk suatu teorema sebagai berikut,

Teorema 1. Pada masalah kontrol optimal persamaan (3.2) dengan kendala sistem persamaan (3.1), terdapat kontrol optimal E_1^*, E_2^* dan solusi *state* optimal X^*, Y^* sedemikian sehingga nilai $J(E_1^*, E_2^*)$ maksimum. Selain itu, terdapat variabel *adjoint* σ_1 , σ_2 yang memenuhi persamaan (3.7) dan (3.8) dengan kondisi transversal pada persamaan (3.5). Selanjutnya, kontrol optimal E_1^*, E_2^* diberikan oleh persamaan (3.15) dan (3.16).

Selanjutnya, solusi sistem optimal diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (3.18) dan (3.19) dengan menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur yang dibahas pada subbab selanjutnya.

3.4 Simulasi Numerik

Persamaan (3.18) dan (3.19) diselesaikan menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur. Interval waktu $[0, T]$ didiskretisasi sehingga diperoleh titik-titik

$t_j = t_0 + jh$ untuk $j = 1,2,3, \ldots, k$ dengan $T = t_k$. Vektor aproksimasi variabel *state* adalah $\vec{X}(t) = [X(t_0), X(t_1), X(t_2), \ldots, X(T)]$, $\vec{Y}(t) = [Y(t_0), Y(t_1), Y(t_2), \ldots, Y(T)]$ dengan kondisi awal yang diberikan adalah $X(t_0) = X_0$ dan $Y(t_0) = Y_0$. Vektor aproksimasi variabel *adjoint* adalah $\vec{\sigma}_i(t) = [\sigma_i(t_0), \sigma_i(t_1), \sigma_i(t_2), \ldots, \sigma_i(T)]$ untuk $i = 1,2$ dengan kondisi transversal $\sigma_i(T) = 0$. Berdasarkan langkah-langkah penyelesaian metode *Sweep* Maju-Mundur pada Bab II, langkah-langkah penyelesaian sistem (3.18) dan (3.19) adalah sebagai berikut,

Langkah 1.

Pilih nilai tebakan awal untuk masing-masing variabel kontrol $\vec{E}_i = [E_i(t_0), E_i(t_1), E_i(t_2), \ldots, E_i(T)] = \vec{0}$ untuk $i = 1,2$, adalah $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{0}$.

Langkah 2.

Gunakan kondisi awal (X_0 dan Y_0) dan tebakan awal untuk mendapatkan $X(t_j)$ dan $Y(t_j)$ menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 secara maju dengan $t_j = t_0 + jh$ untuk $j = 1,2,3, \ldots, k$.

Langkah 3.

Gunakan kondisi transversal $\sigma_i(T) = 0$, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{X}$ dan $\vec{Y}$ untuk mendapatkan $\sigma_1(t_j)$ dan $\sigma_2(t_j)$ menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 secara mundur dengan $t_j = t_0 + jh$ untuk $j = k, k-1, k-2, \ldots, 1$.

Langkah 4.

Perbarui nilai $\vec{E}_1$ dan $\vec{E}_2$ dengan mensubtitusikan nilai $\vec{X}$, $\vec{Y}$ dan $\vec{\sigma}_i$ pada persamaan (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) dan (3.14).

Langkah 5.

Periksa kekonvergenan solusi, apabila nilai variabel-variabel *state*, *adjoint* maupun kontrol pada iterasi terakhir sangat dekat dengan nilai pada iterasi sebelumnya, maka nilai tersebut merupakan solusi, jika tidak maka dilakukan iterasi kembali dimulai dengan langkah 2. Kriteria kekonvergenan yang digunakan adalah $\varepsilon < 10^{-3}$, dengan ε dihitung dengan rumus sebagai berikut,

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{k}\big(|X_i(t_j) - X_{i-1}(t_j)| + |Y_i(t_j) - Y_{i-1}(t_j)| + |\sigma_{1i}(t_j) - \sigma_{1i-1}(t_j)|$$

$$+|\sigma_{2i}(t_j) - \sigma_{2i-1}(t_j)| + |E_{1i}(t_j) - E_{1i-1}(t_j)| + |E_{2i}(t_j) - E_{2i-1}(t_j)|\big)$$

dengan i = 1, 2, ..., n.

Selanjutnya, dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mendapatkan gambaran tentang pengaruh pengontrolan. Pada simulai numerik ini diambil nilai awal X_0 = 21 dan Y_0 = 22. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik ini diberikan pada Tabel 3.1. dan Tabel 3.2.

Tabel 3.1 Nilai Parameter untuk Simulasi Numerik

Nilai Parameter	L_1	L_2	L	z_{11}	z_{12}	z_{21}	z_{22}	p_1	p_2
	50	50	100	0.6	0.4	0.5	0.3	16	8

Nilai Parameter	α_1	α_2	γ_1	γ_2	s_1	s_2	δ	b
	0.01	0.01	5	7	26	20	0.05	0.11

Tabel 3.2. Perubahan Nilai Parameter r_1, r_2 dan C_1, C_2

Simulasi	r_1	r_2	C_1	C_2
I	0.1	2	0.6	0.6
II	1.2	2	0.6	0.6
III	2	1.2	0.6	0.6
IV	1.2	2	2	5
V	1.2	2	5	2

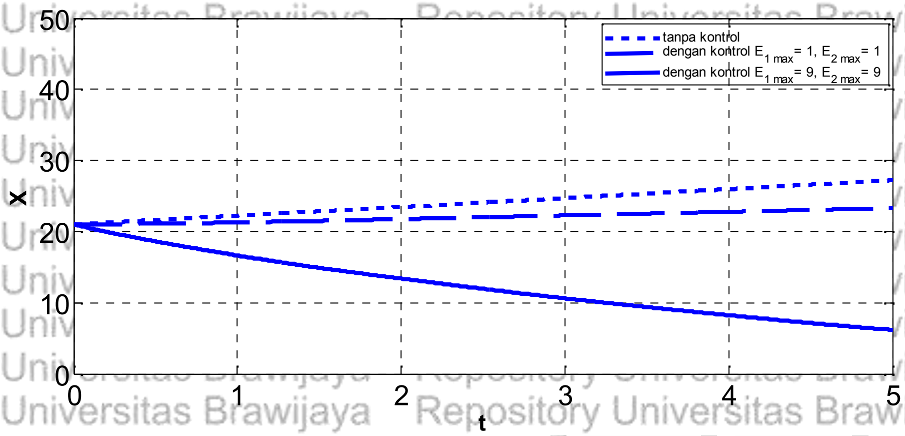
3.4.1 Simulasi I

Hasil simulasi numerik I diberikan pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 tentang pengaruh laju intrinsik pengadaan barang 1 dan laju intrinsik pengadaan barang 2. Misalkan laju intrinsik pengadaan barang 1 (r_1) adalah 0,1 dan koefisien positif tingkat permintaan barang 1 (C_1) adalah 0,6. Sedangkan laju intrinsik pengadaan barang 2 (r_2) adalah 2 dan koefisien positif tingkat permintaan barang 2 (C_2) adalah 0,6.

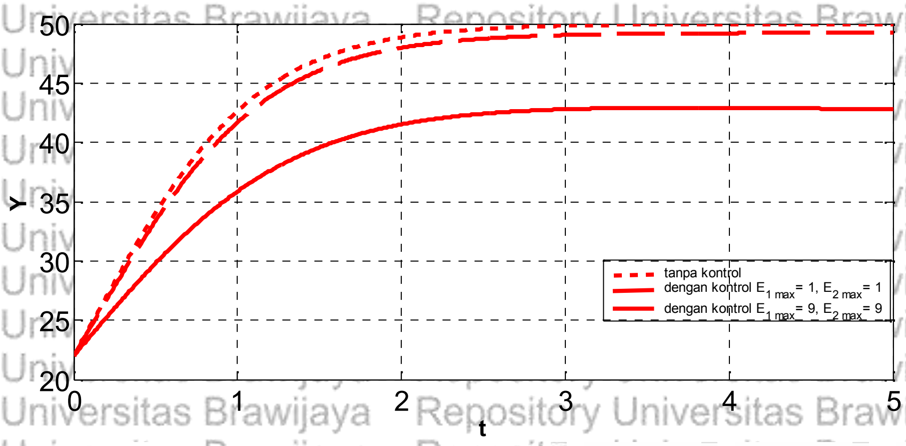
Pada sistem tanpa kontrol dapat diketahui bahwa persediaan barang 1 meningkat sampai batas waktu tertentu dan persediaan barang 2 meningkat kemudian berhenti pada saat kapasitas barang 2 maksimal, seperti yang terlihat pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2.

Pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 yang sistemnya dengan kontrol dapat diketahui bahwa pada awalnya persediaan barang hampir sama. Total kapasitas maksimum barang 1 dan barang 2 yang ditampung di gudang sama. Berdasarkan Gambar 3.1 tersebut, ternyata persediaan barang 1 meningkat terus sampai batas waktu tertentu dan pada Gambar 3.2 terlihat persediaan barang 2 yang ada meningkat sampai mendekati maksimal. Selain itu terlihat peningkatan persediaan barang 1 lebih kecil dibandingkan peningkatan persediaan barang 2 bahkan hampir habis, dikarenakan laju intrinsik pengadaan barang 1 lebih kecil daripada laju intrinsik pengadaan barang 2.

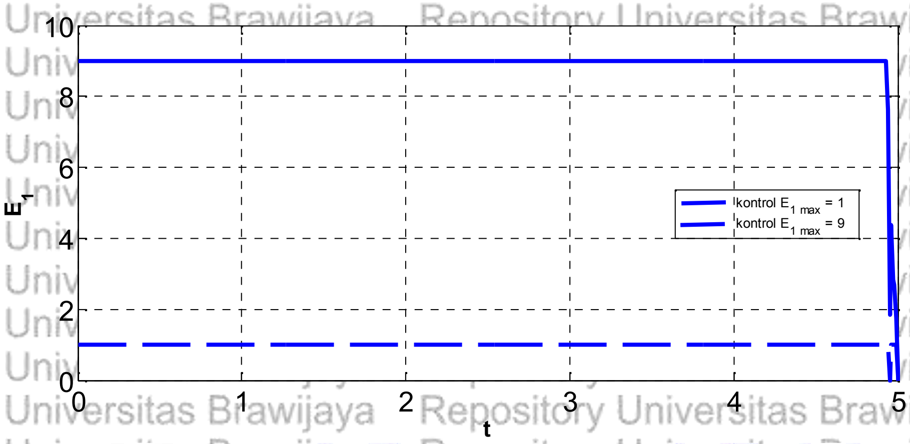
Pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 terlihat bahwa semakin besar usaha tim penjualan, maka proses persedian barang semakin sedikit bahkan hampir habis sampai batas waktu yang ditentukan. Pada Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 dapat dilihat hasil jumlah persediaan barang 1 dan persediaan barang 2 dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9. Hal ini menunjukkan bahwa tim penjualan harus berusaha maksimal sampai batas waktu yang ditentukan.



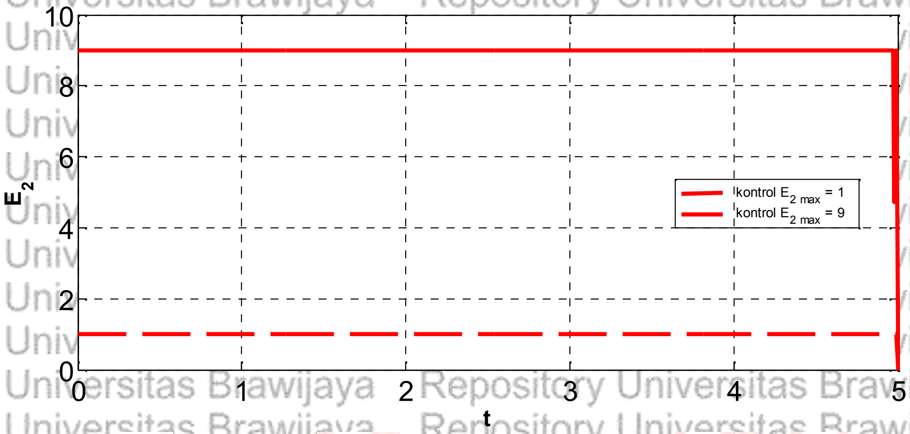
Gambar 3.1. Hasil persediaan barang 1 dengan $r_1 = 0.1$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 2$, $c_2 = 0.6$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$



Gambar 3.2. Hasil persediaan barang 2 dengan $r_1 = 0.1$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 2$, $c_2 = 0.6$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$



Gambar 3.3. Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan $r_1 = 0.4$, $C_1 = 1$, 0.6, $r_2 = 2$, $C_2 = 0.6$



Gambar 3.4. Kontrol optimal E_2 terhadap model dengan $r_1 = 0.4$, $C_1 = 1$, 0.6, $r_2 = 2$, $C_2 = 0.6$

barar r_1)

ntaan C_1) ada

adaan b r_2) ada

C_2) ada

Repository Universitas Brawijaya

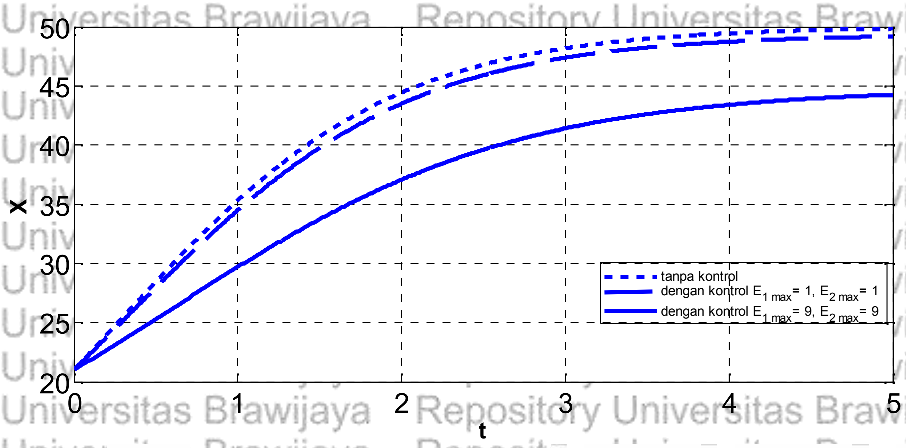
Repository Universitas Brawijaya

an laju intrins

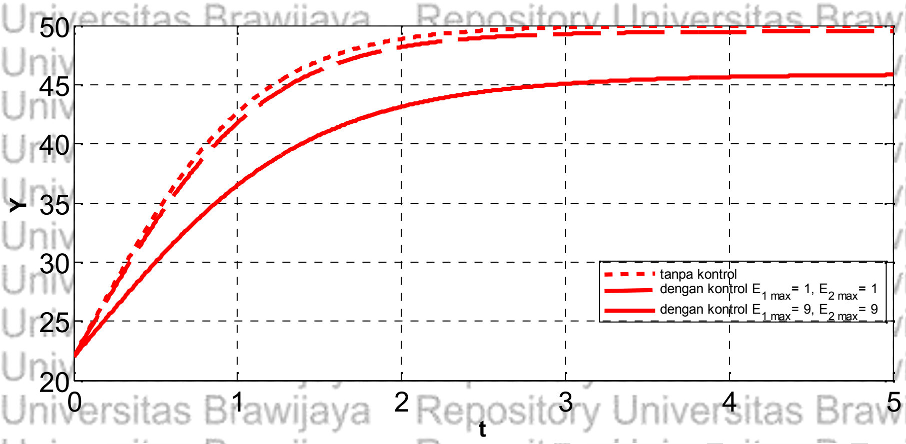
E_1 dan E_2 ber

harus berusaha maksi ai batas waktu yang dit

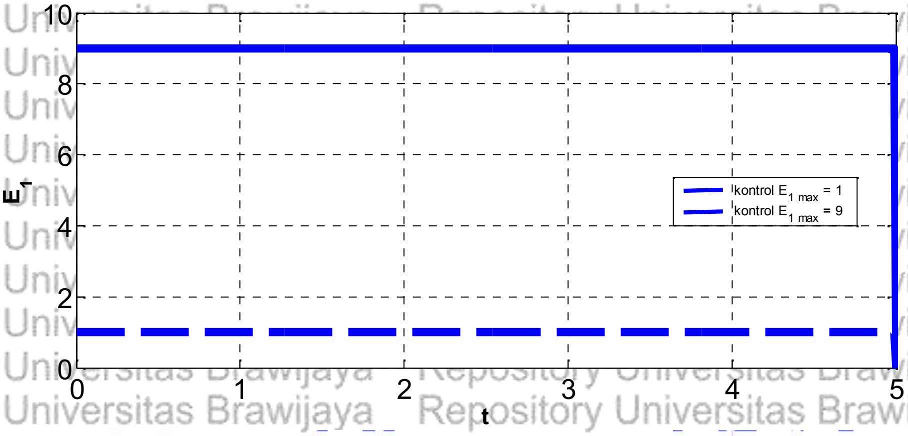
$E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9 d $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9.



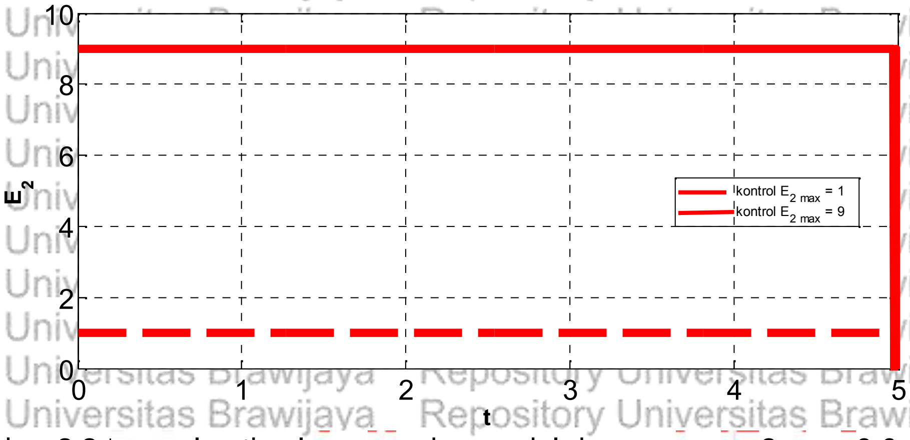
Gambar 3.5 Hasil persediaan barang 1 dengan r_1 = 1.2, c_1 = 0.6, r_2 = 2, c_2 = 0.6 tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9



Gambar 3.6 Hasil persediaan barang 2 dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 2$, $c_2 = 0.6$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$



Gambar 3.7 Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 2$, $c_2 = 0.6$



Gambar 3.8 Kontrol optimal E_2 terhadap model dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 2$, $c_2 = 0.6$

3.4.3 Simulasi III

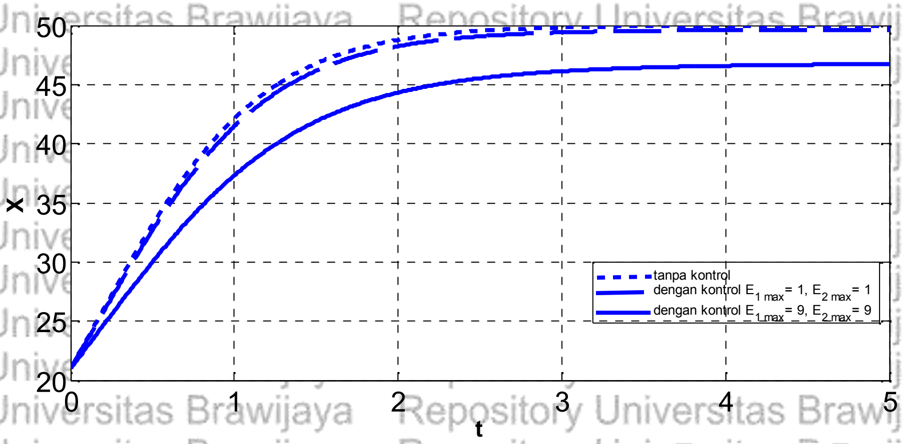
Pada simulasi III, laju intrinsik pengadaan barang 2 lebih kecil daripada laju intrinsik pengadaan barang 1. seperti ditunjukkan pada Gambar 3.9 dan Gambar 3.10. Pada sistem tanpa kontrol yang terlihat pada Gambar 3.9 dan Gambar 3.10 menunjukkan bahwa walaupun parameternya dibalik dari simulasi II hasilnya tetap terlihat persedian barang 1 dan persediaan barang 2 akan berhenti jika kapasitas barang mendekati maksimal.

Dari Gambar 3.9 dan Gambar 3.10 yang sistemnya dengan kontrol terlihat bahwa laju intrinsik pengadaan barang sangat berpengaruh pada persediaan barang. Persediaan barang 1 dan persediaan barang 2 meningkat kemudian berhenti pada saat sudah optimal. Hal ini dikarenakan laju intrinsik pengadaan barang 1 (r_1= 2) dan laju intrinsik pengadaan barang 2 (r_2= 1.2). Selain itu usaha tim penjualan juga berperan aktif sehingga terlihat bahwa semakin besar usaha tim penjualan maka persediaan barang lebih optimal. Kemudian Gambar 3.11 dan Gambar 3.12 menjelaskan bahwa terjadi pengontrolan E_1 dan E_2 pada setiap waktu t dan berhenti pada batas waktu yang ditentukan.

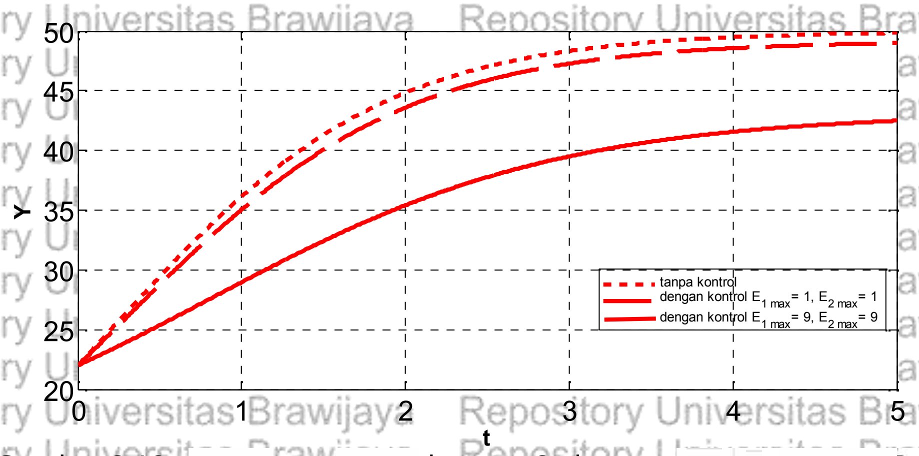
Perbedaan simulasi II dan simulasi III terletak pada simulasi II dengan laju intrinsik pengadaan barang 1 yang lebih kecil daripada laju intrinsik pengadaan barang 2 dan pada simulasi III laju intrinsik pengadaan barang 1 yang lebih besar daripada laju intrinsik pengadaan barang 2. Walaupun parameter laju intrinsik pengadaan kedua barang berbeda, proses persediaan kedua barang tidak akan berhenti pada kapasitas barang maksimal, tetapi akan berhenti pada saat kapasitas barang optimal.

Pada Gambar 3.11 dan Gambar 3.12 dapat dilihat bahwa tim penjualan harus berusaha maksimal sampai batas waktu yang ditentukan dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9 dan kontrol $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9.

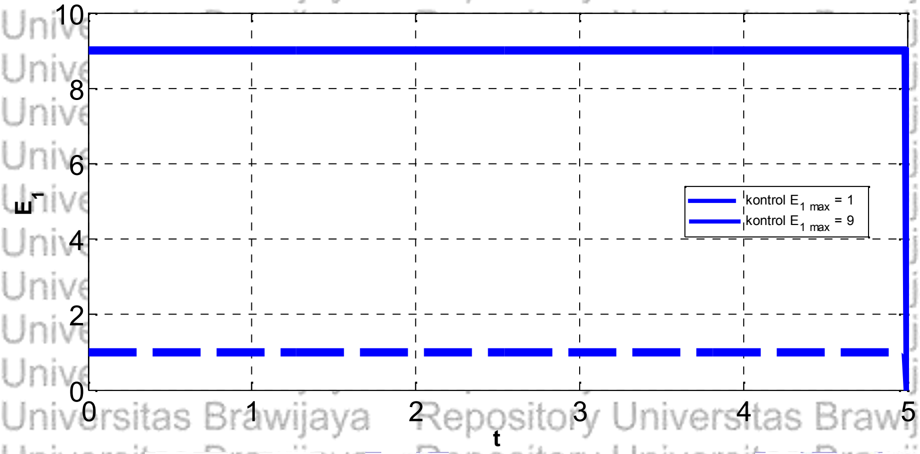
Repository Universitas Brawijaya



Gambar 3.9 Hasil persediaan barang 1 dengan $r_1 = 2$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 1.2$, $c_2 = 0.6$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$

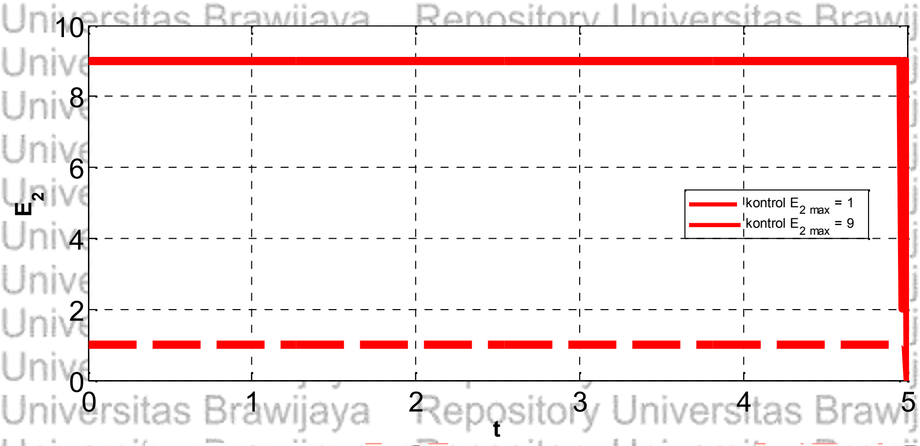


Gambar 3.10 Hasil persediaan barang 2 dengan $r_1 = 2$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 1.2$, $c_2 = 0.6$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$



Gambar 3.11 Kontrol optimal E_1 terhadap model dengan $r_1 = 2$, $c_1 = 0.6$, $r_2 = 1.2$, $c_2 = 0.6$

Repository Universitas Brawijaya



Gambar 3.12 Kon l ptir al hadap model dengan 2, 0.6, r_2 = 1.2, c_2 = 0.6 E^2 ter

bot an b

c_1 = c_2 =

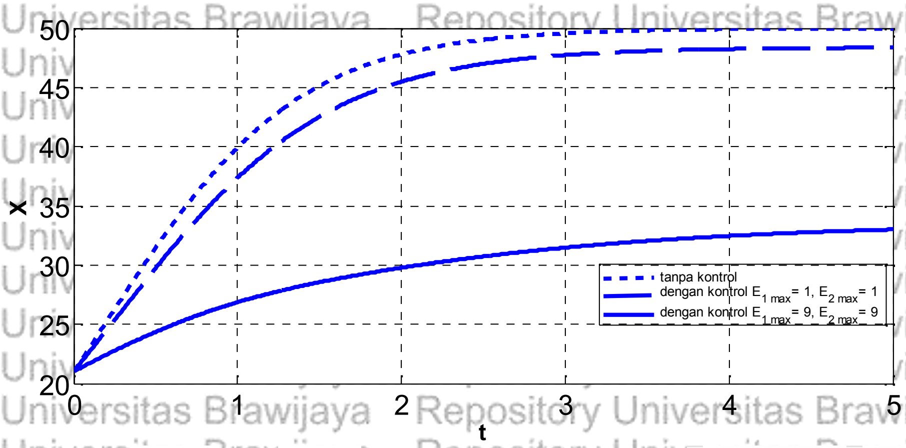
digunal laju in

r_1= 1.2 laju i r_2= 2) en pe

c_1 = c_2 =

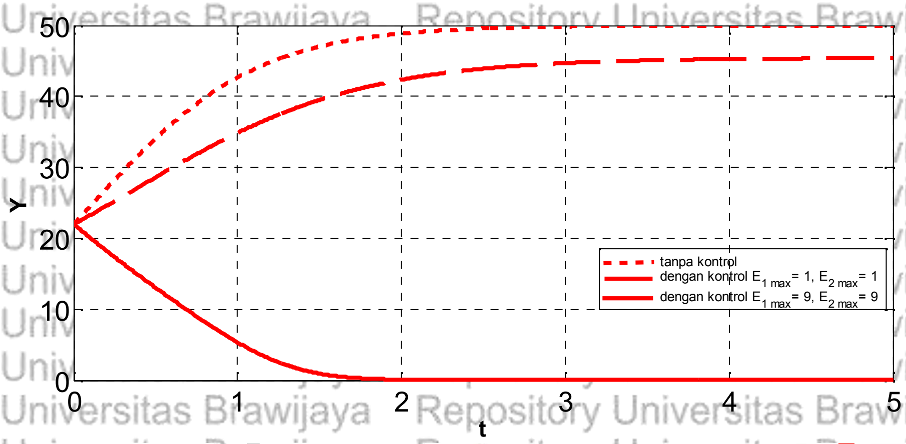
ambar 3.16 memperlihatkan terjadi a pengontro

$E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9 c

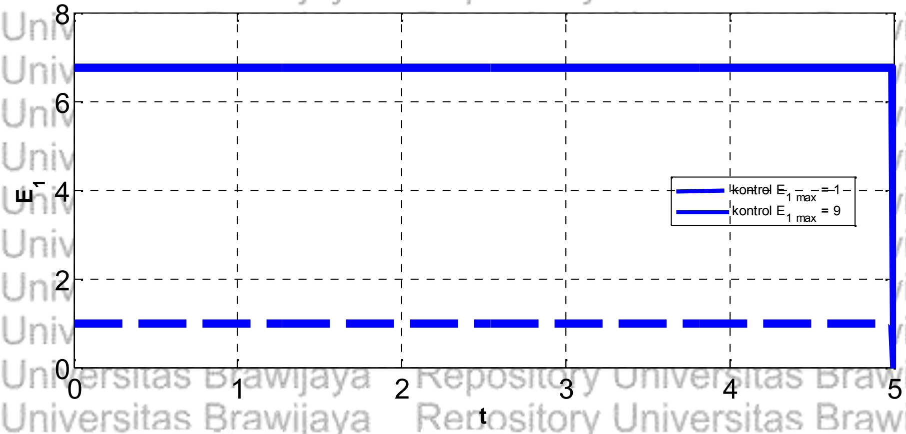


Gambar 3.13 Hasil perse aan barang 1 waktu dengan r_1 = 1.2, c_1 = 2, r_2 = 2, c_2 = 5 tanpa kontrol d an dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9

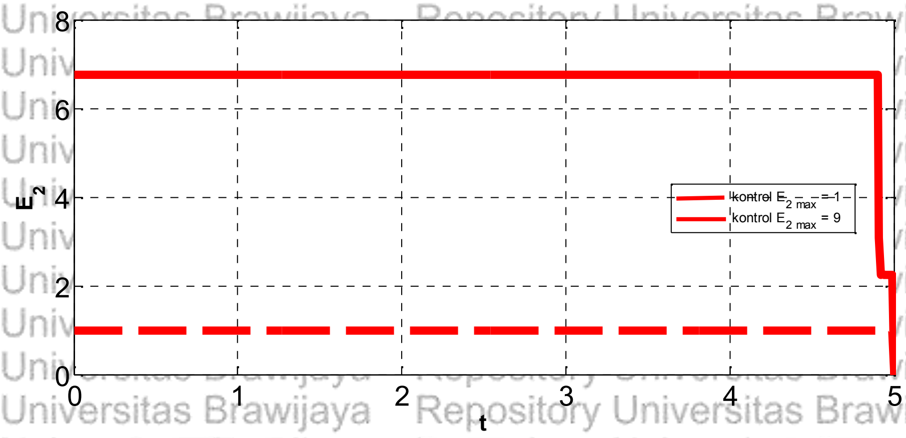
Repository Universitas Brawijaya
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
REPOSITORY.UB.AC.ID



Gambar 3.14 Hasil persediaan barang 2 terhadap waktu dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 2$, $r_2 = 2$, $c_2 = 5$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$



Gambar 3.15 Kontrol optimal untuk E_1 terhadap model dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 2$, $r_2 = 2$, $c_2 = 5$



Gambar 3.16 Kontrol optimal untuk E_2 terhadap model dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 2$, $r_2 = 2$, $c_2 = 5$

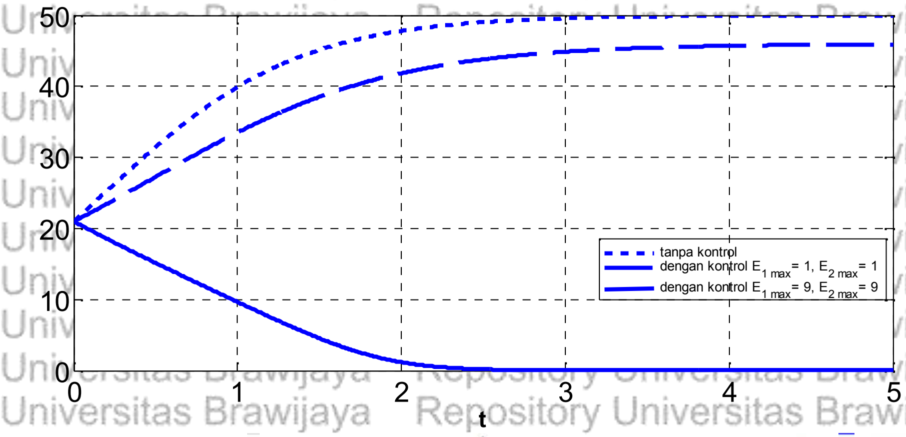
3.4.5 Simulasi V

Simulasi V ini hampir sama dengan simulasi IV, perbedaanya terletak pada koefisien positif tingkat permintaan barang 1 (c_1= 5) dan koefisien positif tingkat permintaan barang 2 (c_2 = 2). Parameter lainnya sama seperti yang terletak pada Tabel 3.1. dan Tabel 3.2.

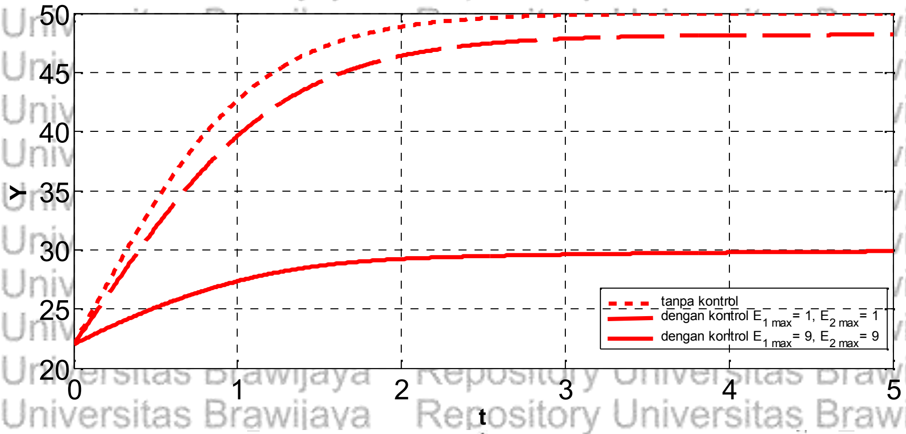
Pada Gambar 3.17 dan Gambar 3.18 yang tanpa kontrol, walaupun koefisien positif tingkat permintaan barang dibalik dari simulasi IV dan parameter lainnya sama seperti yang terletak pada Tabel 3.1. dan Tabel 3.2. menunjukkan bahwa hasil persediaan kedua barang meningkat pada saat kapasitas barang maksimal bukan meningkat pada saat kapasitas barang optimal, walaupun sudah dipengaruhi oleh koefisien tingkat permintaan barang.

Gambar 3.17 dan Gambar 3.18 menunjukkan bahwa untuk sistem yang dengan kontrol jika koefisien positif tingkat permintaan barang semakin besar, maka persediaan barang akan optimal. Selain itu jika koefisien positif tingkat permintaan barang 1 lebih besar daripada koefisien positif tingkat permintaan barang 2, maka kapasitas barang 1 untuk persediaan barang 1 akan lebih sedikit dibandingkan dengan kapasitas barang untuk persediaan barang 2. Hal ini juga dikarenakan adanya pengontrolan setiap saat yang diperlihatkan oleh Gambar 3.19 dan Gambar 3.20.

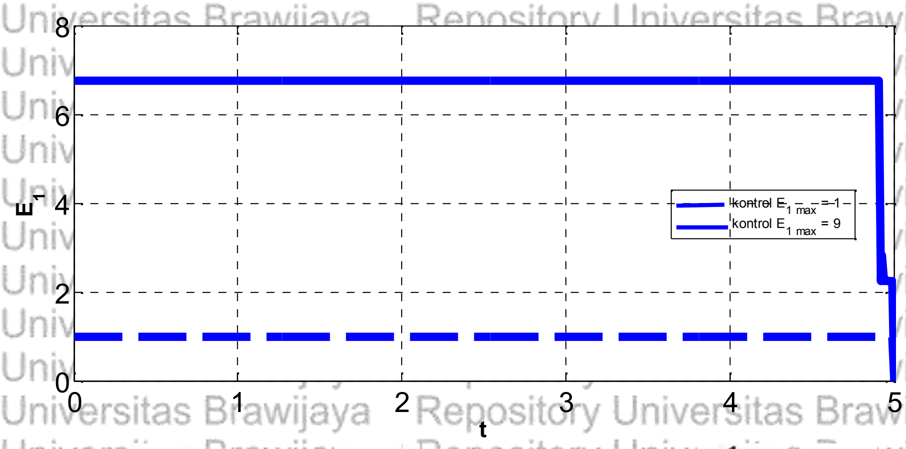
Pada Gambar 3.19 dan Gambar 3.20 memperlihatkan terjadinya pengontrolan setiap saat dengan kontrol $E_{1\,max}$ = 1, $E_{1\,max}$ = 9, $E_{2\,max}$ = 1, $E_{2\,max}$ = 9. Pada kedua gambar tersebut dapat dilihat bahwa tim penjualan harus berusaha maksimal, walaupun kenyataanya usaha tim penjualan tidak melakukan sampai batas yang ditentukan. Hal ini dikarenakan koefisien positif tingkat permintaan kedua barang sangat besar.



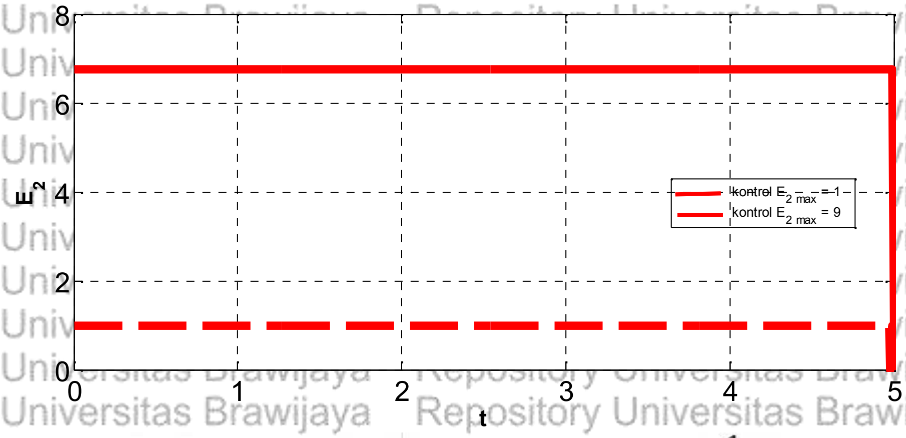
Gambar 3.17 Hasil persediaan barang 1 terhadap waktu dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 5$, $r_2 = 2$, $c_2 = 2$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$



Gambar 3.18 Hasil persediaan barang 2 terhadap waktu dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 5$, $r_2 = 2$, $c_2 = 2$ tanpa kontrol dan dengan kontrol $E_{1\,max} = 1$, $E_{1\,max} = 9$, $E_{2\,max} = 1$, $E_{2\,max} = 9$



Gambar 3.19 Kontrol optimal u_{E1} terhadap model dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 5$, $r_2 = 2$, $c_2 = 2$



Gambar 3.20 Kontrol optimal u_{E2} terhadap model dengan $r_1 = 1.2$, $c_1 = 5$, $r_2 = 2$, $c_2 = 2$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, maka dapat disimpulkan bahwa model persediaan barang telah dimodifikasi dengan dua variabel kontrol yaitu E_1 dan E_2 yang masing-masing merupakan pengontrolan pada persediaan barang 1 dan persediaan barang 2. Hasil penyelesaian masalah kontrol optimal menggunakan syarat perlu Pontryagin adalah terdapat nilai-nilai variabel kontrol sedemikian sehingga diperoleh nilai fungsi objektif maksimum. Kondisi sistem optimal diperoleh dari subtitusi nilai-nilai variabel kontrol tersebut sesuai dengan persamaan yang telah ditentukan.

Berdasarkan hasil simulasi numerik dapat diketahui bahwa semakin besar koefisien tingkat permintaan barang 1 dan koefisien tingkat permintaan barang 2, maka persedian barang 1 dan persediaan barang 2 akan lebih cepat berkurang. Selain itu semakin besar usaha tim penjualan maka proses persediaan barang itu akan lebih sedikit bahkan lebih cepat habis. Namun demikian semua itu tidak lepas dari pengontrolan mulai awal hingga akhir waktu.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, diharapkan dapat dikembangkan kontrol optimal pada model EOQ dengan mempertimbangkan tingkat bunga dan inflasi yang berfluktuasi.

DAFTAR PUSTAKA

Anggriani, N., E. Lesmana, A. Supriatna, H. Husniah dan M. Yudha. 2015. Analisis Dinamik pada model Pengendalian Persediaan Dua Produk berbeda. *Jurnal Teknik Industri*. 17:17-26.

Baker, R.C. dan T.L. Urban. 1988. A deterministic inventory system with inventory-level-dependent demand rate. *Journal of the Operation Research Society*. 39:823-831.

Boyce, W. E. dan R. C. Diprima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Carnegie-Mellon University. United State Of America.

Datta, T.K. dan A.K. Pal. 1990. Deterministic inventory system for deteriorating items with inventory level dependent demand rate and storages. *Opsearch*. 27:213-224.

Edwards, C.H. dan D. E. Penney. 2008. *Elementary Differential Equations*. University Of Georgia. United State Of America.

Ghosh S.K. dan K.S. Chaudhuri. 2004. An order level inventory model for a deteriorating item with two levels of storage stock-dependent demand. *Far East J ournal of Applied Matematics*. 15:63-77.

Hirsch, M. W., S. Smale dan R. L. Devany. 2004. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier. California.

Lenhard, S. dan J.T. Workman. 2007. *Optimal Control Applied to Biological Model*. CRC Press. London.

Munir, R. 2003. *Metode Numerik*. Informatika. Bandung.

Ristono, A. 2013. *Manajemen Persediaan*. Graha Ilmu. Yogyakarta.

Stewart, J. 2008. *Multivariable Calculus*. Brocks Cole. Belmont.

Sana, S.S. 2011a. An EOQ Model of Homogeneous Products while Demand is Salesmen’s Initiatives and Stock Sensitive. *Computers and Mathematics with Applications*. 62:577-578.

Sana, S.S. 2011b. An EOQ Model for Salesman’s Initiatives, Stock, and Price Sensitive Demand of Similar Products-A Dynamical System. *Applied Mathematics and Computation*. 218:3277-3288

Sana, S.S. 2012. The EOQ Model – A Dynamical System. *Applied Mathematics and Computation*. 218:8736-8749.

Lampiran 1. *Listing Program*

```
function dy=PS(y,E1,E2,r1,r2,L,L1,L2,c1,c2,I11,I12,I21,I22)
x(1) = r1*(1-y(1)/L1)*y(1) - c1*E1*y(1)*(1-
y(2)/L)/(I11*E1+I12*y(1));
x(2) = r2*(1-y(2)/L2)*y(2) - c2*E2*y(2)*(1-
y(1)/L)/(I21*E2+I22*y(2));
dy=[x(1) x(2)];

function dg=PC(z,X,Y,t,E1,E2,s1,s2,p1,p2,c1,c2,I11,I12,I21,I22,...
    a1,a2,b,d,r1,r2,L1,L2,L)

g1=z(1); g2=z(2);
H1=(s1-p1)*c1*I11*E1^2*(1-Y/L)/(I11*E1+I12*X)^2;
H2=-(s2-p2)*c2*E2*Y/((I21*E2+I22*Y)*L);
H3=-(p1*b+2*a1*X);
H4=r1*(1-2*X/L1)-c1*I11*E1^2*(1-Y/L)/(I11*E1+I12*X)^2;
H5=c2*E2*Y/((I21*E2+I22*Y)*L);
s(1)=-(H1+H2+H3)*exp(-d*t)-g1*H4-g2*H5;
H1=(s2-p2)*c2*I21*E2^2*(1-X/L)/(I21*E2+I22*Y)^2;
H2=-(s1-p1)*c1*E1*X/((I11*E1+I12*X)*L);
H3=-(p2*b+2*a2*Y);
H4=r2*(1-2*Y/L2)-c2*I21*E2^2*(1-X/L)/(I21*E2+I22*Y)^2;
H5=c1*E1*X/((I11*E1+I12*X)*L);
s(2)=-(H1+H2+H3)*exp(-d*t)-g1*H5-g2*H4;

dg=[s(1) s(2)];


clear all
clc;
r1=0.1;r2=2;L1=50;L2=50;L=L1+L2;
s1=26;s2=20;
p1=16;p2=8;
c1=0.6;c2=0.6;
I11=0.6;I12=0.4;
I21=0.5;I22=0.3;
a1=0.01;a2=0.01;gamma1=5;gamma2=7;  %asli paper
b=0.11;d=0.05;
% r1=0.5;r2=1;L1=50;L2=50;L=L1+L2;
% s1=26;s2=20;
% p1=16;p2=8;
% c1=0.6;c2=0.6;
% I11=0.6;I12=0.4;
% I21=0.4;I22=0.4;
% a1=0.01;a2=0.01;gamma1=5;gamma2=7;  %asli paper
% %a1=5;a2=1;gamma1=20;gamma2=5;
% b=0.11;d=0.05;
E1max=1;
E2max=1;
x0=21;
y0=22;
h=0.01;
t=0:h:5;
N=length(t);

E1=zeros(N,1);
```

```
E1old=zeros(N,1);
E2=zeros(N,1);
E2old=zeros(N,1);
x=zeros(N,1);
y=zeros(N,1);
xold=zeros(N,1);
yold=zeros(N,1);
g1=zeros(N,1);
g2=zeros(N,1);
g1old=zeros(N,1);
g2old=zeros(N,1);

tes = 1;
it=0;

while tes>1e-3
    E1old=E1; E2old=E2; xold=x; yold=y;
    g1old=g1; g2old=g2;
    x(1) = x0; y(1) = y0;
    %J(it+1)=0;
    for i=1:N-1
     %   J(it+1)=J(it+1) + h*(A*I(i)+B*u1old(i)^2 + C*u2old(i)^2);

        v = [x(i) y(i)];
        k1 =
h*PS(v,E1old(i),E2old(i),r1,r2,L,L1,L2,c1,c2,I11,I12,I21,I22);
        k2 =
h*PS(v+0.5*k1,E1old(i),E2old(i),r1,r2,L,L1,L2,c1,c2,I11,I12,I21,I2
2);
        k3 =
h*PS(v+0.5*k2,E1old(i),E2old(i),r1,r2,L,L1,L2,c1,c2,I11,I12,I21,I2
2);
        k4 =
h*PS(v+k3,E1old(i),E2old(i),r1,r2,L,L1,L2,c1,c2,I11,I12,I21,I22);
        v = v+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

        x(i+1)=v(1);
        y(i+1)=v(2);
    end
%    J(it+1)=J(it+1) + h*(A*I(z)+B*u1old(z)^2 + C*u2old(z)^2);

    g1(N)=0; g2(N)=0;
    E1(N)=0; E2(N)=0;
    for i=1:N-1
        je=N-i;
        je1=je+1;
        m=[g1(je1) g2(je1)];

        k1= PC(m,x(je1),y(je1),t(je1),E1old(je1),E2old(je1),...
            s1,s2,p1,p2,c1,c2,I11,I12,I21,I22,...
            a1,a2,b,d,r1,r2,L1,L2,L);
        k2=
PC(m+0.5*k1,x(je1),y(je1),t(je1)+0.5*h,E1old(je1),E2old(je1),...
            s1,s2,p1,p2,c1,c2,I11,I12,I21,I22,...
            a1,a2,b,d,r1,r2,L1,L2,L);
        k3=
PC(m+0.5*k2,x(je1),y(je1),t(je1)+0.5*h,E1old(je1),E2old(je1),...
            s1,s2,p1,p2,c1,c2,I11,I12,I21,I22,...
```

```
                  a1,a2,b,d,r1,r2,L1,L2,L);
              k4=
PC(m+k3,x(je1),y(je1),t(je1)+h,E1old(je1),E2old(je1),...
                  s1,s2,p1,p2,c1,c2,I11,I12,I21,I22,...
                  a1,a2,b,d,r1,r2,L1,L2,L);

              m = m-(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

              g1(je)=m(1);
              g2(je)=m(2);

              et=exp(-d*t(je));
              A=I12*L*gamma1*x(je)*et;
              B=-I12*L*c1*gamma1*x(je)*et*(-L*et*x(je)*(s1-p1)+...
                  et*x(je)*y(je)*(s1-p1)+L*x(je)*(1-y(je)/L)*g1(je));
              C=L*gamma1*I11*et;
              xm=-(A-sqrt(B))/C;
              temp2=min([xm E1max]);
              E1(je)=max([temp2 0]);

              A=I22*L*gamma2*y(je)*et;
              B=-I22*L*c2*gamma2*y(je)*et*(-L*et*y(je)*(s2-p2)+...
                  et*x(je)*y(je)*(s2-p2)+L*y(je)*(1-x(je)/L)*g2(je));
              C=L*gamma2*I21*et;
              ym=-(A-sqrt(B))/C;
              temp4=min([ym E2max]);
              E2(je)=max([temp4 0]);
          end
          ex=sum(abs(x-xold));
          ey=sum(abs(y-yold));
          eg1=sum(abs(g1-g1old));
          eg2=sum(abs(g2-g2old));
          eE1=sum(abs(E1-E1old));
          eE2=sum(abs(E2-E2old));

          tes=ex+ey+eg1+eg2+eE1+eE2
          it = it+1;
          E1= (0.5*E1 + 0.5*E1old);
          E2= (0.5*E2 + 0.5*E2old);
          %E1=E1old; E2=E2old; %x=xold; y=yold;
          %g1=g1old; g2=g2old;
end

figure(1)
plot(t,x,t,y,'r','LineWidth',3); grid on;hold on;
title('X and Y under control E_1 and E_2', 'FontSize', 20)
set(gca,'fontsize',20)
legend({'x(t)','y(t)'},'FontSize',16,'FontWeight','bold');
xlabel('t','fontsize',16,'fontweight','b');
ylabel('{x(t),y(t)}','fontsize',16,'fontweight','b');
% plot(t,x); xlabel('t'); ylabel('x(t)'); grid on;
% hold on;
% plot(t,y,'r'); xlabel('t'); ylabel('y(t)'); grid on;
figure(2)
plot(t,E1,t,E2,'r','LineWidth',3); grid on;hold on;
title('control E_1 and E_2', 'FontSize', 20)
set(gca,'fontsize',20)
legend({'E_1(t)','E_2(t)'},'FontSize',16,'FontWeight','bold');
```

```
xlabel('t','fontsize',16,'fontweight','b');
ylabel('{E_1,E_2}','fontsize',16,'fontweight','b');
% plot(t,E1); ylabel('E1*'); xlabel('t'); grid on;
% hold on;
% plot(t,E2,'r'); ylabel('E2*'); xlabel('t'); grid on;
```

Lampiran 2. Perhitungan $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial X}$ dan $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial X}$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\left[B_1 + \frac{-(s_2 - p_2)\frac{C_2E_2Y}{L}(I_{21}E_2 + I_{22}Y)}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - (p_1 b + 2\alpha_1 X)\right] e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1\left[r_1\left[1 - \frac{2X}{L_1}\right] - \frac{C_1E_1\left(1-\frac{Y}{L}\right)(I_{11}E_1 + I_{12}X) - C_1E_1X\left(1-\frac{Y}{L}\right)I_{12}}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}\right]$$

$$-\sigma_2\left[\frac{\frac{C_2E_2Y}{L}(I_{21}E_2 + I_{22}Y)}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2}\right],$$

dengan

$$B_1 = \frac{(s_1 - p_1)C_1E_1\left(1-\frac{Y}{L}\right)(I_{11}E_1 + I_{12}X) - (s_1 - p_1)C_1E_1X\left(1-\frac{Y}{L}\right)I_{12}}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}.$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\left[\frac{B_2 + B_3 - B_4}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} + (s_2 - p_2)\frac{-\frac{C_2E_2Y}{L}}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)} - (p_1 b + 2\alpha_1 X)\right] e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1\left[B_5 - \frac{C_1I_{11}E_1^2\left(1-\frac{Y}{L}\right) + C_1E_1I_{12}X\left(1-\frac{Y}{L}\right) - C_1E_1I_{12}X\left(1-\frac{Y}{L}\right)}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}\right]$$

$$-\sigma_2\left[\frac{\frac{C_2E_2Y}{L}}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)}\right],$$

dengan

$$B_2 = (s_1 - p_1)C_1I_{11}E_1^2\left(1-\frac{Y}{L}\right),$$

$$B_3 = (s_1 - p_1)C_1E_1I_{12}X\left(1-\frac{Y}{L}\right),$$

$$B_4 = (s_1 - p_1)C_1E_1I_{12}X\left(1-\frac{Y}{L}\right),$$

$$B_5 = r_1\left[1 - \frac{2X}{L_1}\right].$$

Repository Universitas Brawijaya
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
REPOSITORY.UB.AC.ID

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\left[B_6 - \frac{(s_2 - p_2)C_2E_2Y}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)L} - (p_1 b + 2\alpha_1 X)\right] e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1 \left[r_1\left[1 - \frac{2X}{L_1}\right] - \frac{C_1 I_{11} {E_1}^2 \left(1 - \frac{Y}{L}\right)}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}\right] - \sigma_2 \left[\frac{C_2E_2Y}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)L}\right],$$

dengan

$$B_6 = \frac{(s_1 - p_1)C_1 I_{11} {E_1}^2 \left(1 - \frac{Y}{L}\right)}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}.$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -\left[B_7 - \frac{(s_2 - p_2)C_2E_2Y}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)L} - (p_1 b + 2\alpha_1 X)\right] e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1 \left[r_1\left[1 - \frac{2X}{L_1}\right] - \frac{C_1 I_{11} {E_1}^2 \left(1 - \frac{Y}{L}\right)}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}\right] \tag{3.7}$$

$$-\sigma_2 \left[\frac{C_2E_2Y}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)L}\right].$$

dengan

$$B_7 = \frac{(s_1 - p_1)C_1 I_{11} {E_1}^2 (L - Y)}{L(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}.$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -\left[\frac{D_1}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2} + \frac{D_2 - D_3}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - (p_2 b + 2\alpha_2 Y)\right] e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1 \left[\frac{-\frac{C_1E_1X}{L}(I_{11}E_1 + I_{12}X)}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)^2}\right]$$

$$-\sigma_2 \left[D_4 - \frac{C_2E_2\left(1 - \frac{X}{L}\right)(I_{21}E_2 + I_{22}Y) - C_2E_2Y\left(1 - \frac{X}{L}\right)I_{22}}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2}\right],$$

dengan

$$D_1 = \frac{-(s_1 - p_1)C_1E_1X}{L}(I_{11}E_1 + I_{12}X),$$

$$D_2 = (s_2 - p_2)C_2E_2\left(1 - \frac{X}{L}\right)(I_{21}E_2 + I_{22}Y),$$

$$D_3 = (s_2 - p_2)C_2E_2Y\left(1 - \frac{X}{L}\right)I_{22},$$

$$D_4 = r_2\left[1 - \frac{2Y}{L_2}\right].$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -\left[\frac{-(s_1 - p_1)\frac{C_1E_1X}{L}}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)} + \frac{D_5 + D_6 - D_7}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - (p_2 b + 2\alpha_2 Y)\right]e^{-\delta t}$$

$$-\sigma_1\left[\frac{-\frac{C_1E_1X}{L}}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)}\right] - \sigma_2\left[r_2\left[1 - \frac{2Y}{L_2}\right] - D_8\right],$$

dengan

$$D_5 = (s_2 - p_2)C_2I_{21}{E_2}^2\left(1 - \frac{X}{L}\right),$$

$$D_6 = (s_2 - p_2)C_2E_2I_{22}Y\left(1 - \frac{X}{L}\right),$$

$$D_7 = (s_2 - p_2)C_2E_2I_{22}Y\left(1 - \frac{X}{L}\right),$$

$$D_8 = \frac{C_2I_{21}{E_2}^2\left(1 - \frac{X}{L}\right) + C_2E_2I_{22}Y\left(1 - \frac{X}{L}\right) - C_2E_2I_{22}Y\left(1 - \frac{X}{L}\right)}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2}.$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -\left[\frac{-(s_1 - p_1)C_1E_1X}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)L} + \frac{(s_2 - p_2)C_2I_{21}{E_2}^2\left(1 - \frac{X}{L}\right)}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - D_9\right]e^{-\delta t}$$

$$+\sigma_1\left[\frac{C_1E_1X}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)}\right] - \sigma_2\left[r_2\left[1 - \frac{2Y}{L_2}\right] - \frac{C_2I_{21}{E_2}^2\left(1 - \frac{X}{L}\right)}{(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2}\right],$$

dengan

$$D_9 = (p_2 b + 2\alpha_2 Y).$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -\left[\frac{(s_1 - p_1)C_1E_1X}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)L} + \frac{(s_2 - p_2)C_2I_{21}E_2^{\,2}(L - X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2} - D_{10}\right]e^{-\delta t}$$
$$-\sigma_1\left[\frac{C_1E_1X}{(I_{11}E_1 + I_{12}X)L}\right] - \sigma_2\left[r_2\left[1 - \frac{2Y}{L_2}\right] - \frac{C_2I_{21}E_2^{\,2}(L - X)}{L(I_{21}E_2 + I_{22}Y)^2}\right]. \tag{3.8}$$

dengan

$D_{10} = (p_2b + 2\alpha_2Y).$