

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model *SIRS*

Pada model *SIRS* populasi terbagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi individu Susceptible (*S*) yang secara fisik dalam keadaan sehat tetapi mempunyai kemungkinan untuk tertular penyakit, subpopulasi individu Infective (*I*) yang tertular penyakit dan langsung dapat menularkan penyakitnya kepada individu lain, subpopulasi individu Removed yang keluar dari bagian terinfeksi, yaitu individu yang sembuh. Semua subpopulasi pada model *SIRS* ini bepergian antar dua kota. Pada masing-masing kota terdapat tiga populasi, yaitu S_1 , I_1 , dan R_1 di kota pertama, dan S_2 , I_2 , R_2 di kota dua. Kedua kota ini diasumsikan identik, sehingga laju perubahan subpopulasi individu yang rentan (*S*), subpopulasi individu terinfeksi (*I*), dan subpopulasi individu yang sembuh (*R*) di kedua kota adalah sebagai berikut.

3.1.1 Laju perubahan subpopulasi yang rentan (*S*)

Semua individu yang sehat serta individu yang baru lahir mempunyai kemungkinan terinfeksi. Dengan parameter a adalah laju kelahiran alami dalam kota. Laju perubahan subpopulasi individu yang (*S*) berbanding lurus dengan penambahan populasi a dalam kota per satuan waktu di masing-masing kota yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dS_i}{dt} = a, \quad i = 1, 2.$$

Selain laju kelahiran, perubahan individu rentan (*S*) di pengaruhi oleh laju kematian alami. Dengan parameter b adalah laju kematian alami. Laju perubahan individu rentan (*S*) berbanding lurus dengan berkurangnya individu renatn (*S*) karena kematian alami pada waktu t di masing-masing kota yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dS_i}{dt} = -bS_i, \quad i = 1, 2.$$

Interaksi langsung antara individu yang rentan (*S*) dengan individu terinfeksi (*I*) mengakibatkan individu rentan (*S*) terinfeksi. Dengan

parameter β adalah laju penularan dalam kota yang terjadi melalui kontak langsung dengan individu terinfeksi (I). Laju perubahan individu rentan (S) di masing-masing kota berbanding lurus dengan berkurangnya individu rentan (S) yang berinteraksi langsung dengan subpopulasi individu yang terinfeksi (I) per satuan waktu di masing-masing kota sehingga

$$\frac{dS_i}{dt} = -\frac{\beta S_i I_i}{S_i + I_i + R_i}, \quad i = 1, 2.$$

Transportasi antar-dua kota menjadikan individu rentan (S) bertransportasi ke kota lain. Dengan parameter α_1 adalah laju transportasi individu antar-dua kota. Laju perubahan individu rentan (S) di masing-masing kota berbanding lurus dengan berkurangnya individu rentan (S) yang transportasi ke kota lain dan bertambahnya individu rentan (S) yang datang dari kota lain per satuan waktu di masing-masing kota, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -\alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2, \\ \frac{dS_2}{dt} &= -\alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1. \end{aligned}$$

Transportasi dan interaksi individu terinfeksi (I) mengakibatkan adanya parameter γ menyatakan laju penularan antar-dua kota. Adanya faktor transportasi dalam proses penularan penyakit antar-dua kota menghasilkan parameter $\gamma\alpha_1$ yang merupakan laju penularan melalui transportasi antar-dua kota. Laju perubahan individu rentan (S) berbanding lurus dengan berkurangnya individu rentan (S) karena berinteraksi langsung dengan individu terinfeksi (I) dan individu rentan (S) dari kota lain per satuan waktu di masing-masing kota, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -\frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2}, \\ \frac{dS_2}{dt} &= -\frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1}. \end{aligned}$$

individu terinfeksi (I) dapat sembuh menjadi individu sembuh (R). Dengan parameter α_2 adalah laju perubahan individu sembuh (R) kembali menjadi individu sembuh (S). Laju perubahan individu

rentan (S) di masing-masing kota berbanding lurus dengan individu sembuh (R) per satuan waktu di masing-masing kota, sehingga

$$\frac{dS_i}{dt} = \alpha_2 R_i, \quad i = 1, 2.$$

Dari uraian tersebut maka perubahan laju subpopulasi individu yang rentan adalah

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1} - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \frac{\gamma \alpha_2 S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2} + \alpha_2 R_1, \\ \frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2} - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1} + \alpha_2 R_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi (I)

Adanya interaksi individu rentan (S) dengan individu terinfeksi (I) menjadikan individu terinfeksi (I) bertambah. Dengan parameter β adalah laju penularan dalam kota yang terjadi melalui kontak langsung dengan individu terinfeksi (I). Laju perubahan individu terinfeksi (I) berbanding lurus dengan jumlah individu rentan (S) yang berinteraksi individu yang terinfeksi (I) pada masing-masing kota, sehingga

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{\beta S_i I_i}{S_i + I_i + R_i}, \quad i = 1, 2.$$

individu yang terinfeksi (I) bertransportasi antar-dua kota dan berinteraksi langsung sehingga terdapat parameter $\gamma \alpha_1$ yang menyatakan laju penularan antar-dua kota melalui kontak langsung individu rentan (S) dan individu (I) dari kota lain. Laju perubahan subpopulasi individu terinfeksi (I) berbanding lurus dengan bertambahnya subpopulasi individu yang terinfeksi (I) karena berinteraksi langsung dengan subpopulasi individu yang terinfeksi (I) dan subpopulasi individu yang rentan (S) dari kota lain per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2},$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1}$$

Perubahan laju subpopulasi individu yang terinfeksi (I) juga dipengaruhi oleh kematian alami. Dengan parameter b adalah laju kematian alami. Laju perubahan individu terinfeksi (I) berbanding lurus dengan berkurangnya individu terinfeksi (I) karena kematian alami pada waktu t di masing-masing kota yang dinyatakan sebagai

$$\frac{dI_i}{dt} = -bI_i, \quad i = 1, 2.$$

Akibat adanya individu terinfeksi (I) menjadi individu sembuh (R). Parameter d adalah laju perubahan individu yang terinfeksi (I) menjadi subpopulasi individu (R). Laju perubahan yang individu terinfeksi (I) di masing-masing kota berbanding lurus dengan berkurangnya individu terinfeksi (I) yang berubah menjadi individu sembuh (R), yaitu

$$\frac{dI_i}{dt} = -dI_i, \quad i = 1, 2.$$

Adanya individu terinfeksi (I) transportasi ke kota lain terdapat parameter α_1 yang menyatakan laju transportasi individu antar-dua kota. Laju perubahan subpopulasi individu terinfeksi (I) di masing-masing kota berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi individu yang terinfeksi (I) yang transportasi ke kota lain dan bertambahnya subpopulasi individu yang terinfeksi (I) yang datang dari kota lain per satuan waktu, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= -\alpha_1 I_1 + \alpha_1 I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= -\alpha_1 I_2 + \alpha_1 I_1, \end{aligned}$$

Dari uraian di atas maka perubahan subpopulasi individu yang terinfeksi dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1} + \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2} - (b + d + \alpha_1) I_1 + \alpha_1 I_2, \quad (3.2)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2 + 2} + \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1} - (b + d + \alpha_1) I_2 + \alpha_1 I_1.$$

3.1.3 Laju perubahan subpopulasi sembuh (R)

Individu (I) akan menjadi individu (R) dengan laju d . Laju perubahan individu sembuh (R) pada waktu t berbanding lurus dengan bertambahnya individu terinfeksi (I) yang mengalami perubahan, sehingga

$$\frac{dR_i}{dt} = dR_i, \quad i = 1, 2.$$

Perubahan laju individu sembuh (R) juga dipengaruhi oleh kematian alami. Dengan parameter b adalah laju kematian alami. Laju perubahan sembuh (R) di masing-masing kota berbanding lurus dengan berkurangnya individu sembuh (R) yang mengalami kematian alami per satuan waktu, yaitu

$$\frac{dR_i}{dt} = -bR_i, \quad i = 1, 2.$$

Akibat adanya individu sembuh (R) dapat menjadi individu rentan (S). Parameter α_2 adalah laju perubahan individu sembuh (R) menjadi individu rentan (S). Laju perubahan individu sembuh (R) di masing-masing kota berbanding lurus dengan berkurangnya individu sembuh (R) per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dR_i}{dt} = -\alpha_2 R_i, \quad i = 1, 2.$$

Adanya individu sembuh (R) bertransportasi ke kota lain sehingga terdapat parameter α_1 yang menyatakan laju transportasi individu antar-dua kota. Laju perubahan individu sembuh (R) di masing-masing kota berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi individu sembuh (R) yang transportasi ke kota lain dan bertambahnya subpopulasi individu sembuh (R) yang datang dari kota lain per satuan waktu, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dt} &= -\alpha_1 R_1 + \alpha_1 R_2, \\ \frac{dR_2}{dt} &= -\alpha_1 R_2 + \alpha_1 R_1,\end{aligned}$$

Dari uraian tersebut laju perubahan subpopulasi individu sembuh dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dt} &= dR_1 - (b + \alpha_2 + \alpha_1)R_1 + \alpha_1 R_2, \\ \frac{dR_2}{dt} &= dR_2 - (b + \alpha_2 + \alpha_1)R_2 + \alpha_1 R_1.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Dari persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3) didapatkan sistem persamaan otonomus nonliear

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} + \alpha_2 R_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} + \alpha_2 R_2 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} + \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} - (b + d + \alpha_1)I_1 + \alpha_1 I_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} + \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} - (b + d + \alpha_1)I_2 + \alpha_1 I_1 \\ \frac{dR_1}{dt} &= dR_1 - (b + \alpha_2 + \alpha_1)R_1 + \alpha_1 R_2 \\ \frac{dR_2}{dt} &= dR_2 - (b + \alpha_2 + \alpha_1)R_2 + \alpha_1 R_1\end{aligned}\quad (3.4)$$

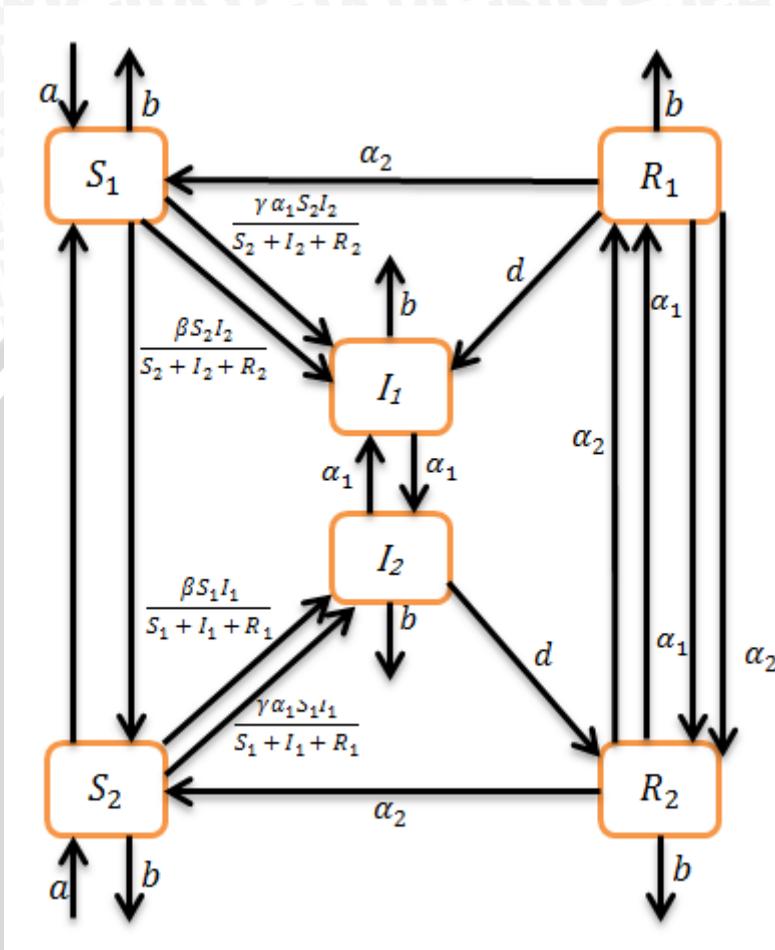
dengan

- S_i : banyaknya subpopulasi individu (S) di kota i pada waktu t ($i = 1, 2$),
- I_i : banyaknya subpopulasi individu (I) di kota i pada waktu t ($i = 1, 2$),
- R_i : banyaknya subpopulasi individu (R) di kota i pada waktu t ($i = 1, 2$),
- a : laju kelahiran,
- b : laju kematian alami,

- d : laju perubahan subpopulasi (I) menjadi subpopulasi (R),
 α_2 : laju subpopulasi (R) yang kembali menjadi subpopulasi individu yang rentan (S)
 α_1 : laju transportasi,
 β : laju penularan dalam kota,
 γ : laju penularan antar kota,
 $\gamma\alpha_1$: laju penularan transportasi antar-dua kota,
 $\frac{\beta S_j I_j}{S_j + I_j + E_j}$: *incidencerate* (jumlah kasus infeksi baru per satuan waktu) dalam kota j ($j = 1,2$),
 $\frac{\gamma\alpha S_j I_j}{S_j + I_j + E_j}$: *incidencerate* (jumlah kasus infeksi baru per satuan waktu) dari kota j ke kota i ($j = 1,2$).

Skema perpindahan dari kompartemen-kompartemen dalam model *SIRS* dalam persamaan (3.4) secara skematis dijelaskan pada Gambar 3.1.





Gambar 3.1 Diagram kompartemen model SIRS.

Model SIRS ini menjelaskan bahwa individu *infective* berpindah dari satu kota ke kota lain, sehingga terjadi interaksi atau kontak langsung dengan individu *susceptible* dalam satu kota yang akan berpengaruh pada jumlah individu *susceptible* dan *remove* dalam satu kota yang sama maupun kota yang berlainan. Karena populasi selalu bernilai positif, maka $S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2 \geq 0$.

3.2 Titik Kesetimbangan

Berdasarkan definisi, titik kesetimbangan dari sistem persamaan (3.4) diperoleh ketika $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Pada model ini diasumsikan kedua kota identik sehingga $S_1 = S_2 = S$, $I_1 = I_2 = I$, $R_1 = R_2 = R$, $-\alpha S_1 + \alpha S_2 = 0$, $-\alpha I_1 + \alpha I_2 = 0$, $-\alpha R_1 + \alpha R_2 = 0$, dan

$$\frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1} = \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2},$$

sehingga diperoleh

$$S = a - bS - \frac{\beta SI}{N} - \frac{\gamma \alpha_1 SI}{N} + \alpha_2 R = 0, \quad (3.5)$$

$$I = \frac{\beta SI}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 SI}{N} - (b + d)I = 0, \quad (3.6)$$

$$R = dI - (b + \alpha_2)R = 0. \quad (3.7)$$

Dari persamaan (3.6) diperoleh

$$\left(\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - (b + d) \right) I = 0,$$

sehingga

$$I = 0, \text{ atau } \left(\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - (b + d) \right) = 0. \quad (3.8)$$

Jika $I = 0$ maka persamaan (3.7) menjadi

$$0 = -(b + \alpha_2)R,$$

sehingga $R = 0$. Jika hasil ini di substitusikan ke persamaan (3.5) diperoleh

$$0 = a - bS,$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit adalah

$$P^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = \left(\frac{a}{b}, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0 \right).$$

Titik kesetimbangan $P^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = \left(\frac{a}{b}, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0\right)$ menjelaskan bahwa dalam keadaan ini jumlah individu *susceptible* tetap, sedangkan jumlah individu *removed* dan *infective* bernilai nol. Hal ini menunjukkan keadaan bebas penyakit karena tidak terdapat individu *infective*, sehingga tidak ada interaksi antara individu *susceptible* dengan individu *infective*.

Selanjutnya ditentukan angka reproduksi dasar untuk menentukan titik kesetimbangan yang lain dengan diawali pembentukan matriks Jacobi untuk persamaan (3.4). Sebelum menentukan matriks Jacobi, akan ditentukan matriks k dan matriks y . Matriks tersebut diperoleh dari persamaan (3.4) yang populasinya terinfeksi yaitu *infective*. Matriks k adalah matriks yang komponen-komponennya merupakan laju dari munculnya infeksi baru yang masuk pada kompartemen, sedangkan matriks y adalah matriks yang komponen-komponennya merupakan laju dari transfer masuk atau keluar dari kompartemen satu ke lainnya. Dari $\frac{dI_1}{dt}$ dan $\frac{dI_2}{dt}$ didapatkan k_1 , k_2 dan y_1 , y_2 yang merupakan laju munculnya infeksi baru yang masuk dan laju dari transfer masuk atau keluar dari kompartemen satu ke lainnya.

Matriks k dan matriks y adalah

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} + \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} \\ \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} + \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b + d + \alpha_1)I_1 - \alpha_1 I_2 \\ (b + d + \alpha_1)I_2 - \alpha_1 I_1 \end{pmatrix}.$$

Setelah matriks k dan matriks y terbentuk, ditentukan matriks Jacobi yang didapatkan dari turunan matriks k dan matriks y terhadap individu yang terkena infeksi dan disubstitusikan ke titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_1(P^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial k_2(P^0)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial k_2(P^0)}{\partial I_2} & \frac{\partial k_1(P^0)}{\partial I_1} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(P^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial y_2(P^0)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial y_2(P^0)}{\partial I_2} & \frac{\partial y_1(P^0)}{\partial I_1} \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$K = \begin{pmatrix} \beta & \gamma\alpha_1 \\ \gamma\alpha_1 & \beta \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} b + d + \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & b + d + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Setelah mendapatkan matriks Jacobi, kemudian ditentukan matriks generasi selanjutnya yaitu

$$P = KY^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta Q + \gamma\alpha_1^2}{M} & \frac{\beta\gamma\alpha_1 + \gamma\alpha_1 Q}{M} \\ \frac{\beta\gamma\alpha_1 + \gamma\alpha_1 Q}{M} & \frac{\beta Q + \gamma\alpha_1^2}{M} \end{pmatrix}$$

dengan

$$Q = (b + d + \alpha_1)$$

$$M = (b + d)(b + d + 2\alpha_1).$$

Kemudian ditentukan nilai eigen matriks KY^{-1} yaitu

$$|KY^{-1} - I\lambda| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta Q + \gamma\alpha_1^2}{M} - \lambda & \frac{\beta\gamma\alpha_1 + \gamma\alpha_1 Q}{M} \\ \frac{\beta\gamma\alpha_1 + \gamma\alpha_1 Q}{M} & \frac{\beta Q + \gamma\alpha_1^2}{M} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dimisalkan

$$\frac{\beta Q + \gamma \alpha_1^2}{M} = C$$

$$\frac{\beta \gamma \alpha_1 + \gamma \alpha_1 Q}{M} = D,$$

sehingga diperoleh nilai eigen matriks KY^{-1} adalah

$$\begin{vmatrix} C - \lambda & D \\ D & C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(C - \lambda)^2 - D^2 = 0$$

$$((C - \lambda)^2 - D)((C - \lambda)^2 + D) = 0$$

$$\lambda_1 = C - D$$

$$\lambda_2 = C + D$$

Angka reproduksi dasar \mathcal{R}_0 adalah spectral radius matriks KY^{-1}
 $\max \{\lambda_1, \lambda_2\} = C + D.$

$$\begin{aligned} C + D &= \frac{\beta Q + \gamma \alpha_1^2}{M} + \frac{\beta \gamma \alpha_1 + \gamma \alpha_1 Q}{M} \\ &= \frac{Q(\beta + \gamma \alpha_1) + \alpha_1(\beta + \gamma \alpha_1)}{M} \\ &= \frac{(b + d + 2\alpha_1)(\beta + \gamma \alpha_1)}{(b + d)(b + d + 2\alpha_1)} \\ &= \frac{(\beta + \gamma \alpha_1)}{(b + d)}. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh angka reproduksi dasar, yaitu $\mathcal{R}_0 = \left(P = \frac{(\beta + \gamma \alpha_1)}{(b + d)} \right)$

Dari angka reproduksi dasar diperoleh

$$b + d = \frac{(\beta + \gamma \alpha_1)}{\mathcal{R}_0}. \quad (3.9)$$

Selanjutnya persamaan (3.9) disubstitusikan ke persamaan (3.8)

$$\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - \frac{(\beta + \gamma \alpha_1)}{\mathcal{R}_0} = 0$$

$$\frac{SR_0}{N} = \frac{(\beta + \gamma \alpha_1)}{(\beta + \gamma \alpha_1)}$$

$$\begin{aligned}
 S &= N \frac{1}{\mathcal{R}_0} \\
 &= \frac{I + R}{\mathcal{R}_0 - 1}.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Dari persamaan (3.5) dan (3.6) diperoleh

$$a - bS + \alpha_2 R - (b + d)I = 0,$$

dari persamaan (3.7) diketahui

$$\begin{aligned}
 dI - (b + \alpha_2)R &= 0 \\
 I &= \frac{(b + \alpha_2)R}{d},
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 a - bS + \alpha_2 R - \frac{(b + d)(b + \alpha_2)R}{d} &= 0 \\
 R(b^2 + b\alpha_2 + db + d\alpha_2) &= d(a - bS + \alpha_2 R) \\
 R(b^2 + b\alpha_2 + db) &= d(a - bS) \\
 R &= \frac{d(a - bS)}{b(b + \alpha_2 + d)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Persamaan (3.12) disubstitusikan ke persamaan (3.11)

$$\begin{aligned}
 dI - (b + \alpha_2)R &= 0 \\
 dI - (b + \alpha_2) \frac{d(a - bS)}{(b^2 + b\alpha_2 + db)} &= 0 \\
 I &= \frac{(a - bS)(b + \alpha_2)}{b(b + \alpha_2 + d)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Dari persamaan (3.10), (3.12), dan (3.13) masih memuat variabel S , sehingga persamaan (3.12) dan (3.13) disubstitusikan ke persamaan (3.10) diperoleh

$$S = \frac{(a - bS)(b + \alpha_2)}{b(b + \alpha_2 + d)} + \frac{d(a - bS)}{b(b + \alpha_2 + d)}$$

$$\frac{S\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0 - 1} = \frac{a}{b(\mathcal{R}_0 - 1)}$$

$$S = \frac{a}{b\mathcal{R}_0}. \quad (3.14)$$

Kemudian dari persamaan (3.14) disubstitusikan ke persamaan (3.12) dan (3.13) diperoleh

$$R = \frac{ad}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \quad (3.15)$$

$$I = \frac{a(b + \alpha_2)}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right). \quad (3.16)$$

Persamaan (3.10), (3.14), dan (3.15) merupakan titik kesetimbangan kedua $P^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$

$$S^* = \frac{a}{b\mathcal{R}_0},$$

$$I^* = \frac{a(b + \alpha_2)}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right),$$

$$R^* = \frac{ad}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right).$$

Titik kesetimbangan $P^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ menjelaskan pada keadaan ini terdapat individu yang terinfeksi dalam populasi. Keadaan ini disebut keadaan endemi.

Jika dilihat dari kedua titik kesetimbangan P^0 dan P^* , dapat diketahui bahwa jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan endemi negatif, dan jika $\mathcal{R}_0 = 1$ maka $P^0 = P^*$, sehingga ketika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ hanya terdapat satu titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi.

3.3 Kestabilan Titik Keseimbangan

3.3.1 Kestabilan Titik Keseimbangan P^0

Untuk mengetahui kestabilan titik keseimbangan P^0 , ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobi dari sistem (3.4),

$$JP^0 = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix},$$

dengan

$$A_1 = \begin{bmatrix} -b - \frac{(N_1\beta I_1 - \beta S_1 I_1)}{N_1^2} - \alpha_1 & -\frac{(N_1\beta S_1 - \beta S_1 I_1)}{N_1^2} & \alpha_2 \\ \frac{N_1\beta I_1 - \beta S_1 I_1}{N_1^2} & \frac{N_1\beta S_1 - \beta S_1 I_1}{N_1^2} - (b + d + \alpha_1) & 0 \\ 0 & d & -(b + d + \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -b - \frac{(N_2\beta I_2 - \beta S_2 I_2)}{N_2^2} - \alpha_1 & -\frac{(N_2\beta S_2 - \beta S_2 I_2)}{N_2^2} & \alpha_2 \\ \frac{N_2\beta I_2 - \beta S_2 I_2}{N_2^2} & \frac{N_2\beta S_2 - \beta S_2 I_2}{N_2^2} - (b + d + \alpha_1) & 0 \\ 0 & d & -(b + d + \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \frac{(\gamma\alpha_1 I_1 N_1 - \gamma\alpha_1 S_1 I_1)}{N_1^2} & -\frac{(\gamma\alpha_1 S_1 N_1 - \gamma\alpha_1 S_1 I_1)}{N_1^2} & 0 \\ \frac{(\gamma\alpha_1 I_1 N_1 - \gamma\alpha_1 S_1 I_1)}{N_1^2} & \frac{(\gamma\alpha_1 S_1 N_1 - \gamma\alpha_1 S_1 I_1)}{N_1^2} + \alpha_1 & 0 \\ 0 & d & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \frac{(\gamma\alpha_1 I_2 N_2 - \gamma\alpha_1 S_2 I_2)}{N_2^2} & -\frac{(\gamma\alpha_1 S_2 N_2 - \gamma\alpha_1 S_2 I_2)}{N_2^2} & 0 \\ \frac{(\gamma\alpha_1 I_2 N_2 - \gamma\alpha_1 S_2 I_2)}{N_2^2} & \frac{(\gamma\alpha_1 S_2 N_2 - \gamma\alpha_1 S_2 I_2)}{N_2^2} + \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Kemudian Titik kesetimbangan bebas penyakit $P^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = \left(\frac{a}{b}, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0\right)$ disubsitusikan ke dalam matriks JP^0 sehingga diperoleh

$$JP^0 = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix},$$

$$\text{dengan } A = \begin{bmatrix} -b - \alpha_1 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d + \alpha_1) & 0 \\ 0 & d & -(b + d + \alpha_2) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & \gamma\alpha_1 + \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

dengan menggunakan sifat-sifat determinan didapatkan

$$\begin{aligned} \det(JP^0 - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ B & A - \lambda I \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A + B - \lambda I & B \\ A + B - \lambda I & A - \lambda I \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A + B - \lambda I & B \\ 0 & A - B - \lambda I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh

$$\begin{aligned} \det(JP^0 - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} A + B - \lambda I & B \\ 0 & A - B - \lambda I \end{bmatrix} \\ &= \det(A + B - \lambda I) \det(A - B - \lambda I). \end{aligned}$$

sehingga nilai eigen dari matriks JP^0 dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen dari $(A + B)$ dan $(A - B)$.

$$(A + B) = \begin{bmatrix} -b & -\beta - \gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta + \gamma\alpha_1 - (b + d) & 0 \\ 0 & d & \alpha_1 - (b + d + \alpha_2) \end{bmatrix},$$

$$(A + B) - \lambda I = \begin{bmatrix} -b - \lambda & -\beta - \gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta + \gamma\alpha_1 - (b + d + \lambda) & 0 \\ 0 & d & \alpha_1 - (b + d + \alpha_2 + \lambda) \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks diperoleh dari penyelesaian $|(A + B) - \lambda I| = 0$

$$-(b + \lambda)(-\beta - \gamma\alpha_1 + b + d + \lambda)(-\alpha_1 + b + d + \alpha_2 + \lambda),$$

$$\lambda_1 = -b < 0,$$

λ_2 dan λ_3 diperoleh dari persamaan polinom berikut

$$\begin{aligned} &(-\beta - \gamma\alpha_1 + b + d + \lambda)(-\alpha_1 + b + d + \alpha_2 + \lambda) = 0 \\ &\lambda^2 + \lambda(-\beta - \gamma\alpha_1 + 2b + 2d - \alpha_1 + \alpha_2) - (\beta + \gamma\alpha_1)(-\alpha_1 + b + d + \alpha_2) \\ &+ (b + d)(-\alpha_1 + b + d + \alpha_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 + \lambda(-\beta - \gamma\alpha_1 + 2b + 2d - \alpha_1 + \alpha_2) + \left(\frac{-\beta + \gamma\alpha_1}{b+d} + \frac{b+d}{b+d}\right)(-\alpha_1 + b + d + \alpha_2)(b+d) = 0,$$

karena

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta + \gamma\alpha_1}{(b+d)},$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + \lambda(-\beta - \gamma\alpha_1 + 2b + 2d - \alpha_1 + \alpha_2) + (1 - \mathcal{R}_0)(-\alpha_1 + b + d + \alpha_2)(b+d) = 0.$$

Dari nilai eigen $(A + B)$ diperoleh

$$\lambda_1 = -b$$

$$\lambda_2 = \beta + \gamma\alpha_1 - (b + d)$$

$$\lambda_3 = \alpha_1 - (b + d + \alpha_2).$$

Untuk matriks $(A + B)$ jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ maka $\lambda_2 < 0$. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $\beta + \gamma\alpha_1 > b + d$ atau $\lambda_2 > 0$. Nilai eigen $(A + B)$ bernilai negatif atau $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

Jadi, untuk matriks $A + B$, jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ maka $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $\lambda_1, \lambda_3 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$.

$$(A - B) = \begin{bmatrix} -b - 2\alpha_1 & -\beta + \gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d) - \alpha_1(2 + \gamma) & 0 \\ 0 & d & -(b + d + \alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$(A - B) - \lambda I = \begin{bmatrix} -b - 2\alpha_1 - \lambda & -\beta + \gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d + \lambda) - \alpha_1(2 + \gamma) & 0 \\ 0 & d & -(b + d + \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda) \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks diperoleh dari $|(A - B) - \lambda I| = 0$

$$(-b - 2\alpha_1 - \lambda)(\beta - b - d - \lambda - \alpha_1(2 + \gamma))(-b - d - \alpha_1 - \alpha_2 - \lambda)$$

$$\lambda_4 = -(b + 2\alpha_1) < 0,$$

λ_5 dan λ_6 di dapat dari persamaan polinom berikut

$$(\beta - b - d - \lambda - \alpha_1(2 + \gamma))(-b - d - \alpha_1 - \alpha_2 - \lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - \gamma\alpha_1 - 2b - 2d - 3\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta - \gamma\alpha_1)(-b - d - \alpha_1 - \alpha_2) = (b + d)(-b - d - \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - \gamma\alpha_1 - 2b - 2d - 3\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\left(\frac{\beta - \gamma\alpha_1}{b+d} - \frac{b+d}{b+d}\right)(-b-d-\alpha_1-\alpha_2)(b+d) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - \gamma\alpha_1 - 2b - 2d - 3\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\left(\frac{\beta - \gamma\alpha_1}{b+d} - \frac{b+d}{b+d} + \frac{2\gamma\alpha_1}{b+d}\right)(-b-d-\alpha_1-\alpha_2)(b+d)$$

$$= \frac{2\gamma\alpha_1}{b+d}(-b-d-\alpha_1-\alpha_2)(b+d)$$

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - \gamma\alpha_1 - 2b - 2d - 3\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\left(\frac{\beta + \gamma\alpha_1}{b+d} - \frac{b+d}{b+d}\right)(-b-d-\alpha_1-\alpha_2)(b+d)$$

$$= \frac{2\gamma\alpha_1}{b+d}(-b-d-\alpha_1-\alpha_2)(b+d)$$

karena

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta + \gamma\alpha_1}{b+d},$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - \gamma\alpha_1 - 2b - 2d - 3\alpha_1 - \alpha_2) + (\mathcal{R}_0 - 1)(-b-d-\alpha_1-\alpha_2)(b+d) - \frac{2\gamma\alpha_1}{b+d}(-b-d-\alpha_1-\alpha_2)(b+d) = 0.$$

Untuk nilai eigen $A - B$ jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ maka $\alpha_1(\gamma + 2)$ atau $\lambda_5 < 0$.

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $\lambda_5 > 0$.

Jadi, untuk matriks $A - B$, jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ maka $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 < 0$, jika

$\mathcal{R}_0 > 1$ maka $\lambda_4, \lambda_6 < 0$ dan $\lambda_5 > 0$.

Dari nilai-nilai eigen matriks JP^0 yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ maka $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 < 0$ sehingga P^0 stabil, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6 < 0$ dan $\lambda_2, \lambda_5 > 0$ sehingga P^0 tidak stabil.

3.3.2 Kestabilan Titik Keseimbangan P^*

Untuk mengetahui kestabilan titik keseimbangan P^* di tentukan terlebih dahulu persamaan karakteristiknya dengan

menentukan matriks Jacobi P^* dengan cara mensubstitusikan titik kesetimbangan $P^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ ke matriks JP^* sehingga diperoleh matriks

$$JP_V^* = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix},$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I^*(I^*+R^*)}{(S^*+I^*+R^*)^2} - (b + \alpha_1) & -\frac{\beta S^*(S^*+R^*)}{(S^*+I^*+R^*)^2} & \frac{\beta S^* I^*}{(S^*+I^*+R^*)^2} + \alpha_2 \\ \frac{\beta I^*(I^*+R^*)}{(S^*+I^*+R^*)^2} & \frac{\beta S^*(S^*+R^*)}{(S^*+I^*+R^*)^2} - (b + d + \alpha_1) & -\frac{\beta S^* I^*}{(S^*+I^*+R^*)^2} \\ 0 & d & -(b + \alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k - (b + \alpha_1) & -\beta \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k & \beta \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_2 \\ \beta \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \beta \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k - (b + d + \alpha_1) & -\beta \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k - (b + \alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 & d & -(b + \alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma \alpha_1 I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \alpha_1 & -\frac{\gamma \alpha_1 S^*(S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & \frac{\gamma \alpha_1 S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\ \frac{\gamma \alpha_1 I^*(I^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} & \frac{\gamma \alpha_1 S^*(S^* + R^*)}{(S^* + I^* + R^*)^2} + \alpha_1 & -\frac{\gamma \alpha_1 S^* I^*}{(S^* + I^* + R^*)^2} \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\gamma \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k + \alpha_1 & -\gamma \alpha_1 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k & \gamma \alpha_1 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k \\ \gamma \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \gamma \alpha_1 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_1 & -\gamma \alpha_1 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{b + \alpha_1}{b + \alpha_2 + d}$$

kemudian dengan menggunakan sifat-sifat determinan didapatkan

$$\begin{aligned} \det(JP^* - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ B & A - \lambda I \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A + B - \lambda I & B \\ A + B - \lambda I & A - \lambda I \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A + B - \lambda I & B \\ 0 & A - B - \lambda I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh

$$\det(JP^* - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} A + B - \lambda I & B \\ 0 & A - B - \lambda I \end{bmatrix}$$

$$= \det(A + B - \lambda I) \det(A - B - \lambda I).$$

sehingga nilai eigen dari matriks JP^* dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen dari $(A + B)$ dan $(A - B)$.

$$(A+B) = \begin{bmatrix} -\delta_1 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k - b & -\delta_1 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k & \delta_1 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_2 \\ \delta_1 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \delta_1 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k - (b+d) & -\delta_1 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k \\ 0 & d & -(b+\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$(A-B) = \begin{bmatrix} -\delta_2 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k - (b+2\alpha_1) & -\delta_2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k & \delta_2 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_2 \\ \delta_2 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \delta_2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k - (b+d+2\alpha_1) & -\delta_2 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k \\ 0 & d & -(b+2\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}$$

dengan

$$\delta_1 = (\beta + \gamma\alpha_1)$$

$$\delta_2 = (\beta - \gamma\alpha_1).$$

Untuk menunjukkan bahwa $(A + B)$ dan $(A - B)$ mempunyai nilai eigen negatif pada $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $(A + B)$ dan $(A - B)$ harus memenuhi Lemma 2.1. Perhitungan bisa dilihat di Lampiran 1 dan Lampiran 2.

Dari hasil perhitungan pada Lampiran 1 dan Lampiran 2, terbukti jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka matriks $(A + B)$ dan $(A - B)$ memenuhi Lemma 2.1 sehingga semua nilai eigennya bernilai negatif dan dari nilai-nilai eigen dari matriks JP^* juga disimpulkan untuk $\mathcal{R}_0 > 1$, titik kesetimbangan P^* stabil.

3.3 Simulasi Numerik.

Perubahan penyakit menular model *SIRS* antar dua kota dapat diamati dengan melakukan simulasi numerik. Simulasi dibuat menggunakan software Matlab dengan metode Runge-Kutta orde empat (RK4). Listing program dari simulasi model *SIRS* dan simulasi pengaruh transportasi terdapat di Lampiran 6 dan Lampiran 7.

3.3.2 Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 < 1$.

Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ menggunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 dan dengan mengubah nilai parameter β , α_1 , dan γ untuk memperoleh nilai \mathcal{R}_0 yang berbeda. Dengan memperkecil $\beta = 0.24$, model disimulasikan ketika populasi awal kota pertama dan kota kedua adalah $(S_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), I_2(0), R_2(0)) = (2, 0.5, 4.5, 0.9, 0.75, 0)$,

(4,3,5,1,1,4,5,0), (3,1,5,0,3,0,5,4), (1,0,5,3,5,1,1,3).

Tabel 3.1 Nilai parameter untuk simulasi model *SIRS*

Parameter	Nilai
a	1
b	0.2
d	0.1
α_1	0.5
α_2	0.001
γ	0.1
β	0.26

Dari nilai parameter tersebut diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{(\beta + \gamma\alpha_1)}{b + d} = \frac{(0.24 + 0.1 * 0.5)}{0.2 + 0.1} = 0.967,$$

titik kesetimbangan $P^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = (5, 0, 0, 5, 0, 0)$, dan $P^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ dengan $S^* = 5.1724$. Dari titik kesetimbangan tersebut diketahui bahwa titik kesetimbangan endemi tidak eksis dan titik kesetimbangan bebas penyakit stabil.

Selanjutnya dengan mengubah nilai parameter $\alpha_1 = 0.3$ dan menggunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0.967$, titik kesetimbangan $P^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = (5, 0, 0, 5, 0, 0)$, dan $P^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ dengan $S^* = 5.1724$. Dari titik kesetimbangan tersebut diketahui bahwa titik kesetimbangan endemi tidak eksis dan titik kesetimbangan bebas penyakit stabil.

3.3.1 Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$.

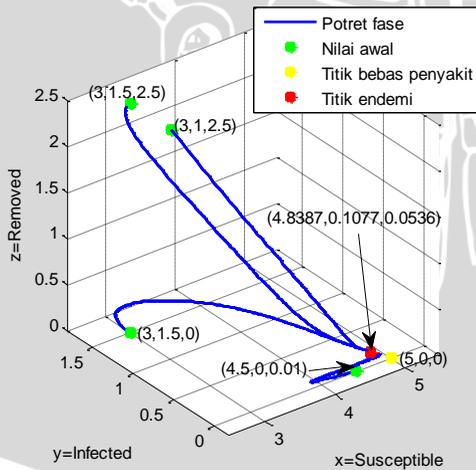
Simulasi numerik pada saat kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$, digunakan nilai parameter pada Tabel 3.1. Model *SIRS* ini disimulasikan ketika populasi awal kota pertama dan kota kedua adalah $(S_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), I_2(0), R_2(0)) = (3, 1.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5)$, $(3, 1, 2.5, 2.5, 0, 2.5)$, $(3, 1.5, 0, 2.5, 2.5, 0)$, $(4.5, 0, 0.01, 2, 0.1, 0.1)$.

Dari nilai parameter yang terdapat pada Tabel 3.1 diperoleh

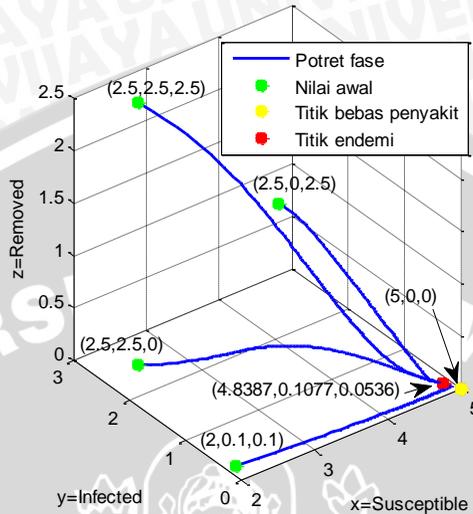
$$R_0 = \frac{(\beta + \gamma\alpha_1)}{b + d} = \frac{0.26 + (0.1 * 0.5)}{0.2 + 0.1} = 1.033,$$

titik kesetimbangan $P^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = (5, 0, 0, 5, 0, 0)$, dan $P^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ dengan $S^* = 4.8387$, $I^* = 0.1077$, dan $R^* = 0.0536$. Hasil simulasi numerik ditampilkan potret fase pada Gambar 3.2.

Berdasarkan Gambar 3.2 dapat diketahui bahwa dengan empat nilai awal yang berbeda, ketiga populasi dari masing-masing kota akan stabil menuju titik endemi $P^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ dengan $S^* = 4.8387$, $I^* = 0.1077$, dan $R^* = 0.0536$. Hal ini terbukti sama dengan perhitungan yang menunjukkan bahwa jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemi stabil sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil.



(a) Potret fase kota pertama.



(b) Potret fase kota kedua.

Gambar 3.2 Potret fase untuk $R_0 = 1.033$.

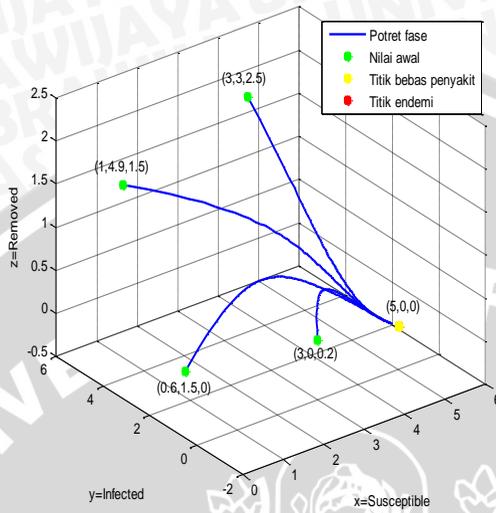
3.3.3 Simulasi Numerik untuk $\mathcal{R}_0 = 1$.

Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 = 1$ menggunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 dan memperkecil nilai $\beta = 0.25$. Model *SIR* ini disimulasikan ketika populasi awal kota pertama dan kota kedua adalah $(S_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), I_2(0), R_2(0)) = (3, 3, 2.5, 4, 4, 4), (1, 4, 9, 1.5, 2, 4.8, 3), (0.6, 1.5, 0, 0.3, 3, 1.5), (3, 0, 1.2, 1, 0, 1.5)$.

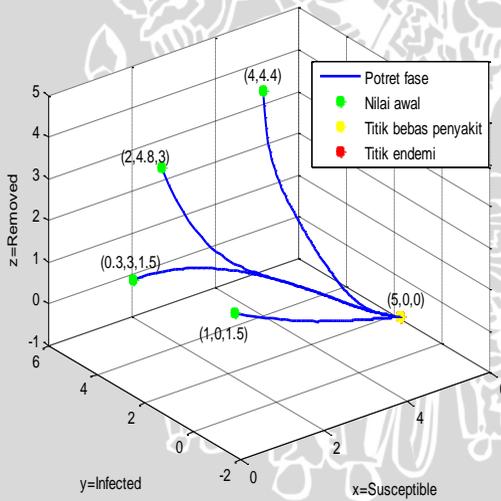
Dari nilai parameter tersebut diperoleh

$$R_0 = \frac{(\beta + \gamma\alpha_1)}{b + d} = 1,$$

dan 1 titik kesetimbangan yaitu $P^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = (5, 0, 0, 5, 0, 0)$. Hal ini ditampilkan dalam potret fase pada Gambar 3.6 yang menunjukkan terdapat satu titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Dengan 4 nilai berbeda dari kota pertama dan kota kedua menunjukkan populasi stabil saat $S = 5, I = 0$, dan $R = 0$. Hal ini juga membuktikan perhitungan untuk $\mathcal{R}_0 = 1$ terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil.



(a) Potret fase kota pertama.

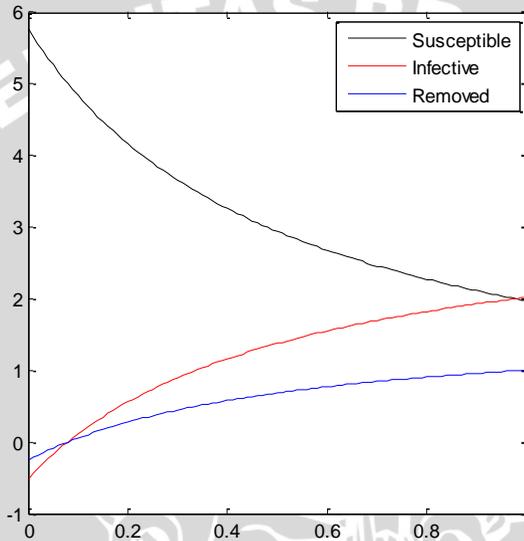


(b) Potret fase kota kedua.

Gambar 3.6 Potret fase untuk $R_0 = 1$.

3.3.4 Simulasi Numerik Pengaruh Transportasi

Pada titik kesetimbangan endemi, jika parameter γ berjalan dari 0 menuju 1, dengan nilai parameter yang lain tetap seperti Tabel 3.1, maka semakin meningkatnya γ , populasi individu *susceptible* berkurang karena semakin banyak individu terjangkit penyakit, sedangkan populasi individu *infective* dan *removed* bertambah, seperti yang ditampilkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Grafik perubahan γ terhadap populasi

Berdasarkan simulasi numerik pada model *SIRS* ini disimpulkan bahwa dinamika penyakit menular dipengaruhi laju penularan dalam kota dan faktor transportasi. Berdasarkan simulasi numerik ketika meningkatnya laju penularan antar-dua kota melalui transportasi akan membuat kasus penyebaran penyakit menular akan semakin parah. Hal tersebut menyatakan faktor transportasi berpengaruh dalam penyebaran penyakit menular.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada skripsi ini, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Model *SIRS* dengan *Transport-Related Infection* merupakan sistem persamaan differensial non linear dengan enam persamaan dan tujuh parameter.
2. Pada Model *SIRS* dengan *Transport-Related Infection* diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika angka reproduksi dasar kurang dari sama dengan satu sedangkan titik kesetimbangan endemi akan selalu stabil jika angka reproduksi dasar nilainya lebih dari satu.
3. Syarat eksistensi diketahui dan hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil analitik.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, disarankan membahas tentang kestabilan global titik kesetimbangan.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

