**Lampiran 1. Perhitungan pembuktian syarat fungsi Lyapunov kuat untuk $E^*$**

$$
\begin{aligned}
L'(S,I) &= \frac{dL}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} + \frac{dL}{dI}\cdot\frac{dI}{dt} \\
&= \frac{dS}{dt} - (\mu_3+\upsilon+\gamma)\,\frac{(\mu_3+\upsilon)+(\mu_2+\delta-\mu_3-\upsilon)I}{\beta S-\mu_2-\delta+\mu_3+\upsilon} \\
&\quad -(\mu_3+\upsilon+\gamma)\frac{(\mu_3+\upsilon)S+\beta SI}{\beta S-\mu_2-\delta+\mu_3+\upsilon} + \beta SI \\
&\quad -(\mu_2+\delta+\gamma)I - I^*\left(\beta S-(\mu_2+\delta+\gamma)\right) \\
&= \frac{dS}{dt} - (\mu_3+\upsilon+\gamma)\frac{(\mu_3+\upsilon)-(\mu_3+\upsilon)S}{\beta S-\mu_2-\delta+\mu_3+\upsilon} \\
&\quad -(\mu_3+\upsilon+\gamma)\frac{(\mu_2+\delta-\mu_3-\upsilon-\beta S)I}{\beta S-\mu_2-\delta+\mu_3+\upsilon} \\
&\quad +\left(\beta S-(\mu_2+\delta+\gamma)\right)I - I^*\left(\beta S-(\mu_2+\delta+\gamma)\right) \\
&= (\mu_3+\upsilon)+(\mu_2+\delta-\mu_3-\upsilon)I-(\mu_3+\upsilon)S-\beta SI \\
&\quad -(\mu_3+\upsilon+\gamma)\frac{(\mu_3+\upsilon)-(\mu_3+\upsilon)S}{\beta S-\mu_2-\delta+\mu_3+\upsilon} + (\mu_3+\upsilon+\gamma)I \\
&\quad +\beta SI-(\mu_2+\delta+\gamma)I - I^*\left(\beta S-(\mu_2+\delta+\gamma)\right) \\
&= (\mu_3+\upsilon)-(\mu_3+\upsilon)S \\
&\quad -(\mu_3+\upsilon+\gamma)\frac{(\mu_3+\upsilon)-(\mu_3+\upsilon)S}{\beta S-\mu_2-\delta+\mu_3+\upsilon} \\
&\quad -I^*\left(\beta S-(\mu_2+\delta+\gamma)\right) \\
&= (\mu_3+\upsilon)(1-S)-(\mu_3+\upsilon+\gamma)\frac{(\mu_3+\upsilon-\mu_3 S-\upsilon S)}{\beta S-\mu_2-\delta+\mu_3+\upsilon} \\
&\quad -I^*\left(\beta S-(\mu_2+\delta+\gamma)\right)
\end{aligned}
$$

$$= (\mu_3 + \upsilon)(1 - S)\left(1 - \frac{\mu_3 + \upsilon + \gamma}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon}\right)$$
$$-I^*\big(\beta S - (\mu_2 + \delta + \gamma)\big)$$
$$= (\mu_3 + \upsilon)(1 - S)\left(1 - \frac{\mu_3 + \upsilon + \gamma}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon}\right)$$
$$-\frac{\mu_3 + \upsilon}{(\mu_3 + \upsilon + \gamma)(1 - S^*)\big(\beta S - (\mu_2 + \delta + \gamma)\big)}$$
$$= (\mu_3 + \upsilon)(1 - S)\left(1 - \frac{\mu_3 + \upsilon + \gamma}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon}\right)$$
$$-\frac{\mu_3 + \upsilon}{\mu_3 + \upsilon + \gamma}(1 - S^*)(\beta S - \beta S^*)$$
$$= (\mu_3 + \upsilon)(1 - S)\left(\frac{-\mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon + \beta S - \mu_3 - \upsilon - \gamma}{-\mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon + \beta S}\right)$$
$$-\frac{\mu_3 + \upsilon}{(\mu_3 + \upsilon + \gamma)(1 - S^*)(\beta S - \beta S^*)}$$
$$= (\mu_3 + \upsilon)(1 - S)\left(\frac{\beta S - \beta S^*}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon}\right)$$
$$-\frac{\mu_3 + \upsilon}{\mu_3 + \upsilon + \gamma}(1 - S^*)(\beta S - \beta S^*)$$
$$= -(\mu_3 + \upsilon)\beta(S^* - S)\left(\frac{(1 - S)}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon} - \frac{(1 - S^*)}{\mu_3 + \upsilon + \gamma}\right)$$
$$= -(\mu_3 + \upsilon)\beta(S^* - S)\left(\frac{(1-S)}{\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon} - \frac{(1-S^*)}{\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon}\right)$$
$$= -(\mu_3 + \upsilon)\beta(S^* - S)$$
$$\left(\frac{(\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon)(1-S) - (1-S^*)(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon)}{(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon)(\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon)}\right)$$
$$= -(\mu_3 + \upsilon)\beta(S^* - S)$$
$$\left(\frac{\beta(S^* - S) + (-\mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon)(S^* - S)}{(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon)(\beta S^* - \mu_2 - \delta + \mu_3 + \upsilon)}\right)$$

$$= -(\mu_3 + v)\beta(S^* - S)\left(\frac{(S^* - S)(\beta - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)}{(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)(\mu_3 + v + \gamma)}\right)$$

$$= \frac{-(\mu_3 + v)\beta}{(\mu_3 + v + \gamma)}\left(\frac{\beta - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v}{(\beta S - \mu_2 - \delta + \mu_3 + v)}\right)(S^* - S)^2.$$