BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi 2-*torsion free* gamma ring semiprima dan teorema yang digunakan dalam sentralisator pada pemetaannya.

3.1 2-*Torsion Free* Gamma Ring Semiprima

Gamma ring adalah suatu grup komutatif yang elemen-elemennya merupakan bentuk hasilkali kartesius tripel antara dua buah grup komutatif yang memenuhi kondisi tertentu. Konsep gamma ring dibahas lebih khusus menjadi 2-*torsion free* gamma ring semiprima. Berikut definisi, contoh dan beberapa hal yang terkait dengan 2-*torsion free* gamma ring semiprima.

Definisi 3.1.1 (Gamma Ring)

Misalkan M dan Γ adalah grup komutatif terhadap penjumlahan. Jika terdapat pemetaan :

$$M \times \Gamma \times M \longrightarrow M$$
$$(x, \alpha, y) \longmapsto x\alpha y$$

Sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$ memenuhi kondisi berikut :

i) $x\alpha y \in M$.

ii) $(x + y)\alpha z = x\alpha z + y\alpha z$
$x(\alpha + \beta)z = x\alpha z + x\beta z,$
$x\alpha(y + z) = x\alpha y + x\alpha z.$

iii) $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$

maka M disebut Γ-ring.

(Hoque dan Paul, 2013)

Contoh 3.1.2

Diberikan M adalah himpunan semua matriks bilangan bulat berukuran 2×2 yaitu $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ dan $\Gamma = \mathbb{Z}$. Maka himpunan $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan Γ-ring.

Bukti.

Misalkan terdapat suatu pemetaan yaitu :

$$M \times \Gamma \times M \longrightarrow M$$
$$(X, \mu, Y) \mapsto X\mu Y$$

Ambil sebarang $X, Y, Z \in M$ yaitu :

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

dan ambil sebarang $\mu, \delta \in \Gamma$, maka :

i. $X\mu Y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \mu \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \mu a & \mu b \\ \mu c & \mu d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu ae + \mu bg & \mu af + \mu bh \\ \mu ce + \mu dg & \mu cf + \mu dh \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

ii. $(X + Y)\mu Z = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \cdot \mu \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \cdot \mu \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu(a + e) & \mu(b + f) \\ \mu(c + g) & \mu(d + h) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu i(a + e) + \mu k(b + f) & \mu j(a + e) + \mu l(b + f) \\ \mu i(c + g) + \mu k(d + h) & \mu j(c + g) + \mu l(d + h) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu ia + \mu kb & \mu ja + \mu lb \\ \mu ic + \mu kd & \mu jc + \mu ld \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu ie + \mu kf & \mu je + \mu lf \\ \mu ig + \mu kh & \mu jg + \mu lh \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu a & \mu b \\ \mu c & \mu d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu e & \mu f \\ \mu g & \mu h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \mu \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \mu \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= X\mu Z + Y\mu Z,$$

$X(\mu + \delta)Z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\mu + \delta) \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (\mu + \delta)a & (\mu + \delta)b \\ (\mu + \delta)c & (\mu + \delta)d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\mu + \delta)ai + (\mu + \delta)bk & (\mu + \delta)aj + (\mu + \delta)bl \\ (\mu + \delta)ci + (\mu + \delta)dk & (\mu + \delta)cj + (\mu + \delta)dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu ai + \mu bk & \mu aj + \mu bl \\ \mu ci + \mu dk & \mu cj + \mu dl \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix}\delta ai+\delta bk & \delta aj+\delta bl\\ \delta ci+\delta dk & \delta cj+\delta dl\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mu a & \mu b\\ \mu c & \mu d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta a & \delta b\\ \delta c & \delta d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\mu\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\delta\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}$$

$$=X\mu Z+X\delta Z\ ,$$

$$X\mu(Y+Z)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\mu\cdot\left(\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\mu a & \mu b\\ \mu c & \mu d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e+i & f+j\\ g+k & h+l\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mu a(e+i)+\mu b(g+k) & \mu a(f+j)+\mu b(h+l)\\ \mu c(e+i)+\mu d(g+k) & \mu c(f+j)+\mu d(h+l)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mu ae+\mu bg & \mu af+\mu bh\\ \mu ce+\mu dd & \mu cf+\mu dh\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\mu ai+\mu bk & \mu aj+\mu bl\\ \mu ci+\mu dk & \mu cj+\mu dl\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mu a & \mu b\\ \mu c & \mu d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mu a & \mu b\\ \mu c & \mu d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\mu\cdot\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\mu\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}$$

$$=X\mu Y+X\mu Z.$$

iii. $$(X\mu Y)\delta Z=\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\mu\cdot\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\right)\cdot\delta\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}\mu a & \mu b\\ \mu c & \mu d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}\delta i & \delta j\\ \delta k & \delta l\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mu ae+\mu bg & \mu af+\mu bh\\ \mu ce+\mu dg & \mu cf+\mu dh\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\delta i & \delta j\\ \delta k & \delta l\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\mu ae+\mu bg)\delta i+(\mu af+\mu bh)\delta k & (\mu ae+\mu bg)\delta j+(\mu af+\mu bh)\delta l\\ (\mu ce+\mu dg)\delta i+(\mu cf+\mu dh)\delta k & (\mu ce+\mu dg)\delta j+(\mu cf+\mu dh)\delta l\end{bmatrix}$$

$$X\mu(Y\delta Z)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\mu\cdot\left(\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\cdot\delta\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\mu a & \mu b\\ \mu c & \mu d\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}\delta e & \delta f\\ \delta g & \delta h\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\mu a & \mu b\\ \mu c & \mu d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\delta ei+\delta fk & \delta ej+\delta fl\\ \delta gi+\delta hk & \delta gj+\delta hl\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu a(\delta ei + \delta fk) + \mu b(\delta gi + \delta hk) & \mu a(\delta ej + \delta fl) + \mu b(\delta gj + \delta hl) \\ \mu c(\delta ei + \delta fk) + \mu d(\delta gi + \delta hk) & \mu c(\delta ej + \delta fl) + \mu d(\delta gj + \delta hl \end{bmatrix}$$

Jadi $(X\mu Y)\delta Z = X\mu(Y\delta Z)$.

Terbukti bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ adalah Γ-ring.

■

Contoh 3.1.3

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 8 yaitu
$\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dan $\Gamma = \mathbb{Z}$.
Maka himpunan $\mathbb{Z}_8$ merupakan Γ-ring.

Bukti.

Misalkan terdapat suatu pemetaan yaitu :

$$M \times \Gamma \times M \longrightarrow M$$
$$(x, \alpha, y) \longmapsto x\alpha y$$

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}_8$. Misal $x = \bar{2}, y = \bar{4}, z = \bar{5}$ dan misalkan $\mu, \delta \in \Gamma$, ambil $\mu = 3, \delta = 1$ maka :

i. $x\mu y \quad = \bar{2} \cdot 3 \cdot \bar{4}$
$\qquad\qquad = \bar{0} \in \mathbb{Z}_8.$

Jadi $x\mu y \in M$.

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\mu, \delta \in \Gamma$.

ii. $(x + y)\mu z \quad = (\bar{2} + \bar{4}) \cdot 3 \cdot \bar{5}$
$\qquad\qquad\quad = \bar{6} \cdot 3 \cdot \bar{5}$
$\qquad\qquad\quad = \bar{2}$

$x\mu z + y\mu z \quad = \left(\bar{2} \cdot 3 \cdot \bar{5}\right) + (\bar{4} \cdot 3 \cdot \bar{5})$
$\qquad\qquad\quad = \bar{6} + \bar{4}$
$\qquad\qquad\quad = \bar{2}$

Jadi $(x + y)\mu z = x\mu z + y\mu z$,

$x(\mu + \delta)z = \bar{2} \cdot (3 + (1)) \cdot \bar{5}$
$\qquad\qquad = \bar{2} \cdot \bar{4} \cdot \bar{5}$
$\qquad\qquad = \bar{0}$

$x\mu z + x\delta z = \left(\bar{2} \cdot 3 \cdot \bar{5}\right) + (\bar{2} \cdot 1 \cdot \bar{5})$
$\qquad\qquad = \bar{6} + \bar{2}$
$\qquad\qquad = \bar{0}$

Jadi $x(\mu + \delta)z = x\mu z + x\delta z$,

$$
\begin{aligned}
x\mu(y+z) &= \bar{2} \cdot 3 \cdot \left(\bar{4} + \bar{5}\right) \\
&= \bar{2} \cdot 3 \cdot \bar{1} \\
&= \bar{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\mu y + x\mu z &= (\bar{2} \cdot 3 \cdot \bar{4}) + (\bar{2} \cdot 3 \cdot \bar{5}) \\
&= \bar{0} + \bar{6} \\
&= \bar{6}
\end{aligned}
$$

Jadi $x\mu(y+z) = x\mu y + x\mu z$.

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\mu, \delta \in \Gamma$.

iii. $$
\begin{aligned}
(x\mu y)\delta z &= (\bar{2} \cdot 3 \cdot \bar{4}) \cdot 1 \cdot \bar{5} \\
&= \bar{0} \cdot \bar{5} \\
&= \bar{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\mu(y\delta z) &= \bar{2} \cdot 3 \cdot (\bar{4} \cdot 1 \cdot \bar{5}) \\
&= \bar{6} \cdot \bar{4} \\
&= \bar{0}
\end{aligned}
$$

Jadi $(x\mu y)\delta z = x\mu(y\delta z)$.

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\mu, \delta \in \Gamma$.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_8$ merupakan Γ-ring.

■

Definisi 3.1.4 (Gamma Ring Prima)

Misalkan M adalah Γ-ring. M disebut prima jika $x\Gamma M\Gamma y = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$ dengan $x, y \in M$.

(Hoque dan Paul, 2013)

Contoh 3.1.5

Diberikan himpunan $M = M_2(\mathbb{Z})$ dengan $\Gamma = \mathbb{Z}$ adalah suatu Γ-ring. Tetapi M bukan Γ-ring prima.

Bukti.

Telah diketahui pada Contoh 3.1.2 bahwa himpunan M adalah suatu Γ-ring. Akan ditunjukkan bahwa M bukan merupakan Γ-ring prima. Dengan cara kontraposisi, yaitu untuk setiap $x, y \in M$ berlaku $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ maka $x\Gamma M\Gamma x \neq 0$.

Ambil $X, Y \in M$ yaitu :
$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dan ambil sembarang $\mu, \delta \in \Gamma$.
Untuk $x\Gamma M\Gamma y = \{x\mu A\delta y \mid \mu, \delta \in \Gamma \text{ dan } A \in M\}$,
jika diambil $A \in M$ yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\mu, \delta \neq 0$ maka $x\Gamma M\Gamma y \neq 0$, dan
jika diambil $A \in M$ yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\mu, \delta \neq 0$ maka $x\Gamma M\Gamma y = 0$.
Karena kontraposisi salah maka dapat disimpulkan bahwa M bukan merupakan Γ-ring prima.

■

Definisi 3.1.6 (Gamma Ring Semiprima)

Misalkan M adalah Γ-ring. M disebut semiprima jika $x\Gamma M\Gamma x = 0$ maka $x = 0$ dengan $x \in M$.

(Hoque dan Paul, 2013)

Contoh 3.1.7

Diberikan himpunan $M = M_2(\mathbb{Z})$ dengan $\Gamma = \mathbb{Z}$ adalah suatu Γ-ring. Tetapi M bukan Γ-ring semiprima.

Bukti.

Telah diketahui pada Contoh 3.1.2 bahwa himpunan M adalah suatu Γ-ring. Akan ditunjukkan bahwa M bukan merupakan Γ-ring semiprima. Dengan cara kontraposisi, yaitu untuk setiap $x \in M$ berlaku $x \neq 0$ maka $x\Gamma M\Gamma x \neq 0$.
Ambil $X \in M$ yaitu : $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dan ambil sembarang $\mu, \delta \in \Gamma$.
Untuk $x\Gamma M\Gamma x = \{x\mu A\delta x \mid \mu, \delta \in \Gamma \text{ dan } A \in M\}$,
jika diambil $A \in M$ yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\mu, \delta \neq 0$ maka $x\Gamma M\Gamma x \neq 0$, dan

jika diambil $A \in M$ yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\mu, \delta \neq 0$ maka $x\Gamma M\Gamma x = 0$.
Karena kontraposisi salah maka dapat disimpulkan bahwa M bukan merupakan Γ-ring semiprima.

■

Definisi 3.1.8 (2-*torsion free* Gamma Ring)

Misalkan M adalah Γ-ring. M adalah 2-*torsion free* jika $2x = 0$ maka $x = 0$ untuk setiap $x \in M$.

(Hoque dan Paul, 2013)

Contoh 3.1.9

Diberikan himpunan $M = \mathbb{Z}_3$ adalah suatu Γ-ring. Maka M merupakan *2-torsion free* Γ-ring.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa M merupakan *2-torsion free* Γ-ring semiprima. Dengan cara kontraposisi, yaitu untuk setiap $x \in M$ berlaku jika $x \neq 0$ maka $2x \neq 0$. Ambil $x \in \mathbb{Z}_3$, yaitu $x = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.
Untuk $x = \overline{0}$, berlaku jika $x = \overline{0}$ maka $2.\overline{0} = \overline{0}$.
Untuk $x = \overline{1}$, berlaku jika $x = \overline{1} \neq 0$ maka $2.\overline{1} = \overline{2} \neq 0$.
Untuk $x = \overline{2}$, berlaku jika $x = \overline{2} \neq 0$ maka $2.\overline{2} = \overline{1} \neq 0$.
Karena kontraposisi benar, maka dapat disimpulkan bahwa M merupakan *2-torsion free* Γ-ring.

■

Definisi 3.1.10 (Senter pada Gamma Ring)

Misalkan M adalah Γ-ring. $Z(M)$ merupakan senter dari Γ-ring M didefinisikan sebagai :

$$Z(M) = \{x \in M \mid x\alpha y = y\alpha x, \text{untuk setiap } \alpha \in \Gamma, y \in M\}$$

(Hoque dan Paul, 2013)

Contoh 3.1.11

Diberikan himpunan $M = \mathbb{Z}_8$ dan $\Gamma = \mathbb{Z}$ maka M adalah Γ-ring. Semua elemen dari $\mathbb{Z}_8$ adalah senter.

Bukti.

Telah dibuktikan pada Contoh 3.1.3 bahwa $\mathbb{Z}_8$ adalah Γ-ring. Karena M merupakan grup komutatif maka $Z(\mathbb{Z}_8) = \mathbb{Z}_8$.
Terbukti bahwa semua elemen dari $\mathbb{Z}_8$ adalah senter.

■

Contoh 3.1.12
Diberikan himpunan $M = M_2(\mathbb{Z})$ dan $\Gamma = \mathbb{Z}$ maka M adalah Γ-ring. Maka $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah elemen senter dari M yaitu $Z(M)$.

Bukti.

Telah dibuktikan pada Contoh 3.1.2 bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ adalah Γ-ring. Akan dibuktikan bahwa $Z(M)$ adalah senter. Misal $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambil sebarang $C \in M_2(\mathbb{Z})$ yaitu $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ dan $\alpha \in \Gamma$.
Maka :

$$
\begin{aligned}
Z_1 \alpha C = C \alpha Z_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
Z_2 \alpha C = C \alpha Z_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk semua elemen di M. Maka terbukti bahwa $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z(M)$.

■

Definisi 3.1.13 (Jordan Sentralisator)

Misalkan M adalah suatu Γ-ring. Jika terdapat suatu pemetaan aditif yaitu :

$$T: \ M \longrightarrow M$$
$$x\alpha x \longmapsto T(x\alpha x), \text{ untuk setiap } x \in M \text{ dan } \alpha \in \Gamma.$$

T disebut Jordan sentralisator kiri jika $T(x\alpha x) = T(x)\alpha x$ dan T disebut Jordan sentralisator kanan jika $T(x\alpha x) = x\alpha T(x)$ serta T disebut Jordan sentralisator jika $2T(x\alpha x) = T(x)\alpha x + x\alpha T(x)$. Setiap Jordan sentralisator adalah sentralisator.

(Hoque dan Paul, 2013)

Contoh 3.1.14

Diberikan $M = \mathbb{Z}_8$ dengan $\Gamma = \mathbb{Z}$ adalah Γ-ring dan pemetaan aditif:

$$T: \ M \longrightarrow M$$
$$x\alpha x \longmapsto T(x\alpha x)$$

dengan $T(x\alpha x) = \bar{2}\bar{x}\alpha\bar{x}$ untuk setiap $x \in M$. Maka T adalah Jordan sentralisator.

Bukti.

Dapat di lihat dari Contoh 3.1.3 bahwa $\mathbb{Z}_8$ adalah Γ-ring. Maka $T(x\alpha x) = \bar{2}\bar{x}\alpha x$ dan $T(x)\alpha x = \bar{2}\bar{x}\alpha x$ sehingga T disebut Jordan sentralisator kanan. Karena $x\alpha T(x) = x\alpha\bar{2}\bar{x} = \bar{2}\bar{x}\alpha x$ sehingga T disebut sentralisator kiri serta karena $2T(x\alpha x) = \bar{2}\bar{x}\alpha x$ dan $T(x)\alpha x + x\alpha T(x) = \bar{2}\bar{x}\alpha x + \bar{2}\bar{x}\alpha x = \bar{4}\bar{x}\alpha x$ maka T disebut Jordan sentralisator. Jadi M merupakan Jordan sentralisator.

■

Lemma 3.1.15

Misalkan M adalah gamma ring semiprima dengan asumsi $x\alpha y\beta z = x\beta y\alpha z$, untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Misalkan bahwa persamaan $a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta c = 0$, maka untuk setiap $x \in M$, terdapat $a, b, c \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$ berlaku $(a + c)\alpha x\beta b = 0$.

Bukti.

Subtitusi x dengan $x\beta b\alpha y$ dan substitusikan pada persamaan

$$a\alpha x\beta b + b\alpha x\beta c = 0, \quad (3.1)$$

maka diperoleh

$$a\alpha x\beta b\alpha y\beta b + b\alpha x\beta b\alpha y\beta c = 0. \quad (3.2)$$

Selanjutnya, kalikan pada sebelah kanan persamaan (3.1) dengan $\alpha y\beta b$ diperoleh

$$a\alpha x\beta b\alpha y\beta b + b\alpha x\beta c\alpha y\beta b = 0. \quad (3.3)$$

Lalu persamaan (3.2) dikurangi persamaan (3.3) menjadi

$$b\alpha x\beta(b\alpha y\beta c - c\alpha y\beta b) = 0. \quad (3.4)$$

Subtitusi x dengan $y\beta c\alpha x$ pada persamaan (3.4), diperoleh

$$b\alpha y\beta c\alpha x\beta(b\alpha y\beta c - c\alpha y\beta b) = 0, \quad (3.5)$$

selanjutnya, kalikan pada sebelah kiri persamaan (3.4) dengan $c\alpha y\beta$ diperoleh

$$c\alpha y\beta b\alpha x\beta(b\alpha y\beta c - c\alpha y\beta b) = 0. \quad (3.6)$$

Lalu persamaan (3.5) dikurangi persamaan (3.6) menjadi :

$$(b\alpha y\beta c - c\alpha y\beta b)\alpha x\beta(b\alpha y\beta c - c\alpha y\beta b) = 0,$$

sehingga didapat

$$b\alpha y\beta c = c\alpha y\beta b, \quad (3.7)$$

dengan $y \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Jadi, berdasarkan asumsi $b\alpha x\beta c$ dapat diganti dengan $c\alpha x\beta b$ pada persamaan (3.1) dan diperoleh

$$a\alpha x\beta b + c\alpha x\beta b = 0 \Leftrightarrow (a + c)\alpha x\beta b = 0.$$

■

3.2 Sifat-sifat sentralisator pada pemetaan 2-*torsion free* Gamma Ring Semiprima

Sebelum dibuktikannya teorema yang berkaitan dengan sentralisator pada pemetaan 2-*torsion free* gamma ring semiprima, perlu dibahas terlebih dahulu tentang lemma-lemma yang berkaitan dengan sentralisator pada pemetaan 2-*torsion free* gamma ring semiprima. Dengan menggunakan Teorema 2.4.5 dan asumsi :

$x\alpha y\beta z = x\beta y\alpha z$ untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$ (A)

Lemma 3.2.1

Misalkan M adalah 2-*torsion free* gamma ring semiprima dengan asumsi (A). Terdapat suatu pemetaan yang aditif :

$$T : M \longrightarrow M$$
$$x\alpha y\beta x \longmapsto T(x\alpha y\beta x), \text{ dengan}$$

$T(x\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\beta x$, untuk semua $x, y \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Maka

i) $[[T(x), x]_\alpha, x]_\beta = 0$
ii) $x\beta[T(x), x]_\alpha \gamma x = 0$
iii) $x\beta[T(x), x]_\alpha = 0$
iv) $[T(x), x]_\alpha \beta x = 0$
v) $[T(x), x]_\alpha = 0$

Bukti.

i) Subtitusi x dengan $x + z$, maka pada persamaan

$$T(x\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\beta x, \tag{3.8}$$

menjadi

$$T(x\alpha y\beta x + x\alpha y\beta z + z\alpha y\beta x + z\alpha y\beta z) =$$
$$x\alpha T(y)\beta x + x\alpha T(y)\beta z + z\alpha T(y)\beta x + z\alpha T(y)\beta z.$$

Karena M semiprima maka persamaan di atas menjadi

$$T(x\alpha y\beta z + z\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\beta z + z\alpha T(y)\beta x. \tag{3.9}$$

Kemudian ubah $y = x$ dan $z = y$ pada persamaan (3.9)

$$T(x\alpha x\beta y + y\alpha x\beta x) = x\alpha T(x)\beta y + y\alpha T(x)\beta x. \tag{3.10}$$

Subtitusi y dengan $x\alpha y\beta x$ pada persamaan (3.10) dan berdasarkan asumsi (A), diperoleh

$$T(x\alpha x\beta x\alpha y\beta x + x\alpha y\beta x\alpha x\beta x)$$
$$= x\alpha T(x)\beta x\alpha y\beta x + x\alpha y\beta x\alpha T(x)\beta x. \tag{3.11}$$

Substitusi y dengan $x\alpha x\beta y + y\alpha x\beta x$ pada persamaan (3.8),yaitu :

$$T(x\alpha(x\alpha x\beta y + y\alpha x\beta x)\beta x) = x\alpha T(x\alpha x\beta y + y\alpha x\beta x)\beta x.$$

Karena persamaan (3.10), diperoleh

$$T(x\alpha x\alpha x\beta y\beta x + x\alpha y\alpha x\beta x\beta x)$$
$$= x\alpha x\alpha T(x)\beta y\beta x + x\alpha y\alpha T(x)\beta x\beta x. \tag{3.12}$$

Dengan asumsi (A) gabungkan persamaan (3.11) dengan persamaan (3.12) menjadi :

$$x\alpha[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x - x\alpha y\beta[T(x),x]_\alpha\beta x = 0. \qquad (3.13)$$

Gunakan persamaan (3.7) dan sifat komutator pada persamaan di atas, sehingga :

$\Leftrightarrow x\alpha T(x)\alpha x\beta y\beta x - x\alpha x\alpha T(x)\beta y\beta x - x\alpha[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha y\beta T(x)\alpha x\beta x - x\alpha y\beta x\alpha T(x)\beta x - x\alpha[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x = 0$

$\Leftrightarrow T(x)\alpha x\beta x\alpha y\beta x - x\alpha T(x)\beta x\alpha y\beta x - x\alpha[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x = 0$

$\Leftrightarrow (T(x)\alpha x - x\alpha T(x))\beta x\alpha y\beta x - x\alpha[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x = 0$

$\Leftrightarrow [T(x),x]_\alpha\beta x\alpha y\beta x - x\beta[T(x),x]_\alpha\alpha y\beta x = 0$

$\Leftrightarrow ([T(x),x]_\alpha\beta x - x\beta[T(x),x]_\alpha)\alpha y\beta x = 0$

$\Leftrightarrow [[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\beta x = 0. \qquad (3.14)$

Subtitusi y dengan $y\alpha[T(x),x]_\alpha$ pada persamaan (3.14), diperoleh :

$$[[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\alpha[T(x),x]_\alpha\beta x = 0. \qquad (3.15)$$

Lalu persamaan (3.14) kalikan kanan dengan $\alpha[T(x),x]_\alpha$, yaitu:

$$[[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\beta x\alpha[T(x),x]_\alpha = 0. \qquad (3.16)$$

Kemudian persamaan (3.15) dikurangi persamaan (3.16), diperoleh :

$\Leftrightarrow [[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\alpha[T(x),x]_\alpha\beta x -$
$\qquad [[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\beta x\alpha[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\alpha[T(x),x]_\alpha\beta x -$
$\qquad [[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\alpha x\beta[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\alpha([T(x),x]_\alpha\beta x - x\beta[T(x),x]_\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow [[T(x),x]_\alpha,x]_\beta\alpha y\alpha[[T(x),x]_\alpha,x]_\beta = 0. \qquad (3.17)$

Karena M semiprima maka persamaan (3.17) menjadi :

$$[[T(x),x]_\alpha,x]_\beta = 0. \qquad (3.18)$$

■

ii) Dari persamaan (3.18) dapat dituliskan atas 2 variabel yaitu x dan y, menjadi :

$$[[T(x),x]_\alpha,y]_\beta + [[T(x),y]_\alpha,x]_\beta + [[T(y),x]_\alpha,y]_\beta + [[T(y),x]_\alpha,x]_\beta + [[T(x),y]_\alpha,y]_\beta + [[T(y),y]_\alpha,x]_\beta = 0. \qquad (3.19)$$

Subtitusi x dengan $-x$ pada persamaan diatas, didapatkan

$$[[T(x),x]_\alpha,y]_\beta+[[T(x),y]_\alpha,x]_\beta-[[T(y),x]_\alpha,y]_\beta+[[T(y),x]_\alpha,x]_\beta-[[T(x),y]_\alpha,y]_\beta-[[T(y),y]_\alpha,x]_\beta=0. \quad (3.20)$$

Jumlahkan persamaan (3.19) dan (3.20) di atas menjadi

$$2[[T(x),x]_\alpha,y]_\beta+2[[T(x),y]_\alpha,x]_\beta+2[[T(y),x]_\alpha,x]_\beta=0,$$

sehingga

$$[[T(x),x]_\alpha,y]_\beta+[[T(x),y]_\alpha,x]_\beta+[[T(y),x]_\alpha,x]_\beta=0. \quad (3.21)$$

Subtitusi y dengan $x\beta y\gamma x$ pada persamaan (3.21) dan gunakan persamaan (3.8), (3.18), (3.21), asumsi (A) dan Teorema 2.4.5 (vi), diperoleh

$$\Leftrightarrow [[T(x),x]_\alpha,x\beta y\gamma x]_\beta+[[T(x),x\beta y\gamma x]_\alpha,x]_\beta+[[x\beta T(y)\gamma x,x]_\alpha,x]_\beta=0$$

$$\Leftrightarrow [T(x),x]_\alpha\beta x\beta y\gamma x-x\beta y\gamma x\beta[T(x),x]_\alpha+[[T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x+x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x+x\beta y\gamma[T(x),x]_\alpha,x]_\beta+[(x\beta T(y)\gamma x\alpha x-x\alpha x\beta T(y)\gamma x),x]_\beta=0$$

$$\Leftrightarrow x\beta[T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x-x\beta y\beta x\gamma[T(x),x]_\alpha+([T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x+x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x+x\beta y\gamma[T(x),x]_\alpha)\beta x-x\beta([T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x+x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x+x\beta y\gamma[T(x),x]_\alpha)+[(x\beta T(y)\alpha x\gamma x-x\beta x\alpha T(y)\gamma x),x]_\beta=0$$

$$\Leftrightarrow x\beta[T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x-x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha\gamma x+[T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x\beta x+x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x\beta x+x\beta y\gamma[T(x),x]_\alpha\beta x-x\beta[T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x-x\beta x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x-x\beta x\beta y\gamma[T(x),x]_\alpha+[x\beta[T(y),x]_\alpha\gamma x,x]_\beta=0$$

$$\Leftrightarrow x\beta[[T(x),x]_\alpha,y]_\beta\gamma x+([T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x\beta x-x\beta[T(x),x]_\alpha\beta y\gamma x)+(x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x\beta x-x\beta x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x)+(x\beta y\gamma[T(x),x]_\alpha\beta x-x\beta x\beta y\gamma[T(x),x]_\alpha)+(x\beta[T(y),x]_\alpha\gamma x\beta x-x\beta x\beta[T(y),x]_\alpha\gamma x)=0$$

$\Leftrightarrow x\beta[[T(x),x]_\alpha,y]_\beta\gamma x + ([T(x),x]_\alpha\beta y\beta x\gamma x - [T(x),x]_\alpha\beta x\beta y\gamma x) + (x\beta[T(x),y]_\alpha\beta x\gamma x - x\beta x\beta[T(x),y]_\alpha\gamma x) + (x\gamma y\beta x\beta[T(x),x]_\alpha - x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha) + (x\beta[T(y),x]_\alpha\beta x\gamma x - x\beta x\beta[T(y),x]_\alpha\gamma x) = 0$

$\Leftrightarrow x\beta[[T(x),x]_\alpha,y]_\beta\gamma x + [T(x),x]_\alpha\beta[y,x]_\beta\gamma x + x\beta[[T(x),y]_\alpha,x]_\beta\gamma x + x\gamma[y,x]_\beta\beta[T(x),x]_\alpha + x\beta[[T(y),x]_\alpha,x]_\beta\gamma x = 0$

$\Leftrightarrow x\beta([[T(x),x]_\alpha,y]_\beta + [[T(x),y]_\alpha,x]_\beta + [[T(y),x]_\alpha,x]_\beta)\gamma x + [T(x),x]_\alpha\beta[y,x]_\beta\gamma x + x\gamma[y,x]_\beta\beta[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [T(x),x]_\alpha\beta[y,x]_\beta\gamma x + x\gamma[y,x]_\beta\beta[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [T(x),x]_\alpha\beta y\beta x\gamma x - [T(x),x]_\alpha\beta x\beta y\gamma x + x\gamma y\beta x\beta[T(x),x]_\alpha - x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0,$ (3.22)

maka dapat ditulis sebagai berikut :

$$[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x\gamma x - x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha + x\gamma y\beta x\beta[T(x),x]_\alpha - [T(x),x]_\alpha\beta x\beta y\gamma x = 0,$$

untuk setiap $x,y \in M$ dan $\alpha,\beta \in \Gamma$, dengan persamaan (3.13) dapat dituliskan persamaan (3.22) menjadi :

$\Leftrightarrow [T(x),x]_\alpha\beta y\beta x\gamma x - x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha + x\gamma[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x - [T(x),x]_\alpha\beta x\gamma y\beta x = 0$

$\Leftrightarrow [T(x),x]_\alpha\beta y\beta x\gamma x - x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha + x\gamma[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x - x\gamma y\beta[T(x),x]_\alpha\beta x = 0,$

sehingga didapatkan :

$$[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x\gamma x - x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0.$$

Kemudian persamaan di atas kalikan kiri dengan $x\beta$, menjadi :

$$x\beta[T(x),x]_\alpha\beta y\beta x\gamma x - x\beta x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0.$$

Menurut asumsi (A) dan persamaan (3.13), maka persamaan di atas dapat di ganti $x\beta[T(x),x]_\alpha\beta y$ dengan $x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha$ diperoleh sebagai berikut :

$$x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha\beta x\gamma x - x\beta x\beta x\gamma y\beta[T(x),x]_\alpha = 0. \quad (3.23)$$

Kalikan kiri persamaan (3.23) dengan $T(x)\alpha$ diperoleh

$$T(x)\alpha x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha\beta x\gamma x - T(x)\alpha x\beta x\beta x\gamma y\beta[T(x),x]_\alpha = 0. \quad (3.24)$$

Subtitusi y dengan $T(x)\alpha y$ pada persamaan (3.23)

$$x\beta T(x)\alpha y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x$$
$$-x\beta x\beta x\gamma T(x)\alpha y\beta[T(x),x]_\alpha = 0. \qquad (3.25)$$

Lalu persamaan (3.24) dikurangi persamaan (3.25), didapatkan:

$\Leftrightarrow x\beta T(x)\alpha y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x - x\beta x\beta x\gamma T(x)\alpha y\beta[T(x),x]_\alpha -$
$T(x)\alpha x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x +$
$T(x)\alpha x\beta x\beta x\gamma y\beta[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow x\beta T(x)\alpha y\beta x\gamma x\beta[T(x),x]_\alpha - x\beta T(x)\alpha x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha -$
$x\alpha T(x)\beta y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x +$
$T(x)\alpha x\beta y\beta x\gamma x\beta[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow x\beta x\gamma x\alpha T(x)\beta y\beta[T(x),x]_\alpha - T(x)\alpha x\beta x\gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha -$
$x\alpha T(x)\beta y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x +$
$T(x)\alpha x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x = 0$

$\Leftrightarrow -[T(x),x\beta x\gamma x]_\alpha \beta y\beta[T(x),x]_\alpha +$
$[T(x),x]_\alpha \beta y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x = 0.$

Kemudian kalikan -1 pada masing-masing ruas, didapatkan

$$[T(x),x\beta x\gamma x]_\alpha \beta y\beta[T(x),x]_\alpha -$$
$$[T(x),x]_\alpha \beta y\beta[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x = 0.$$

Dari persamaan di atas dan Lemma 3.1.15, maka

$$([T(x),x\beta x\gamma x]_\alpha - [T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x)\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0$$

Berdasarkan Teorema 2.4.5 (vi) persamaan di atas dapat diturunkan menjadi :

$\Leftrightarrow ([T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x + x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x + x\beta x\gamma[T(x),x]_\alpha -$
$[T(x),x]_\alpha \beta x\gamma x)\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow (x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x + x\beta x\gamma[T(x),x]_\alpha)\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0.$

Pada Lemma 3.2.1 (i) dapat dituliskan $[T(x),x]_\alpha \gamma x$ menjadi $x\gamma[T(x),x]_\alpha$, yang berarti $x\beta x\gamma[T(x),x]_\alpha$ dapat di ganti dengan $x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x$ pada persamaan di atas. Sehingga :

$\Leftrightarrow (x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x + x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x)\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow 2x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0.$

Karena M adalah $2-$*torsion free* maka :

$$x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x\beta y\beta[T(x),x]_\alpha = 0.$$

Kemudian persamaan di atas kalikan kanan dengan γx dan Subtitusi y dengan $y\beta x$ diperoleh :

$$x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x\beta y\beta x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x = 0.$$

Karena M semiprima, maka

$$x\beta[T(x),x]_\alpha \gamma x = 0. \qquad (3.26)$$

■

iii) Subtitusi y dengan $y\alpha x$ pada persamaan (3.13), karena persamaan (3.26) diperoleh :

$\Leftrightarrow x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha x\beta x - x\alpha y\alpha x\beta[T(x),x]_\alpha \beta x = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha x\beta x = 0.$ (3.27)

Subtitusi y dengan $y\alpha T(x)$ pada persaman (3.27) diperoleh

$$x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha T(x)\alpha x\beta x = 0. \quad (3.28)$$

Kalikan kanan pada persamaan (3.27) dengan $\alpha T(x)$,

$$x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha x\beta x\alpha T(x) = 0. \quad (3.29)$$

Lalu persamaan (3.28) dikurangi persamaan (3.29), diperoleh :

$\Leftrightarrow x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha T(x)\alpha x\beta x -$
$x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha x\beta x\alpha T(x) = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha\big(T(x)\alpha x\beta x - x\beta x\alpha T(x)\big) = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha[T(x),x\beta x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha[T(x),x]_\alpha \beta y\alpha([T(x),x]_\alpha \beta x + x\beta[T(x),x]_\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow x\beta[T(x),x]_\alpha \alpha y\alpha([T(x),x]_\alpha \beta x + x\beta[T(x),x]_\alpha) = 0.$

Berdasarkan persamaan (3.26), persamaan di atas dapat diturunkan menjadi :

$$x\beta[T(x),x]_\alpha \alpha y\alpha x\beta[T(x),x]_\alpha = 0,$$

untuk setiap $x, y \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Karena M semiprima, maka

$$x\beta[T(x),x]_\alpha = 0. \quad (3.30)$$

■

iv) Dari persamaan (3.18) dan persamaan (3.30) didapatkan

$$[T(x),x]_\alpha \beta x = 0 \quad (3.31)$$

untuk setiap $x \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$.

■

v) Dengan cara yang sama seperti persamaan (3.21) maka persamaan (3.31) dapat dituliskan atas 2 variabel x dan y sebagai berikut :

$$[T(x),x]_\alpha \beta y + [T(x),y]_\alpha \beta x + [T(y),x]_\alpha \beta x = 0.$$

Kemudian persamaan di atas kalikan kanan dengan $\beta[T(x),x]_\alpha$ diperoleh :

$$[T(x),x]_\alpha \beta y\beta[T(x),x]_\alpha + [T(x),y]_\alpha \beta x\beta[T(x),x]_\alpha + [T(y),x]_\alpha \beta x\beta[T(x),x]_\alpha = 0.$$

Karena persamaan (3.30) yaitu $x\beta[T(x), x]_\alpha = 0$ maka didapatkan

$$[T(x), x]_\alpha \beta y \beta [T(x), x]_\alpha = 0$$

maka

$$[T(x), x]_\alpha = 0. \tag{3.32}$$

■

Lemma 3.2.2

Misalkan M adalah gamma ring dengan asumsi (A). Terdapat suatu pemetaan yang aditif :

$$T : M \longrightarrow M$$
$$x\alpha y\beta x \longmapsto T(x\alpha y\beta x), \text{ dengan}$$

$T(x\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\beta x$, untuk semua $x, y \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Maka

$$x\alpha\big(T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y)\big)\beta x = 0 \tag{3.33}$$

Bukti.

Subtitusikan $y = x\alpha y + y\alpha x$ pada persamaan (3.8) maka

$\Leftrightarrow T(x\alpha(x\alpha y + y\alpha x\,)\beta x) = x\alpha T(x\alpha y + y\alpha x\,)\beta x$

$\Leftrightarrow T(x\alpha x\alpha y\beta x + x\alpha y\alpha x\beta x) = x\alpha T(x\alpha y + y\alpha x)\beta x.$ (3.34)

Selanjutnya, misalkan $z = x\alpha x$ pada persamaan (3.9)

$$T(x\alpha y\beta x\alpha x + x\alpha x\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\alpha x\beta x + x\alpha x\alpha T(y)\beta x$$

dapat dituliskan :

$T(x\alpha y\alpha x\beta x + x\alpha x\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\alpha x\beta x + x\alpha x\alpha T(y)\beta x.$ (3.35)

Dengan menggabungkan persamaan (3.34) dengan persamaan (3.35), didapatkan :

$\Leftrightarrow x\alpha T(x\alpha y + y\alpha x)\beta x = x\alpha T(y)\alpha x\beta x + x\alpha x\alpha T(y)\beta x$

$\Leftrightarrow x\alpha(T(x\alpha y + y\alpha x))\beta x = x\alpha(T(y)\alpha x + x\alpha T(y))\beta x$

$\Leftrightarrow x\alpha\big(T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y)\big)\beta x = 0.$

■

Misalkan $G_\alpha(x, y) = T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y)$.

Maka, jelas bahwa $x\alpha G_\alpha(x, y)\beta x = 0$ dan $G_\alpha(x, y) = G_\alpha(y, x)$.

Dapat dibuktikan juga untuk persamaan berikut:

i) $$\begin{aligned} G_\alpha(x+z, y) &= T\big((x+z)\alpha y + y\alpha(x+z)\big) - T(y)\alpha(x+z) - \\ &\quad (x+z)\alpha T(y) \\ &= T(x\alpha y + z\alpha y + y\alpha x + y\alpha z) - T(y)\alpha x - \\ &\quad T(y)\alpha z - x\alpha T(y) - z\alpha T(y) \end{aligned}$$

$$= T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y) + T(z\alpha y + y\alpha z) - T(y)\alpha z - z\alpha T(y)$$
$$= G_\alpha(x,y) + G_\alpha(z,y).$$

ii) $G_\alpha(x, y+z) = T(x\alpha(y+z) + (y+z)\alpha x) - T(y+z)\alpha x - x\alpha T(y+z)$
$$= T(x\alpha y + x\alpha z + y\alpha x + z\alpha x) - T(y)\alpha x - T(z)\alpha x - x\alpha T(y) - x\alpha T(z)$$
$$= T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y) + T(x\alpha z + z\alpha x) - T(z)\alpha x - x\alpha T(z)$$
$$= G_\alpha(x,y) + G_\alpha(x,z).$$

iii) $G_{\alpha+\beta}(x,y) = T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y) + T(x\beta y + y\beta x) - T(y)\beta x - x\beta T(y)$
$$= G_\alpha(x,y) + G_\beta(x,y).$$

iv) $G_\alpha(-x,y) = -T(x\alpha y + y\alpha x) + T(y)\alpha x + x\alpha T(y)$
$$= -\big(T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y)\big)$$
$$= -G_\alpha(x,y).$$

v) $G_\alpha(x,-y) = -T(x\alpha y + y\alpha x) + T(y)\alpha x + x\alpha T(y)$
$$= -\big(T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y)\big)$$
$$= -G_\alpha(x,y).$$

■

Lemma 3.2.3

Misalkan M adalah 2-*torsion free* gamma ring semiprima dengan asumsi (A). Terdapat suatu pemetaan yang aditif :

$$T : M \longrightarrow M$$
$$x\alpha y\beta x \longmapsto T(x\alpha y\beta x), \text{ dengan}$$

$T(x\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\beta x$, untuk semua $x, y \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Maka

i) $[G_\alpha(x,y), x]_\alpha = 0$
ii) $G_\alpha(x,y) = 0$

Bukti.

i) Pada persamaan (3.32) dapat dituliskan atas 2 variabel x dan y sebagai berikut :

$$[T(x), y]_\alpha + [T(y), x]_\alpha = 0 \qquad (3.36)$$

untuk setiap $x, y \in M$ dan $\alpha \in \Gamma$.

Subtitusi y dengan $x\alpha y + y\alpha x$ pada persamaan (3.36) dan menggunakan persamaan (3.31), diperoleh :

$\Leftrightarrow [T(x), x\alpha y + y\alpha x]_\alpha + [T(x\alpha y + y\alpha x), x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [T(x), x\alpha y]_\alpha + [T(x), y\alpha x]_\alpha + [T(x\alpha y + y\alpha x), x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [T(x), x]_\alpha \alpha y + x\alpha[T(x), y]_\alpha + [T(x), y]_\alpha \alpha x + y\alpha[T(x), x]_\alpha + [T(x\alpha y + y\alpha x), x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha[T(x), y]_\alpha + [T(x), y]_\alpha \alpha x + [T(x\alpha y + y\alpha x), x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [T(x\alpha y + y\alpha x), x]_\alpha + x\alpha[T(x), y]_\alpha + [T(x), y]_\alpha \alpha x = 0.$

Berdasarkan persamaan (3.36) dapat mengganti $[T(x), y]_\alpha$ dengan $-[T(y), x]_\alpha$ pada persamaan di atas, maka

$$[T(x\alpha y + y\alpha x), y]_\alpha - x\alpha[T(y), x]_\alpha - [T(y), x]_\alpha \alpha x = 0,$$

dapat di tulis dalam bentuk

$$[T(x\alpha y + y\alpha x) - T(y)\alpha x - x\alpha T(y), x]_\alpha = 0,$$

yaitu

$$[G_\alpha(x, y), x]_\alpha = 0. \tag{3.37}$$

■

ii) Dari persamaan (3.33) yaitu $x\alpha G_\alpha(x, y)\beta x = 0$ dapat di perluas dengan menambahkan varibel sebagai berikut (di dapat dengan cara yang sama pada persamaan (3.21) dari persamaan (3.18)) :

$$x\alpha G_\alpha(x, y)\beta z + x\alpha G_\alpha(z, y)\beta x + z\alpha G_\alpha(x, y)\beta x = 0.$$

Kemudian pada peramaan di atas kalikan kanan dengan $\beta G_\alpha(x, y)\alpha x$, menjadi :

$$x\alpha G_\alpha(x, y)\beta z\beta G_\alpha(x, y)\alpha x + x\alpha G_\alpha(z, y)\beta x\beta G_\alpha(x, y)\alpha x + z\alpha G_\alpha(x, y)\beta x\beta G_\alpha(x, y)\alpha x = 0.$$

berdasarkan persamaan (3.29) maka persamaan di atas dapat diperoleh sebagai berikut :

$$x\alpha G_\alpha(x, y)\beta z\beta G_\alpha(x, y)\alpha x = 0. \tag{3.38}$$

Berdasarkan persamaan (3.37), memungkinkan untuk mengganti $x\alpha G_\alpha(x, y)$ dengan $G_\alpha(x, y)\alpha x$ pada persamaan (3.38), maka diperoleh

$$G_\alpha(x, y)\alpha x\beta z\beta G_\alpha(x, y)\alpha x = 0. \tag{3.39}$$

Oleh karena itu, dengan sifat semiprima pada M maka

$$G_\alpha(x, y)\alpha x = 0. \tag{3.40}$$

Persamaan (3.40) dapat juga dituliskan menjadi :

$$x\alpha G_\alpha(x, y) = 0. \tag{3.41}$$

Pada persamaan (3.40) dapat diperluas untuk x, didapatkan :

$$G_\alpha(x, y)\alpha z + G_\alpha(z, y)\alpha x = 0.$$

Kalikan kanan pada persamaan di atas dengan $\alpha G_\alpha(x,y)$, maka

$$G_\alpha(x,y)\alpha z\alpha G_\alpha(x,y) + G_\alpha(z,y)\alpha x\alpha G_\alpha(x,y) = 0.$$

Berdasarkan persamaan (3.41), diperoleh :

$$G_\alpha(x,y)\alpha z\alpha G_\alpha(x,y) = 0.$$

Karena M adalah semiprima maka

$$G_\alpha(x,y) = 0,$$

yaitu

$$T(x\alpha y + y\alpha x) = T(y)\alpha x + x\alpha T(y). \qquad (3.42)$$

■

3.3 Sentralisator pada Pemetaan 2-*Torsion Free* Gamma Ring Semiprima

Pada skripsi ini, dikembangkan beberapa hasil dari jurnal sebelumnya pada Γ-ring. Jika M adalah 2-*torsion free* gamma ring semiprima yang memenuhi asumsi (A) dan setiap Jordan sentralisator adalah sentralisator. Jika $T: M \to M$ adalah pemetaan aditif sedemikian sehingga :

$$T(x\alpha y\beta x) = x\alpha T(y)\beta x$$

untuk setiap $x, y \in M$ dan $\alpha, b \in \Gamma$, maka T adalah sentralisator. Dan jika M memuat elemen identitas terhadap operasi perkalian maka T juga merupakan sentralisator. Berikut diberikan lemma dan teorema yang berkaitan dengan sentralisator pada pemetaan gamma ring semiprima.

Teorema 3.3.1

Misalkan M adalah 2-*torsion free* gamma ring semiprima dengan asumsi $x\alpha y\beta z = x\beta y\alpha z$ untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Terdapat suatu pemetaan yang aditif :

$$T:\ M \longrightarrow M$$

$$x\alpha x\beta x \longmapsto T(x\alpha x\beta x), \text{ dengan}$$

$T(x\alpha x\beta x) = x\alpha T(x)\beta x$, untuk semua $x \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Maka T adalah sentralisator.

Bukti.

Secara khusus, karena $x, y \in M$ maka dapat dituliskan $y = x$ pada persamaan (3.42) dan dihasilkan : $2T(x\alpha x) = T(x)\alpha x + x\alpha T(x)$.

Kemudian eliminasi persamaan di atas dengan persamaan (3.32) yaitu:

$\Leftrightarrow [T(x), x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow T(x)\alpha x - x\alpha T(x) = 0$

menjadi :

$$\begin{array}{rl} 2T(x\alpha x) = T(x)\alpha x + x\alpha T(x) & \\ 0 = T(x)\alpha x - x\alpha T(x) & \\ \hline 2T(x\alpha x) = 2T(x)\alpha x & + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow T(x\alpha x) = T(x)\alpha x$$

dan

$$\begin{array}{rl} 2T(x\alpha x) = T(x)\alpha x + x\alpha T(x) & \\ 0 = T(x)\alpha x - x\alpha T(x) & \\ \hline 2T(x\alpha x) = 2x\alpha T(x) & - \end{array}$$

$$\Leftrightarrow T(x\alpha x) = x\alpha T(x)$$

Menurut Definisi 2.6.5, maka T adalah sentralisator.

Sekarang akan dibuktikan $T(x\alpha x\beta x) = x\alpha T(x)\beta x$, misalkan $y = x$ pada persamaan (3.8) dan dengan Definisi (3.1.7) yaitu Jordan sentralisator serta dari jurnal sebelumnya yang ditulis oleh Vukman tahun 1999. Karena M merupakan Γ-ring semiprima maka dihasilkan persamaan sebagai berikut :

$$3T(x\alpha x\beta x) = T(x)\alpha x\beta x + x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x). \qquad (3.43)$$

Kemudian eliminasi persamaan di atas dengan persamaan :

$\Leftrightarrow [[T(x), x]_\alpha, x]_\beta = 0$

$\Leftrightarrow [T(x), x]_\alpha \beta x - x\beta [T(x), x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \big(T(x)\alpha x - x\alpha T(x)\big)\beta x - x\beta\big(T(x)\alpha x - x\alpha T(x)\big) = 0$

$\Leftrightarrow T(x)\alpha x\beta x - x\alpha T(x)\beta x - x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x) = 0$

$\Leftrightarrow T(x)\alpha x\beta x - 2x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x) = 0.$

menjadi :

Kalikan 2 pada persamaan :

$$3T(x\alpha x\beta x) = T(x)\alpha x\beta x + x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x)$$

menjadi:

$$\begin{array}{rl} 6T(x\alpha x\beta x) = 2T(x)\alpha x\beta x + 2x\alpha T(x)\beta x + 2x\alpha x\beta T(x) & \\ 0 = T(x)\alpha x\beta x - 2x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x) & \\ \hline 6T(x\alpha x\beta x) = 3T(x)\alpha x\beta x + 3x\alpha x\beta T(x) & + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 2T(x\alpha x\alpha x) = T(x)\alpha x\alpha x + x\alpha x\alpha T(x)$$

dan

$$
\begin{array}{r}
3T(x\alpha x\beta x) = T(x)\alpha x\beta x + x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x) \\
0 = T(x)\alpha x\beta x - 2x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x) \\
\hline
\end{array} \; -
$$

$$3T(x\alpha x\beta x) = 3x\alpha T(x)\beta x$$

$$\Leftrightarrow T(x\alpha x\beta x) = x\alpha T(x)\beta x$$

Terbukti bahwa T adalah Jordan sentralisator yang juga merupakan sentralisator.

■

Teorema 3.3.2

Misalkan M adalah 2-*torsion free* gamma ring semiprima dengan elemen identitas yang memenuhi asumsi $x\alpha y\beta z = z\beta y\alpha x$ untuk semua $x, y, z \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Terdapat suatu pemetaan yang aditif:

$$T : M \longrightarrow M$$

$$x\alpha x\beta x \longmapsto T(x\alpha x\beta x), \text{ dengan}$$

$T(x\alpha x\beta x) = x\alpha T(x)\beta x$, untuk semua $x \in M$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$. Maka T adalah sentralisator.

Bukti.

Ambil $x = x + 1$ pada persamaan (3.43) dimana 1 adalah elemen identitas dalam M, dimana $T(1) = a$ dan di dapatkan :

$\Leftrightarrow 3T((x+1)\alpha(x+1)\beta(x+1)) = T(x+1)\alpha(x+1)\beta(x+1) + (x+1)\alpha T(x+1)\beta(x+1) + (x+1)\alpha(x+1)\beta T(x+1)$

Ruas kiri :

$\Leftrightarrow 3T(x\alpha x\beta x + x\alpha x\beta 1 + x\alpha 1\beta x + x\alpha 1\beta 1 + 1\alpha x\beta x + 1\alpha x\beta 1 + 1\alpha 1\beta x + 1\alpha 1\beta 1)$

$\Leftrightarrow 3T(x\alpha x\beta x) + 3T(x\alpha x) + 3T(x\alpha x\beta 1) + 3T(x) + 3T(x\alpha x\beta 1) + 3T(x) + 3T(x) + 3T(1)$

$\Leftrightarrow 3T(x\alpha x\beta x) + 3T(x\alpha x) + 3T(x\alpha x) + 3T(x) + 3T(x\alpha x) + 3T(x) + 3T(x) + 3a$

Ruas kanan :

$\Leftrightarrow T(x)\alpha x\beta x + T(x)\alpha x\beta 1 + T(x)\alpha 1\beta x + T(x)\alpha 1\beta 1 + T(1)\alpha x\beta x + T(1)\alpha x\beta 1 + T(1)\alpha 1\beta x + T(1)\alpha 1\beta 1 +$
$x\alpha T(x)\beta x + x\alpha T(x)\beta 1 + x\alpha T(1)\beta x + x\alpha T(1)\beta 1 + 1\alpha T(x)\beta x + 1\alpha T(x)\beta 1 + 1\alpha T(1)\beta x + 1\alpha T(1)\beta 1 +$

$x\alpha x\beta T(x) + x\alpha x\beta T(1) + x\alpha 1\beta T(x) + x\alpha 1\beta T(1) + 1\alpha x\beta T(x) + 1\alpha x\beta T(1) + 1\alpha 1\beta T(x) + 1\alpha 1\beta T(1)$

$\Leftrightarrow T(x)\alpha x\beta x + x\alpha T(x)\beta x + x\alpha x\beta T(x) + T(x)\alpha x\beta 1 + x\alpha T(x)\beta 1 + T(x)\alpha 1\beta 1 + 1\alpha T(x)\beta 1 + 1\alpha 1\beta T(x) + 1\beta T(x)\alpha x + 1\beta x\alpha T(x) + T(1)\alpha x\beta 1 + x\alpha T(1)\beta 1 + 1\alpha T(1)\beta x + 1\alpha x\beta T(1) + T(1)\beta x\alpha x + x\alpha x\beta T(1) + T(1)\alpha 1\beta 1 + 1\alpha T(1)\beta 1 + 1\alpha 1\beta T(1) + T(x)\alpha x\beta 1 + 1\alpha x\beta T(x) + x\alpha T(1)\beta x + T(1)\alpha x\beta 1 + 1\alpha x\beta T(1)$

$\Leftrightarrow 3T(x\alpha x\beta x) + 2T(x\alpha x) + 3T(x) + 2T(x\alpha x) + 2T(x) + 2T(x) + 2T(x\alpha x) + 3a + T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x + a\alpha x + x\beta a$

Ruas kiri = Ruas kanan

$\Leftrightarrow 3T(x\alpha x\beta x) + 3T(x\alpha x) + 3T(x\alpha x) + 3T(x) + 3T(x\alpha x) + 3T(x) + 3T(x) + 3a = 3T(x\alpha x\beta x) + 2T(x\alpha x) + 3T(x) + 2T(x\alpha x) + 2T(x) + 2T(x) + 2T(x\alpha x) + 3a + T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x + a\alpha x + x\beta a$

$$\Leftrightarrow 3T(x\alpha x) + 2T(x) = T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x + a\alpha x + x\beta a \tag{3.44}$$

Subtitusi x dengan $-x$ pada persamaan di atas dan didapatkan hasil

$$3T(x\alpha x) - 2T(x) = T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x - a\alpha x - x\beta a \tag{3.45}$$

Kemudian eliminasi persamaan (3.44) dan persamaan (3.45), diperoleh :

$$\begin{array}{l} 3T(x\alpha x) + 2T(x) = T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x + a\alpha x + x\beta a \\ 3T(x\alpha x) - 2T(x) = T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x - a\alpha x - x\beta a \\ \hline \end{array} +$$

$$6T(x\alpha x) = 2T(x)\alpha x + 2x\beta T(x) + 2x\alpha a\beta x \tag{3.46}$$

dan

$$\begin{array}{l} 3T(x\alpha x) + 2T(x) = T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x + a\alpha x + x\beta a \\ 3T(x\alpha x) - 2T(x) = T(x)\alpha x + x\beta T(x) + x\alpha a\beta x - a\alpha x - x\beta a \\ \hline \end{array} -$$

$$4T(x) = 2a\alpha x + 2x\beta a$$

$$\Leftrightarrow 2T(x) = a\alpha x + x\beta a \tag{3.46}$$

Serta akan dibuktikan bahwa $a \in Z(M)$. Berdasarkan persamaan (3.47) pada persamaan (3.46) dapat di tulis $2T(x) = \alpha ax + x\beta a$ di ruas kanan dan di ruas kiri di tulis $6T(x\alpha x) = 3a\alpha x\beta x + 3x\beta x\alpha a$, didapatkan :

$\Leftrightarrow 3a\alpha x\beta x + 3x\beta x\alpha a = 2T(x)\alpha x + 2T(x)\beta x + 2x\alpha a\beta x$

$\Leftrightarrow 3a\alpha x\beta x + 3x\beta x\alpha a = (a\alpha x + x\beta a)\alpha x + (a\alpha x + x\beta a)\beta x + 2x\alpha a\beta x$

$\Leftrightarrow 3a\alpha x\beta x + 3x\beta x\alpha a = a\alpha x\alpha x + x\beta a\alpha x + a\alpha x\beta x + x\beta a\beta x + 2x\alpha a\beta x$

$\Leftrightarrow 3a\alpha x\beta x + 3x\beta x\alpha a = a\alpha x\beta x + x\alpha a\beta x + x\alpha x\beta a + x\alpha a\beta x + 2x\alpha a\beta x$

$\Leftrightarrow 2a\alpha x\beta x + 2x\beta x\alpha a = 4x\alpha a\beta x$

$\Leftrightarrow 2a\alpha x\beta x + 2x\beta x\alpha a - 4x\alpha a\beta x = 0$

$\Leftrightarrow a\alpha x\beta x + x\beta x\alpha a - 2x\alpha a\beta x = 0 \qquad (3.48)$

Dari persamaan (3.48) dapat di tulis :

$$[[a,x]_\alpha, x]_\beta = 0; x \in M, \alpha, \beta \in \Gamma \qquad (3.49)$$

Dari persamaan (3.49) dapat dituliskan atas 2 variabel yaitu x dan y atas x, menjadi

$$[[a,x]_\alpha, y]_\beta + [[a,y]_\alpha, x]_\beta = 0. \qquad (3.50)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.49) dan (3.50), ambil $y = x\alpha y$ pada persamaan (3.50) didapatkan :

$$\Leftrightarrow [[a,x]_\alpha, x\alpha y]_\beta + [[a, x\alpha y]_\alpha, y]_\beta = 0$$

$\Leftrightarrow [[a,x]_\alpha, y]_\beta \beta y + x\alpha[[a,x]_\alpha, y]_\beta +$
$[[a,x]_\alpha, \alpha y + x\alpha[a,y]_\alpha, x]_\beta = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha[[a,x]_\alpha, y]_\beta + [[a,x]_\alpha \alpha y, x]_\beta + [x\alpha[a,y]_\alpha, x]_\beta = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha[[a,x]_\alpha, y]_\beta + [[a,x]_\alpha, x]_\beta \beta y + [a,x]_\alpha \beta [y,x]_\alpha$
$+ x\alpha[[a,x]_\alpha, y]_\beta = 0$

$\Leftrightarrow [a,x]_\alpha \beta [y,x]_\alpha = 0 \qquad (3.51)$

Subtitusi $y = y\beta a$ pada persamaan (3.51) diperoleh

$\Leftrightarrow [a,x]_\alpha \beta [y\beta a, x]_\alpha = 0$

$\Leftrightarrow [a,x]_\alpha \beta (y\beta a\alpha x - x\alpha y\beta a) = 0$

$\Leftrightarrow [a,x]_\alpha \beta (y\beta a\alpha x - y\beta a\alpha x) = 0$

$\Leftrightarrow [a,x]_\alpha \beta (y\beta(a\alpha x - a\alpha x)) = 0$

$\Leftrightarrow [a,x]_\alpha \beta (y\beta(a\alpha x - x\alpha a)) = 0$

$\Leftrightarrow [a,x]_\alpha \beta y \beta [a,x]_\alpha = 0.$

Karena M semiprima, maka

$$[a,x]_\alpha = 0 \Leftrightarrow a\alpha x = x\alpha a.$$

Dimana $a \in Z(M)$, maka pada persamaan (3.47), dapat diturunkan menjadi :

$$T(x) = a\alpha x = T(1)\alpha x, x \in M \text{ dan } \alpha \in \Gamma.$$

Maka T merupakan sentralisator.

■