BAB III
PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang definisi ideal *c*-maksimal dan teorema-teorema yang berkaitan dengan ideal *c*-maksimal. Pada bab ini semua ring didefinisikan R sebagai ring berhingga.

3.1 Ideal *c*-Maksimal

Definisi 3.1.1 (Ideal *c*-Maksimal)
Misalkan R adalah ring dengan H adalah ideal dari R. H disebut ideal *c*-maksimal jika terdapat ideal N dari R sedemikian sehingga $R = H + N$ dan $(H \cap N) \leq H_R$ dengan H_R adalah ideal maksimal dari R yang termuat di H.

(Tashtoush dan Jawarneh, 2011)

Contoh 3.1.2
Misalkan bilangan bulat modulo prima, yaitu $R = \mathbb{Z}_p$ adalah ring dengan $p = 5$, maka ideal $H = \{\bar{0}\}$ adalah ideal *c*-maksimal dari R.
Bukti

Tabel 3.1 Irisan ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_5$

$\cap$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{N}$
$\boldsymbol{H}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$
$\boldsymbol{N}$	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$	$\{\bar{0}\}$

Akan dibuktikan ideal H adalah ideal *c*-maksimal dari R. $H = \{\bar{0}\}$ adalah ideal *c*-maksimal dari R kerena terdapat ideal $N = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dari R sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} R &= H + N \\ &= \{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_5. \end{aligned}$$

Serta berdasarkan Tabel 3.1, maka $H \cap N \leq H_R$ dengan $H_R = \{\bar{0}\}$. Oleh karena itu, H adalah ideal *c*-maksimal dari R. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap p prima. ■

Contoh 3.1.3
Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 12, yaitu $R = \mathbb{Z}_{12}$ adalah ring. $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ adalah ideal *c*-maksimal dari R.

Bukti

Diketahui $R = \mathbb{Z}_{12}$ adalah ring dengan masing-masing ideal sebagai berikut. $A = \{\bar{0}\}$, $B = \{\bar{0}, \bar{6}\}$, $C = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, $N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$. Akan ditunjukkan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ adalah ideal *c*-maksimal dari R. Oleh karena terdapat $N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dari R sedemikian sehingga seperti pada Contoh 2.3.23 $R = H + N$ dan berdasarkan Tabel 2.6 dengan $H = A_5$ dan $N = B_4$, maka $(H \cap N) \leq H_R$ dengan $H_R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$. Oleh karena itu, H adalah ideal *c*-maksimal dari R. ■

3.2 Teorema-teorema Ideal *c*-Maksimal

Berikut ini adalah teorema-teorema yang berkaitan dengan ideal *c*-maksimal.

Teorema 3.2.1

Misalkan R adalah ring. Jika H adalah ideal di ring R maka H adalah ideal *c*-maksimal dari R.

(Tashtoush dan Jawarneh, 2011)

Bukti

Diketahui H adalah ideal dari R. Ditunjukkan bahwa H adalah ideal *c*-maksimal dari R. Oleh karena R adalah ideal dari dirinya sendiri maka $R = H + R$ dan $H \cap R = H \leq H_R$, sehingga H adalah ideal *c*-maksimal dari R. ■

Contoh 3.2.2

Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 18, yaitu $\mathbb{Z}_{18}$ adalah ring dan H_i adalah setiap ideal dari $\mathbb{Z}_{18}$ dengan $i = 1,..,5$, masing-masing ideal sebagai berikut $H_1 = \{\bar{0}\}$, $H_2 = \{\bar{0}, \bar{9}\}$, $H_3 = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$, $H_4 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$, $H_5 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$. Jadi H_i adalah ideal *c*-maksimal dari R.

Bukti

Tabel 3.2 Penjumlahan setiap ideal dari R dengan R

Ideal H_i	$H_i + R$
H_1	R
H_2	R
H_3	R
H_4	R
H_5	R

Tabel 3.3 Irisan setiap ideal dari R dengan R

Ideal H_i	$H_i \cap \mathbb{Z}_{18}$
H_1	$\{\bar{0}\}$
H_2	$\{\bar{0}, \bar{9}\}$
H_3	$\{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$
H_4	$\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$
H_5	$\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$

Diketahui H_i adalah setiap ideal dari R. Akan dibuktikan H_i adalah ideal *c*-maksimal dari R. Oleh karena R adalah ideal dari dirinya sendiri sehingga pada Table 3.2 terlihat bahwa $R = H_i + R$ dan berdasarkan Tabel 3.3 terlihat bahwa $H_i \cap R = H_i \leq H_R$ dengan $H_R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$. Jadi terbukti bahwa H_i adalah ideal *c*-maksimal dari R. ■

Teorema 3.2.3

Misalkan R adalah ring. H dan K adalah subring dari R. Jika H adalah ideal *c*-maksimal dari R dengan $H \leq K \leq R$, maka H adalah ideal *c*-maksimal dari K.

(Tashtoush dan Jawarneh, 2011)

Bukti

Diketahui H adalah ideal *c*-maksimal dari R. Berdasarkan Definisi 3.1.1 terdapat ideal N sedemikian sehingga $R = H + N$ dan $(H \cap N) \leq H_R$. Akan ditunjukkan H adalah ideal *c*-maksimal dari K. Oleh karena $K = K \cap R = K \cap (H + N)$, berdasarkan Teorema 2.3.16 $K = H + (K \cap N)$ dengan $(K \cap N)$ adalah ideal dari K berdasarkan Teorema 2.3.20. Serta

$$H \cap (N \cap K) = (H \cap N) \cap K$$
$$\leq H_R \cap K$$

karena H_R adalah ideal dari R, sehingga $H_R \cap K \leq H_K$. ■

Contoh 3.2.4

Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 12, yaitu $\mathbb{Z}_{12}$ adalah ring. $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ dan $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ adalah subring dari $\mathbb{Z}_{12}$. Jika H adalah ideal *c*-maksimal dari R maka H adalah ideal *c*-maksimal dari K.

Bukti

Diketahui $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ ideal *c*-maksimal dari R karena terdapat ideal $N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ adalah ideal dari R sedemikian sehingga $R = H + N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = \mathbb{Z}_{12}$ dan $H \cap N = \{\bar{0}\} \leq H_R$ dengan $H_R = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$. Akan ditunjukkan $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ adalah ideal *c*-maksimal dari K. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.2.3 diperoleh $K = H + (K \cap N) = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} + \{\bar{0}, \bar{6}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ dan $H \cap K \cap N = \{\bar{0}\} \leq H_K$ dengan $H_K = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$. Jadi terbukti bahwa H adalah ideal *c*-maksimal dari K. ■

Teorema 3.2.5

Misalkan R adalah ring. K dan H adalah masing-masing ideal dari R dimana $K \leq H$. H adalah ideal *c*-maksimal dari R jika dan hanya jika H/K adalah ideal *c*-maksimal dari R/K.

Bukti

(⇒) Diketahui H adalah ideal *c*-maksimal dari R. Maka terdapat ideal N dari R sedemikian sehingga $R = H + N$ dan $H \cap N \leq H_R$. Akan dibuktikan bahwa H/K adalah ideal *c*-maksimal dari R/K. Berdasarkan Teorema 2.3.21 maka $R/K = (H/K) + ((N + K)/K)$ dimana $N + K$ adalah ideal di R berdasarkan Teorema 2.3.17

$$H/K \cap (N + K)/K = H \cap (N + K)/K$$
$$= K + (H \cap N)/K$$
$$\leq (H/K)_{(R/K)}$$

Oleh karena itu, H/K adalah ideal *c*-maksimal R/K.

(⇐) Diketahui H/K adalah ideal *c*-maksimal dari R/K. Maka terdapat N/K dari R/K sedemikian sehingga $R/K = (H/K) + (N/K)$ dan $(H/K) \cap (N/K) \leq (H/K)_{(R/K)}$.

Akan dibuktikan H adalah ideal *c*-maksimal. Berdasarkan Teorema 2.3.21 maka $R = H + N$ dan $H \cap N \leq H_R$. Oleh karena itu, H adalah ideal *c*-maksimal dari R. ■

Contoh 3.2.6

Misalkan himpunan bilangan bulat modulo 24, yaitu $R = \mathbb{Z}_{24}$ adalah ring dengan $K = \{\bar{0}, \overline{12}\}$ dan $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$ adalah ideal dari R. Jadi H adalah ideal *c*-maksimal dari R jika dan hanya jika H/K adalah ideal *c*-maksimal dari R/K.

Bukti

Diketahui H adalah ideal *c*-maksimal dari R. Oleh karena itu, terdapat $N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}\}$ dari R sedemikian sehingga $R = H + N$ dan $H \cap N \leq H_R$ dengan $H_R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{22}\}$. Akan dibuktikan H/K adalah ideal *c*-maksimal dari R/K. Oleh karena terdapat ideal lain, yaitu $N/K = \{\bar{0} + K, \bar{3} + K, \bar{6} + K, \bar{9} + K\}$ sedemikian sehingga berlaku

$$R/K = (H/K) + (N/K)$$
$$= \{\bar{0} + K, \bar{4} + K, \bar{8} + K\} + \{\bar{0} + K, \bar{3} + K, \bar{6} + K, \bar{9} + K\}$$
$$= \{\bar{0} + K, \bar{1} + K, \bar{2} + K, \dots, \overline{11} + K\} \text{ dan}$$

$(H/K) \cap (N/K) = \{\bar{0} + K\} \leq (H/K)_{R/K}$ dengan

$(H/K)_{R/K} = \{\bar{0} + K, \bar{2} + K, \bar{4} + K, \bar{6} + K, \bar{8} + K, \overline{10} + K\}$.

Oleh karena itu, (H/K) adalah ideal *c*-maksimal dari R/K.

Sebaliknya diketahui (H/K) adalah ideal *c*-maksimal dari R/K. Oleh karena itu, terdapat $(N/K) = \{\bar{0} + K, \bar{3} + K, \bar{6} + K, \bar{9} + K\}$ dari R/K sedemikian sehingga berlaku $R/K = (H/K) + (N/K)$ dan $(H/K) \cap (N/K) \leq (H/K)_{R/K}$. Akan dibuktikan H adalah ideal *c*-maksimal dari R. Oleh karena terdapat ideal lain yaitu $N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}\}$ sedemikian sehingga berlaku

$$R = H + N$$
$$= \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}\} = \mathbb{Z}_{24} \text{ dan}$$

$(H \cap N) = \{\bar{0}, \overline{12}\} \leq H_R$ dengan $H_R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{22}\}$. Jadi terbukti bahwa H adalah ideal *c*-maksimal dari R. ■