BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara umum penyakit digolongkan menjadi dua yaitu penyakit menular dan penyakit yang tidak menular. Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh kuman yang menyerang suatu individu. Kuman dapat berupa virus, bakteri, amuba, atau jamur, sedangkan proses penularan terjadi melalui berbagai cara, yaitu dengan kontak langsung maupun tidak langsung ke individu yang terinfeksi.

Penyebaran penyakit menular yang tidak terkontrol menyebabkan epidemi, yaitu suatu situasi tersebarnya penyakit menular di masyarakat yang penderitanya meningkat secara signifikan melebihi keadaan yang lazim di daerah dan waktu tertentu. Jika penyebaran penyakit menular tersebut tidak lenyap namun jumlah manusia yang terjangkit tidak meningkat dengan signifikan pada suatu daerah dan waktu tertentu, maka situasi tersebut disebut endemi.

Faktor-faktor yang menyebabkan dinamika penyakit menular di manusia adalah dislokasi populasi, gaya hidup, praktek seksual, dan meningkatnya perjalanan internasional. Secara umum, penularan beberapa penyakit seperti influenza, SARS, campak, dan AIDS disebabkan adanya interaksi dalam suatu populasi, transportasi atau perjalanan antarwilayah, sehingga cara penyebaran ini merupakan faktor penting yang berpengaruh pada penyebaran penyakit menular.

Dalam berbagai masalah penyebaran penyakit, model matematika sering kali digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit menular yang dapat dirumuskan sebagai persamaan diferensial dengan waktu yang kontinu. Berbagai model epidemi telah diusulkan untuk memahami dinamika penyebaran penyakit menular. Sattenspiel dan Dietz (1995) memperkenalkan model epidemi dengan melibatkan transportasi antar-dua populasi untuk mengidentifikasi kasus transmisi campak di pulau Karibia Dominika.

Penelitian selanjutnya Arino dan Van den Driessche (2003) merumuskan model epidemi multikota untuk menganalisis penyebaran penyakit menular secara spasial. Cui dkk. (2006)

mengemukakan model *SIS* (*Susceptible*, *Infective*, *Susceptible*) untuk mempelajari dampak transportasi terkait infeksi pada penyebaran penyakit, sedangkan Liu dan Takeuchi (2006) mengembangkan model *SIQS* (*Susceptible*, *Infective*, *Quarantine*, *Susceptible*) untuk menganalisa pengaruh transportasi yang berhubungan dengan infeksi dari individu yang datang dari populasi di kota lain. Kemudian Liu dan Zhou (2009) menambahkan asumsi adanya individu *removed* yang dapat kembali menjadi individu *susceptible*, sehingga model *SIRS* lebih tepat untuk jenis penyebaran penyakit menular yang mempunyai kekebalan sementara.

Skripsi ini merujuk Fathoni (2013) yang meneliti tentang analisis dinamik model matematika penyebaran penyakit menular tipe *SEIS* melalui transportasi antar-dua kota dan mengulas kembali artikel Liu dan Zhou (2009) tentang model epidemi tipe *SIRS* yang dipengaruhi transportasi antar dua kota. Model *SIRS* merupakan model penyebaran penyakit dengan tiga kelas subpopulasi yaitu: *Susceptible, Infective,* dan *Removed.* Kelas *susceptible* merupakan subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit. Kelas *infective* merupakan subpopulasi individu terinfeksi. Kelas *removed* merupakan subpopulasi individu yang sembuh namun dapat kembali menjadi individu *susceptible*. Selanjutnya dilakukan analisis dinamik untuk menentukan titik kesetimbangan, jenis kestabilannya. Eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh angka reproduksi dasar yang ditentukan dengan menggunakan metode generasi selanjutnya. Simulasi numerik dilakukan untuk mengilustrasikan perilaku model dengan menggunakan Matlab.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit menular tipe *SIRS* melalui transportasi antar-dua kota.
2. Bagaimana titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan berdasarkan angka reproduksi dasar.
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model *SIRS*.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diperlukan dalam penulisan skripsi ini adalah

1. Kedua kota identik, terdapat kesamaan parameter demografi dan epidemiologi.
2. Individu yang baru lahir tidak terinfeksi.
3. Individu yang melakukan perjalanan tidak melahirkan dan tidak mati.
4. Individu tidak kehilangan daya tahan tubuh selama perjalanan.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit menular tipe *SIRS* melalui transportasi antar-dua kota.
2. Mengetahui titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan analisis kestabilan dari titik kesetimbangan berdasarkan angka reproduksi dasar.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik model *SIRS*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Edward dan Penney, 2001).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (Edward dan Penney, 2001).

Definisi 2.1.3 (PDB Linear)

Suatu persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas *x* dan variabel tak bebas *y* disebut linear dengan orde *n*, jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x). \qquad (2.1)$$

dengan $a_0 \neq 0$ (*Ross, 1984*).

Definisi 2.1.4 (PDB Nonlinear)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Boyce dan DiPrima, 1986).

Definisi 2.1.5 (Sistem Persamaan Diferensial)

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi *n* adalah sistem yang terdiri dari *n* persamaan diferensial biasa dengan *n* fungsi yang tidak diketahui dimana $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi *n* adalah

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t),\\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Bentuk (2.2) dapat ditulis secara singkat sebagai,

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(t)x_j + \; f_i(t), \qquad i = 1,2, \dots, n\,,$$

atau dalam bentuk matriks sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \; \vec{f}(t),$$

dengan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, dan $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui nilainya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi pada masa sekarang atau di masa yang lalu. Perhatikan sistem dinamik yang dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial berikut.

$$\frac{dx}{dt} = P(x),$$

dengan x (t) merupakan solusi dari $\frac{dx}{dt} = P(x)$ pada saat t. (Naggle dan Edward, 1993).

2.2.1. Sistem Otonomus

Definisi 2.2.1

Suatu sistem dinamik berdimensi tiga yang berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y,z),\\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y,z),\\ \frac{dz}{dt} &= h(x,y,z),\end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan *f*, g, dan *h* adalah fungsi bernilai *real* yang tidak bergantung terhadap waktu *t*, disebut sistem otonomus (Birkhoff dan Rota, 1989).

Definisi 2.2.2 (Titik Kesetimbangan)

Misalkan diberikan sistem otonomus (2.3). Titik (x^*, y^*, z^*) yang memenuhi $f(x^*, y^*, z^*) = 0, g(x^*, y^*, z^*) = 0, h(x^*, y^*, z^*) = 0$, disebut titik kritis. Titik kritis (x^*, y^*, z^*) adalah solusi sistem (2.3) yang bernilai konstan karena $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Titik kritis (x^*, y^*, z^*) disebut juga titik kesetimbangan sistem (2.3) (Naggle dan Edward, 1993).

Definisi 2.2.3 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ dikatakan

1. Stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

   $$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

   maka berlaku

   $$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

2. Tak stabil apabila tidak memenuhi kriteria stabil (Boyce dan DiPrima, 2001).

2.3 Sistem Otonomus Linear

Sistem otonomus linear dengan *n* persamaan berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\mathrm{dt}} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_{\mathrm{n}}}{\mathrm{dt}} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, di mana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Teorema 2.3.1

Misalkan $\lambda_{1,}\lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matrik A dari sistem (2.4) dengan $detA \neq 0$. titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ bersifat

1. stabil asimtotik, jika bagian riil $\lambda_{1,}\lambda_2, \dots, \lambda_n$ bernilai negatif,
2. stabil tetapi bukan stabil asimtotik, jika bagian riil $\lambda_{1,}\lambda_2, \dots, \lambda_n$ memiliki bagian riil tak positif,
3. tidak stabil, jika salah satu bagian riil $\lambda_{1,}\lambda_2, \dots, \lambda_n$ bernilai positif.

(Finizio dan ladas,1982).

2.4 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Anggap bahwa fungsi *f*, *g*, dan *h* nonlinear dan mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik (x^*, y^*, z^*). Untuk menganalisis kestabilan solusi sistem di titik (x^*, y^*, z^*), perlu dilakukan proses linearisasi. Proses linearisasi dilakukan dengan ekspansi deret taylor fungsi *f* dan *g* di sekitar (x^*, y^*, z^*)

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) = {} & f\,(x^*,y^*,z^*) + \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}(y-y^*) \\
& + \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}(z-z^*) + \eta_1(x,y,z), \\
g(x,y,z) = {} & g\,(x^*,y^*,z^*) + \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}(y-y^*) \\
& + \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}(z-z^*) + \eta_2(x,y,z), \\
h(x,y,z) = {} & h\,(x^*,y^*,z^*) + \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}(y-y^*) \\
& + \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}(z-z^*) + \eta_3(x,y,z),
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

dengan $\eta_1(x,y,z)$, $\eta_2(x,y,z)$, dan $\eta_3(x,y,z)$ adalah suku sisa.

Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\lim_{(x,y,z)\to(x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_1(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_2(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_3(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)$.

Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.6), serta mengingat

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(z - z^*)}{dt},$$

maka persamaan (2.5) setelah disubsitusikan persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\,(x^*,y^*,z^*) \\ g\,(x^*,y^*,z^*) \\ h\,(x^*,y^*,z^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$+\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}(x-x^*)+\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}(y-y^*)+\frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}(z-z^*) \\ \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}(x-x^*)+\frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}(y-y^*)+\frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}(z-z^*) \\ \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial x}(x-x^*)+\frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial y}(y-y^*)+\frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial z}(z-z^*) \end{bmatrix},$$

atau

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x-x^* \\ y-y^* \\ z-z^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f\ (x^*,y^*,z^*) \\ g\ (x^*,y^*,z^*) \\ h\ (x^*,y^*,z^*) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-x^* \\ y-y^* \\ z-z^* \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

Matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial x} & \frac{\partial f\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial y} & \frac{\partial f\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial z} \\ \frac{\partial g\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial x} & \frac{\partial g\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial y} & \frac{\partial g\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial z} \\ \frac{\partial h\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial x} & \frac{\partial h\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial y} & \frac{\partial h\left(x^*,y^*,z^*\right)}{\partial z} \end{bmatrix},$$

disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix* dan dinotasikan dengan $J(x^*,y^*,z^*)$ atau J saja bila dianggap jelas.

Karena $f\ (x^*,y^*,z^*)=\ g\ (x^*,y^*,z^*)=h\ (x^*,y^*,z^*)=0$

persamaan (2.7) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*,y^*,z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*,y^*,z^*)}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \eta_1(x,y,z) \\ \eta_2(x,y,z) \\ \eta_3(x,y,z) \end{bmatrix},$$

bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt}=\ J\vec{w}+\vec{\eta}. \qquad (2.8).$$

Untuk (x, y, z) yang berada cukup dekat dengan (x^*, y^*, z^*), $(u.v,w)$ bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$, akibatnya nilai $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.7) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}, \tag{2.9}$$

Untuk $x = x^*$, $y = y^*$, dan $z = z^*$ diperoleh $(u^*, v^*, w^*) = (0,0,0)$ sehingga sistem linear (2.9) memiliki titik kesetimbangan $(u^*, v^*, w^*) = (0,0,0)$.

(Boyce dan DiPrima, 2005).

Teorema 2.5.1

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.5) bersifat

1. stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah stabil asimtotik,
2. tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah tak stabil (Edward dan Penney, 2001).

2.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Sistem otonomus dengan sebuah matriks Jacobi yang berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{dx_1} & \frac{\partial f_1}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{dx_n} \\ \frac{\partial f_2}{dx_1} & \frac{\partial f_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{dx_1} & \frac{\partial f_n}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{dx_n} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

mempunyai nilai eigen yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan $\det(J - \lambda I) = 0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{2.11}$$

Solusi sistem otonomus tersebut akan stabil jika semua akar persamaan (2.11) bernilai negatif, atau dengan kata lain $\lambda_m < 0$, $m = 1,2, \ldots, n$. Persamaan (2.11) umumnya sulit untuk diselesaikan, sehingga sulit pula untuk menentukan tanda nilai eigennya. Oleh karena itu digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan tanda nilai eigen matriks (2.10) dengan menggunakan koefisien-

koefisien persamaan (2.11), seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.6.1

Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan karakteristik (2.11), dibangun m matriks sebagai berikut.

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \dots, H_m = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix}.$$

Jika $\det(H_m) > 0$, maka $\lambda_m < 0,\ m = 1, 2, \dots, n$. Untuk $n = 3$, persamaan (2.11) menjadi

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \tag{2.12}$$

Akar-akar persamaan (2.12) akan bernilai negatif jika dan hanya jika semua koefisien a_1, a_2, dan a_3 bernilai positif, dan $a_1a_2 > a_3$ (Murray, 2002).

Teorema Routh-Hurwitz untuk kasus khusus matriks

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

dapat diselesaikan dengan Lemma 2.1. Persamaan karakteristik matriks (2.13) adalah

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0.$$

Lemma 2.1

Misalkan $A_1 = -\mathrm{tr}(J),\ A_2 = J_a + J_b + J_c,$ dan $A_3 = -\det(J)$ dengan $J_a = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\ J_b = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},\ J_c = a_{11}a_{33}$. Matriks (2.13) akan stabil (semua nilai eigennya bernilai negatif) jika dan hanya jika memenuhi kondisi

(i) $A_1 > 0$,

(ii) $A_2 > 0$,

(iii) $A_3 > 0$,

(iv) $A_1A_2 - A_3 > 0$.

Dari matriks (2.13) dapat diketahui nilai $A_1A_2 - A_3$ adalah

$$\begin{aligned} A_1A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(J_a + J_b + J_c) + \det(J) \\ &= -a_{11}(J_b + J_c) - a_{22}(J_a + J_b + J_c) - a_{33}(J_a + J_c) \\ &\quad - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32}. \end{aligned}$$

(Liu dan Takeuchi, 2006).

2.7 Angka Reproduksi Dasar

Dinamika penyebaran suatu penyakit dengan model *SIRS* dapat diketahui jika, digunakan suatu angka yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi epidemi atau tidak. Angka tersebut dikenal sebagai angka reproduksi dasar. Angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) didefinisikan sebagai angka rata-rata banyaknya infeksi berikutnya (infeksi baru) yang disebabkan oleh satu individu yang terinfeksi selama individu tersebut hidup sebagai individu yang terinfeksi. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan dapat dianalisis menggunakan $\mathcal{R}_0$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah titik kesetimbangan dimana dalam populasi tidak terdapat individu terinfeksi atau semua individu dalam keadaan sehat. Titik kesetimbangan endemi adalah titik kesetimbangan dimana terdapat individu terinfeksi pada populasi, sehingga penyakit akan menyebar dalam kurun waktu yang lama.

Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Dengan kata lain, untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ setiap individu yang terinfeksi akan menyebabkan infeksi baru kurang dari 1, akibatnya dalam populasi tidak terjadi epidemi, sehingga dalam jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit. Sebaliknya, untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ setiap individu yang terinfeksi akan menyebabkan infeksi baru lebih dari satu, akibatnya dalam populasi akan terjadi epidemi dan apabila tidak dilakukan penanganan akan menjadi suatu endemi (Shim, 2004).

2.8 Metode Generasi Selanjutnya

Metode generasi selanjutnya adalah pendekatan nilai $\mathcal{R}_0$ pada model yang mencakup kelas individu terinfeksi. Pada matriks generasi selanjutnya untuk model epidemi, populasi dipisahkan menjadi dua kompartemen yaitu terinfeksi dan tidak terinfeksi. Dimisalkan bahwa ada $1, \dots, m, m+1, \dots, n.$ kompartemen. Kompartemen pertama sampai m terdiri dari individu terinfeksi, sedangkan sisanya kompartemen $m+1$ sampai n merupakan individu tidak terinfeksi (Ameh, 2009).

Sistem persamaan berikut ini merupakan model epidemi berbentuk

$$\dot{x}_i = g_i(x) = \mathcal{k}_i - \mathcal{y}_i = 1, \dots, n$$

$\mathcal{y}_i$ dapat dinyatakan dengan $\mathcal{y}_i = \mathcal{y}_i^- - \mathcal{y}_i^+$
dengan

$\dot{x}_i$	:	Laju populasi dalam setiap kompartemen i.
$g_i(x)$	:	laju lahirnya infeksi baru pada kompartemen i.
$\mathcal{k}_i$	:	infeksi baru yang masuk pada kompartemen i.
$\mathcal{y}_i$	:	transfer infeksi dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya.
$\mathcal{y}_i^-$	:	laju transfer keluar kompartemen ke i.
$\mathcal{y}_i^+$	:	laju transfer masuk kompartemen ke i.

Didefinisikan K dan Y adalah matriks berukuran $m \times m$ sebagai

$$K = \left[\frac{\partial\, \mathcal{k}_i(x_0)}{\partial x_j}\right], Y = \left[\frac{\partial\, \mathcal{y}_i(x_0)}{\partial x_j}\right], \qquad i, j = 1, \dots\ , m,$$

dengan x_0 titik bebas penyakit, K non negatif dan Y matriks *non-singular*. Matriks generasi selanjutnya adalah $P = KY^{-1}$ dan angka reproduksi dasar dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{R}_0 = \eta(KY^{-1}) = \eta(P),$$

dengan $\eta(P)$ adalah *spectral radius* dari P, yaitu maksimum nilai eigen dari P (Braurer, dkk, 2008).

2.9 Matriks Partisi

2.9.1 Definisi Matriks Partisi

Suatu matriks dapat dipartisikan menjadi submatriks, dengan cara mengikutkan hanya beberapa kolom dari matriks aslinya (Laintarawan dkk., 2009). Secara umum dapat dipartisikan baris dan kolom matriks A yang berukuran $m \times n$ dengan $m = m_1 + \cdots + m_q$, $n = n_1 + \cdots + n_r$, dan $A_{\alpha\beta}$ menunjukkan matriks partisi atau submatriks.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & \dots & A_{qr} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_q \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_r \end{matrix} & \end{array}$$

Dengan notasi ini, partisi $A_{\alpha\beta}$ mempunyai dimensi $m_\alpha \times n_\beta$ dan dapat dikatakan bahwa $A = A_{\alpha\beta}$ adalah matriks partisi ukuran $q \times r$ (Golub dan Loan, 2013).

Misalkan $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Jika $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ dan $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_t]$ adalah vektor integer dengan komponen berbeda yang memenuhi $1 \leq \alpha_i \leq m$ dan $1 \leq \beta_i \leq n$, maka

$$A(\alpha,\beta) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha_1,\beta_1} & \dots & \alpha_{\alpha_1,\beta_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\alpha_s,\beta_1} & \dots & \alpha_{\alpha_s,\beta_t} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_q \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & \cdots & n_r \end{matrix} & \end{array}$$

adalah submatriks dari matriks A berukuran $s \times t$. Jika $\alpha = \beta = 1{:}\,k$ dan $1 \leq k = \min\{m, n\}$. (Golub dan Loan, 2013).

Definisi 2.9.2 (Operasi Matriks Partisi)

Misal A dan B keduanya adalah matriks partisi $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

di mana submatriksnya mempunyai dimensi yang sesuai dan sebanding: A_{ij} dan B_{ij} adalah matriks $m_i \times n_j$ untuk i dan $j = 1,2$, sehingga $m = m_1 \times m_2$ dan $n = n_1 \times n_2$. Penjumlahan dari keduanya didefinisikan

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}.$$

Perkalian dari keduanya didefinisikan

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

(Vinod, 1998).

2.9.3 Determinan Matriks Partisi

Teorema 2.9.3

Diberikan S adalah matriks $(nN) \times (nN)$ yang dipartisi dalam N^2 blok dengan ukuran $n \times n$,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix}.$$

Maka determinan dari S adalah

$$\det(S) = \prod_{k=1}^{N} \det\left(\alpha_{kk}^{(N-k)}\right), \tag{2.16}$$

di mana $\alpha^{(k)}$ didefinisikan

$$\alpha_{ij}^{(0)} = S_{ij}$$
$$\alpha_{ij}^{(k+1)} = \alpha_{ij}^{(k)} - \alpha_{i,N-k}^{(k)} (\alpha_{N-k,N-k}^{(k)})^{-1} \alpha_{N-k,j}^{(k)}, \quad k \geq 1$$

(Powell, 2011).

Untuk $N = 2$ menurut persamaan (2.16), determinan dari S adalah

$$\det(S) = \det\left(\alpha_{11}^{(1)}\right) \det\left(\alpha_{22}^{(0)}\right).$$

Berdasarkan definisi $\alpha^{(k)}$ diperoleh

$$\alpha_{ij}^{(0)} = S_{ij}$$
$$\alpha_{ij}^{(1)} = S_{ij} - S_{i2} S_{22}^{-1} S_{21},$$

sehingga didapatkan hasil

$$\det(S) = \det(S_{22}) \det(S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}).$$

Jika S adalah matriks blok segitiga, atau matriks blok diagonal, maka

$$\det(S) = \det(S_{22}) \det(S_{11}).$$

Pembuktian Teorema 2.9.3 terdapat pada artikel yang ditulis oleh Powell (2011).