

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan dalam bidang matematika berperan penting dalam memberikan solusi masalah penyebaran penyakit, misalnya penyakit menular seperti polio, demam berdarah, campak, dan lain-lain. Peranan tersebut dapat dilihat dengan dikonstruksinya model matematika yang kemudian dapat dianalisis sifat-sifatnya.

Pada tahun 1927 untuk pertama kali model epidemi *SIR* diperkenalkan oleh Kermack dan Mckendrick. Model *SIR* disusun untuk menggambarkan sifat-sifat penyebaran penyakit. Dalam perkembangannya muncul model-model baru yang lebih baik dari model *SIR*. Model epidemi *SIRS* merupakan suatu pengembangan dari model klasik *SIR*. Model epidemi *SIRS* (*Susceptible-Infective-Recovered-Susceptible*) merupakan model yang menggambarkan penyebaran penyakit di mana individu yang pernah terinfeksi dan sembuh tidak memperoleh kekebalan terhadap penyakit sehingga kembali menjadi individu rentan.

Pada tahun 1976 dan 1989 Hethcote mengemukakan model *SIR* di mana tingkat kematian di setiap subpopulasi *S*, *I*, dan *R* adalah sama dan total populasi konstan. Model dengan total populasi konstan tersebut berupa sistem tiga dimensi yang dapat direduksi menjadi sistem dua dimensi. Kemudian untuk menganalisis kestabilan global digunakan teorema Poincare-Birkhof, Poincare-Dulac, dan fungsi Lyapunov. Dalam penelitian lain, Korobeinikov dan Wake (2002) membahas model epidemi *SIR* dan *SIRS* dengan total populasi konstan dan menganalisis kestabilan global menggunakan fungsi Lyapunov.

Adda dan Bichara (2012) dalam papernya hanya membahas kestabilan global model epidemi *SIR* dengan tingkat kematian beragam, sedangkan untuk model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam hanya diberikan sistem persamaannya saja. Berbeda dari artikel Adda dan Bichara, dalam skripsi ini dibahas model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam melalui analisis kestabilan lokal dan global. Pada model ini tingkat kematian

beragam menunjukkan tingkat kematian pada subpopulasi S , I , dan R berbeda.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana syarat eksistensi titik kesetimbangan model.
2. Bagaimana hasil analisis kestabilan lokal dan global.
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model dan interpretasi hasil.

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini sebagai berikut.

1. Menentukan syarat eksistensi titik kesetimbangan model.
2. Menentukan kestabilan lokal dan global.
3. Mengetahui hasil simulasi numerik model dan menginterpretasikan hasil.

1.4 Batasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan batasan masalah sebagai berikut.

1. Semua individu yang lahir rentan terserang penyakit.
2. Laju kelahiran dari total populasi sama dengan laju kematiannya.

BAB II DASAR TEORI

Skripsi ini membahas tentang analisis dinamik. Teori-teori yang mendasari analisis dinamik tentunya perlu diketahui sebelum membahas proses tersebut. Berikut ini adalah teori-teori yang mendasari analisis dinamik tersebut.

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunannya dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Boyce dan Dprima, 2009).

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (Boyce dan Dprima, 2009).

Definisi 2.1.2 (Orde Persamaan Diferensial)

Orde persamaan diferensial adalah tingkat dari turunan tertinggi dalam suatu persamaan diferensial (Boyce dan Dprima, 2009).

Definisi 2.1.3 (Persamaan Diferensial Biasa Linear)

Suatu persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y disebut linear dengan orde n , jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x),$$

dengan $a_0 \neq 0$. Pada persamaan tersebut $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ disebut koefisien persamaan diferensial dan $g(x)$ disebut bagian tak homogen. Apabila persamaan diferensial biasa tidak memenuhi bentuk umum persamaan diferensial biasa linear maka persamaan tersebut nonlinear (Boyce dan DiPrima, 2009).

Definisi 2.1.4 (Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Boyce dan DiPrima, 2009).

Definisi 2.1.5 (Sistem Persamaan Diferensial Biasa)

Sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui, dengan n merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan dua. Bentuk umum sistem persamaan diferensial berdimensi n yang mengandung $n + 1$ variabel adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n; t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n; t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n; t)\end{aligned}$$

(Boyce dan DiPrima, 2009).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Dalam penerapannya terdapat dua jenis sistem dinamik yaitu sistem dinamik diskrit ($t \in Z$ atau N) dan sistem dinamik kontinu ($t \in R$). Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai iterasi suatu fungsi pembangkit t , yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in Z \text{ atau } N.$$

Apabila t kontinu, bentuk sistem dinamik dinyatakan sebagai persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = x$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

2.2.1 Sistem Otonomus

Sistem persamaan dua dimensi yang berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan fungsi f dan g tidak bergantung pada variabel bebas t , tetapi hanya bergantung pada variabel bebas x dan y disebut sebagai sistem otonomus (Boyce dan DiPrima, 2009).

Definisi 2.2.1 (Titik Keseimbangan)

Pandang sistem otonomus (2.1). Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ yang memenuhi $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$ disebut titik kritis sistem (2.1). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan sebab $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik keseimbangan (Boyce dan DiPrima, 2009).

Definisi 2.2.2 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

i) Titik (x^*, y^*) dikatakan stabil jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk

$$|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)| < \delta$$

berlaku

$$|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

ii) Titik (x^*, y^*) dikatakan stabil asimtotik jika stabil dan terdapat $\delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang memenuhi

$$|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)| < \delta_0$$

akan bersifat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$$

(Boyce dan DiPrima, 2009).

2.2.2 Sistem Otonomus Linear

Diberikan sistem otonomus linear dua dimensi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sistem (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matriks konstan. Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen matriks A dan $\det(A) = ad - bc \neq 0$, maka kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) diberikan pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2)

| Nilai Eigen | Kriteria | Kestabilan | Jenis |
|---|--------------------------------|------------------|--------|
| $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ | $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ | Tak stabil | Simpul |
| | $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ | Stabil asimtotik | Simpul |
| | $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ | Tak stabil | Pelana |
| $\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$ | $a > 0$ | Tak stabil | Spiral |
| | $a < 0$ | Stabil asimtotik | Spiral |
| | $a = 0$ | Stabil | Pusat |

(Boyce dan DiPrima, 2009).

Adakalanya nilai eigen sangat rumit ditentukan sehingga Tabel 2.1 tidak dapat digunakan secara langsung. Agar mempermudah dalam menentukan nilai eigen diberikan klasifikasi kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) berdasarkan nilai determinan dan *trace* yang dijelaskan sebagai berikut.

Nilai eigen matriks A adalah solusi persamaan

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \text{trace}(A)\lambda + \det(A) = 0. \quad (2.3)$$

Solusi persamaan (2.3) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{trace}(A) \pm \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}. \quad (2.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.4), nilai λ_1 dan λ_2 bergantung pada nilai $\text{trace}(A)$ dan $\det(A)$. Sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) dengan memperhatikan nilai $\text{trace}(A)$ dan $\det(A)$ diberikan pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) berdasarkan nilai $\text{trace}(A)$ dan $\det(A)$

| $\det(A)$ | $\text{trace}(A)$ | $(\text{trace}(A))^2 - 4 \det(A)$ | Nilai eigen | Kestabilan |
|-----------|-------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| > 0 | > 0 | ≥ 0 | $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ | Tak stabil |
| | | < 0 | $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ $a > 0$ | Tak stabil |
| | $= 0$ | < 0 | $\lambda_{1,2} = \pm ib$ | Stabil |
| | < 0 | ≥ 0 | $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ | Stabil asimtotik |
| | | < 0 | < 0 | $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ $a < 0$ |
| < 0 | > 0 | > 0 | $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ | Tak stabil |
| | $= 0$ | > 0 | $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ | Tak stabil |
| | < 0 | > 0 | $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ | Tak stabil |

(Panfilov, 2004).

2.2.3 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Anggap bahwa fungsi f dan g mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik (x^*, y^*) . Deret Taylor fungsi f dan g di sekitar (x^*, y^*) adalah

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_1(x, y)\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}g(x, y) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_2(x, y),\end{aligned}\tag{2.7}$$

dengan $\eta_1(x, y)$ dan $\eta_2(x, y)$ adalah suku sisa. Berdasarkan hampiran orde satu persamaan (2.6) dan (2.7), suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0$$

dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*)$.

Berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7), serta mengingat bahwa $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x^*)}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}$, maka sistem persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} (y - y^*) \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} (y - y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (y - y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial*

derivative matrix yang dinotasikan dengan $J(x^*, y^*)$ atau J saja bila dianggap jelas.

Jika dimisalkan $u = x - x^*$ dan $v = y - y^*$, maka $\vec{w} = (u, v)^T$. Karena

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0,$$

persamaan (2.8) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Bentuk (2.9) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \quad (2.10)$$

Jika (x, y) berada cukup dekat dengan (x^*, y^*) , maka (u, v) bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.5) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.11)$$

Jika $x = x^*$ dan $y = y^*$ diperoleh $(u^*, v^*) = (0, 0)$, maka sistem linear (2.11) memiliki titik kesetimbangan $(u^*, v^*) = (0, 0)$ (Boyce dan DiPrima, 2009).

Teorema 2.1 (Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinear)

Hubungan antara sifat kestabilan sistem otonomus nonlinear dan sifat kestabilan sistem hasil linearisasi adalah

1. titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.5) bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi stabil asimtotik,
2. titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.5) bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi tak stabil

(Finizio dan Ladas, 1982).

Teorema 2.1 menjelaskan bahwa kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear dapat didekati dengan kestabilan titik kesetimbangan sistem linear hampiran di sekitar titik tersebut. Oleh karena itu, kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal.

2.3 Analisis Kestabilan Global

Definisi 2.3.1 (Fungsi Lyapunov Lemah)

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.5). Suatu fungsi $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ disebut **fungsi Lyapunov lemah** untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^2$ dari \vec{x}^* sehingga kondisi berikut terpenuhi.

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $L'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$

(Alligood dkk., 2000).

Definisi 2.3.2 (Fungsi Lyapunov Kuat)

Fungsi L disebut **fungsi Lyapunov kuat** untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3.1 dan $L'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$ dengan $\vec{x} \in W$ (Alligood dkk., 2000).

Teorema 2.2 (Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov)

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.5). Titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* dan \vec{x}^* bersifat stabil asimtotik global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* (Alligood dkk., 2000).

Contoh 2.1

Misal diberikan sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y(z + 1) \\ \frac{dy}{dt} &= -x(z + 1) \\ \frac{dz}{dt} &= -z^3.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Titik kesetimbangan persamaan (2.12) adalah $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. Diberikan fungsi Lyapunov $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sehingga diperoleh $L'(x, y, z) = -2z^4 \leq 0$. $L(x, y, z)$ termasuk fungsi Lyapunov lemah karena $L'(x, y, z) = 0$ tidak hanya di titik $(0, 0, 0)$ tetapi juga di semua bidang xy . Jadi $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ bersifat stabil global (Williamson, 2001).

Contoh 2.2

Misal diberikan sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2xe^{x^2+y^2} \\ \frac{dy}{dt} &= -2ye^{x^2+y^2}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

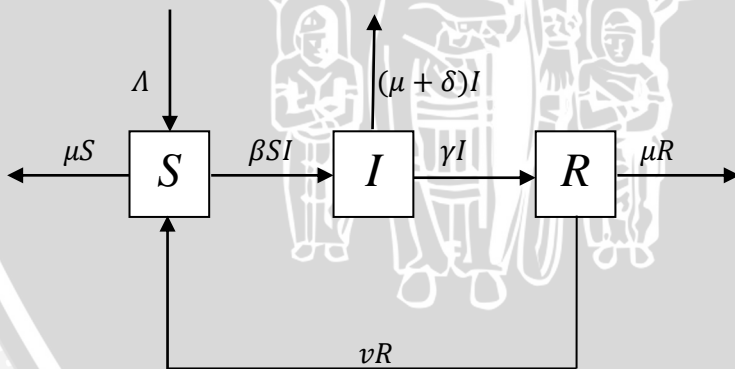
Titik kesetimbangan persamaan (2.13) adalah $(x, y) = (0, 0)$. Diberikan fungsi Lyapunov $L(x, y) = e^{x^2+y^2}$, sehingga diperoleh $L'(x, y) = -4(x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$ yang selalu negatif pada titik $(x, y) \neq (0, 0)$. Jadi $(x, y) = (0, 0)$ bersifat stabil asimtotik global (Williamson, 2001).

2.4 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar yang dinotasikan dengan R_0 , didefinisikan sebagai angka rata-rata banyaknya infeksi baru yang disebabkan oleh satu individu yang terinfeksi selama individu tersebut hidup sebagai individu yang terinfeksi. Angka reproduksi dasar digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit dengan model *SIRS*. Angka reproduksi dasar merupakan angka yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi epidemi atau tidak. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan dapat dianalisis menggunakan R_0 (Shim, 2004).

2.5 Model Epidemi *SIRS* dengan Tingkat Kematian Seragam

Model epidemi *SIRS* terdiri dari tiga subpopulasi yaitu subpopulasi *Susceptible*, *Infective*, dan *Recovered*. *Susceptible* merupakan subpopulasi di mana individu rentan terhadap penyakit, *Infective* merupakan subpopulasi individu terjangkit penyakit, dan *Recovered* merupakan subpopulasi individu sembuh setelah terinfeksi. $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ bernilai positif karena menyatakan kepadatan populasi. Tingkat kematian seragam menunjukkan bahwa tingkat kematian pada tiap subpopulasi S , I , dan R adalah sama. Model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian seragam digambarkan dalam diagram kompartemen berikut.



Gambar 2.1 Diagram kompartemen model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian seragam

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI + vR - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\mu + \delta + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu + v)R,\end{aligned}\tag{2.14}$$

dengan

- $S(t)$: banyaknya individu rentan (S) pada waktu t ,
 $I(t)$: banyaknya individu terinfeksi (I) pada waktu t ,
 $R(t)$: banyaknya individu sembuh (R) pada waktu t ,
 Λ : tingkat kelahiran,
 γ : tingkat kesembuhan alami individu,
 δ : tingkat kematian individu terinfeksi,
 μ : tingkat kematian alami individu,
 β : tingkat penularan penyakit,
 v : tingkat penurunan kekebalan terhadap penyakit,
 di mana $\gamma, \mu, \beta, v, \delta \geq 0$ (De Le`on, 2009).

Jika diasumsikan tingkat kelahiran dari total populasi sama dengan tingkat kematiannya, maka

$$\Lambda = \mu S + (\mu + \delta)I + \mu R.\tag{2.15}$$

Substitusikan persamaan (2.15) ke sistem (2.14), sehingga diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + (\mu + \delta)I + (v + \mu)R \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \mu + \delta)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu + v)R.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Total populasi konstan dan bernilai satu satuan populasi, sehingga $S + I + R = 1$ atau $R = 1 - S - I$. Persamaan $R = 1 - S - I$ disubstitusikan ke sistem (2.16) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + (\mu + \delta)I + (v + \mu)(1 - S - I) \\
&= -\beta SI + (\delta - v)I - (v + \mu)S + (v + \mu) \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \mu + \delta)I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu + v)R.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Karena pada subpopulasi S dan I tidak memuat variabel R dan nilai subpopulasi R dapat diketahui apabila nilai subpopulasi I sudah diketahui, sehingga persamaan $\frac{dR}{dt}$ dapat diabaikan. Oleh karena itu, sistem (2.17) menjadi sistem dua dimensi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + (\delta - v)I - (v + \mu)S + (v + \mu), \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \mu + \delta)I.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Berdasarkan sistem (2.18) diperoleh titik kesetimbangan

endemi $E^* = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{(\mu+v)}{\gamma+\mu+v} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right)$ di mana $R_0 = \frac{\beta}{\gamma+\mu+\delta}$ dan titik

kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (1,0)$. Selanjutnya menganalisis kestabilan untuk masing-masing titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan $E_0 = (1,0)$ memiliki nilai eigen $\lambda_1 = -(\mu + v)$ dan $\lambda_2 = (R_0 - 1)(\mu + \delta + \gamma)$. E_0 stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tak stabil jika $R_0 > 1$. Tanda dari nilai eigen yang dimiliki titik

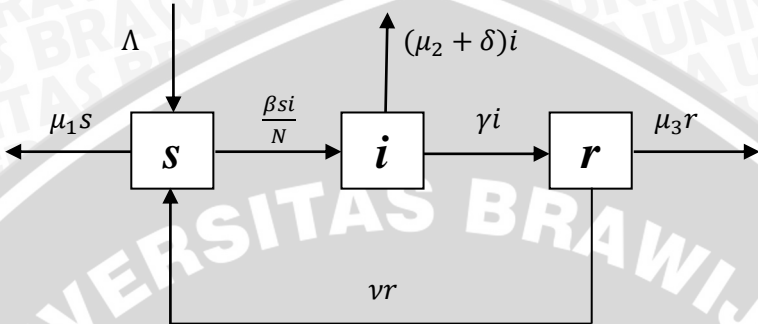
kesetimbangan $E^* = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{(\mu+v)(1-\frac{1}{R_0})}{\gamma+\mu+v} \right)$ ditentukan dengan

memperhatikan nilai $trace(J(E^*))$ dan $det(J(E^*))$. Perhatikan bahwa $trace(J(E^*)) < 0$ dan $det(J(E^*)) > 0$ sebab $R_0 > 1$. Menurut Tabel 2.2 diperoleh $\lambda_{1,2} < 0$ dan $\lambda_{1,2} = a + ib$, di mana $a < 0$. Oleh karena itu, titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik.

2.6 Model Epidemi SIRS dengan Tingkat Kematian Beragam

Tingkat kematian beragam menunjukkan tingkat kematian pada subpopulasi S , I , dan R adalah berbeda. Model epidemi SIRS

dengan tingkat kematian beragam digambarkan dalam diagram kompartemen berikut.



Gambar 2.2 Diagram kompartemen model epidemi SIRS dengan tingkat kematian beragam

Berdasarkan Gambar 2.2 diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta si}{N} - \mu_1 s + vr \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\beta si}{N} - (\mu_2 + \delta + \gamma)i \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - (\mu_3 + v)r, \end{aligned} \quad (2.19)$$

di mana μ_1 tingkat kematian alami individu pada fase rentan, μ_2 tingkat kematian alami individu pada fase terinfeksi, δ tingkat kematian individu terinfeksi, dan μ_3 tingkat kematian alami individu pada fase sembuh (Adda dan Bichara, 2012).

Total populasi yang dinotasikan dengan N adalah jumlah dari individu rentan, terinfeksi, dan sembuh atau dapat dituliskan sebagai

$$N = s + i + r.$$

Jika diasumsikan tingkat kelahiran dari total populasi sama dengan tingkat kematiannya, maka

$$\Lambda = \mu_1 s + (\mu_2 + \delta)i + \mu_3 r. \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) disubstitusikan ke sistem (2.19) sehingga diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\beta si}{N} + (\mu_2 + \delta)i + (\mu_3 + \nu)r \quad (2.21a)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\beta si}{N} - (\mu_2 + \delta + \gamma)i \quad (2.21b)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - (\mu_3 + \nu)r. \quad (2.21c)$$

Total populasi konstan, sehingga $N = s + i + r$ atau $r = N - s - i$. Persamaan $r = N - s - i$ disubstitusikan ke persamaan (2.21a) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\frac{\beta si}{N} + (\mu_2 + \delta)i + (\mu_3 + \nu)(N - s - i) \\ &= -\frac{\beta si}{N} + (\mu_2 + \delta)i + (\mu_3 + \nu)N - (\mu_3 + \nu)s \\ &\quad - (\mu_3 + \nu)i \\ &= -\frac{\beta si}{N} + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)i + (\mu_3 + \nu)N \\ &\quad - (\mu_3 + \nu)s \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\beta si}{N} - (\mu_2 + \delta + \gamma)i \quad (2.22) \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - (\mu_3 + \nu)r. \end{aligned}$$

Selanjutnya sistem (2.22) disederhanakan dengan melakukan penskalaan menggunakan persamaan-persamaan

$$S = \frac{s}{N}, I = \frac{i}{N}, R = \frac{r}{N},$$

sehingga diperoleh $S + I + R = \frac{s+i+r}{N} = \frac{N}{N} = 1$. Berdasarkan sistem (2.22) dan dilakukan penurunan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{dS}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{1}{N} \left(-\frac{\beta si}{N} + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)i - (\mu_3 + \nu)s + (\mu_3 + \nu)N \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{\beta si}{N^2} + \frac{(\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)i}{N} - \frac{(\mu_3 + \nu)s}{N} + \frac{(\mu_3 + \nu)N}{N} \\ &= -\beta SI + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)I - (\mu_3 + \nu)S + (\mu_3 + \nu),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{dI}{di} \frac{di}{dt} \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{\beta si}{N} - (\mu_2 + \delta + \gamma)i \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{\beta si}{N^2} - \frac{(\mu_2 + \delta + \gamma)i}{N} \right) \\ &= \beta SI - (\mu_2 + \delta + \gamma)I,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \frac{dR}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{1}{N} (\gamma i - (\mu_3 + \nu)r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{\gamma i}{N} - \frac{(\mu_3 + \nu)r}{N} \right) \\ &= \gamma I - (\mu_3 + \nu)r.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, sistem (2.22) dapat ditulis kembali menjadi sistem baru yang lebih sederhana sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)I - (\mu_3 + \nu)S \\ &\quad + (\mu_3 + \nu)\end{aligned}$$

(2.23)

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu_2 + \delta + \gamma)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu_3 + \nu)R.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas analisis dinamik model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam yang ditunjukkan oleh sistem (2.23). Karena pada $\frac{dS}{dt}$ dan $\frac{dI}{dt}$ tidak terdapat variabel R dan nilai $\frac{dR}{dt}$ dapat diketahui jika nilai subpopulasi terinfeksi sudah diketahui maka $\frac{dR}{dt}$ dapat diabaikan. Adapun sistem (2.23) menjadi sistem dua dimensi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)I - (\mu_3 + \nu)S \\ &\quad + (\mu_3 + \nu) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\mu_2 + \delta + \gamma)I. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Selanjutnya dilakukan analisis pada sistem persamaan (3.1) yang meliputi titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal, analisis kestabilan global menggunakan fungsi Lyapunov, simulasi numerik, dan interpretasi hasil.

3.1 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (3.1) diperoleh ketika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -\beta SI + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)I - (\mu_3 + \nu)S \\ + (\mu_3 + \nu) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

dan

$$I(\beta S - (\mu_2 + \delta + \gamma)) = 0. \quad (3.2b)$$

Berdasarkan persamaan (3.2b) diperoleh $I = 0$ atau $S = \frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta}$.

Jika $I = 0$, maka dari persamaan (3.2a) diperoleh

$$S = \frac{\mu_3 + \nu}{\mu_3 + \nu} = 1,$$

sehingga diperoleh $E_0 = (1,0)$ yang disebut sebagai titik kesetimbangan bebas penyakit, karena tidak ada individu yang terinfeksi.

Jika $S = \frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta}$, maka dari persamaan (3.2a) diperoleh

$$\begin{aligned} -\beta SI + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)I - (\mu_3 + \nu)S + (\mu_3 + \nu) &= 0 \\ -\beta \left(\frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \right) I + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu)I - (\mu_3 + \nu) \left(\frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \right) & \\ + (\mu_3 + \nu) &= 0 \\ (\mu_3 + \nu + \gamma)I - (\mu_3 + \nu) \left(\frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \right) + (\mu_3 + \nu) &= 0 \end{aligned}$$

$$(\mu_3 + \nu + \gamma)I = (\mu_3 + \nu) - (\mu_3 + \nu) \left(\frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \right)$$

$$(\mu_3 + \nu + \gamma)I = (\mu_3 + \nu) \left(1 - \frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \right)$$

$$I = \frac{\mu_3 + \nu}{\mu_3 + \nu + \gamma} \left(1 - \frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \right),$$

dengan syarat $\frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \leq 1$ yang ekuivalen dengan $\mu_2 + \delta + \gamma \leq \beta$ maka $\frac{\beta}{\mu_2 + \delta + \gamma} \geq 1$. Jika $R_0 = \frac{\beta}{\mu_2 + \delta + \gamma}$ maka diperoleh titik kesetimbangan $E^* = (S^*, I^*)$, di mana

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\mu_2 + \delta + \gamma}{\beta} \\ I^* &= \frac{\mu_3 + \nu}{\mu_3 + \nu + \gamma} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jika $R_0 = 1$ maka $S^* = 1$ dan $I^* = 0$, yang sama dengan titik kesetimbangan bebas penyakit, sehingga hanya terdapat satu titik kesetimbangan yaitu E_0 . Jika $R_0 < 1$ maka $I^* < 0$ mustahil. Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan, dapat disimpulkan bahwa ketika $R_0 \leq 1$ maka hanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis dan ketika $R_0 > 1$ maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis yaitu E_0 dan E^* .

3.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan tiap titik kesetimbangan model diperiksa melalui analisis kestabilan. Berdasarkan Definisi 2.1.4, sistem persamaan (3.1) merupakan sistem nonlinear. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem yang menghasilkan matriks Jacobi

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta I - (\mu_3 + \nu) & -\beta S + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu) \\ \beta I & \beta S - (\mu_2 + \delta + \gamma) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Matriks Jacobi pada titik $E_0 = (1, 0)$ menghasilkan matriks

$$\begin{aligned} J(1, 0) &= \begin{pmatrix} -(\mu_3 + \nu) & -\beta + \mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu \\ 0 & \beta - (\mu_2 + \delta + \gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\mu_3 + \nu) & -\beta + \mu_2 + \delta - \mu_3 - \nu \\ 0 & (R_0 - 1)(\mu_2 + \delta + \gamma) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = -(\mu_3 + \nu)$ dan $\lambda_2 = (R_0 - 1)(\mu_2 + \delta + \gamma)$. E_0 stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tak stabil jika $R_0 > 1$. Matriks Jacobi di E^* adalah

$$J(S^*, I^*) = \begin{pmatrix} -(\mu_2 + \delta + \gamma) \frac{\mu_3 + \nu}{\mu_3 + \nu + \gamma} (R_0 - 1) - (\mu_3 + \nu) & -(\gamma + \mu_3 + \nu) \\ (\mu_2 + \delta + \gamma) \frac{\mu_3 + \nu}{\mu_3 + \nu + \gamma} (R_0 - 1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan matriks $J(S^*, I^*)$ diperoleh

$$\text{trace}(J(E^*)) = -(\mu_2 + \delta + \gamma) \frac{\mu_3 + \nu}{\mu_3 + \nu + \gamma} (R_0 - 1) - (\mu_3 + \nu)$$

dan

$$\det(J(E^*)) = (\mu_2 + \delta + \gamma) \frac{\mu_3 + \nu}{\mu_3 + \nu + \gamma} (R_0 - 1)(\gamma + \mu_3 + \nu).$$

Perhatikan bahwa $\text{trace}(J(E^*)) < 0$ dan $\det(J(E^*)) > 0$ sebab $R_0 > 1$. Menurut Tabel 2.2 diperoleh $\lambda_{1,2} < 0$ dan $\lambda_{1,2} = a + ib$, di mana $a < 0$. Oleh karena itu, titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik.

3.3 Analisis Kestabilan Global

Berdasarkan analisis pada Subbab 3.2 diperoleh sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan E_0 dan E^* . Selanjutnya pada subbab ini dilakukan analisis kestabilan global di setiap titik kesetimbangan.

3.3.1 Kestabilan Global E_0

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$L(S, I) = I$$

pada $\Omega = \{(S, I) | S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}$. Terlihat jelas bahwa $L(E_0) = L(1, 0) = 0$ dan $L(S, I) = I > 0 \forall I \neq 0$. Oleh karena itu, $L(S, I)$ memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3.1.

Selanjutnya diperiksa apakah $L(S, I)$ memenuhi Definisi 2.3.2 yaitu $L'(S, I) = I' < 0, \forall (S, I) \in \Omega \setminus (E_0)$.

$$L'(S, I) = \frac{dI}{dt}$$

$$\begin{aligned} L'(S, I) &= \beta SI - (\mu_2 + \delta + \gamma)I \\ &= (\mu_2 + \gamma)R_0SI - (\mu_2 + \delta + \gamma)I \\ &= I(R_0S - 1)(\mu_2 + \delta + \gamma) < 0. \end{aligned}$$

Jelas bahwa jika $I \neq I^*$ maka $I \neq 0$. Berdasarkan syarat kestabilan lokal pada E_0 yaitu $R_0 < 1$ maka $R_0S < 1$ sebab $S < 1 \forall S \neq S^*$. Oleh karena itu, $R_0S - 1 < 0$ sehingga $L'(S, I) < 0$ untuk setiap $(S, I) \neq (1, 0)$. Jadi $L(S, I)$ memenuhi Definisi 2.3.2 sehingga fungsi Lyapunov $L(S, I) = I$ untuk titik kesetimbangan $E_0 = (1, 0)$ adalah fungsi Lyapunov kuat. Oleh karena itu, E_0 stabil asimtotik global.

3.3.2 Kestabilan Global E^*

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$\begin{aligned} L(S, I) &= (S - S^*) - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln \frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \\ &\quad + (I - I^*) - I^* \ln \frac{I}{I^*} \end{aligned}$$

pada persekitaran $\hat{\Omega} = \left\{ (S, I) \mid S \geq \frac{\mu_2 + \delta - \mu_3 - v}{\beta}, I \geq 0, S + I \leq 1 \right\}$.

Perlu dibuktikan bahwa fungsi $L(S, I)$ memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3.1 guna memeriksa apakah fungsi $L(S, I)$ merupakan fungsi Lyapunov lemah atau kuat,

- Pembuktian $L(E^*) = 0$.

$$\begin{aligned} L(E^*) &= L(S^*, I^*) \\ &= (S^* - S^*) - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) \\ &\quad + (I^* - I^*) - I^* \ln \left(\frac{I^*}{I^*} \right) \\ &= 0 - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln(1) + 0 - I^* \ln(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Pembuktian $L(S, I) > 0 \forall S, I \in \hat{\Omega} \setminus (E^*)$.

Diketahui

$$\begin{aligned} L(S, I) &= (S - S^*) - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) \\ &\quad + (I - I^*) - I^* \ln \left(\frac{I}{I^*} \right). \end{aligned}$$

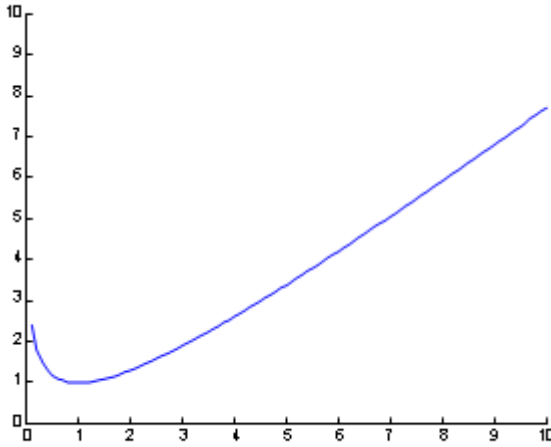
Misalkan $f(x) = x - \ln(x)$. $f(x)$ terdefinisi pada domain $x \in \mathbb{R}$.

Turunan pertama $f(x)$ terhadap x adalah

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Titik stationer $f(x)$ diperoleh ketika $f'(x) = 0$. Nilai x yang memenuhi $f'(x) = 0$ adalah $x = 1$, maka $f(1) = 1$. Dengan menganalisis $f(x)$, dapat diketahui bahwa $f'(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$ sehingga $f(x)$ monoton turun dalam selang $(0, 1)$. Di lain pihak $f'(x) > 0, \forall x \in (1, \infty)$ sehingga $f(x)$ monoton naik dalam selang $(1, \infty)$.

Berdasarkan Uraian tersebut, jelas bahwa $(1, 1)$ adalah titik minimum $f(x)$. Grafik fungsi $f(x)$ dapat dilihat pada Gambar 3.1, di mana dari gambar tersebut tampak jelas bahwa $f(x) \geq 1$. Pemisalan fungsi $f(x) = x - \ln(x)$ dapat diterapkan untuk menganalogikan pembuktian $L(S, I) > 0$.



Gambar 3.1 Grafik fungsi $f(x) = x - \ln(x)$

a) Misal $x = \frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}$ diperoleh

$$f\left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}\right) = \frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} - \ln\left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}\right) \geq 1,$$

sehingga

$$\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \geq 1 + \ln\left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}\right).$$

Diketahui $S^* > 0$, maka diperoleh

$$(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v) \geq (\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)$$

$$+(\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v) \ln\left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}\right)$$

$$(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v) - (\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)$$

$$-(\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v) \ln\left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}\right) \geq 0. \quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) dapat disederhanakan dengan membagi semua ruas dengan β sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)}{\beta} - \frac{(\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)}{\beta} \\ & - \frac{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) \geq 0 \\ & S - \frac{(-\mu_2 - \delta + \mu_3 + v)}{\beta} - S^* + \frac{(-\mu_2 - \delta + \mu_3 + v)}{\beta} \\ & - \frac{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) \geq 0 \\ & S - S^* - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat $S^* \neq S$, maka diperoleh

$$S - S^* - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) > 0. \quad (3.9)$$

b) Misal $x = \frac{I}{I^*}$ diperoleh $f\left(\frac{I}{I^*}\right) = \frac{I}{I^*} - \ln\left(\frac{I}{I^*}\right) \geq 1$, sehingga

$$\frac{I}{I^*} \geq 1 + \ln\left(\frac{I}{I^*}\right).$$

Diketahui $I^* > 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} I & \geq I^* \left(1 + \ln\left(\frac{I}{I^*}\right) \right) = I^* + I^* \ln\left(\frac{I}{I^*}\right) \\ I - I^* - I^* \ln\left(\frac{I}{I^*}\right) & \geq 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat $I \neq I^*$, maka diperoleh

$$I - I^* - I^* \ln\left(\frac{I}{I^*}\right) > 0. \quad (3.10)$$

Berdasarkan persamaan (3.9) dan (3.10) terbukti bahwa

$S - S^* - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) > 0$ dan $I - I^* - I^* \ln \left(\frac{I}{I^*} \right) > 0$,
sehingga

$$L(S, I) = (S - S^*) - \frac{\mu_3 + v + \gamma}{\beta} \ln \left(\frac{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \right) \\ + (I - I^*) - I^* \ln \left(\frac{I}{I^*} \right) > 0.$$

Selanjutnya $L(S, I)$ harus memenuhi Definisi 2.3.2 yaitu $L'(S, I) < 0$ untuk setiap $(S, I) \in \dot{\Omega} \setminus (E^*)$. Dengan menggunakan aturan rantai dilakukan penurunan terhadap fungsi $L(S, I)$, sehingga diperoleh

$$L'(S, I) = \frac{dL}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{dL}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} \\ = \frac{dS}{dt} - (\mu_3 + v + \gamma) \frac{(\mu_3 + v) + (\mu_2 + \delta - \mu_3 - v)I - (\mu_3 + v)S - \beta SI}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v} \\ + \beta SI - (\mu_2 + \delta + \gamma)I - I^* (\beta S - (\mu_2 + \delta + \gamma)).$$

Kemudian hasil $L'(S, I)$ disederhanakan sebagaimana terdapat pada Lampiran 1 agar mudah dianalisis bahwa $L'(S, I) < 0$, sehingga diperoleh

$$L'(S, I) = \frac{-(\mu_3 + v)\beta}{(\mu_3 + v + \gamma)} \left(\frac{\beta - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)} \right) (S^* - S)^2.$$

Perhatikan $\frac{\beta - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}$. Diberikan syarat $S \geq \frac{\mu_2 + \delta - \mu_3 - v}{\beta}$ pada domain $\dot{\Omega}$, sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa $\frac{\beta - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}$ positif.

Jelas bahwa $L(S, I)$ memenuhi Definisi 2.3.2 sehingga fungsi Lyapunov $L(S, I)$ untuk titik kesetimbangan endemi $E^* = (S^*, I^*)$ adalah fungsi Lyapunov kuat. Oleh karena itu, E^* stabil asimtotik global.

3.4 Simulasi Numerik

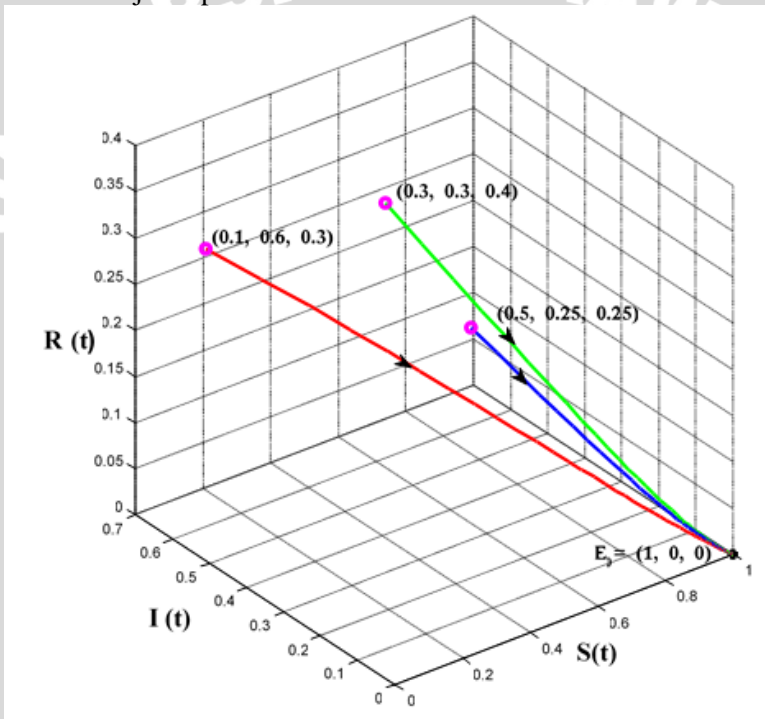
Pada subbab ini disajikan solusi numerik model yang diperoleh dengan metode Runga Kutta orde 4 untuk mensimulasikan hasil analitik yang diperoleh.

3.4.1 Simulasi Numerik untuk $R_0 < 1$

Simulasi numerik untuk kondisi $R_0 < 1$ menggunakan nilai parameter $\beta = 5$, $\gamma = 2$, $\mu_2 = 7$, $\mu_3 = 6$, $\delta = 3$, dan $v = 8$ sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu_2 + \delta + \gamma} = \frac{5}{2 + 3 + 7} = 0.41667 < 1.$$

Hasil simulasi numerik disajikan di ruang tiga dimensi (S, I, R) dengan $R = 1 - S - I$. Hasil simulasi menggunakan nilai parameter tersebut disajikan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Potret fase untuk $R_0 < 1$

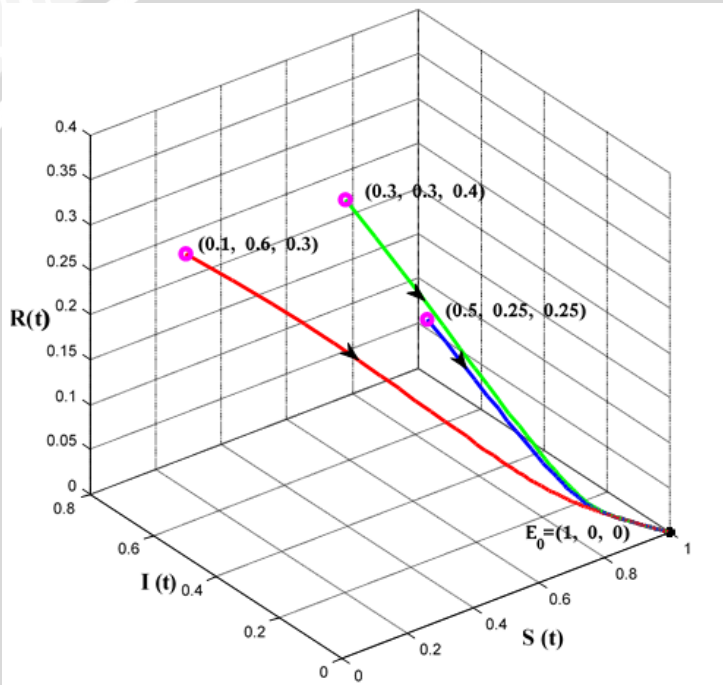
Pada Gambar 3.2 orbit-orbit solusi yang berawal dari nilai awal $(0.5, 0.25, 0.25)$, $(0.3, 0.3, 0.4)$, dan $(0.1, 0.6, 0.3)$ menuju titik kesetimbangan yang sama yaitu $E_0 = (1, 0, 0)$. Hasil simulasi numerik mendukung hasil analitik bahwa untuk $R_0 < 1$ hanya ada titik kesetimbangan bebas penyakit dan bersifat stabil asimtotik global.

3.4.2 Simulasi Numerik untuk $R_0 = 1$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal pada Subbab 3.4.1 dengan mengubah nilai parameter β menjadi 12, sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu_2 + \delta + \gamma} = \frac{12}{2+3+7} = 1.$$

Hasil simulasi numerik menggunakan nilai parameter tersebut disajikan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Potret fase untuk $R_0 = 1$

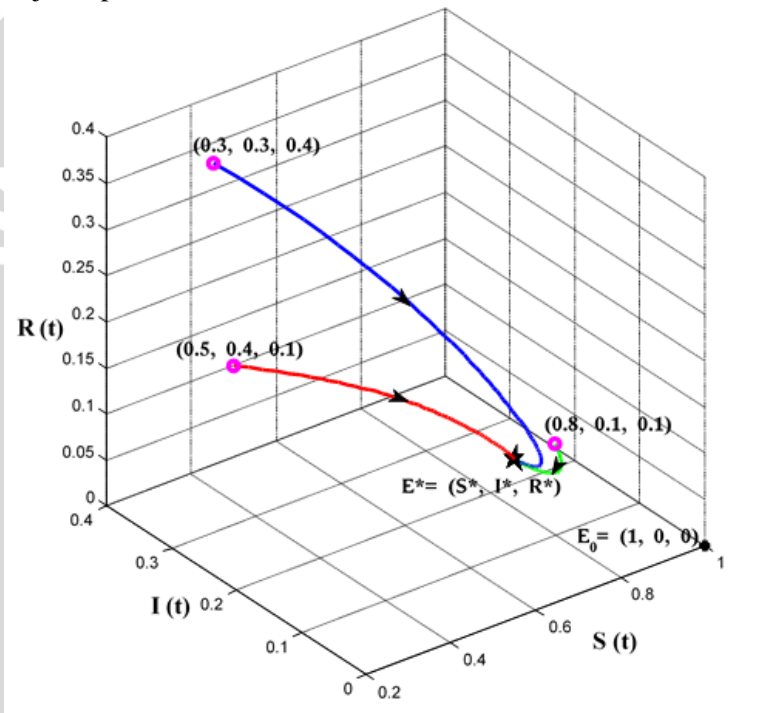
Hasil simulasi $R_0 = 1$ dapat dilihat pada Gambar 3.3. Berdasarkan Gambar 3.3, orbit-orbit solusi yang berawal dari nilai awal $(0.5, 0.25, 0.25)$, $(0.3, 0.3, 0.4)$, dan $(0.1, 0.6, 0.3)$ menuju titik kesetimbangan yang sama yaitu $E_0 = (1, 0, 0)$. Hasil simulasi numerik mendukung hasil analitik bahwa untuk $R_0 = 1$ hanya ada titik kesetimbangan bebas penyakit dan bersifat stabil asimtotik global.

3.4.3 Simulasi Numerik untuk $R_0 > 1$

Simulasi numerik untuk kondisi $R_0 > 1$ menggunakan nilai parameter $\beta = 14, \gamma = 2, \mu_2 = 6, \delta = 3, \mu_3 = 3,$ dan $v = 2,$ sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu_2 + \delta + \gamma} = \frac{14}{6 + 3 + 2} = 1.27273 > 1.$$

Hasil simulasi numerik menggunakan nilai parameter tersebut disajikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Potret fase untuk $R_0 > 1$

Pada Gambar 3.4 orbit-orbit solusi yang berawal dari nilai awal $(0.3, 0.3, 0.4), (0.5, 0.4, 0.1),$ dan $(0.8, 0.1, 0.1)$ menuju titik kesetimbangan yang sama yaitu $E^* = (S^*, I^*, R^*),$ di mana nilai dari $S^* = 0.7857, I^* = 0.1531,$ dan $R^* = 0.0612.$ Hasil simulasi numerik mendukung hasil analitik bahwa untuk $R_0 > 1$ terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemi.

3.5 Interpretasi Hasil

Hasil analisis antara model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian seragam dan beragam menunjukkan bahwa titik kesetimbangan kedua model tersebut dipengaruhi oleh angka reproduksi dasar (R_0) yang ditentukan oleh tingkat kematian alami individu. Perbedaan hasil analisis antara kedua model, yaitu jika pada model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian seragam nilai R_0 dipengaruhi oleh tingkat kematian alami individu (μ), sedangkan untuk model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam nilai R_0 hanya dipengaruhi oleh tingkat kematian alami individu terinfeksi (μ_2). Hal ini terjadi karena apabila tingkat kematian alami individu terinfeksi (μ_2) bernilai besar, maka banyaknya individu baru yang terinfeksi (R_0) kecil dan sebaliknya apabila tingkat kematian alami individu terinfeksi bernilai (μ_2) kecil, maka banyaknya individu baru yang terinfeksi (R_0) besar. Apabila banyaknya individu baru yang terinfeksi (R_0) besar, maka dapat menyebabkan kepunahan suatu populasi.



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pembahasan skripsi ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam merupakan persamaan diferensial biasa nonlinear dengan tiga variabel tak bebas.
2. Model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemi. Eksistensi dua titik kesetimbangan ditentukan oleh angka reproduksi dasar (R_0) yang dipengaruhi oleh tingkat kematian alami individu terinfeksi (μ_2). Apabila tingkat kematian alami individu terinfeksi bernilai besar, maka individu baru yang terinfeksi menjadi kecil sehingga dapat meminimalkan potensi kepunahan suatu populasi akibat infeksi penyakit.
3. Berdasarkan analisis pada titik kesetimbangan, jika $R_0 \leq 1$ hanya satu titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis, sedangkan jika $R_0 > 1$ terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemi. Analisis kestabilan global membuktikan bahwa jika $R_0 \leq 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka kesetimbangan endemi stabil asimtotik global.
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

4.2 Saran

Pada pembahasan skripsi ini telah dijelaskan tentang analisis dinamik model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam di mana tingkat kejadian infeksi linear. Pada penulisan selanjutnya, disarankan agar dilakukan analisis dinamik model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam apabila tingkat kejadian infeksi nonlinear.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

