BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini diberikan definisi, toerema serta contoh yang menjadi acuan untuk mempermudah pembahasan mengenai ideal *c*-maksimal dari ring berhingga.

2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Pemetaan dan operasi biner merupakan dasar untuk mempelajari struktur aljabar. Definisi dan contoh diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 (Pemetaan)
Misalkan A dan B adalah dua himpunan. Relasi f dari A ke B disebut pemetaan dari A ke B, jika untuk setiap elemen x di A terdapat tunggal elemen y di B (disebut *image* dari x oleh f), sedemikian sehingga $y = f(x)$. Pemetaan dari A ke B dinotasikan

$$f: A \to B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B.$$

(Bhattacharya, dkk., 1995)

Definisi 2.1.2 (Operasi Biner)
Misalkan A adalah himpunan tak kosong. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan A adalah pemetaan dari setiap pasangan terurut $(a, b) \in A \times A$ pada $a * b \in A$. Dalam hal ini dinotasikan

$$*: A \times A \longrightarrow A$$
$$(a, b) \longmapsto * (a, b) = a * b.$$

(Fraleigh, 1994)

2.2 Grup

Grup merupakan suatu struktur aljabar dengan satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Definisi dan contoh yang terkait dengan grup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)
Misalkan S adalah himpunan tak kosong dengan satu operasi biner $*$ dinotasikan $(S,*)$. $(S,*)$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in S$ sedemikian sehingga $x * y \in S$.
(ii) Asosiatif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ sedemikian sehingga $(x * y) * z = x * (y * z)$.

(Whitelaw, 1978)

Contoh 2.2.2

Diberikan himpunan matriks $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ dengan operasi pergandaan $(\cdot)$. Maka $(M, \cdot)$ adalah semigrup.

Bukti

Ambil sebarang matriks $A, B, C \in M$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) $A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bilangan bulat memenuhi sifat tertutup terhadap pergandaan, maka $A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$.

(ii) $(A \cdot B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$=. \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 a_3 & a_2 b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, berlaku sifat asosiatif.
Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti $(M, +)$ adalah semigrup. ■

Definisi 2.2.3 (Grup)
Misalkan G adalah himpunan tak kosong dengan satu operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in G$ sedemikian sehingga $x * y \in G$.
(ii) Asosiatif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in G$ sedemikian sehingga $(x * y) * z = x * (y * z)$.
(iii) Terdapat elemen identitas yaitu $e \in G$ sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$ untuk setiap $x \in G$.
(iv) Untuk setiap $x \in G$ maka memiliki elemen invers yaitu $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

(Bhattacharya,dkk., 1995)

Contoh 2.2.4
Diberikan himpunan matriks $M = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \text{ dan } c \neq 0\}$ dengan operasi pergandaan $(\cdot)$. Jadi $(M,\cdot)$ adalah grup.

Bukti
Ambil sebarang matriks $A, B, C \in M$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, memenuhi:

(i) $$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 + 0 & 0 \\ b_1 a_2 + c_1 b_2 & 0 + c_1 c_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ b_1 a_2 + c_1 b_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix}.$$

Bilangan real memenuhi sifat tertutup terhadap penjumlahan dan pergandaan, maka $A \cdot B \in M$.

(ii) $$(A \cdot B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ b_1a_2 + c_1b_2 & c_1c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ b_1a_2a_3 + c_1b_2a_3 + c_1c_2b_3 & c_1c_2c_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2a_3 & 0 \\ b_2a_3 + c_2b_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ b_1a_2a_3 + c_1b_2a_3 + c_1c_2b_3 & c_1c_2c_3 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, berlaku Asosiatif.

(iii) Terdapat elemen satuan, yaitu $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M$ berlaku $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$.

(iv) Untuk setiap $A \in M$ memiliki invers, yaitu $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$ dengan $a, c \neq 0$ sedemikian sehingga $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = e$.

Berdasarkan (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti $(M,\cdot)$ adalah grup. ■

Definisi 2.2.5 (Grup Komutatif)
Suatu $(G,*)$ adalah grup disebut komutatif jika operasi binernya memenuhi hukum komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

(Bhattacarya,dkk., 1995)

Contoh 2.2.6
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 4, yaitu $\mathbb{Z}_4$ dengan operasi penjumlahan $(+)$. $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah grup komutatif.

Bukti

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.1 dibuktikan $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah grup komutatif.

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$**,** berdasarkan Tabel 2.1 terlihat bahwa $x + y \in \mathbb{Z}_4$.

(ii) Asosiatif, yaitu ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $x = \bar{1}$, $y = \bar{2}$, dan $z = \bar{3}$ sedemikian sehingga

$$x + (y + z) = \bar{1} + (\bar{2} + \bar{3}) = \bar{2},$$
$$(x + y) + z = (\bar{1} + \bar{2}) + \bar{3} = \bar{2}.$$

Dengan cara sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_4$.

(iii) Terdapat elemen identitas, yaitu $e = \bar{0}$ berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$.

(iv) Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_4$ mempunyai invers di $\mathbb{Z}_4$, yaitu
invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
invers $\bar{1}$ adalah $\bar{3}$ kerena $\bar{1} + \bar{3} = \bar{0}$,
invers $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$ kerena $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$,
invers $\bar{3}$ adalah $\bar{1}$ karena $\bar{3} + \bar{1} = \bar{0}$.

(v) Komutatif, yaitu ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $x = \bar{2}$ dan $y = \bar{3}$ sedemikian sehingga

$$x + y = \bar{2} + \bar{3} = \bar{1},$$
$$y + x = \bar{3} + \bar{2} = \bar{1}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$.

Berdasarkan (i), (ii), (iii), (iv), dan (v) maka $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah grup komutatif. ■

Definisi 2.2.7 (Subgrup)

Misalkan S adalah himpunan bagian tak kosong dari grup G**.** Maka S dikatakan subgrup dari G, jika S merupakan grup dengan operasi biner yang sama dengan G.

(Bhattacharya, dkk,.1995)

Contoh 2.2.8

Diberikan $\mathbb{Z}_4$ dengan operasi penjumlahan $(+)$, telah dibuktikan pada Contoh 2.2.6 bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah grup. Misalkan $S = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ maka $(S, +)$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $S = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah grup dengan operasi yang sama dengan G.

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan pada S

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 2.2 dibuktikan $(S, +)$ adalah grup.

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in S$, berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa $x + y \in S$.

(ii) Assosiatif, yaitu ambil sebarang $x, y, z \in S$. Misalkan $x = \bar{2}$, $y = \bar{0}$, dan $z = \bar{2}$ sedemikian sehingga

$$x + (y + z) = \bar{2} + (\bar{0} + \bar{2}) = \bar{0},$$
$$(x + y) + z = (\bar{2} + \bar{0}) + \bar{2} = \bar{0}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in S$.

(iii) Terdapat elemen identititas, yaitu $e = \bar{0}$ berlaku untuk setiap $x \in S$ sedemikian sehingga $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$.

(iv) Untuk setiap $x \in S$ mempunyai invers di S, yaitu
invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ kerena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
invers $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$ karena $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$.

(v) Komutatif, yaitu ambil sebarang $x, y \in S$. Misalkan $x = \bar{0}$ dan $y = \bar{2}$ sedemikan sehingga

$$x + y = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2},$$
$$y + x = \bar{2} + \bar{0} = \bar{2}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in S$.

Berdasarkan (i), (ii), (iii), (iv), dan (v) maka $(S, +)$ adalah grup. Jadi S adalah semigrup dari $\mathbb{Z}_4$. ■

Lemma 2.2.9

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan tak kosong dari G. H adalah subgrup dari G jika hanya jika untuk berlaku sebagai berikut.

(i) Untuk setiap $x, y \in H$ sedemikian sehingga $x * y \in H$.
(ii) Untuk setiap $x \in H$ memiliki invers, yaitu $x^{-1} \in H$.

(Bhattacharya, dkk,. 1995)

Bukti

(⇒) Diketahui H adalah subgrup dari G. Berdasarkan Definisi 2. 2. 7 H adalah grup sehingga untuk setiap $x, y \in H$ sedemikian sehingga $x * y \in H$ terpenuhi dan untuk setiap $x \in H$ memiliki invers, yaitu $x^{-1} \in H$ terpenuhi.

(⇐) Diketahui H tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in H$ sedemikian sehingga $x * y \in H$ dan untuk setiap $x \in H$ memiliki invers, yaitu $x^{-1} \in H$. Akan dibuktikan bahwa H adalah subgrup. Oleh karena H tidak kosong dari G maka memenuhi sifat asosiatif dan H memiliki elemen idetitas karena $x, x^{-1} \in H$ maka $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \in H$. Jadi H memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemen mempunyai invers. Jadi H adalah subgrup dari G. ■

Lemma 2.2.10

Misalkan $(G,*)$ adalah grup. H adalah himpunan bagian tak kosong dari G. H adalah subgrup dari G jika hanya jika untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y^{-1} \in H$.

Bukti

(⇒) Diketahui H adalah subgrup dari G. Akan ditunjukkan untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y^{-1} \in H$. Untuk setiap $y \in H$, berdasarkan Lemma 2.2.9 $y^{-1} \in H$ dan untuk setiap $x, y^{-1} \in H$, berdasarkan Lemma 2.2.9 berlaku $x * y^{-1} \in H$.

(⇐) Diketahui untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y^{-1} \in H$. Akan ditunjukkan H adalah subgrup dari G. Untuk $x \in H$ maka $x * x^{-1} = e \in H$ sehingga untuk $e, a \in H$ berlaku $e * x^{-1} = x^{-1} \in H$ dan untuk $e, y \in H$ berlaku $e * y^{-1} = y^{-1} \in H$. Oleh karena $x * y^{-1} \in H$ maka $x * (y^{-1})^{-1} = x * y \in H$. Berdasarkan Lemma 2.2.9 karena terpenuhi (i) dan (ii), jadi H adalah subgrup dari G. ■

2.3 Ring

Ring merupakan suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Definisi, contoh dan teorema diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 (Ring)
Misalkan R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$, dinotasikan $(R,+,\cdot)$. Maka $(R,+,\cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

1. $(R,+)$ adalah grup komutatif.
2. $(R,\cdot)$ adalah semigrup.
3. $(R,+,\cdot)$ memenuhi sifat distributif yaitu untuk setiap $x,y,z \in R$.
   i. Hukum distributif kanan, yaitu $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$.
   ii. Hukum distributitf kiri, yaitu $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$.

(Dummit dan Foote, 1999)

Contoh 2.3.2
Diberikan himpunan matriks $M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. Jadi $(M,+,\cdot)$ adalah ring.

Bukti

1. $(M,+)$ adalah grup komutatif.

   Akan ditunjukkan $(M,+)$ adalah grup komutatif. Ambil sebarang matriks $A,B,C \in M$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$ memenuhi:

   (i) $A+B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ d_1+d_2 & c_1+c_2 \end{bmatrix}$,

   kerena bilangan real memenuhi sifat tertutup terhadap penjumlahan maka $A+B \in M$,

(ii) $(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ d_1+d_2 & c_1+c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ d_1+d_2+d_3 & c_1+c_2+c_3 \end{bmatrix},$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ d_2+d_3 & c_2+c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ d_1+d_2+d_3 & c_1+c_2+c_3 \end{bmatrix},$$

oleh karena $(A+B)+C = A+(B+C)$, berlaku sifat asosiatif.

(iii) terdapat elemen satuan, yaitu $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M$ berlaku $A+e = e+A = A$,

(iv) untuk setiap $A \in M$ memiliki invers, yaitu $A^{-1} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -d & -c \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga untuk $A, A^{-1} \in M$ berlaku $A + A' = A' + A = A$,

(v) $A+B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ d_1+d_2 & c_1+c_2 \end{bmatrix}$

$B+A = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ d_2+d_1 & c_2+c_1 \end{bmatrix}$,

oleh karena bilangan bulat memenuhi sifat komutatif maka $A+B = B+A$.

2. $(M,\cdot)$ adalah semigrup.

Akan dtunjukkan $(M,\cdot)$ adalah semigrup. Ambil sebarang matriks $A, B, C \in M$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$ memenuhi:

(i) $A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1d_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ d_1a_2 + c_1d_2 & d_1b_2 + c_1c_2 \end{bmatrix}$$

oleh karena bilangan real memenuhi sifat tertutup terhadap pergandaan dan penjumlahan maka $A \cdot B \in M$,

(ii) $(A \cdot B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1d_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ d_1a_2 + c_1d_2 & d_1b_2 + c_1c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2a_3 + b_2d_3 & a_2b_3 + b_2c_3 \\ d_2a_3 + c_2d_3 & d_2b_3 + c_2c_3 \end{bmatrix},$$

maka $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ berlaku asosiatif.

3. $(M, +, \cdot)$ memenuhi sifat distributif.

(i) $(A + B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ d_1 + d_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= AC + BC$$

(ii) $A \cdot (B + C) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ d_2 + d_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= AB + AC.$$

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $(M, +, \cdot)$ adalah ring. ■

Definisi 2.3.3 (Ring Berhingga)
Misalkan R adalah ring. Jika banyaknya elemen dari ring tersebut berhingga maka disebut ring berhingga.

(Bhattacarya,dkk., 1995)

Contoh 2.3.4
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 6, yaitu $\mathbb{Z}_6$ dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. Jadi $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring.

Bukti

1. $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif.

Tabel 2.3 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	1	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{1}}$	1	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\mathbf{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 2.3 akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif.

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$, berdasarkan Tabel 2.3 terlihat bahwa $x + y \in \mathbb{Z}_6$.

(ii) Asosiatif, yaitu ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$. Misalkan $x = \bar{1}$, $y = \bar{2}$, dan $z = \bar{3}$ sedemikian sehingga

$$(x + y) + z = (\bar{1} + \bar{2}) + \bar{3} = \bar{0},$$
$$x + (y + z) = \bar{1} + (\bar{3} + \bar{3}) = \bar{0}.$$

Dengan cara sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$.

(iii) Terdapat elemen identitas yaitu $\bar{0}$ sedemikian sehingga $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$.

(iv) Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$ mempunyai invers di $\mathbb{Z}_6$, yaitu:

invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ kerena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
invers $\bar{1}$ adalah $\bar{5}$ karena $\bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$,
invers $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$ kerena $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$,
invers $\bar{3}$ adalah $\bar{3}$ karena $\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$,
invers $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$ kerena $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$,
invers $\bar{5}$ adalah $\bar{1}$ kerena $\bar{5} + \bar{1} = \bar{0}$.

(v) Komutatif, yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$, berdasarkan Tabel 2.2 memenuhi $x + y = y + x$.

Jadi terbukti $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif.

2. $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ adalah semigrup.

Tabel 2.4 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\mathbf{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasakan Tabel 2.4 akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ adalah semigrup.

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$, berdasarkan Tabel 2.3 terlihat bahwa $x \cdot y \in \mathbb{Z}_6$.

(ii) Asosiatif, yaitu ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$. Misalkan $x = \bar{1}$, $y = \bar{2}$, dan $z = \bar{3}$ sedemikian sehingga

$$(x \cdot y) \cdot z = (\bar{1} \cdot \bar{2}) \cdot \bar{3} = \bar{0},$$
$$x \cdot (y \cdot z) = \bar{1} \cdot (\bar{2} \cdot \bar{3}) = \bar{0}.$$

Dengan cara sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$.
Jadi terbukti $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ adalah semigrup.

3. $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ memenuhi sifat distributif. Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$ misalkan $x = \bar{1}, y = \bar{4}$, dan $z = \bar{2}$, berlaku:

(i) $(\bar{1} + \bar{4}) \cdot \bar{2} = \bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{4}$ dan

(ii) $\bar{1} \cdot (\bar{4} + \bar{2}) = \bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{0}$.

Dengan cara sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$.
Jadi terbukti $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ memenuhi sifat distribusi.

Berdasarkan 1,2, dan 3 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring. ■

Definisi 2.3.5 (Subring)
Misalkan S adalah himpunan bagian tak kosong dari ring R dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. S disebut subring dari ring R dinotasikan $S \leq R$ jika $(S, +, \cdot)$ merupakan ring.

(Bhattacharya,dkk., 1995)

Teorema 2.3.6
Misalkan R adalah ring dan S adalah himpunan bagian tak kosong dari R. S adalah subring dari R jika hanya jika memenuhi:
(i) untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x - y \in S$,
(ii) untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $xy \in S$.

(Judson, 2009)

Bukti
(⇒) Diketahui bahwa S adalah subring. Akan dibuktikan S adalah himpuan tak kosong dan untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x - y \in S$ dan $xy \in S$. Berdasarkan Definisi 2.3.3 terbukti bahwa setiap subring adalah ring maka memenuhi untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x - y \in S$ karena S adalah subgrup dari grup R terhadap operasi penjumlahan berdasarkan Lemma 2.2.9 dan memenuhi untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $xy \in S$ karena S bersifat tertutup terhadap pergandaan.
(⇐) Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x - y \in S$ dan $xy \in S$. Akan dibuktikan S adalah subring. Oleh karena untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x - y \in S$ sehingga S adalah subgrup dari R terhadap operasi penjumlahan berdasarkan Lemma 2.2.9. Serta karena untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $xy \in S$ sehingga S tertutup terhadap pergandaan serta S berlaku hukum distributif. Oleh karena itu, S adalah subring. ■

Contoh 2.3.7
Misalkan ring $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ dengan himpunan bagian $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Jadi T adalah subring.

Bukti

Ambil sebarang matriks $A, B \in T$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, memenuhi:

(i) Untuk setiap $A, B \in T$, berlaku

$$A - B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena bilangan real berlaku sifat tertutup terhadap penjumlahan maka $A - B = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{bmatrix} \in T$.

(ii) Untuk setiap $A, B \in T$, berlaku

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena bilangan real berlaku sifat tertutup terhadap pergandaan dan penjumlahan maka $AB = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \in T$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti T adalah subring. ∎

Definisi 2.3.8 (Ideal)
Misalkan I adalah himpunan bagian tak kosong dari ring R. I disebut ideal kiri (kanan) dari R jika memenuhi:

(i) untuk setiap $x, y \in I$ berlaku $x - y \in I$,

(ii) untuk setiap $x \in I$ dan $r \in R$ berlaku $rx \in I$ $(xr \in I)$ disebut ideal kiri (kanan).

I disebut ideal dua sisi jika memenuhi $rx = xr$. Setiap ideal dari R adalah subring dari R.

(Rotman, 2002)

Contoh 2.3.9

Diberikan ring $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ dengan himpunan bagian $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ dan $L = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Jadi K adalah ideal kanan dan L adalah ideal kiri.

Bukti

(i) Untuk setiap $A, B \in K$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ berlaku:

$$A - B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bilangan bulat memenuhi sifat tertutup terhadap penjumlahan maka $A - B = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K$. Serta untuk setiap matriks $C, D \in L$, misalkan $C = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$ berlaku:

$$C - D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ b_1 - b_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bilangan bulat memenuhi sifat tertutup terhadap penjumlahan maka $C - D = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ b_1 - b_2 & 0 \end{bmatrix} \in L$.

(ii) Untuk setiap matriks $A \in K$ dan $T \in M$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $T = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ berlaku:

$A \cdot T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 p + b_1 r & a_1 q + b_1 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, oleh karena bilangan bulat memenuhi sifat tertutup terhadap pergandaan dan penjumlahan maka $A \cdot T \in K$.

$$T \cdot C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_1 + qb_1 & 0 \\ ra_1 + sb_1 & 0 \end{bmatrix},$$ oleh karena bilangan bulat memenuhi sifat tertutup terhadap pergandaan dan penjumlahan maka $T \cdot C \in L$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti K adalah ideal kanan dan L adalah ideal kiri. ■

Definisi 2.3.10 (Ideal Maksimal)
Misalkan R adalah ring. M adalah ideal dari R disebut maksimal jika ideal $M \neq R$ dan tidak terdapat ideal I dari R sedemikian sehingga $M \subsetneq I \subsetneq R$.

(Grillet,2007)

Contoh 2.3.11
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 12, yaitu $\mathbb{Z}_{12}$ dengan ideal-idealnya yaitu $I_1 = \{\bar{0}\}$, $I_2 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$, $I_3 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, $I_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, $I_5 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $I_6 = \mathbb{Z}_{12}$. Maka I_3 dan I_5 adalah ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{12}$.
Bukti
Ditunjukkan bahwa I_3 dan I_5 adalah ideal maksimal. Oleh karena $I_3 \neq \mathbb{Z}_{12}$ dan $I_5 \neq \mathbb{Z}_{12}$ serta tidak ada ideal M dari R sedemikian sehingga $I_3 \subsetneq M \subsetneq \mathbb{Z}_{12}$ dan $I_5 \subsetneq M \subsetneq \mathbb{Z}_{12}$. Maka I_3 dan I_5 adalah ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{12}$. ■

Definisi 2.3.12 ($\boldsymbol{H_R}$)
Misalkan R adalah ring. Dan H adalah ideal dari R. Maka H_R adalah ideal maksimal dari R yang termuat di H. H_R dinotasikan juga sebagai $Core_R(H)$.

(Tashtoush dan Jawarneh, 2011)

Contoh 2.3.13
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo sepuluh, yaitu $\mathbb{Z}_{10}$ adalah ring. dengan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{10}$. Maka $H_R = Core_R(H) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah ideal maksimal yang termuat di H. ■

Definisi 2.3.14 (Ring Faktor)
Misalkan R adalah ring dengan I adalah ideal dari R. R/I adalah $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ \ldots\}$, dengan $\bar{a} = a + I, \bar{b} = b + I, \bar{c} = c + I$, dan seterusnya dengan $a, b, c \ \in R$ dengan operasi sebagai berikut.

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$
$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Maka R/I dengan operasi di atas merpakan ring dan disebut ring faktor.

(Bhattacarya, dkk., 1995)

Contoh 2.3.15
Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 8, yaitu Z_8 adalah ring dan $I = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_8$, maka elemen-elemen $\mathbb{Z}_8/I = \{I, \bar{1} + I, \bar{2} + I, \bar{3} + I\}$.

Bukti
Ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_8/I = \{I, \bar{1} + I, \bar{2} + I, \bar{3} + I\}$.
$\bar{0} + I = \{\bar{0}, \bar{4}\} = I,$
$\bar{1} + I = \{\bar{1}, \bar{5}\},$
$\bar{2} + I = \{\bar{2}, \bar{6}\},$
$\bar{3} + I = \{\bar{3}, \bar{7}\},$
$\bar{4} + I = \{\bar{4}, \bar{0}\} = I,$
$\bar{5} + I = \{\bar{5}, \bar{1}\} = I + \bar{1},$
$\bar{6} + I = \{\bar{6}, \bar{2}\} = I + \bar{2},$
$\bar{7} + I = \{\bar{7}, \bar{3}\} = I + \bar{3}.$
Jadi elemen-elemen $\mathbb{Z}_8/I = \{I, \bar{1} + I, \bar{2} + I, \bar{3} + I\}$. ■

Teorema 2.3.16 (Identitas Dedekind untuk Ring)
Misalkan R adalah ring dengan subring $A, B,$ dan C. Jika $B \leq A$, maka $A \cap BC = B(A \cap C)$.

(Tashtoush dan Jawarneh, 2011)

Bukti
Diketahui $B \leq A$. Akan dibuktikan $(A \cap BC) = B(A \cap C)$ artinya ditunjukkan bahwa

$$B(A \cap C) \subseteq (A \cap BC) \text{ dan}$$
$$(A \cap BC) \subseteq B(A \cap C).$$

(i) $B(A \cap C) \subseteq (A \cap BC)$

$B(A \cap C) = BA \cap BC$, misalkan $ba \in BA \cap BC$ artinya $ba \in BA$ dan $ba \in BC$. Pandang $ba \in BA$, karena $B \leq A$ maka $B \subseteq A$. Karena $BA = \{ba | b \in A \; dan \; a \in A\}$ dan A adalah subring, berlaku tertutup terhadap pergandaan sehingga $b \in A$ dan $a \in A$ maka $ba \in A$. Oleh karena itu $ba \in A \cap BC$. Jadi terbukti bahwa $B(A \cap C) \subseteq A \cap BC$.

(ii) $(A \cap BC) \subseteq B(A \cap C)$

Misalkan $a \in A \cap BC$ artinya $a \in A$ dan $a \in BC$. Karena $a \in BC$, maka $a = bc$ dengan $b \in B$ dan $c \in C$. Akan ditunjukkan $a = bc \in BA$. Karena $B \leq A$ maka $B \subseteq A$ artinya $b \in A$, sehingga $a = bc$ dengan $b \in A$ dan $c \in C$ maka $a \in AC$. Karena $a \in A$ dan $a \in AC$. Oleh karena itu, $a = bc$ dengan $b \in B$ dan $c \in A$ maka $a \in BA$ sehingga $BA \cap BC = B(A \cap C)$. Jadi terbukti $(A \cap BC) \subseteq B(A \cap C)$.

Berdasarkan (i) dan (ii) jadi terbukti $(A \cap BC) = B(A \cap C)$. ■

Contoh 2.3.17

Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 24, yaitu $\mathbb{Z}_{24}$ adalah ring dengan masing-masing subringnya adalah $C = \{\bar{0}, \bar{8}, \overline{16}\}$ $B = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$, $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\}$. Maka $(A \cap BC) = B(A \cap C)$.

Bukti

Berdasarkan A, B, C seperti pada Contoh 2.3.17, maka diperoleh $BC = \{\bar{0}, \bar{8}, \overline{16}\}$, $(A \cap BC) = \{\bar{0}, \bar{8}, \overline{16}\}$, $A \cap C = \{\bar{0}, \bar{8}, \overline{16}\}$ dan $B(A \cap C) = \{\bar{0}, \bar{8}, \overline{16}\}$. Jadi $(A \cap BC) = B(A \cap C)$. ■

Teorema 2.3.18

Misalkan R adalah ring. Jika A dan B adalah ideal dari R maka $A + B$ adalah ideal dari R.

(Tashtoush dan Jawarneh, 2011)

Bukti

(i) Misalkan $x, y \in A + B$ maka $x = a_1 + b_1 \in A + B$ dengan $a_1 \in A$ dan $b_1 \in B$ dan $y = a_2 + b_2 \in A + B$ dengan $a_2 \in A$ dan $b_2 \in B$, sehingga

$$\begin{aligned} x - y &= (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in A + B \end{aligned}$$

dengan $(a_1 - a_2) \in A$ dan $(b_1 - b_2) \in B$. Jadi $x - y \in A + B$.

(ii) Misalkan $x \in A + B$ maka $x = a_1 + b_1 \in A + B$ dan $r \in R$ sehingga untuk $rx = r(a_1 + b_1) = ra_1 + rb_1 \in A + B$ dan $xr = (a_1 + b_1)r = a_1r + b_1r \in A + B$ dengan $a_1r, ra_1 \in A$ karena A adalah ideal dan $b_1r, rb_1 \in B$ karena B adalah ideal. Oleh karena itu xr dan $rx \in A + B$.

Berdasarkan (i) dan (ii) maka $A + B$ adalah ideal dari R. ■

Contoh 2.3.19

Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 12, yaitu $\mathbb{Z}_{12}$ adalah ring. A_i dengan $i = 1, \ldots, 5$ adalah setiap ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$, yaitu $A_1 = \{\overline{0}\}$, $A_2 = \{\overline{0}, \overline{6}\}$, $A_3 = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$, $A_4 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$, $A_5 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$. Jadiaka $A_i + A_i$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Bukti

Tabel 2.5 Penjumlahan antara Ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$

$+$	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_3}$	$\boldsymbol{A_4}$	$\boldsymbol{A_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_3}$	$\boldsymbol{A_4}$	$\boldsymbol{A_5}$
$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_5}$	$\boldsymbol{A_4}$	$\boldsymbol{A_5}$
$\boldsymbol{A_3}$	$\boldsymbol{A_3}$	$\boldsymbol{A_5}$	$\boldsymbol{A_3}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\boldsymbol{A_5}$
$\boldsymbol{A_4}$	$\boldsymbol{A_4}$	$\boldsymbol{A_4}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\boldsymbol{A_4}$	$\mathbb{Z}_{12}$
$\boldsymbol{A_5}$	$\boldsymbol{A_5}$	$\boldsymbol{A_5}$	$\boldsymbol{A_5}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\boldsymbol{A_5}$

Pada Tabel 2.5 terlihat bahwa hasil penjumlahan antara ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$.

(i) Ambil sebarang $x, y \in A_i + A_i$. Misalkan $x = \overline{4}$ dan $y = \overline{0}$ pada A_5A_3 berlaku $x - y = \overline{4} + \overline{0} = \overline{4} \in A_5 + B_3$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in A_i + A_i$.

(ii) Ambil sebarang $x \in A_i + A_i$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$. Misalkan $x = \overline{3}$ pada $A_4 + A_4$ dan $r = \overline{4}$ berlaku $xr = \overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{0} \in A_4 + A_4$ dan $rx = \overline{4} \cdot \overline{3} = \overline{0} \in A_4 + A_4$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x \in A_i + A_i$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti $A_i + A_i$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$. ■

Teorema 2.3.20

Misalkan R adalah ring dengan subring A. Jika B adalah ideal dari R maka $A \cap B$ adalah ideal dari A.

(Tashtoush dan Jawarneh, 2011)

Bukti

(i) Misalkan $x, y \in A \cap B$ artinya $x, y \in A$ dan $x, y \in B$ berlaku $x - y \in A$ dan $x - y \in B$, sehingga $x - y \in A \cap B$.

(ii) Misalkan $x \in A \cap B$ artinya $x \in A$ dan $x \in B$ dan untuk $a \in A$, berlaku $ax \in A$ dan $ax \in B$ sehingga $ax \in A \cap B$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti $A \cap B$ adalah ideal dari A. ■

Contoh 2.3.21

Misalkan himpunan bilangan bulat bodulo 12, yaitu $\mathbb{Z}_{12}$ adalah ring dengan A_i dan B_i dengan $i = 1, \ldots, 5$ adalah setiap ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$, yaitu $A_1 = \{\overline{0}\}$, $A_2 = \{\overline{0}, \overline{6}\}$, $A_3 = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$, $A_4 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$, $A_5 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$ dan $B_1 = \{\overline{0}\}$, $B_2 = \{\overline{0}, \overline{6}\}$, $B_3 = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$, $B_4 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$, $B_5 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$. Jadi $A_i \cap B_i$ adalah ideal dari A_i.

Bukti

Tabel 2.6 Irisan antara ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$

$\cap$	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$
$\boldsymbol{A_2}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}, \overline{6}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}, \overline{6}\}$	$\{\overline{0}, \overline{6}\}$
$\boldsymbol{A_3}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
$\boldsymbol{A_4}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}, \overline{6}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$	$\{\overline{0}, \overline{6}\}$
$\boldsymbol{A_5}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}, \overline{6}\}$	$\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$	$\{\overline{0}, \overline{6}\}$	$\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$

Pada Tabel 2.6 terlihat bahwa irisan antara ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$

(i) Ambil sebarang $x, y \in A_i \cap B_i$. Misalkan $x = \overline{8}$ dan $y = \overline{4}$ pada $A_3 \cap B_3$, berlaku $x - y = \overline{8} - \overline{4} = \overline{4}$. Jadi $x - y \in A_3 \cap B_3$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in A_i \cap B_i$

(ii) Ambil sebarang $x \in A_i \cap B_i$. Misalkan $x = \overline{4}$ pada $A_3 \cap B_3$ dan ambil sebarang $a \in A_5$, misalkan $a = \overline{8}$ berlaku $x \cdot a = \overline{8}$ dan $a \cdot x = \overline{8}$. Jadi $x \cdot a = a \cdot x \in A_3 \cap B_3$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x \in A_i \cap B_i$ dan $a \in A_i$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti $A_i \cap B_i$ adalah ideal dari A_i. ■

Teorema 2.3.22

Misalkan R adalah ring dengan subring H dan N serta ideal K sedemikian sehingga $K \leq H \leq R$ dan $K \leq N \leq R$. $R = H + N$ jika dan hanya jika $R/K = (H/K) + (N/K)$.

(Tashtoush dan Jawarneh,2011)

Bukti

(⇒) Diketahui $R = H + N$ sehingga $r = h + n$ dengan $r \in R$, $h \in H$, dan $n \in N$. Akan dibuktikan bahwa $R/K = (H/K) + (N/K)$ artinya akan ditunjukkan bahwa $R/K \subseteq (H/K) + (N/K)$ dan $(H/K) + (N/K) \subseteq R/K$. Ambil $r + K \in R/K$ untuk setiap $r \in R$,

$$r + K = (h + n) + K = (h + K) + (n + K) \in (H/K) + (N/K)$$

untuk setiap $h \in H$ dan $n \in N$. Disisi lain, jika $(h + K) + (n + K) \in (H/K) + (N/K)$ maka

$$(h + K) + (n + K) = (h + n) + K = r + K \in R/K$$

Jadi terbukti bahwa $R/K = (H/K) + (N/K)$.

(⇐) Diketahui $R/K = (H/K) + (N/K)$. Akan ditunjukkan bahwa $R = H + N$. Untuk setiap $r + K \in (H/K) + (N/K)$ terdapat $h \in H, n \in N$ dan $k \in K$ sedemikian sehingga $r = h + n + k$. Karena $K \leq (H \cap N)$ maka $r = h + n + n' = h + n_2$ dengan $n_2 \in N$ dan $h \in H$. Serta untuk setiap $h \in H$ maka $h \in R$ kerena $H \leq R$ dan untuk setiap $n \in N$ maka $n \in R$ karena $N \leq R$. Maka $h + n \in R$ sehingga $r = h + n$ dengan $r \in R$. Oleh karena itu, $R = H + N$. ■

Contoh 2.3.23

Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 12, yaitu $R = \mathbb{Z}_{12}$ adalah ring, dengan subring-subringnya yaitu $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dan $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$, serta ideal $K = \{\bar{0}, \bar{6}\}$. Jadi $R = H + N$ jika dan hanya jika $R/K = (H/K) + (N/K)$.

Bukti

Diketahui ring R, subring H dan N serta ideal K, maka

(⇒) $R/K = \{\bar{0} + K, \bar{1} + K, \bar{2} + K, \bar{3} + K, \bar{4} + K, \bar{5} + K\}$

$$\begin{aligned}(H/K) + (N/K) &= \{\bar{0} + K, \bar{3} + K\} + \{\bar{0} + K, \bar{2} + K, \bar{4} + K\} \\ &= \{\bar{0} + K, \bar{1} + K, \bar{2} + K, \bar{3} + K, \bar{4} + K, \bar{5} + K\} \\ &= R/K\end{aligned}$$

Jadi terbukti $R/K = (H/K) + (N/K)$.

(⇐) $R = \mathbb{Z}_{12}$

$$\begin{aligned}H + N &= \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\} \\ &= R\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa untuk $R = \mathbb{Z}_{12}$, dengan subring H dan N, serta ideal K berlaku $R = H + N$ jika dan hanya jika $R/K = (H/K) + (N/K)$. ■