BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial (PD) adalah persamaan yang melibatkan turunan dari beberapa fungsi yang tidak diketahui. Meskipun persamaan tersebut disebut "persamaan turunan", istilah "persamaan diferensial" (aequatio differentialis) diprakarsai oleh Leibniz pada tahun 1676 dan digunakan secara universal. Misalkan persamaan

$$y'' + 5y' + 6y = \cos x, \tag{2.1}$$

adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui pada persamaan (2.1) diwakili oleh y dan diasumsikan sebagai fungsi dari satu variabel bebas x, yaitu $y = y\,(x)$. Persamaan (2.1) disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB) karena hanya memuat turunan biasa.

Secara umum persamaan diferensial orde n adalah persamaan yang berbentuk

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0,$$

di mana $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ bergantung pada nilai x (Finizio dan Ladas, 1982).

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Diberikan suatu fungsi u yang bergantung pada variabel x dan y, turunan parsial dari u terhadap x pada sebarang titik (x, y) didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x} \frac{\left(u(x + \Delta x, y) - u(x, y)\right)}{\Delta x},$$

begitu pula dengan turunan parsial dari u terhadap y didefinisikan sebagai (Chapra dan Canale, 2010).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y} \frac{\left(u(x, y + \Delta y) - u(x, y)\right)}{\Delta y}.$$

Persamaan yang melibatkan turunan parsial dari fungsi yang tidak diketahui dari dua atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial, sebagai contoh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x. \tag{2.3}$$

Orde dari persamaan diferensial parsial adalah orde turunan tertinggi dari turunan parsial yang muncul dalam suatu persamaan. Orde dari persamaan (2.2) adalah dua dan orde dari persamaan (2.3) adalah tiga.

Suatu persamaan diferensial parsial dikatakan linear jika fungsi yang tidak diketahui dan semua turunannya dalam keadaan linear, dengan koefisien hanya bergantung pada variabel bebas. Persamaan (2.2) adalah persamaan diferensial parsial linear, sedangkan persamaan (2.3) adalah persamaan diferensial parsial nonlinear di mana terdapat perkalian dua variabel bebas. (Strauss, 2008).

2.3 Deret Taylor

Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', ...$ ada di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diekspansi ke dalam deret Taylor berikut

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) \\ + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0) + R_n, \end{aligned}$$

dengan $f(x)$ dan $f(x_0)$ adalah fungsi di titik x dan x_0, $f', f'', \dots, f^n$ adalah turunan pertama, turunan kedua, ..., turunan ke n dari $f(x)$, h adalah jarak antara x dan x_0, dan R_n adalah kesalahan pemotongan (Munir, 2003).

2.4 Metode Beda Hingga

Untuk memahami teknik beda hingga, pertama kali perlu dikenalkan istilah dan konsep dasar dalam kaitannya dengan teori pendekatan. Domain penyelesaian dari PDP terlebih dahulu dibagi menjadi sejumlah hingga grid (*mesh*). Turunan pada masing-masing titik kemudian didekati dengan beda hingga.

2.4.1 Beda Hingga untuk Turunan Biasa

Suatu fungsi $u(x)$ dan turunannya pada titik x dapat didefinisikan sebagai

$$\frac{du(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \tag{2.4}$$

Jika $u(x+\Delta x)$ diekspansikan ke dalam deret Taylor di sekitar $u(x)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{d^2u(x)}{dx^2} \\ + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{d^3u(x)}{dx^3} + \cdots. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Jika persamaan (2.5) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.4) maka diperoleh

$$\frac{du(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{du(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)}{2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \cdots\right),$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} &= \frac{du(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)}{2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \cdots \\ &= \frac{du(x)}{dx} + O(\Delta x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kesalahan pemotongan persamaan (2.6) adalah orde pertama, yang menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan $O(\Delta x)$ menuju nol untuk Δx yang cukup kecil.

Jika u_{m+1} dan u_{m-1} diekspansikan ke dalam deret Taylor maka diperoleh

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + \Delta x\left(\frac{du_m}{dx}\right) + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{d^2u_m}{dx^2}\right) \\ &\quad + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{d^3u_m}{dx^3}\right) + \frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{d^4u_m}{dx^4}\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} u_{m-1} &= u_m - \Delta x\left(\frac{du_m}{dx}\right) + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{d^2u_m}{dx^2}\right) \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{d^3u_m}{dx^3}\right) + \frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{d^4u_m}{dx^4}\right) + \cdots. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Selanjutnya dengan memanipulasi persamaan (2.7) diperoleh beda maju sebagai berikut

$$\left(\frac{du_m}{dx}\right) = \frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Dengan cara sama, diperoleh beda mundur dari persamaan (2.8) sebagai berikut

$$\left(\frac{du_m}{dx}\right) = \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Beda pusat diperoleh dengan mengurangkan persamaan (2.7) terhadap persamaan (2.8) sebagai berikut

$$\left(\frac{du_m}{dx}\right) = \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Terlihat bahwa kesalahan pemotongan beda maju dan beda mundur adalah orde pertama, sedangkan beda pusat adalah orde dua.

Beda pusat untuk turunan kedua diperoleh dengan menambahkan persamaan (2.7) dan (2.8) sebagai berikut

$$\left(\frac{d^2u_m}{dx^2}\right) = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

dengan kesalahan pemotongan orde dua (Chung, 2010).

2.4.2 Beda Hingga untuk Turunan Parsial

Misal didefinisikan suatu titik pada bidang (x, t), dan h, k bilangan positif, maka gridnya adalah titik (t_n, x_m). Untuk setiap bilangan bulat sebarang n dan m. Fungsi u yang didefinisikan pada grid (t_n, x_m) ditulis u_m^n. Dalam beberapa literatur h dan k direpresentasikan sebagai Δx dan Δt.

Ide dasar dari skema beda hingga adalah untuk mengganti turunan dengan beda hingga, sehingga beda pusat untuk turunan kedua adalah

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2).$$

2.4.3 Beda Hingga Menggunakan Pendekatan Pad*é*

Beda pusat untuk turunan kedua adalah

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} = \frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} + O(h^2), \tag{2.9}$$

di mana

$$\delta_x^2 u_m^n = u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n. \tag{2.10}$$

Ekspansi deret Taylor setiap suku pada persamaan (2.10) adalah

$$\begin{aligned} u_{m+1}^n &= u + h\frac{\partial u_m^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u_m^n}{\partial x^3} \\ &\quad + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + \frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u_m^n}{\partial x^5} + \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u_m^n}{\partial x^6} + \cdots, \end{aligned}$$

$$u_{m-1}^n = u - h\frac{\partial u_m^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u_m^n}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} - \frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u_m^n}{\partial x^5} + \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u_m^n}{\partial x^6} + \cdots.$$

Substitusikan hasil ekspansi deret Taylor di atas ke dalam persamaan (2.9), diperoleh

$$\frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} = \frac{\frac{h^2\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6 u_m^n}{\partial x^6} + \cdots}{h^2}$$

$$\frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + \frac{h^4}{360}\frac{\partial^6 u_m^n}{\partial x^6} + \cdots$$

$$\frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + O(h^4).$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} = \frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} + O(h^4). \qquad (2.11)$$

Turunan kedua persamaan (2.9) adalah

$$\frac{\partial^4 u_m^n}{\partial x^4} = \frac{\delta_x^2}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}\right) + O(h^2). \qquad (2.12)$$

Substitusikan persamaan (2.12) ke dalam persamaan (2.11) diperoleh

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} = \frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\delta_x^2}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}\right) + O(h^2)\right) + O(h^4),$$

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} = \frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} - \frac{1}{12}\delta_x^2\left(\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}\right) + O(h^4) + O(h^4),$$

$$\frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\delta_x^2\left(\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}\right) + O(h^4),$$

$$\frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} = \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} + O(h^4),$$

atau

$$\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \frac{\delta_x^2 u_m^n}{h^2} + O(h^4).$$

Jadi diperoleh pendekatan implisit untuk $\frac{\partial^2 u_m^n}{\partial x^2}$ dengan tingkat keakuratan orde empat (Singer dan Turkel, 1997).

2.5 Analisis Kestabilan von Neumann

Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan kestabilan suatu skema beda hingga adalah analisis kestabilan von Neumann. Kestabilan von Neumann hanya digunakan untuk persamaan linear. Jika masalah yang dihadapi adalah nonlinear maka yang dilihat hanya bentuk linearnya.

Berikut akan dijelaskan kestabilan von Neumann untuk pendekatan beda hingga. Untuk pendekatan beda hingga dengan $u(x_m, t_n)$ diasumsikan bahwa $x_0 = t_0 = 0$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari deret Fourier sehingga dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_m, t_n) = \varepsilon_m^n &= \sum_{j=0}^{N} a_j \exp i(\beta_j x_m + \gamma_j t_n) \\ &= \sum_{j=0}^{N} a_j \exp(i\gamma_j t_n) \exp(i\beta_j x_m)\end{aligned}$$

dengan N adalah jumlah grid pada garis x, dan a_j adalah koefisien Fourier yang bernilai konstan, dan diasumsikan bahwa β_j bernilai real. Sifat-sifat moda Fourier adalah sama sehingga untuk analisis cukup dilihat salah satu komponen saja, yaitu

$$\varepsilon_m^n \approx \exp(i\gamma t_n) \exp(i\beta x_m),$$

oleh karena $x_m = m\Delta x$ dan $t_n = n\Delta t$, maka

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^n &\approx \exp(i\gamma(n\Delta t)) \exp(i\beta(m\Delta x)) \\ &= (\xi)^n \exp(\mathrm{i}\beta(m\Delta x)) \qquad (2.13)\end{aligned}$$

dengan $\xi = \exp(i\gamma\Delta t)$. Agar kesalahan awal dari persamaan (2.13) tidak meningkat, maka nilai ξ harus memenuhi

$$|\xi| \leq 1.$$

Kondisi di atas merupakan kondisi kestabilan von Neumann (Morton dan Mayers, 2005).

2.6 Persamaan *Good* Boussinesq

Persamaan Boussinesq nonlinear yang menggambarkan perambatan gelombang air dangkal dua arah, diberikan sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} = 0, \tag{2.14}$$

di mana $u = u(x,t)$ dan $|q| = 1$ adalah parameter. Dengan mengambil $q = -1$ maka persamaan (2.14) adalah persamaan *Bad* boussinesq nonlinear. Jika mengambil $q = 1$ maka persamaan (2.14) adalah persamaan *Good* Boussinesq nonlinear dengan kondisi awal

$$u(x,t_0) = f(x);\ L_0 < x < L_1,$$

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = g(x);\ L_0 < x < L_1,$$

dan kondisi batas

$$u(L_0,t) = 0, \qquad u(L_1,t) = 0;\ t > t_0,$$

$$\frac{\partial u(L_0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(L_1,t)}{\partial x} = 0;\ t > t_0.$$

Untuk memudahkan maka persamaan *Good* Boussinesq (2.14) ditransformasikan ke dalam sistem persamaan diferensial orde satu terhadap waktu sebagai berikut (Manoranjan dkk., 1984)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad L_0 < x < L_1, \tag{2.15}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + u^2, \tag{2.16}$$
dengan kondisi awal

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ w(x,0) &= \iint_{L_0}^{x} u_t(y,0)dy \\ &= g(x) \text{ pada } L_0 < x < L_1, \end{aligned}$$

dan kondisi batas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{di } x = L_0 \text{ dan } x = L_1. \tag{2.17}$$

Dengan mengintegralkan persamaan (2.15) dari L_0 sampai L_1 diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^{L_1} \frac{\partial u}{\partial t} \partial x &= \int_{L_0}^{L_1} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \partial x \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_0}^{L_1} u \partial x &= \int_{L_0}^{L_1} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \partial x \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \int_{L_0}^{L_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \partial x, \end{aligned}$$

dengan $I = \int_{L_0}^{L_1} u \partial x$. Misalkan $v = \frac{\partial w}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \int_{L_0}^{L_1} \frac{\partial v}{\partial x} \partial x \\ &= \int_{L_0}^{L_1} \partial v \\ &= v\big|_{L_0}^{L_1} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{L_0}^{L_1}. \end{aligned}$$

Substitusikan batas integral tak tentu maka diperoleh

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial w(L_1)}{\partial x} - \frac{\partial w(L_0)}{\partial x}. \qquad (2.18$$

Dengan menggunakan kondisi batas (2.17) maka persamaan (2.18) menjadi

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0,$$

atau dengan kata lain

$$I = \int_{L_0}^{L_1} u(x,t)dx = \text{konstan.}$$

2.6.1 Solusi Analitik Satu Gelombang

Solusi analitik satu gelombang persamaan (2.14) adalah

$$u(x,t) = A\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{A}{6}}(x - ct + x_0) + b + \frac{1}{2}\right],$$

$$c = \pm\sqrt{-2\left(b + \frac{A}{3}\right)},$$

di mana A adalah amplitudo gelombang, c adalah kecepatan, dan b adalah parameter sembarang.

2.6.2 Solusi Analitik Interaksi Dua Gelombang

Solusi analitik untuk interaksi dua gelombang telah diselesaikan oleh (Manoranjan dkk., 1984) sebagai berikut

$$u = -6\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\log_e f(x,t)], \qquad (2.19)$$

di mana

$$f(x,t) = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + a\exp(\eta_1 + \eta_2), \qquad (2.20)$$

dengan

$$\eta_i = P_i\left[x - \varepsilon_i\left(1 - P_i^2\right)^{\frac{1}{2}}t + \eta_i^0\right], \qquad \varepsilon_i = \pm 1,$$

$$a = \frac{[(\varepsilon_1 v_1 - \varepsilon_2 v_2)^2 - 3(P_1 - P_2)^2]}{[(\varepsilon_1 v_1 - \varepsilon_2 v_2)^2 - 3(P_1 + P_2)^2]}, \qquad (2.21)$$

$$v_i = \left(1 - P_i^2\right)^{1/2},$$

dan

$$P_i^2 = \frac{2}{3}A_i,$$

di mana A_i adalah amplitudo gelombang ke i. Persamaan (2.19) dapat disederhanakan ke dalam bentuk berikut (Manoranjan dkk., 1984)

$$u = -\frac{6(ff_{xx} - f_x^2)}{f^2}. \qquad (2.22)$$

Dengan mempertimbangkan kasus perambatan dua gelombang yang saling berinteraksi satu sama lain, maka diambil nilai $\varepsilon_1 = 1$, dan $\varepsilon_2 = -1$. Berdasarkan persamaan (2.19), agar u tidak menghasilkan solusi *blow up*, maka $f(x,t)$ harus lebih besar dari nol sehingga nilai $a \geq 0$ akan terpenuhi untuk semua kasus. Dari persamaan (2.21) nilai $a \geq 0$ harus memenuhi pertaksamaan berikut

$$(v_1 + v_2)^2 > 3(P_1 + P_2)^2, \qquad (2.23)$$

atau

$$(v_1 + v_2)^2 \leq 3(P_1 - P_2)^2. \qquad (2.24)$$

Dapat dilihat bahwa, ketika $(v_1 + v_2)^2 = 3(P_1 + P_2)^2$, solusi u tidak dapat ditentukan. Pertaksamaan (2.24) memberikan hasil sebagai berikut

$$4(A_1 + A_2 + 6\sqrt{A_1 A_2} - 3 < \sqrt{(3 - 2A_1)(3 - 2A_2)}. \tag{2.25}$$

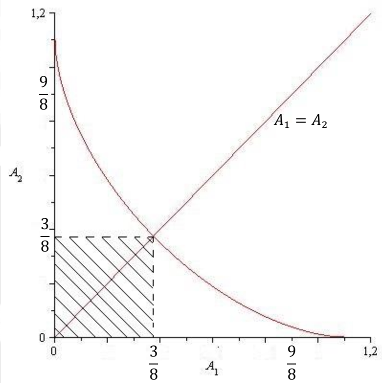
Andaikan $A_1 = A_2$ maka pertaksamaan (2.25) dapat ditulis

$$\begin{aligned} 4(2A_1) + 6\sqrt{A_1^2} - 3 &< \sqrt{(3 - 2A_1)^2}, \\ 8A_1 + 6A_1 - 3 - (3 - 2A_1) &< 0, \\ 16A_1 &< 6, \\ A_1 &< \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

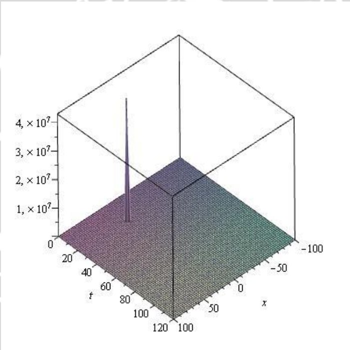
dan (2.26)

$$A_2 < \frac{3}{8}.$$

dari pertaksamaan (2.25) dapat dibuat grafik seperti pada Gambar 2.1. Berdasarkan Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa solusi *blow up* terjadi jika memilih $A_1 = A_2 > \frac{3}{8}$, atau $a < 0$. Hasil plot solusi untuk persamaan (2.22) dengan memilih nilai $A_1 = A_2 = 0.4$ diperoleh solusi *blow up* seperti pada Gambar (2.2) yang sesuai dengan kondisi *blow up* pada persamaan (2.26) yaitu dengan memilih $A > \frac{3}{8} = 0.375$.



Gambar 2.1 Grafik pertaksamaan (2.25)



Gambar 2.2 Solusi *blow up* persamaan (2.24) dengan $A_1 = A_2 = 0.4$