

## BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Formulasi Model

Pada bagian ini dibahas model *predator-prey* tiga spesies dengan spesies ketiga berupa *host ammensal*. Model *predator-prey* tiga spesies dibentuk berdasarkan model *predator – prey* dua spesies yang telah dibahas pada **Subbab 2.2**. Kehadiran spesies ketiga (*enemy*) dalam interaksinya di alam menyebabkan model *predator-prey* menjadi lebih kompleks. Spesies ketiga (*host ammensal*) yang dinyatakan sebagai  $N_3$  berperan sebagai spesies yang memberikan kerugian bagi *prey* namun tidak memangsa *prey*, sedangkan *host ammensal* tidak mempunyai hubungan dengan *predator*. Jadi, kehadiran *host ammensal* hanya merugikan bagi *prey* tapi tidak berpengaruh pada *predator*.

Merujuk pada **Subbab 2.2**, selain dipengaruhi oleh keberadaan *carrying capacity* dan pemangsaan *predator*, laju pertumbuhan populasi *prey* juga dipengaruhi oleh keberadaan *enemy*. Keberadaan *enemy* yang berakibat pada laju pertumbuhan *prey* diasumsikan sama dengan koefisien *amensalisme* dan *enemy* itu sendiri yang dinyatakan dengan  $\alpha N_3$ . Sedangkan pemangsaan *predator* terhadap *prey* diasumsikan sama dengan koefisien penghambat mangsa dan *predator* yang dinyatakan dengan  $PN_2$ . Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *prey* terhadap waktu adalah

$$\frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 - \alpha N_3) \quad (3.1)$$

Berdasarkan asumsi bahwa tidak ada interaksi antara *enemy* dan *predator*, maka model pertumbuhan *predator* dinyatakan sebagai

$$\frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1) \quad (3.2)$$

*Enemy* hanya dipengaruhi oleh *carrying capacity* dan kompetisi internal yang terjadi dalam populasi *enemy*. Jadi, laju pertumbuhan populasi *enemy* adalah

$$\frac{dN_3}{dt} = a_{33}N_3(K_3 - N_3) \quad (3.3)$$

dengan

- $a_{ii}$  : laju penurunan  $N_i$  karena sumber daya terbatas,  $i = 1,2,3$ ;
- $K_i$  : *Carrying capacity* dari  $N_i$ , dengan  $K_i = \frac{a_i}{a_{ii}}$ ,  $i = 1,2,3$ ,
- $\alpha$  : koefisien dari *amensalisme*, dengan  $\alpha = \frac{a_{13}}{a_{11}}$ ,

- P : koefisien pemangsaan *prey*, dengan  $P = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ ,  
 Q : koefisien konsumsi *predator*, dengan  $Q = \frac{a_{21}}{a_{22}}$ .

Berdasarkan persamaan (3.1), (3.2) dan (3.3), maka diperoleh model tiga spesies dengan *amensalisme* pada *prey* sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 - \alpha N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} &= a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1) \\ \frac{dN_3}{dt} &= a_{33}N_3(K_3 - N_3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.2 Penentuan Titik Kesetimbangan Model

Titik kesetimbangan sistem (3.4) diperoleh ketika

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

sehingga sistem (3.4) menjadi

$$a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 - \alpha N_3) = 0 \quad (3.5a)$$

$$a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1) = 0 \quad (3.5b)$$

$$a_{33}N_3(K_3 - N_3) = 0 \quad (3.5c)$$

Dari persamaan (3.5a) diperoleh

$$N_1 = 0 \quad (3.6a)$$

Atau

$$N_1 + PN_2 + \alpha N_3 = K_1 \quad (3.6b)$$

Dari persamaan (3.5b) diperoleh

$$N_2 = 0 \quad (3.6c)$$

Atau

$$N_2 - QN_1 = K_2 \quad (3.6d)$$

Dari persamaan (3.5c) diperoleh

$$N_3 = 0 \quad (3.6e)$$

Atau

$$N_3 = K_3 \quad (3.6f)$$

Kemungkinan titik kesetimbangan yang terdiri dari satu titik kesetimbangan trivial ( $E_1$ ), enam titik kesetimbangan batas ( $E_2$  sampai dengan  $E_7$ ), dan satu titik kesetimbangan interior ( $E_8$ ).

1. Kombinasi solusi  $N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0$  menghasilkan titik kesetimbangan  $E_1(0,0,0)$ . Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa ketiga spesies mengalami kepunahan.

2. Kombinasi solusi  $N_1 = 0, N_2 = 0$ , dan  $N_3 = K_3$  menghasilkan titik kesetimbangan  $E_2(0,0,K_3)$ . Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa spesies pertama dan kedua punah, sedangkan spesies ketiga dapat bertahan hidup dan mencapai kapasitas maksimalnya.
3. Kombinasi solusi  $N_1 = 0, N_3 = 0$  dan  $N_2 - QN_1 = K_2$  menghasilkan titik kesetimbangan  $E_3(0, K_2, 0)$ . Titik kesetimbangan ini menyatakan bahwa spesies pertama dan ketiga mengalami kepunahan, sedangkan spesies kedua bertahan hidup dan mencapai kapasitas maksimalnya.
4. Kombinasi solusi  $N_3 = 0, N_2 = 0, N_1 + PN_2 + \alpha N_3 = K_1$  menghasilkan titik kesetimbangan  $E_4(K_1, 0, 0)$ . Titik kesetimbangan ini menyatakan bahwa spesies pertama dapat bertahan hidup dan mencapai kapasitas maksimalnya, sedangkan spesies kedua dan ketiga mengalami kepunahan.
5. Titik kesetimbangan  $E_5$  diperoleh dari kombinasi solusi  $N_1 = 0, N_2 - QN_1 = K_2$  dan  $N_3 = K_3$  sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_5(0, K_2, K_3)$ . Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa spesies pertama mengalami kepunahan, sedangkan spesies kedua dan ketiga bertahan hidup.
6. Titik kesetimbangan  $E_6$  diperoleh dari kombinasi solusi  $N_2 = 0, N_1 + PN_2 + \alpha N_3 = K_1$  dan  $N_3 = K_3$  sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_6(K_1, 0, K_3)$  dengan syarat eksistensi  $K_1 > \alpha K_3$ . Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa spesies pertama dan ketiga dapat bertahan hidup, sedangkan spesies kedua mengalami kepunahan.
7. Titik kesetimbangan  $E_7$  diperoleh dari kombinasi solusi (3.6b), (3.6d) dan (3.6e) yaitu  $N_1 + PN_2 + \alpha N_3 = K_1$ ,  $N_2 - QN_1 = K_2$  dan  $N_3 = 0$ , eliminasi solusi (3.6b) dan (3.6d) diperoleh

$$N_1 = \frac{K_1 - PK_2}{(1+PQ)}$$

Setelah itu subsitusikan nilai  $N_1$  pada solusi (3.6d), diperoleh

$$N_2 = \frac{QK_1 + K_2}{(1 + PQ)}$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_7\left(\frac{K_1 - PK_2}{(1 + PQ)}, \frac{QK_1 + K_2}{(1 + PQ)}, 0\right)$  dengan syarat eksistensi  $K_1 > PK_2$ .

Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa spesies pertama dan kedua yang saling memangsa dapat bertahan hidup sedangkan spesies ketiga mengalami kepunahan.

8. Titik kesetimbangan  $E_8$  merupakan kombinasi dari solusi (3.6b), (3.6d) dan (3.6f) yaitu  $N_1 + PN_2 + \alpha N_3 = K_1$ ,  $N_2 - QN_1 = K_2$  dan  $N_3 = K_3$ , eliminasi solusi (3.6b) dan (3.6d), diperoleh

$$N_1 = \frac{K_1 - \alpha K_3 - PK_2}{(1 + PQ)}$$

Setelah itu substitusikan nilai  $N_1$  pada solusi (3.6d), diperoleh

$$N_2 = \frac{QK_1 + K_2 - Q\alpha K_3}{(1 + PQ)}$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_8\left(\frac{K_1 - \alpha K_3 - PK_2}{(1 + PQ)}, \frac{QK_1 + K_2 - Q\alpha K_3}{(1 + PQ)}, K_3\right)$  dengan syarat eksistensi  $K_1 > PK_2$  dan  $K_1 < \alpha QK_3$ . Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa ketiga spesies dapat hidup secara berdampingan.

### 3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model

Sifat kestabilan pada model diperiksa melalui analisis kestabilan berikut. Berdasarkan **subbab 2.3**, sistem persamaan *predator-prey* tiga spesies merupakan system nonlinear. Kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dari linearisasi sistem dengan matriks Jacobi sebagai berikut :

$$J(N_1, N_2, N_3) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

Dengan

$$A_1 = K_1 a_{11} - 2a_{11}N_1^* - Pa_{11}N_2^* - \alpha a_{11}N_3^*,$$

$$A_2 = -Pa_{11}N_1^*,$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= -\alpha a_{11} N_1^*, \\
 B_1 &= Q a_{22} N_2^*, \\
 B_2 &= K_2 a_{22} - 2a_{22} N_2^* + Q a_{22} N_1^*, \\
 C_1 &= K_3 a_{33} - 2a_{33} N_3^*.
 \end{aligned}$$

1. Matriks Jacobi di titik  $E_1$  adalah

$$J(E_1) = J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a_{11}K_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}K_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}K_3 \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen  $\lambda_1 = a_{11}K_1, \lambda_2 = a_{22}K_2, \lambda_3 = a_{33}K_3$ . Karena  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  maka titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil.

2. Matriks Jacobi di titik  $E_2$  adalah

$$J(E_2) = J(0, 0, K_3) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - \alpha K_3) & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33}K_3 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen

$$\lambda_1 = a_{11}(K_1 - \alpha K_3), \lambda_2 = a_{22}K_2, \lambda_3 = -a_{33}K_3.$$

Karena  $\lambda_3$  selalu bernilai positif maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat tidak stabil.

3. Matriks Jacobi di titik  $E_3$  adalah

$$J(E_3) = J(0, K_2, 0) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - PK_2) & 0 & 0 \\ Qa_{22}K_2 & -a_{22}K_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}K_3 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen

$$\lambda_1 = a_{11}(K_1 - PK_2), \lambda_2 = -a_{22}K_2, \lambda_3 = a_{33}K_3.$$

Karena  $\lambda_3$  selalu bernilai positif maka titik kesetimbangan  $E_3$  bersifat tidak stabil.

4. Matriks Jacobi di titik  $E_5$  adalah

$$J(E_4) = J(K_1, 0, 0) = \begin{bmatrix} -a_{11}K_1 & -Pa_{11}K_1 & -\alpha a_{11}K_1 \\ 0 & a_{22}(K_2 + QK_1) & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}K_3 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen

$$\lambda_1 = -a_{11}K_1, \lambda_2 = a_{22}(K_2 + QK_1), \lambda_3 = a_{33}K_3.$$

Karena  $\lambda_3$  selalu bernilai positif maka titik kesetimbangan  $E_5$  bersifat tidak stabil.

5. Matriks Jacobi di titik  $E_4$  adalah

$$J(E_5) = J(0, K_2, K_3) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - PK_2 - \alpha K_3) & 0 & 0 \\ Qa_{22}K_2 & -a_{22}K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33}K_3 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen

$$\lambda_1 = a_{11}(K_1 - PK_2 - \alpha K_3), \lambda_2 = -a_{22}K_2, \lambda_3 = -a_{33}K_3.$$

Titik kesetimbangan  $E_5$  bersifat stabil bila  $K_1 < PK_2 + \alpha K_3$ .

6. Matriks Jacobi di titik  $E_5$  adalah

$$J(E_6) = J(K_1 - \alpha K_3, 0, K_3) = \begin{bmatrix} -a_{11}(2K_1 - \alpha K_3) & -Pa_{11}(K_1 - \alpha K_3) & -\alpha a_{11}(K_1 - \alpha K_3) \\ 0 & a_{22}(K_2 + Q(K_1 - \alpha K_3)) & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33}K_3 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen

$$\lambda_1 = -a_{11}(2K_1 - \alpha K_3), \lambda_2 = a_{22}(K_2 + Q(K_1 - \alpha K_3)),$$

$$\lambda_3 = -a_{33}K_3.$$

Jadi, titik kesetimbangan  $E_6$  bersifat tidak stabil.

7. Matriks Jacobi di titik  $E_7$  adalah

$$J(E_7) = J\left(\frac{K_1 - PK_2}{(1+PQ)}, \frac{QK_1 + K_2}{(1+PQ)}, 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{-a_{11}(K_1 - PK_2)}{(1+PQ)} & \frac{-a_{11}P(K_1 - PK_2)}{(1+PQ)} & \frac{-a_{11}\alpha(K_1 - PK_2)}{(1+PQ)} \\ \frac{a_{22}Q(K_2 + QK_1)}{(1+PQ)} & \frac{-a_{22}(K_2 + QK_1)}{(1+PQ)} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}K_3 \end{bmatrix},$$

dengan persamaan karakteristik  $(\lambda^2 + B\lambda + C)(\lambda - a_{33}K_3) = 0$

dengan

$$B = \left[ \frac{a_{11}(K_1 - PK_2)}{(1+PQ)} + \frac{a_{22}(K_2 + QK_1)}{(1+PQ)} \right]$$

$$C = \left[ (1 + PQ) \left( \frac{a_{11}(K_1 - PK_2)}{(1+PQ)} + \frac{a_{22}(K_2 + QK_1)}{(1+PQ)} \right) \right]$$

Diperoleh nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$\lambda_3 = a_{33}K_3$$

Karena  $\lambda_3$  selalu bernilai positif maka titik kesetimbangan  $E_7$  bersifat tidak stabil.

8. Matriks Jacobi di titik  $E_8$  adalah

$$J(E_8) = J\left(\frac{K_1 - \alpha K_3 - PK_2}{(1+PQ)}, \frac{QK_1 + K_2 - Q\alpha K_3}{(1+PQ)}, K_3\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-a_{11}(K_1 - \alpha K_3 - PK_2)}{(1+PQ)} & \frac{-a_{11}P(K_1 - \alpha K_3 - PK_2)}{(1+PQ)} & \frac{-a_{11}\alpha(K_1 - \alpha K_3 - PK_2)}{(1+PQ)} \\ \frac{a_{22}Q(QK_1 + K_2 - Q\alpha K_3)}{(1+PQ)} & \frac{-a_{22}(QK_1 + K_2 - Q\alpha K_3)}{(1+PQ)} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33}K_3 \end{bmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik  $(\lambda^2 + P\lambda + Q)(\lambda + a_{33}K_3) = 0$  dengan

$$P = \left[ \frac{a_{11}(K_1 - \alpha K_3 - PK_2)}{(1+PQ)} + \frac{a_{22}(QK_1 + K_2 - Q\alpha K_3)}{(1+PQ)} \right]$$

$$C = \left[ (1 + PQ) \left( \frac{a_{11}(K_1 - \alpha K_3 - PK_2)}{(1+PQ)} + \frac{a_{22}(QK_1 + K_2 - Q\alpha K_3)}{(1+PQ)} \right) \right]$$

diperoleh nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

$$\lambda_3 = -a_{33}K_3$$

Dari persamaan tersebut diperoleh 2 kasus sebagai berikut.

1. Jika  $P^2 \geq 4Q$  maka diperoleh akar yang bernilai real negatif sehingga titik kesetimbangan  $E_8$  bersifat **stabil**.
2. Jika  $P^2 < 4Q$  maka diperoleh akar yang bernilai kompleks dengan bagian real negatif sehingga titik kesetimbangan  $E_8$  bersifat **stabil**.

Berdasarkan **Teorema 2.3.1**, titik kesetimbangan  $E_8$  bersifat **stabil tanpa syarat**.

Hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.4) dirangkum dalam Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1 Syarat kestabilan titik kesetimbangan  
Model

Titik Tetap	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_1$	-	Tidak stabil	-
$E_2$	-	Tidak stabil	-
$E_3$	-	Tidak stabil	-
$E_4$	-	Tidak stabil	-
$E_5$	-	Stabil	$K_1 < PK_2 + \alpha K_3$
		Tidak stabil	$K_1 > PK_2 + \alpha K_3$
$E_6$	$K_1 > \alpha K_3$	Tidak stabil	-
$E_7$	$K_1 > PK_2$	Tidak stabil	-
$E_8$	$K_1 > PK_2$ dan $K_1 > \alpha QK_3$	Stabil	-

### 3.4 Kestabilan Global

Sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangan telah dianalisis pada Subbab 3.3. Dari analisis tersebut, ada kemungkinan titik kesetimbangan yang juga bersifat stabil global, yaitu titik  $E_5$  dan  $E_8$ .

#### 3.4.1 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan $E_5$

Analog dengan Rao, dkk. (2012), diberikan fungsi Lyapunov titik kesetimbangan  $E_5(0, N_2^*, N_3^*)$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(N_2, N_3) &= \left( N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*} \right) \\ &+ \left( N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*} \right) \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi  $\mathcal{L}$  tersebut memenuhi kondisi (i) pada **Definisi 2.5.1**, yaitu

$\mathcal{L}(N_1^*, N_2^*, N_3^*) = 0, \mathcal{L}(N_1, N_2, N_3) > 0, \forall (N_1, N_2, N_3) \neq (N_1^*, N_2^*, N_3^*) \in W$ , dengan  $W = \{(N_1, N_2, N_3) | N_1 = 0, 0 \leq N_2 \leq K_2, 0 \leq N_3 \leq K_3\}$ .

(i) Pembuktian  $\mathcal{L}(N_2^*, N_3^*) = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(N_2^*, N_3^*) &= \left(N_2^* - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2^*}{N_2^*}\right) \\ &+ \left(N_3^* - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3^*}{N_3^*}\right) \\ &= (0 - N_2^* \ln 1) + (0 - N_3^* \ln 1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $\mathcal{L}(N_2^*, N_3^*) = 0$ .

(ii) Pembuktian

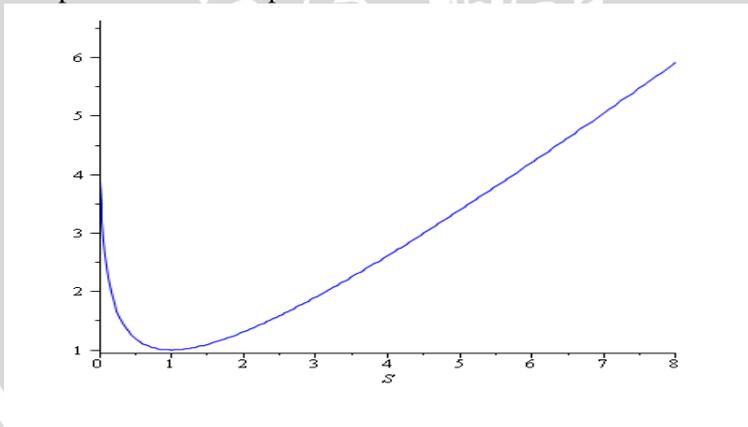
$$\mathcal{L}(N_1, N_2, N_3) > 0, \forall (N_1, N_2, N_3) \neq (N_1^*, N_2^*, N_3^*) \in W$$

Bukti :

Analog dengan Widayani (2012), pandang fungsi  $f(s) = s - \ln s, s > 0$ . Turunan pertama  $f(s)$  terhadap  $s$  adalah

$$f'(s) = 1 - \frac{1}{s} = \frac{s-1}{s}.$$

Titik stationer  $f(s)$  diperoleh ketika  $f'(s) = 0$ , yaitu  $(s, f(s)) = (1, 1)$ . Jelas bahwa  $f'(s) > 0$  jika  $s > 1$  dan  $f'(s) < 0$  jika  $s < 1$ , sehingga  $f$  monoton turun untuk  $s < 1$  dan monoton naik untuk  $s > 1$ . Jadi dapat disimpulkan bahwa titik stasioner  $(1, 1)$  adalah titik ekstrim minimum. Grafik  $y = f(s)$  pada Gambar 3.1 memperlihatkan kesimpulan tersebut.



Gambar 3.1 Grafik fungsi  $f(s) = s - \ln s$

a. Misalkan  $s = \frac{N_2}{N_2^*}$ , diperoleh  $f(s) = \frac{N_2}{N_2^*} - \ln \frac{N_2}{N_2^*} \geq 1$

sehingga

$$\frac{N_2}{N_2^*} \geq 1 + \ln \frac{N_2}{N_2^*}.$$

Karena  $N_2^* > 0$ , maka diperoleh

$$N_2 \geq N_2^* \left(1 + \ln \frac{N_2}{N_2^*}\right) = N_2^* + N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*}$$

sehingga,

$$N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*} \geq 0. \quad (3.7)$$

b. Misalkan  $s = \frac{N_3}{N_3^*}$ , diperoleh  $f\left(\frac{N_3}{N_3^*}\right) = \frac{N_3}{N_3^*} - \ln \frac{N_3}{N_3^*} \geq 1$

sehingga

$$\frac{N_3}{N_3^*} \geq 1 + \ln \frac{N_3}{N_3^*}.$$

Karena  $N_3^* > 0$ , maka diperoleh

$$N_3 \geq N_3^* \left(1 + \ln \frac{N_3}{N_3^*}\right) = N_3^* + N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*}$$

sehingga,

$$N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*} \geq 0. \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.7) dan (3.8) terbukti bahwa

$$N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*} \geq 0$$

dan

$$N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*} \geq 0,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(N_2, N_3) &= \left(N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*}\right) \\ &\quad + \left(N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*}\right) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dengan kata lain

$$\mathcal{L}(N_2, N_3) > 0, \forall N_2, N_3 \neq N_2^*, N_3^* \in W.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $\mathcal{L}$  memenuhi Definisi 2.5.1 yaitu

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0, \forall N_2, N_3 \neq N_2^*, N_3^* \in W.$$

Berdasarkan persamaan (3.6d) dan (3.6f),  $N_2^*$  dan  $N_3^*$  dapat ditulis sebagai

$$N_2^* = K_2 + QN_1, N_3^* = K_3$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dN_2} \frac{dN_2}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dN_3} \frac{dN_3}{dt} \\
 &= \left( \frac{N_2 - N_2^*}{N_2} \right) \frac{dN_2}{dt} + \left( \frac{N_3 - N_3^*}{N_3} \right) \frac{dN_3}{dt} \\
 &= \left( \frac{N_2 - N_2^*}{N_2} \right) (a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1)) \\
 &\quad + \left( \frac{N_3 - N_3^*}{N_3} \right) (a_{33}N_3(K_3 - N_3)) \\
 &= (N_2 - N_2^*)(a_{22}(K_2 - N_2 + QN_1)) \\
 &\quad + (N_3 - N_3^*)(a_{33}(K_3 - N_3)) \\
 &= (N_2 - N_2^*)((a_{22}K_2 + a_{22}QN_1) - a_{22}N_2) \\
 &\quad + (N_3 - N_3^*)(a_{33}K_3 - a_{33}N_3) \\
 &= a_{22} \left( (K_2 + QN_1)N_2 - N_2^2 - N_2^*(K_2 + QN_1) + N_2N_2^* \right) \\
 &\quad + a_{33} \left( K_3N_3 - N_3^2 - N_3^*N_3^* + N_3N_3^* \right) \\
 &= a_{22} (N_2^*N_2 - N_2^2 - N_2^*N_2^* + N_2^*N_2) \\
 &\quad + a_{33} (N_3^*N_3 - N_3^2 - N_3^*N_3^* + N_3^*N_3) \\
 &= a_{22} (-N_2^2 - N_2^{*2} + 2N_2^*N_2) + a_{33} (-N_3^2 - N_3^{*2} + 2N_3^*N_3) \\
 &= a_{22} (-N_2^2 - N_2^{*2} + 2N_2^*N_2) + a_{33} (-N_3^2 - N_3^{*2} + 2N_3^*N_3) \\
 &= -a_{22} (N_2^2 - 2N_2^*N_2 + N_2^{*2}) - a_{33} (N_3^2 - 2N_3^*N_3 + N_3^{*2}) \\
 &= -a_{22} (N_2 - N_2^*)^2 - a_{33} (N_3 - N_3^*)^2 < 0.
 \end{aligned}$$

Terbukti  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0$ , maka menurut defenisi 2.5.2 fungsi Lyapunov  $\mathcal{L}$  adalah fungsi Lyapunov kuat, sehingga titik kesetimbangan  $E_5$  bersifat stabil asimtotik global.

### 3.4.2 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan $E_8$

Analog dengan Rao, dkk. (2012), diberikan fungsi Lyapunov untuk titik kesetimbangan  $E_8(N_1^*, N_2^*, N_3^*)$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(N_1, N_2, N_3) &= \left( N_1 - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*} \right) \\
 &\quad + \left( N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*} \right) \\
 &\quad + \left( N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*} \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu dibuktikan

terlebih dahulu bahwa fungsi  $\mathcal{L}$  tersebut memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.5.1, yaitu

$$\mathcal{L}(N_1^*, N_2^*, N_3^*) = 0$$

dan

$$\mathcal{L}(N_1, N_2, N_3) > 0, \forall (N_1, N_2, N_3) \neq (N_1^*, N_2^*, N_3^*) \in W, \\ \text{dengan } W = \{(N_1, N_2, N_3) | 0 \leq N_1 \leq K_1, 0 \leq N_2 \leq K_2, 0 \leq N_3 \leq K_3\}.$$

i. Pembuktian  $\mathcal{L}(N_1^*, N_2^*, N_3^*) = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(N_1^*, N_2^*, N_3^*) &= \left( N_1^* - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1^*}{N_1^*} \right) \\ &+ \left( N_2^* - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2^*}{N_2^*} \right) \\ &+ \left( N_3^* - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3^*}{N_3^*} \right) \\ &= (0 - N_1^* \ln 1) + (0 - N_2^* \ln 1) \\ &+ (0 - N_3^* \ln 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $\mathcal{L}(N_1^*, N_2^*, N_3^*) = 0$ .

ii. Pembuktian

$$\mathcal{L}(N_1, N_2, N_3) > 0, \forall (N_1, N_2, N_3) \neq (N_1^*, N_2^*, N_3^*) \in W$$

Bukti :

Sebelumnya telah dibuktikan bahwa  $\mathcal{L}(N_2^*, N_3^*) > 0$ ,  $\forall N_2, N_3 \neq N_2^*, N_3^* \in W$  pada kestabilan global titik kesetimbangan  $E_5$ , sehingga diperoleh persamaan (3.9).

Fungsi Lyapunov pada  $E_8$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(N_1, N_2, N_3) &= \left( N_1 - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*} \right) \\ &+ \left( N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*} \right) \\ &+ \left( N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*} \right) \end{aligned}$$

sehingga cukup dibuktikan bahwa

$$\left( N_1 - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*} \right) > 0.$$

Misalkan  $= \frac{N_1}{N_1^*}$ , diperoleh  $f\left(\frac{N_1}{N_1^*}\right) = \frac{N_1}{N_1^*} - \ln \frac{N_1}{N_1^*} \geq 1$

$$\frac{N_1}{N_1^*} \geq 1 + \ln \frac{N_1}{N_1^*}.$$

Karena  $N_1^* > 0$ , maka diperoleh

$$N_1 \geq N_1^* \left(1 + \ln \frac{N_1}{N_1^*}\right) = N_1^* + N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*}$$

sehingga,

$$N_1 - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*} \geq 0. \quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.7), (3.8), dan (3.10) terbukti bahwa

$$N_1 - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*} \geq 0,$$

$$N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*} \geq 0,$$

$$N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*} \geq 0,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(N_1, N_2, N_3) &= \left(N_1 - N_1^* - N_1^* \ln \frac{N_1}{N_1^*}\right) \\ &+ \left(N_2 - N_2^* - N_2^* \ln \frac{N_2}{N_2^*}\right) \\ &+ \left(N_3 - N_3^* - N_3^* \ln \frac{N_3}{N_3^*}\right) > 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $\mathcal{L}$  memenuhi Definisi 2.5.2 yaitu  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0, \forall N_1, N_2, N_3 \neq N_1^*, N_2^*, N_3^* \in W$ .

Berdasarkan persamaan (3.6b), (3.6d) dan (3.6f),  $N_1^*$ ,  $N_2^*$  dan  $N_3^*$  dapat ditulis sebagai

$$N_1^* = K_1 - PN_2 - \alpha N_3, \quad N_2^* = K_2 + QN_1, \quad N_3^* = K_3$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dN_1} \frac{dN_1}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dN_2} \frac{dN_2}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dN_3} \frac{dN_3}{dt} \\ &= \left(\frac{N_1 - N_1^*}{N_1}\right) \frac{dN_1}{dt} + \left(\frac{N_2 - N_2^*}{N_2}\right) \frac{dN_2}{dt} + \left(\frac{N_3 - N_3^*}{N_3}\right) \frac{dN_3}{dt} \\ &= \left(\frac{N_1 - N_1^*}{N_1}\right) (a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 - \alpha N_3)) \\ &+ \left(\frac{N_2 - N_2^*}{N_2}\right) (a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1)) \\ &+ \left(\frac{N_3 - N_3^*}{N_3}\right) (a_{33}N_3(K_3 - N_3)) \\ &= (N_1 - N_1^*)(a_{11}(K_1 - N_1 - PN_2 - \alpha N_3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(N_2 - N_2^*)(a_{22}(K_2 - N_2 + QN_1)) \\
& +(N_3 - N_3^*)(a_{33}(K_3 - N_3)) \\
& = (N_1 - N_1^*)(a_{11}(K_1 - N_1 - PN_2 - \alpha N_3)) \\
& +(N_2 - N_2^*)(a_{22}(K_2 - N_2 + QN_1)) \\
& +(N_3 - N_3^*)(a_{33}(K_3 - N_3)) \\
& = (N_1 - N_1^*)((a_{11}K_1 - a_{11}PN_2 - a_{11}\alpha N_3) - a_{11}N_1) \\
& +(N_2 - N_2^*)((a_{22}K_2 + a_{22}QN_1) - a_{22}N_2) \\
& +(N_3 - N_3^*)(a_{33}K_3 - a_{33}N_3) \\
& = a_{11}((K_1 - PN_2 - \alpha N_3)N_1 - N_1^2 - (K_1 - PN_2 - \alpha N_3)N_1^* - N_1^*N_1) \\
& + a_{22}((K_2 + QN_1)N_2 - N_2^2 - N_2^*(K_2 + QN_1) + N_2N_2^*) \\
& + a_{33}(K_3N_3 - N_3^2 - N_3^*N_3^* + N_3N_3^*) \\
& = a_{11}(N_1^*N_1 - N_1^2 - N_1^*N_1^* - N_1^*N_1) \\
& + a_{22}(N_2^*N_2 - N_2^2 - N_2^*N_2^* + N_2^*N_2) \\
& + a_{33}(N_3^*N_3 - N_3^2 - N_3^*N_3^* + N_3^*N_3) \\
& = a_{11}(-N_1^2 - N_1^{*2} + 2N_1^*N_1) + a_{22}(-N_2^2 - N_2^{*2} + 2N_2^*N_2) \\
& + a_{33}(-N_3^2 - N_3^{*2} + 2N_3^*N_3) \\
& = -a_{11}(N_1^2 - 2N_1^*N_1 + N_1N_1^{*2}) - a_{22}(N_2^2 - 2N_2^*N_2 + N_2N_2^{*2}) \\
& - a_{33}(N_3^2 - 2N_3^*N_3 + N_3N_3^{*2}) \\
& = -a_{11}(N_1 - N_1^*)^2 - a_{22}(N_2 - N_2^*)^2 - a_{33}(N_3 - N_3^*)^2 < 0.
\end{aligned}$$

Terbukti  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0$ , maka menurut defenisi 2.5.2 fungsi Lyapunov  $\mathcal{L}$  adalah fungsi Lyapunov kuat, sehingga titik kesetimbangan  $E_3$  bersifat stabil asimtotik global.

### 3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini di sajikan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 menggunakan software MATLAB 2008.

#### 3.5.1 Simulasi I

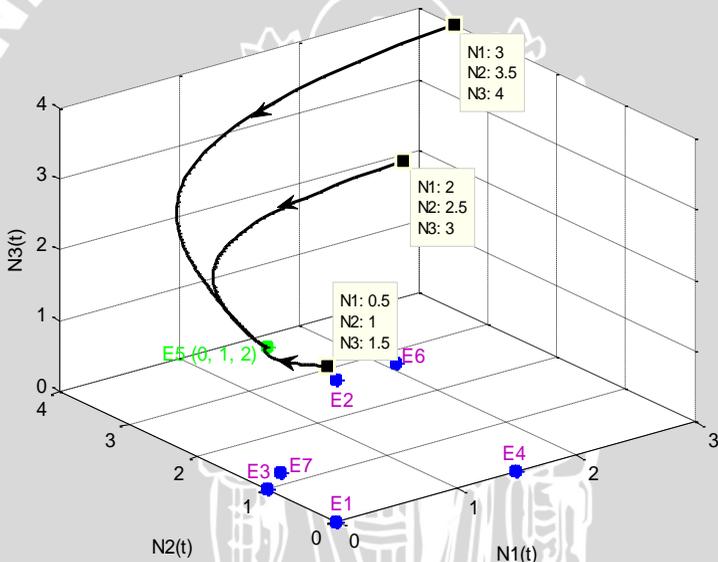
Digunakan nilai parameter

$a_{11}$	$a_{22}$	$a_{33}$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	P	Q	$\alpha$
1	1	1	1.5	1	2	1	1	0.5

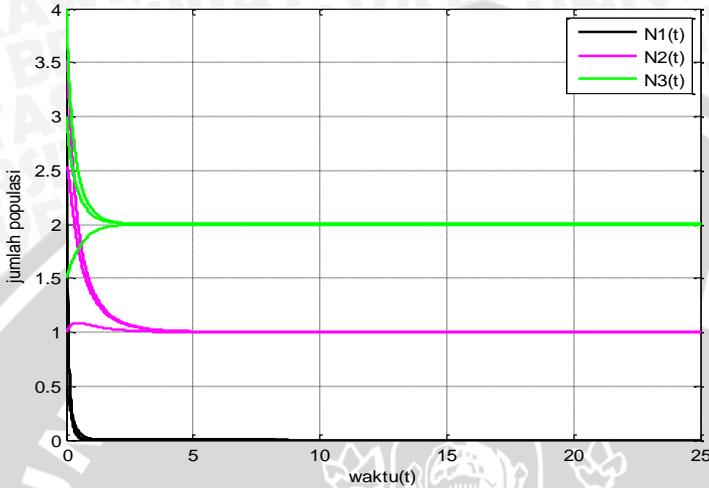
Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik  $E_5$  yaitu

$$E_5 \quad K_1 - PK_2 - \alpha K_3 = -0.5 < 0$$

Untuk lebih jelasnya, kondisi tersebut ditunjukkan pada simulasi numerik dengan tiga nilai awal pada Gambar 3.2 dan Gambar 3.3. Dari Gambar 3.2 terlihat bahwa nilai awal mengarah pada titik  $E_5$ . Hal ini menunjukkan bahwa titik  $E_5$  bersifat stabil. Namun titik  $E_5$  mempunyai syarat agar bisa bersifat stabil yaitu  $K_1 < PK_2 + \alpha K_3$ . Dapat dikatakan bahwa kondisi ini akan tercapai di ekosistem pada saat daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) dari prey lebih kecil dari daya dukung lingkungan *predator* dikali koefisien pemangsaan *prey* ditambah daya dukung lingkungan *ammensal* dikali koefisien *amensalisme*. Jadi seiring berjalannya waktu populasi *prey* akan musnah sedangkan populasi *predator* dan *host ammensal* akan bertahan (Gambar 3.3).



Gambar 3.2 Potret fase simulasi I



Gambar 3.3 Grafik solusi untuk simulasi I

### 3.5.2 Simulasi II

Digunakan nilai parameter

$a_{11}$	$a_{22}$	$a_{33}$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	P	Q	$\alpha$
1	1	1	3	1	2	1	1	0.5

Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi titik  $E_8$  yaitu

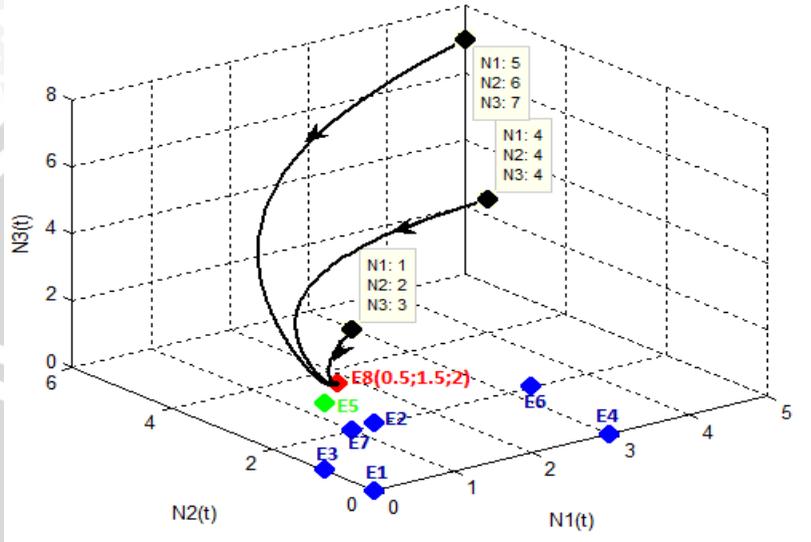
$$K_1 - PK_2 - \alpha K_3 = 1 > 0$$

dan

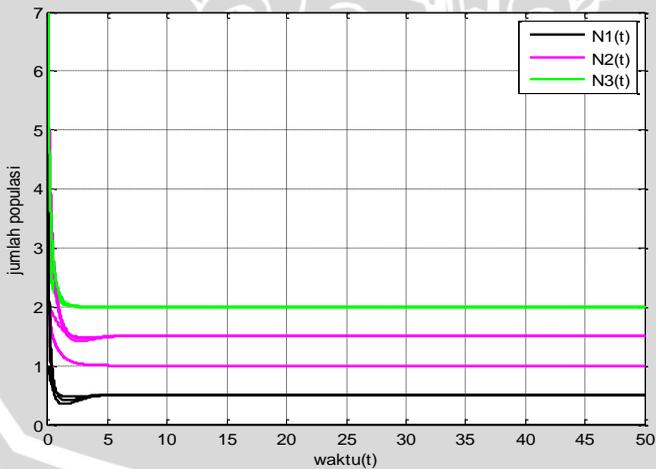
$$K_1 - \alpha QK_3 = 2 > 0$$

Untuk lebih jelasnya, kondisi tersebut ditunjukkan pada simulasi numerik dengan tiga nilai awal pada Gambar 3.4 dan Gambar 3.5. Dari Gambar 3.4 terlihat bahwa nilai awal mengarah pada titik  $E_8$ . Hal ini menunjukkan bahwa titik  $E_8$  bersifat stabil dengan syarat eksistensi yaitu  $K_1 > PK_2$  dan  $K_1 > \alpha QK_3$ . Dengan kata lain kondisi ini akan terjadi pada saat daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) dari *prey* lebih besar dari daya dukung lingkungan *predator* dikali koefisien pemangsaan *prey* dan daya dukung lingkungan *host ammensal* dikali koefisien amensalisme dan koefisien konsumsi *predator*. Jadi seiring berjalannya waktu ketiga populasi *prey*,

*predator* dan *host ammensal* dapat bertahan hidup secara berdampingan atau dengan kata lain tidak terjadi kepunahan (Gambar 3.5).



Gambar 3.4 Potret fase simulasi II



Gambar 3.5 Grafik solusi untuk simulasi II