BAB II
DASAR TEORI

Dalam penulisan skripsi ini diperlukan beberapa konsep yang harus didefinisikan terlebih dahulu untuk memudahkan dalam pembahasan mengenai sentralisator pada pemetaan 2-*torsion free* gamma ring semi prima. Adapun definisi-definisi dasar yang harus diketahui sebagai berikut.

2.1 Pemetaan dan Operasi Himpunan

Pemetaan dan operasi himpunan memiliki kaitan yang sangat erat, karena operasi pada himpunan didefinisikan sebagai suatu pemetaan. Operasi pada himpunan merupakan syarat terbentuknya struktur aljabar. Berikut diberikan definisi dari pemetaan dan operasi pada himpunan.

Definisi 2.1.1 (Pemetaan)

Misalkan A dan B adalah himpunan yang tidak kosong. Suatu relasi f dari A pada B disebut pemetaan jika untuk setiap elemen x di A terdapat dengan tunggal elemen y di B sedemikian sehingga x dalam relasi f ke y. Pemetaan dari A ke B dituliskan sebagai :

$$f: A \longrightarrow B$$

(Bhattacharya,dkk., 1994)

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dan relasi

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto f(x),$$

dengan

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 6, & x > 0 \end{cases}.$$

Maka f adalah suatu pemetaan.

Bukti.

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ terdapat dengan tunggal $f(x) \in \mathbb{Z}$. Misalkan untuk $x < 0$ maka $f(x) = -1$, untuk $x = 0$ maka $f(x) = 0$, dan untuk $x > 0$ maka $f(x) = 6$. Karena untuk setiap x anggota bilangan bulat pada domain terdapat dengan tunggal $f(x)$ di daerah kodomain. Maka terbukti bahwa f adalah suatu pemetaan.

■

Definisi 2.1.3 (Operasi biner)

Misalkan S merupakan struktur aljabar $(S,*)$. Operasi biner (*) pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S. Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi biner (*) adalah $+$,• ,⊕ ,⊗ dan sebagainya. Penulisan operasi biner pada suatu pemetaan yaitu:

$$\begin{aligned} * : S \times S &\rightarrow S \\ (a,b) &\mapsto a * b \in S. \end{aligned}$$

(Bhattacharya,dkk., 1994)

Definisi 2.1.4 (Operasi Terner/*Ternary*)

Misalkan S merupakan struktur aljabar $(S,*)$. Operasi terner/*ternary* (*) pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S \times S$ ke S. Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi terner (*) adalah $+$,• ,⊕ ,⊗ dan sebagainya. Penulisan operasi terner/*ternary* pada suatu pemetaan yaitu:

$$\begin{aligned} * : S \times S \times S &\rightarrow S \\ (a,b,c) &\mapsto a * b * c \in S. \end{aligned}$$

(Bhattacharya,dkk., 1994)

Definisi 2.1.5 (Pemetaan Aditif)

Misalkan $f: A \longrightarrow B$ adalah suatu pemetaan. Pemetaan f disebut aditif jika pemetaan tersebut mempertahankan operasi terhadap penjumlahan dan memenuhi kondisi berikut :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

untuk setiap $x,y \in A$.

(Gelbaum dan Olmsted, 1990)

2.2 Grup

Grup merupakan struktur aljabar yang sederhana karena dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut adalah definisi dan contoh yang berkaitan dengan grup.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)

Misalkan G merupakan suatu himpunan tidak kosong, dengan satu operasi biner $(*)$. Struktur aljabar $(G,*)$ disebut semigrup jika memenuhi :

i) Tertutup yaitu untuk setiap $a, b \in G$ sedemikian sehingga $a * b \in G$
ii) Assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ sedemikian sehingga $(a * b) * c = a * (b * c)$

(Howie, 1995)

Definisi 2.2.2 (Grup)

Suatu semigrup $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi :

i) Eksistensi elemen identitas, dinotasikan e yaitu terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$.
ii) Eksistensi elemen invers yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(Fraleigh dan Victor, 1994)

Contoh 2.2.3

Diberikan himpunan semua matriks bilangan bulat berukuran 2×2 yaitu $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$.
Maka himpunan $(M_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ merupakan grup.

Bukti.

Misalkan $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}.$$

$(M_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ merupakan grup jika memenuhi aksioma berikut :

i. Tertutup terhadap pergandaan.

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

Jadi untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $AB \in M_2(\mathbb{Z})$.

ii. Assosiatif terhadap pergandaan.

$$(AB\,)C =$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (ae+bg)i+(af+bh)k & (ae+bg)j+(af+bh)l \\ (ce+dg)i+(cf+dh)k & (ce+dg)j+(cf+dh)l \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei+afk+bgi+bhk & aej+afl+bgj+bhl \\ cei+cfk+dgi+dhk & cej+cfl+dgj+dhl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a(ei+fk)+b(gi+hk) & a(ej+fl)+b(gj+hl) \\ c(ei+fk)+d(gi+hk) & c(ej+fl)+d(gj+hl) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) = A(BC).$$

Jadi untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $(AB)C = A(BC)$.

iii. Terdapat elemen identitas pergandaan $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z})$ berlaku $A \bullet e = e \bullet A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers yaitu untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ maka $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dengan syarat $ad - bc \neq 0$ sedemikian sehingga berlaku $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e$.

Terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ merupakan grup.

■

Definisi 2.2.4 (Grup Komutatif)

Grup $(G,*)$ dikatakan komutatif jika untuk setiap $a, b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a$.

(Fraleigh dan Victor, 1994)

Contoh 2.2.5

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.

Bukti.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Berdasarkan Tabel 2.1 sifat grup komutatif terpenuhi, yaitu :

i. Tertutup terhadap penjumlahan
   Jelas pada Tabel 2.1 bahwa penjumlahan untuk setiap elemen $\mathbb{Z}_5$ bersifat tertutup.

ii. Assosiatif terhadap penjumlahan
   Misalkan $a = \bar{1}, b = \bar{2}, c = \bar{4}$ maka :
   $$(a + b) + c = (\bar{1} + \bar{2}) + \bar{4} = \bar{3} + \bar{4} = \bar{2},$$
   $$a + (b + c) = \bar{1} + (\bar{2} + \bar{4}) = \bar{1} + \bar{6} = \bar{2}.$$
   Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

iii. Terdapat elemen identitas terhadap penjumlahan
   Terdapat $e = \bar{0}$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{0} + a = a + \bar{0} = a$.

iv. Terdapat elemen invers terhadap penjumlahan
   Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_5$ mempunyai invers a^{-1} di $\mathbb{Z}_5$ dan berlaku $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e = \bar{0}$, yaitu:

Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ karena berlaku $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$.
Invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$ karena berlaku $\bar{1}+\bar{4}=\bar{4}+\bar{1}=\bar{0}$.
Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$ karena berlaku $\bar{2}+\bar{3}=\bar{3}+\bar{2}=\bar{0}$.
Invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$ karena berlaku $\bar{3}+\bar{2}=\bar{2}+\bar{3}=\bar{0}$.
Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$ karena berlaku $\bar{4}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{4}=\bar{0}$.

v. Komutatif terhadap penjumlahan
Misalkan $a=\bar{1}, b=\bar{4}$ maka :
$$(a+b)=(\bar{1}+\bar{4})=\bar{0},$$
$$(b+a)=(\bar{4}+\bar{1})=\bar{0}.$$
Dengan cara yang sama untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $a+b=b+a$.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_5$ merupakan grup komutatif.

■

Teorema 2.2.6 (Grup)

Misalkan G adalah suatu grup, maka

i. Untuk setiap $a \in G$ maka $(a^{-1})^{-1}=a$.
ii. Untuk setiap $a,b \in G$ maka $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

(Bhattacharya,dkk., 1994)

Bukti.

i. Ambil sebarang $a \in G$ maka terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a^{-1}a=aa^{-1}=e$

*) $aa^{-1}=e$
$(aa^{-1})(a^{-1})^{-1}=e(a^{-1})^{-1}$
$a(a^{-1}(a^{-1})^{-1})=(a^{-1})^{-1}$
$ae=(a^{-1})^{-1}$
$a=(a^{-1})^{-1}$

*) $a^{-1}a=e$
$(a^{-1})^{-1}a^{-1}a=(a^{-1})^{-1}e$
$((a^{-1})^{-1}a^{-1})a=(a^{-1})^{-1}$
$ea=(a^{-1})^{-1}$
$a=(a^{-1})^{-1}$

ii. Ambil sebarang $a,b \in G$.
Untuk membuktikan (ii), hal tersebut sama dengan menunjukkan bahwa:
$(ab)(ab)^{-1}=(ab)^{-1}ab=e$ dan
$(ab)(b^{-1}a^{-1})=(b^{-1}a^{-1})ab=e$

*) $(ab)(b^{-1}a^{-1})$

*) $(b^{-1}a^{-1})ab$

$$= a(b(b^{-1}a^{-1})) \qquad\qquad = ((b^{-1}a^{-1})a)b$$
$$= a\big((bb^{-1})(a^{-1})\big) \qquad\qquad = ((b^{-1})(a^{-1}a)b)$$
$$= a(ea^{-1}) \qquad\qquad = (b^{-1}e)b$$
$$= aa^{-1} = e \qquad\qquad = b^{-1}b = e$$

2.3 Ring

Ring merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan dan pergandaan serta memenuhi beberapa aksioma tertentu. Berikut adalah definisi dan contoh serta hal-hal yang berkaitan dengan ring.

Definisi 2.3.1 (Ring)

Misalkan R adalah suatu himpunan tidak kosong, dengan dua operasi biner. Struktur aljabar $(R,+,\bullet)$ disebut ring jika memenuhi :

1. $(R,+)$ merupakan grup komutatif.
2. $(R,\bullet)$ merupakan semigrup.
3. Bersifat distributif yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ sedemikian sehingga $(a+b)c = ac + bc$ dan $c(a+b) = ca + cb$.

(Fraleigh, 2003)

Contoh 2.3.2

Diberikan himpunan semua matriks bilangan bulat berukuran 2×2 yaitu $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$.
Maka himpunan $(M_2(\mathbb{Z}),+,\bullet)$ merupakan ring.

Bukti.

Misalkan $A,B,C \in M_2(\mathbb{Z})$ yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}.$$

1. $(M_2(\mathbb{Z}),+)$ grup komutatif.
   i. Tertutup terhadap penjumlahan.
   $$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$
   Jadi untuk setiap $A,B \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $A + B \in M_2(\mathbb{Z})$.
   ii. Assosiatif terhadap penjumlahan.

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) \\
&= A+(B+C).
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $(A+B)+C = A+(B+C)$.

iii. Terdapat elemen identitas penjumlahan $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z})$ berlaku $A + e = e + A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers yaitu untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ maka $A^{-1} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga berlaku $A + A^{-1} = A^{-1} + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e$.

v. Komutatif terhadap penjumlahan.

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = B + A.
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $A, B \in \mathbb{Z}$, berlaku $A + B = B + A$.

2. $(M_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ semigrup.

i. Tertutup terhadap pergandaan.

$$
AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})
$$

Jadi untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $AB \in M_2(\mathbb{Z})$.

ii. Assosiatif terhadap pergandaan.

$$
\begin{aligned}
(AB\,)C &= \\
&= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ae+bg)i+(af+bh)k & (ae+bg)j+(af+bh)l \\ (ce+dg)i+(cf+dh)k & (ce+dg)j+(cf+dh)l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} aei+afk+bgi+bhk & aej+afl+bgj+bhl \\ cei+cfk+dgi+dhk & cej+cfl+dgj+dhl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(ei+fk)+b(gi+hk) & a(ej+fl)+b(gj+hl) \\ c(ei+fk)+d(gi+hk) & c(ej+fl)+d(gj+hl) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) = A(BC).
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $(AB)C = A(BC)$.

3. $(M_2(\mathbb{Z}), +)$ distributif

$$
\begin{aligned}
(A+B)C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+e)i+(b+f)k & (a+e)j+(b+f)l \\ (c+g)i+(d+h)k & (c+g)j+(d+h)l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai+ei+bk+fk & aj+ej+bl+fl \\ ci+gi+dk+hk & cj+gj+dl+hl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai+bk+ei+fk & aj+bl+ej+fl \\ ci+dk+gi+hk & cj+dl+gj+hl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ai+bk & aj+bl \\ ci+dk & ci+dl \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) \\
&= AC+BC.
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $(A+B)C = AC + BC$. Analog untuk $C(A+B) = CA + CB$.

Terbukti bahwa himpunan $(M_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ adalah ring.

■

Definisi 2.3.3 (Ring dengan Elemen Identitas)

Jika terhadap pergandaan $(R, \bullet)$ memuat elemen identitas maka R disebut ring dengan elemen identitas.

(Whitelaw, 1995)

Definisi 2.3.4 (Ring Komutatif)

Jika terhadap pergandaan $(R, \bullet)$ berlaku $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap $a, b \in R$ maka R disebut ring komutatif.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.3.5

Diberikan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_5, +, \bullet)$ adalah ring dengan elemen identitas dan ring komutatif.

Bukti.

1. Sudah dijelaskan pada Contoh 2.2.5 bahwa $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.
2. $(\mathbb{Z}_5, \bullet)$

Tabel 2.2 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$

$\bullet$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	4	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.2 dapat disimpulkan :

i. Tertutup terhadap pergandaan

   Jelas pada Tabel 2.2 bahwa pergandaan untuk setiap elemen $\mathbb{Z}_5$ bersifat tertutup.

ii. Assosiatif terhadap pergandaan

Ambil $a = \bar{1}, b = \bar{3}, c = \bar{4}$ maka :

$$(ab)c = (\bar{1} \bullet \bar{3}) \bullet \bar{4} = \bar{2},$$
$$a(bc) = \bar{1} \bullet (\bar{3} \bullet \bar{4}) = \bar{2}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$, berlaku $(ab)c = a(bc)$.

iii. Terdapat elemen identitas terhadap pergandaan

Terdapat elemen identitas terhadap pergandaan yaitu $e = \bar{1}$ sedemikian sehingga berlaku $a \bullet \bar{1} = \bar{1} \bullet a = a$ untuk sebarang $a \in \mathbb{Z}_5$.

iv. Komutatif terhadap pergandaan

Ambil $a = \bar{1}, b = \bar{4}$ maka:

$$(ab) = (\bar{1} \bullet \bar{4}) = \bar{1},$$
$$(ba) = (\bar{4} \bullet \bar{1}) = \bar{1}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_5$, berlaku $ab = ba$.

3. $(\mathbb{Z}_5, +, \bullet)$ distributif

Ambil $a = \bar{1}, b = \bar{2}, c = \bar{4}$ maka :

$$a(b + c) = \bar{1}(\bar{2} + \bar{4}) = \bar{1}$$
$$(ab) + (ac) = (\bar{1} \bullet \bar{2}) + (\bar{1} \bullet \bar{4}) = \bar{1}$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$, berlaku $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

Analog untuk $(b + c)a = ba + ca$.

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_5, +, \bullet)$ merupakan ring komutatif. Berdasarkan Definisi 2.3.3, $\mathbb{Z}_5$ juga merupakan ring dengan elemen satuan.

■

2.4 Komutator

Komutator memiliki pengertian yang hampir sama dalam teori grup dan teori ring. Berikut adalah pengertian komutator dalam grup dan ring beserta contoh dan teoremanya.

Definisi 2.4.1 (Komutator pada Grup)

Misalkan G adalah grup dan $a, b \in G$. Komutator dari pasangan terurut (a, b) ditulis $[a, b]$ yaitu $aba^{-1}b^{-1}$.

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Teorema 2.4.2 (Komutator pada Grup)
Misal G adalah grup, untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku :
i. $[a, b] = e \Leftrightarrow ab = ba$
ii. $b^{-1}ab = a[a, b]$
iii. $[b, a] = [a, b]^{-1}$

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Bukti.

i. $(\Rightarrow)$ $[a, b] = e$

$aba^{-1}b^{-1}b = eb$
$aba^{-1} = b$
$aba^{-1}a = ba$
$ab = ba$

$(\Leftarrow)$ $ab = ba$

$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$
$= aba^{-1}b^{-1}$
$= bb^{-1}$
$= e$

Terbukti bahwa $[a, b] = e \Leftrightarrow ab = ba$.

ii. $b^{-1}ab = eb^{-1}ab = aa^{-1}b^{-1}ab = aaba^{-1}b^{-1} = a[a, b]$
Terbukti bahwa $b^{-1}ab = a[a, b]$.

iii. $[b, a] = bab^{-1}a^{-1}$
$= (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}(b)^{-1}(a)^{-1}$
$= (aba^{-1}b^{-1})^{-1}$
$= [a, b]^{-1}$
Terbukti bahwa $[b, a] = [a, b]^{-1}$

■

Contoh 2.4.3
Misalkan G adalah suatu grup. Elemen identitas "e" adalah komutator karena $e = [e, e] = eee^{-1}e^{-1} = e$.
Pada Teorema 2.4.2 (i) menyatakan bahwa jika G adalah grup komutatif maka komutator dari G adalah elemen identitas saja.

■

Definisi 2.4.4 (Komutator pada Ring)

Misal R adalah suatu ring. Komutator dari dua elemen a dan b di R ditulis $[a, b]$ yaitu $ab - ba$.

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Teorema 2.4.5 (Komutator pada Ring)

Misal R adalah ring, untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku :

i. $[a, a] = 0$

ii. $[a, b] = -[b, a]$

iii. $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$

iv. $[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$

v. $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$

vi. $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$

vii. $[abc, d] = ab[c, d] + a[b, d]c + [a, d]bc$

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Bukti.

i. $[a, a] = aa - aa = 0$

ii. $[a, b] = ab - ba$
$= -(ba - ab)$
$= -[b, a]$

iii. $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]]$
$= [a,(bc - cb)] + [b,(ca - ac)] + [c,(ab - ba)]$
$= (a(bc - cb) - (bc - cb)a) + (b(ca - ac) - (ca - ac)b) + (c(ab - ba) - (ab - ba)c)$
$= abc - acb - bca + cba + bca - bac - cab + acb + cab - cba - abc + bac$
$= 0$

iv. $[a + b, c] = (a + b)c - c(a + b)$
$= ac + bc - ca - cb$
$= ac - ca + bc - cb$
$= [a, c] + [b, c]$

v. $[a, bc] = abc - bca$
$= abc - bac + bac - bca$
$= (ab - ba)c + b(ac - ca)$
$= [a, b]c + b[a, c]$

vi. $[ab, c] = abc - cab$
$= abc - acb + acb - cab$
$= a(bc - cb) + (ac - ca)b$
$= a[b, c] + [a, c]b$

vii. $[abc, d] = abcd - dabc$
$= abcd - abdc + abdc - adbc + adbc - dabc$
$= ab(cd - dc) - a(bd - dc)c + (ad - da)bc$
$= ab[c, d] + a[b, d]c + [a, d]bc$

■

Contoh 2.4.6

Misalkan R adalah ring dengan elemen identitas e. Elemen identitas "e" adalah komutator karena $e = [e, e] = ee - ee = 0$.
Pada Teorema 2.4.5 (i) menyatakan bahwa jika untuk elemen pasangan terurut yang sama di R maka komutator dari elemen tersebut adalah elemen identitas terhadap penjumlahan.

■

2.5 Senter

Senter dalam suatu aljabar menjelaskan sifat komutatif dalam suatu himpunan. Dalam teori grup dan teori ring pengertian senter hampir sama. Berikut definisi dari senter dalam grup dan ring beserta contohnya.

Definisi 2.5.1 (Senter pada Grup)

Misalkan G adalah grup dengan opersai biner tertentu. $Z(G)$ merupakan senter dari grup G didefinisikan sebagai :

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}$$

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Teorema 2.5.2 (Senter)

G adalah grup abelian jika dan hanya jika $Z(G) = G$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui G adalah grup komutatif
Akan dibuktikan $Z(G) = G$,
i. $Z(G) \subseteq G$
ii. $G \subseteq Z(G)$

Bukti.

i. Ambil sebarang $z \in Z(G)$.
Maka $z * g = g * z,\ \forall g \in G$.
Karena G grup komutatif, maka $z \in G$.
Jadi terbukti bahwa $Z(G) \subseteq G$.

ii. Ambil sebarang $g \in G$.
Karena G grup komutatif maka $g'g = gg'$, untuk setiap $g' \in G$.
Karena bersifat komutatif dengan semua elemen dalam G maka $g \in Z(G)$ dan terbukti bahwa $G \subseteq Z(G)$.

($\Leftarrow$) Diketahui $Z(G) = G$.
Akan dibuktikan bahwa G adalah grup komutatif.
Untuk setiap $z \in Z(G) = G$ maka berlaku $z * g = g * z$,
$\forall g \in Z(G) = G$.
Jadi terbukti bahwa G adalah abelian.

■

Contoh 2.5.3

Diberikan grup $(\mathbb{Z}_5 - \{0\},\bullet)$. Semua elemen dari $\mathbb{Z}_5 - \{0\}$ adalah senter.

Bukti.

Dapat di lihat pada Tabel 2.2 bahwa $(\mathbb{Z}_5 - \{0\},\bullet)$ merupakan grup komutatif. Berdasarkan Teorema 2.5.2 jika G merupakan grup komutatif maka $Z(\mathbb{Z}_5 - \{0\}) = \mathbb{Z}_5 - \{0\}$.
Terbukti bahwa semua elemen dari $\mathbb{Z}_5 - \{0\}$ adalah senter.

■

Contoh 2.5.4

Diberikan $G = (M_2(\mathbb{Z}),\bullet)$ adalah grup. Maka $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ adalah elemen senter dari G yaitu $Z(G)$.

Bukti.

Dapat di lihat dari Contoh 2.2.3 bahwa $(M_2(\mathbb{Z}),\bullet)$ adalah grup. Akan dibuktikan $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \in Z(G)$. Misal $Z_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ dan $Z_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. Ambil sebarang $C \in (M_2(\mathbb{Z})$ yaitu $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{pmatrix}$.
Maka :

$$\begin{aligned} Z_1C = CZ_1 &= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} Z_2C = CZ_2 &= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk semua elemen di G. Maka terbukti bahwa $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \in Z(G)$.

■

Definisi 2.5.5 (Senter pada Ring)

Misalkan R adalah ring. $Z(R)$ merupakan senter dari ring R didefinisikan sebagai :

$$Z(R) = \{z \in R \mid zr = rz, \forall r \in R\}$$

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Contoh 2.5.6

Diberikan $(\mathbb{Z}_5, +,\bullet)$ adalah ring. Semua elemen dari $\mathbb{Z}_5$ adalah senter.

Bukti.

Telah dibuktikan pada Contoh 2.3.4 bahwa $(\mathbb{Z}_5, +,\bullet)$ adalah ring komutatif. Karena R merupakan ring komutatif maka $Z(\mathbb{Z}_5) = \mathbb{Z}_5$.
Terbukti bahwa semua elemen dari $\mathbb{Z}_5$ adalah senter.

■

Contoh 2.5.7

Diberikan $R = (M_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ adalah ring. Maka $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ adalah elemen senter dari R yaitu $Z(R)$.

Bukti.

Dapat di lihat dari Contoh 2.3.2 bahwa $(M_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ adalah ring. Akan dibuktikan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(R)$. Misal $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambil sebarang $C \in M_2(\mathbb{Z})$ yaitu $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$.
Maka :

$$\begin{aligned} Z_1C = CZ_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} Z_2C = CZ_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk semua elemen di R. Maka terbukti bahwa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(R)$.

■

2.6 Sentralisator

Konsep sentralisator pada teori grup, teori ring dan pemetaan mempunyai definisi yang sedikit berbeda. Berikut diberikan lebih jelas definisi sentralisator pada grup, ring dan pemetaan beserta contohnya.

Definisi 2.6.1 (Sentralisator pada Grup)

Misalkan G adalah suatu grup dan S adalah suatu subset dari G. $C_G(S)$ merupakan sentralisator dari S pada G didefinisikan sebagai :

$$C_G(S) = \{g \in G \mid [g, s] = e, \forall s \in S\}$$

dengan $[g,s] = gsg^{-1}s^{-1} = gs(sg)^{-1} = e$ adalah komutator.

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Contoh 2.6.2

Diberikan $G = (\mathbb{Z}_5 - \{0\},\bullet)$ adalah grup dan $S = \{1,3\}$ merupakan subset dari G. Semua elemen dari $\mathbb{Z}_5 - \{0\}$ adalah sentralisator.

Bukti.

Dapat di lihat pada Tabel 2.2 bahwa $(\mathbb{Z}_5 - \{0\},\bullet)$ merupakan grup komutatif. Karena G merupakan grup komutatif maka $C_G(S) = G$. Terbukti bahwa semua elemen dari $\mathbb{Z}_5 - \{0\}$ adalah sentralisator.

■

Definisi 2.6.3 (Sentralisator pada Ring)

Misalkan R adalah suatu ring dan Q adalah suatu subset dari R. $C_R(Q)$ merupakan sentralisator dari Q pada R.

$$C_R(Q) = \{r \in R \mid [r,q] = 0, \forall q \in Q\}$$

dengan $[r,q] = rq - qr = 0$ adalah komutator.

(Hazewinkel,dkk., 2001)

Contoh 2.6.4

Diberikan $R = (\mathbb{Z}_5, +,\bullet)$ adalah ring dan $Q = \{1,3\}$ merupakan subset dari R. Semua elemen dari $\mathbb{Z}_5$adalah sentralisator.

Bukti.

Telah dibuktikan pada Contoh 2.3.4 bahwa $(\mathbb{Z}_5, +,\bullet)$ adalah ring komutatif. Karena R merupakan ring komutatif maka $C_R(Q) = \mathbb{Z}_5$. Terbukti bahwa semua elemen dari $\mathbb{Z}_5$ adalah sentralisator.

■

Contoh 2.6.5

Diberikan $R = (M_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ adalah ring dan $K = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan subset dari R. Maka $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ adalah elemen sentralisator dari K dalam R yaitu $C_R(K)$.

Bukti.

Dapat di lihat dari Contoh 2.3.2 bahwa $(M_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ adalah ring. Akan dibuktikan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C_R(K)$. Misal $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$. Ambil sebarang $B \in K$ yaitu $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Maka :

$$\begin{aligned}
[A_1, B] &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
[A_2, B] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk semua elemen di K. Maka terbukti bahwa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C_R(K)$.

■

Definisi 2.6.5 (Sentralisator pada Pemetaan)

Misalkan R adalah suatu ring. Jika terdapat suatu pemetaan aditif yaitu :

$$\begin{aligned} T: \ & R \longrightarrow R \\ & x \longmapsto T(x) \end{aligned}$$

untuk setiap $x \in R$.

T disebut sentralisator kiri jika $T(xy) = T(x)y$ dan T disebut sentralisator kanan jika $T(xy) = xT(y)$. Jika R merupakan ring komutatif maka sentralisator kiri sama dengan sentralisator kanan.

(Vukman, 1999)

Contoh 2.6.6

Diberikan $R = (\mathbb{Z}_5, +, \bullet)$ adalah ring komutatif dan pemetaan aditif :

$$\begin{aligned} T:\ R &\longrightarrow R \\ \bar{x} &\longmapsto T(\bar{x}) \end{aligned}$$

dengan $T(\bar{x}) = \bar{2}\bar{x}$ untuk setiap $\bar{x} \in R$. Maka T adalah sentralisator.

Bukti.

Dapat dilihat dari Contoh 2.3.5 bahwa $(\mathbb{Z}_5, +, \bullet)$ adalah ring komutatif. Maka $T(\bar{x}\bar{y}) = \bar{2}\bar{x}\bar{y}$ dan $T(\bar{x})\bar{y} = \bar{2}\bar{x}\bar{y}$ disebut sentralisator kanan. Karena R adalah ring komutatif maka $\bar{x}T(\bar{y}) = \bar{x}\bar{2}\bar{y} = \bar{2}\bar{x}\bar{y}$ maka disebut sentralisator kiri. Jadi T merupakan sentralisator pada pemetaan.