

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

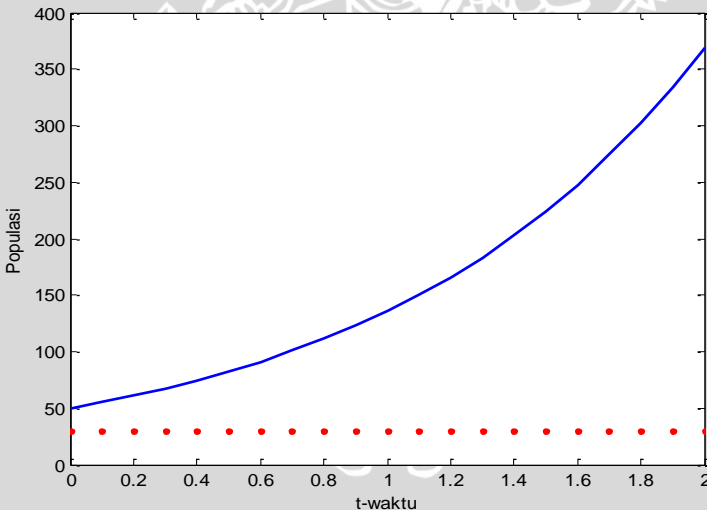
2.1 Model Pertumbuhan Satu Spesies

2.1.1 Pertumbuhan Eksponensial

Pertumbuhan populasi secara kontinu dengan sumber daya yang tak terbatas dapat dimodelkan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad (2.1)$$

dengan $x(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t dan $r > 0$ menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi. Model pertumbuhan eksponensial menggambarkan pertumbuhan populasi karena terjadi perkembangbiakan. Jadi, selama terjadi pertumbuhan eksponensial, jumlah populasi bertambah seiring bertambahnya waktu. Misalkan jumlah populasi awal $x(0) = 50$, dengan $r = 1$ maka populasi akan terus bertambah seperti diperlihatkan pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1 Pertumbuhan Eksponensial

2.1.2 Pertumbuhan Logistik

Menurut Molles (2002), model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Ketika ukuran populasi bertambah, laju pertumbuhan akhirnya melemah dan kemudian berhenti pada ukuran populasi tertentu. Ukuran populasi yang menghentikan pertumbuhan tersebut secara umum disebut *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya.

Laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi, sehingga secara matematis laju pertumbuhan populasi dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2.2)$$

Misalkan K adalah *carrying capacity*. Jika dalam populasi terdapat x individu, maka lingkungan masih dapat mendukung $(K - x)$ individu. Jadi masih terdapat bagian lingkungan yang dapat ditempati, sebesar

$$\frac{(K - x)}{K}. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) inilah yang sebanding dengan pertumbuhan per kapita. Oleh karena itu, persamaan logistik didefinisikan sebagai

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \frac{(K - x)}{K}$$

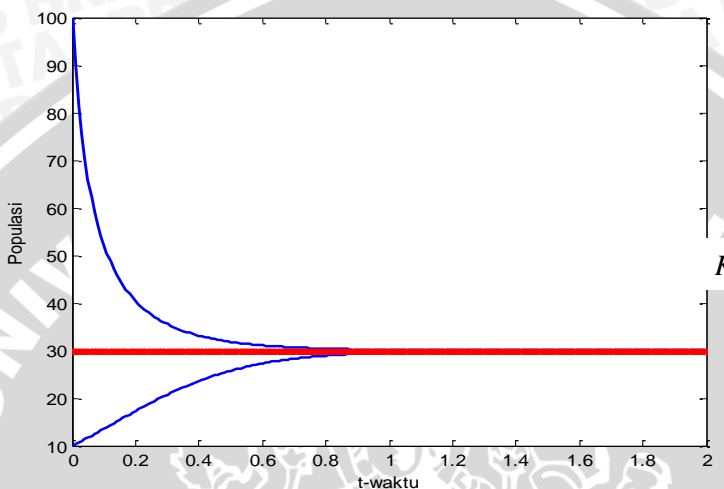
atau

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (2.4)$$

dengan $r > 0$ menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi (Boyce dan Di Prima, 2005).

Jika jumlah populasi awal $x(0) < K$, maka model logistik menunjukkan bahwa ukuran populasi meningkat menuju *carrying capacity* K . Tetapi jika nilai awal $x(0) > K$, maka model logistik menunjukkan bahwa jumlah populasi akan berkurang menuju *carrying capacity* K . Sebagai contoh, jika populasi awal $x(0) = 10$, $r = 5$, dan $K = 30$, maka jumlah populasi meningkat dan pada akhirnya saat $x(t) = K = 30$ laju pertumbuhan populasi berhenti. Sebaliknya jika $x(0) = 100$, jumlah populasi berkurang hingga

pertumbuhan populasi terhenti pada $x(t) = K = 30$. Grafik pertumbuhan logistik diperlihatkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Pertumbuhan Logistik

2.2 Model Pertumbuhan Dua Spesies

2.2.1 Model *Predator-Prey*

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi antara spesies *prey* dan *predator* pertama kali diperkenalkan oleh Volterra pada tahun 1928 dan dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Model *predator-prey* dua spesies menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey* yang mengacu pada model pertumbuhan logistik. Dalam hal ini diasumsikan bahwa pertumbuhan *prey* terbatas oleh *carrying capacity* yang dinyatakan dengan bx^2 . Misalkan x adalah populasi *prey* dan y adalah populasi *predator*. Pemangsaan terhadap *prey* diasumsikan sama dengan laju interaksi *prey* dan *predator* yang dinyatakan dengan cxy . Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cxy. \quad (2.5)$$

Predator dapat bertahan hidup karena pemangsaannya terhadap *prey*. Dalam hal ini laju predasi diasumsikan sama dengan laju pertumbuhan *prey* dan dinyatakan dengan gxy . Populasi *prey*

juga diasumsikan terbatas oleh *carrying capacity* yang dinyatakan dengan fy^2 . Jadi, laju pertumbuhan populasi *predator* dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dy}{dt} = ey - fy^2 + gxy \quad (2.6)$$

(Finiziodan Ladas, 1982).

Dari (2.5) dan (2.6) diperoleh model Lotka-Volterra berupa system persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) = ax - bx^2 - cxy \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = ey - fy^2 + gxy, \end{aligned}$$

dengan

a = laju kelahiran alamiprey,

b = parameter yang berkaitan dengan *carrying capacity prey*,

c = koefisien interaksi pemangsaan prey,

e = laju kelahiran alami predator,

f = parameter yang berkaitan dengan *carrying capacity predator*,

g = koefisien interaksi predasi,

dans emua parameter bernilai positif.

2.2.2 Model Amensalisme Dua Spesies

Persamaan untuk model amensalisme adalah ebagai berikut.

Persamaan laju pertumbuhan spesies amensal (N_1) adalah

$$\frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1(K_1 - N_1 - MN_2). \quad (2.7)$$

Persamaan laju pertumbuhan spesies *enemy* (N_2) adalah

$$\frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2(K_2 - N_2), \quad (2.8)$$

dengan

$K_i = \frac{a_i}{a_{ii}} = \text{carrying capacities } N_i$, dengan $i = 1,2,3$;

$M = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \text{koefisien amensalisme}$,

$a_i = \text{laju kelahiranalami } N_i$, dengan $i = 1,2,3$;

$a_{ii} = \text{laju penurunan } N_i \text{ karena sumber daya terbatas}$, dengan $i = 1,2,3$;

(Acharyulu, 2011)

2.3 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu (Nagle dan Saff, 1993).

Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskrit ($t \in \text{Z}$ atau N) dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in \text{Z atau } N,$$

Sedangkan sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R.$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

Definisi 2.3.1 Sistem *Autonomous*

Sistem *autonomous* adalah suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

dengan F, G , dan H adalah fungsi bernilai riil yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap t (Birkhoff dan Rota, 1989).

Definisi 2.3.2 Titik Kesetimbangan

Pandang sistem *autonomous* (2.9). Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ yang memenuhi $F(x^*, y^*, z^*) = G(x^*, y^*, z^*) = H(x^*, y^*, z^*) = 0$ disebut titik kritis sistem *autonomous* (2.9). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.9) yang bernilai konstan, sebab $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$.

Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan (Ross, 1984).

Definisi 2.3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan (x^*, y^*, z^*) dikatakan

1. stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$

makaberlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. stabil asimtotik, jika titik tersebut stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

bersifat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tak stabil, apabila titik tersebut tidak memenuhi kriteria (1), dengan norm yang digunakan adalah norm Euclid (*Boyce dan DiPrima, 2005*).

2.3.1 Sistem *Autonomous* Linear

Perhatikan sistem *autonomous* linear berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan $\det(A) \neq 0$.

Teorema 2.3.1

Misalkan λ_1, λ_2 dan λ_3 adalah nilai eigen matriks A . Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ dari sistem (2.10) bersifat

1. stabil, jika ketiga nilai eigen mempunyai bagian riil tak positif,
2. tidak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif

(Boyce dan DiPrima, 2005).

2.3.2 Sistem *Autonomous Nonlinear*

Perhatikan sistem *autonomous nonlinear* berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z)\end{aligned}\quad (2.11)$$

Jika f , g , dan h diasumsikan mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan \vec{x}^* , maka deret Taylor fungsi f , g , dan h di sekitar \vec{x}^* adalah

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= f(\vec{x}^*) + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) \\ &+ \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) \\ &+ \eta_1(x, y, z)\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}g(x, y, z) &= g(\vec{x}^*) + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) \\ &+ \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) \\ &+ \eta_2(x, y, z)\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}h(x, y, z) &= h(\vec{x}^*) + \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) \\ &+ \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) \\ &+ \eta_3(x, y, z),\end{aligned}\quad (2.14)$$

dengan $\eta_1(x, y, z)$, $\eta_2(x, y, z)$, dan $\eta_3(x, y, z)$ adalah suku sisa.

Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_1(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_2(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0, \quad (2.15)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_3(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*) = (u, v, w)$.

Dengan menggunakan persamaan (2.12), (2.13), dan (2.14), serta mengingat $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x^*)}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}$, dan $\frac{dz}{dt} = \frac{d(z-z^*)}{dt}$, persamaan (2.11) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{x}^*) \\ g(\vec{x}^*) \\ h(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (y - y^*) \\ (z - z^*) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(\vec{x}^*)}{\partial z} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix* dan dinotasikan dengan $J(\vec{x}^*)$ atau J saja bila dianggap jelas.

Karena $f(x^*, y^*, z^*) = g(x^*, y^*, z^*) = h(x^*, y^*, z^*) = 0$, persamaan (2.16) menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \quad (2.17)$$

Untuk (x, y, z) yang berada cukup dekat dengan $(x^*, y^*, z^*), (u, v, w)$ bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.11) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.18)$$

Untuk $x = x^*, y = y^*$, dan $z = z^*$ diperoleh $(u^*, v^*, w^*) = (0, 0, 0)$ sehingga sistem linear (2.18) memiliki titik kesetimbangan $(u^*, v^*, w^*) = (0, 0, 0)$ (Boyce dan DiPrima, 2005).

Teorema 2.3.2

Titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear (2.11) bersifat

1. Stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.18) adalah stabil,
2. Tak stabil asimtotik jika titik kesetimbangan system hasil linearisasi (2.18) adalah tak stabil

(Edward dan Penney, 2001).

Teorema 2.3.2 menjelaskan bahwa kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear dapat didekati dengan kestabilan titik kesetimbangan sistem linear hampiran di sekitar titik tersebut. Oleh karena itu, kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal atau di daerah sekitar titik kesetimbangan.

2.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear hampiran mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (2.19)$$

maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa harus menentukan nilai eigen matriks Jacobi.

Teorema 2.4.1 Kriteria Routh-Hurwitz

Pandang polinom pada persamaan (2.19). Akar-akar persamaan tersebut memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$a_n > 0 \text{ dan } H_1 = |a_1| > 0, H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, H_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0$$

dengan $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Untuk $n = 3$, persamaan (2.19) menjadi

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.20)$$

Akar-akar persamaan (2.20) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1a_2 > a_3$ (Glass dan Murray, 2001).

2.5 Metode Lyapunov

Definisi 2.5.1 Fungsi Lyapunov Lemah

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(\vec{x})$. Suatu fungsi $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut *fungsi Lyapunov lemah*

jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi

(i) $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$

(ii) $\frac{d\mathcal{L}(\vec{x})}{dt} \leq 0, \forall \vec{x} \in W$

(Alligood, dkk, 2000).

Definisi 2.5.2 Fungsi Lyapunov Kuat

Fungsi \mathcal{L} disebut *fungsi Lyapunov kuat* jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.5.1 dan

$$\frac{d\mathcal{L}(\vec{x})}{dt} < 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$$

(Alligood, dkk, 2000).

Teorema 2.5.1 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(\vec{x})$. Titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat *stabil global* jika terdapat

suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* . Jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* maka \vec{x}^* bersifat *stabil asimtotik global* (Alligood, dkk, 2000).