GRADED IDEAL SEMIPRIMA

SKRIPSI

oleh:
ROSALINA ANGGRAINI
105090400111027

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

GRADED IDEAL SEMIPRIMA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
ROSALINA ANGGRAINI
105090400111027

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

***GRADED* IDEAL SEMIPRIMA**

oleh:
ROSALINA ANGGRAINI
105090400111027

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 11 April 2014
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dra. Ari Andari, MS.
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Rosalina Anggraini**
NIM	**: 105090400111027**
Jurusan	**: Matematika**
Judul skripsi	**: *Graded* Ideal Semiprima**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub pada isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini,**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyatan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 11 April 2014
Yang menyatakan,

(Rosalina Anggraini)
NIM.105090400111027

GRADED IDEAL SEMIPRIMA

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas mengenai *graded* ideal semiprima dari *G-graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol. Suatu *G-graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol didefinisikan sebagai *direct sum* subgrup-subgrup aditif sebanyak order grup *G* dari ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan memenuhi syarat tertentu, sedangkan *graded ideal* didefinisikan sebagai *direct sum* irisan ideal dengan subgrup aditif sebanyak order grup *G* dari ring komutatif dengan elemen identitas tak nol. Suatu *graded ideal* adalah *graded* ideal semiprima jika dan hanya jika *graded* ring faktor dari *G-graded* ring oleh *graded ideal*-nya tidak memiliki elemen nilpoten tak nol.

Kata Kunci: *G-graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol, *graded ideal*, *graded* ideal semiprima.

SEMIPRIME GRADED IDEALS

ABSTRACT

In this paper, we observe about semiprime graded ideals of commutative G-graded rings with non zero identity. A commutative G-graded rings with non zero identity is defined as a direct sum of some additive subgroups whose order G from commutative rings with non zero identity and satisfy certain conditions, whereas graded ideals is defined as a direct sum of ideals intersection and additive subgroups whose order G from commutative rings with non zero identity. A graded ideals is called semiprime graded ideals if and only if the quotient graded rings from G-graded rings by their graded ideals have no nonzero nilpotent elements.

Keywords: commutative G-graded rings with non zero identity, graded ideals, semiprime graded ideals.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Graded* Ideal Semiprima" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika.

Keberhasilan penyusunan skripsi ini tidak lepas dari kerjasama dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dra. Ari Andari, M.S selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, saran, dan motivasi kepada penulis selama pengerjaan dan penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Bambang Sugandi, M.Si dan Vira Hari Krisnawati, S.Si., M.Sc selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran selama pengerjaan dan penyusunan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, M.T selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Drs. Imam Nurhadi, M.T selaku Dosen Penasehat Akademik penulis atas motivasi dan nasihat yang telah diberikan selama kuliah.
5. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta seluruh staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Ibu, Bapak, dan Adik tercinta serta keluarga besar penulis yang tiada henti mendoakan dan memberikan dukungan kepada penulis.
7. Sahabat dan orang terkasih yang selalu menjadi penyemangat penulis.
8. Keluarga besar Matematika A 2010 atas kerjasama, kebersamaan, dukungan, dan semangat selama ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca melalui email *oca_lina92@yahoo.co.id*. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan semua pihak umumnya.

Malang, 11 April 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran Halaman

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
G	Grup
$\mathbb{Z}$	himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}_n$	himpunan bilangan bulat modulo n
R	Ring
$R[x]$	ring polinomial
$R/_I$	ring faktor dari R oleh ideal I
$\oplus$	*direct sum* atau jumlah langsung
$\times$	*direct product*
(R, G)	G-*graded* ring komutatif
R_g	subgrup penjumlahan dari R dengan indeks elemen G
$\mathbb{Z}^+$	himpunan bilangan bulat positif
P_g	subgrup semiprima dari R_g
$\sum$	sigma atau jumlahan biasa
$(R, G)/_I$	*graded* ring faktor dari (R, G) oleh *graded ideal* I
$(\Longrightarrow)$	bukti ke kanan
$(\Longleftarrow)$	bukti ke kiri
$\blacksquare$	akhir sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar atau sistem aljabar adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner. Banyaknya operasi biner dan aksioma yang menyertai himpunan menjadi pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan yang lain. Ring adalah struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan pergandaan serta memenuhi aksioma tertentu. Suatu ring yang memenuhi sifat komutatif terhadap operasi pergandaan disebut ring komutatif. Di dalam ring dibahas mengenai ideal. Terdapat beberapa macam ideal dari ring komutatif, salah satunya adalah ideal semiprima.

Konsep ring terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah G-*graded* ring komutatif, yaitu *direct sum* subgrup-subgrup aditif sebanyak order grup G dari ring komutatif R dan memenuhi syarat tertentu. Konsep ideal juga mengalami perkembangan, salah satunya adalah *graded ideal*, yaitu *direct sum* irisan ideal dengan subgrup aditif sebanyak order grup G dari ring komutatif R.

Pada tahun 2004 diperkenalkan konsep *graded* ideal prima oleh M. Refaei dan K. Alzobi dalam jurnal yang berjudul *On Graded Primary Ideals*. Selanjutnya, pada tahun 2013 Farkhonde Farzalipour dan Peyman Ghiasvand memperkenalkan jurnal yang berjudul *On Graded Semiprime and Graded Weakly Semiprime Ideals*. Oleh karena itu, skripsi ini mengkaji ulang jurnal tersebut serta membahas definisi, contoh, dan sifat-sifat dari *graded* ideal semiprima yang berupa lemma, proposisi, dan teorema beserta buktinya.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana definisi dan contoh dari *graded* ideal semiprima.
2. Bagaimana sifat-sifat dari *graded* ideal semiprima.

1.3 Tujuan

Tujuan pembahasan skripsi ini sebagai berikut.

1. Membahas definisi dan contoh dari *graded* ideal semiprima.
2. Membahas sifat-sifat dari *graded* ideal semiprima

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan definisi, contoh, teorema, dan lemma sebagai acuan untuk membahas permasalahan yang akan disampaikan pada bab selanjutnya.

2.1 Pemetaan, Operasi Biner, dan Struktur Aljabar

Definisi 2.1.1 (Pemetaan)
Misalkan A dan B adalah himpunan. Sebuah relasi f dari A ke B disebut pemetaan (peta atau fungsi) dari A ke B, jika untuk setiap elemen x di A terdapat tepat satu elemen y di B (disebut *image* dari x oleh f) sedemikian sehingga $f(x) = y$.

(Bhattacharya, dkk., 1995)

Operasi biner merupakan salah satu kasus khusus dari pemetaan. Adapun definisi dari operasi biner dan struktur aljabar adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.2 (Operasi biner)
Operasi biner pada himpunan S adalah pemetaan $*$ yang menghubungkan semua elemen pasangan terurut (x, y) dari $S \times S$ ke elemen S, yang dinotasikan

$$* : S \times S \longrightarrow S$$
$$(x, y) \longmapsto * (x, y) = x * y$$

(Bhattacharya, dkk., 1995)

Definisi 2.1.3 (Struktur aljabar)
Struktur aljabar atau sistem aljabar adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner.

(Bhattacharya, dkk., 1995)

2.2 Semigrup

Semigrup merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan semigrup.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)
Misalkan S adalah himpunan tak kosong dan didefinisikan operasi biner $*$, maka struktur aljabar $(S, *)$ disebut semigrup jika dan hanya jika memenuhi aksioma berikut.

i. S tertutup terhadap operasi biner $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in S$ maka $a * b \in S$.
ii. Operasi biner $*$ asosiatif pada S, yaitu untuk setiap $a, b, c \in S$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.2
Diberikan himpunan $2\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan. Maka $(2\mathbb{Z}, +)$ merupakan semigrup.

Bukti.
Akan ditunjukkan bahwa $(2\mathbb{Z}, +)$ memenuhi aksioma semigrup. Ambil sebarang $a, b, c \in 2\mathbb{Z}$. Misalkan $a = 2x_1$, $b = 2x_2$, dan $c = 2x_3$ untuk $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, maka berlaku

i. Tertutup terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned} a + b &= 2x_1 + 2x_2 \\ &= 2(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Karena $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ maka $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $2(x_1 + x_2) \in 2\mathbb{Z}$.

ii. Asosiatif terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= (2x_1 + 2x_2) + 2x_3 \\ &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= 2x_1 + (2x_2 + 2x_3) \\ &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Karena i dan ii terpenuhi maka $(2\mathbb{Z}, +)$ merupakan semigrup. ■

2.3 Grup

Grup merupakan suatu semigrup yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan grup.

Definisi 2.3.1 (Grup)
Suatu struktur aljabar $(G, *)$ di mana G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner pada G, maka G disebut grup jika dan hanya jika memenuhi aksioma berikut.

i. Tertutup, artinya untuk setiap $a, b \in G$ terdapatlah tepat satu $c \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * b = c$.
ii. Asosiatif, artinya untuk setiap $a, b, c \in G$ sedemikian sehingga berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
iii. Mempunyai elemen identitas.

Terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$, sedemikian sehingga berlaku $a * e = e * a = a$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.

Untuk setiap $a \in G$ terdapatlah $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(Chaudhuri, 1983)

Contoh 2.3.2
Diberikan $G \subseteq \mathbb{Z}$, yaitu $G = \{1, -1\}$ dengan operasi pergandaan. Maka $(G, \bullet)$ adalah grup.

Bukti.

Tabel 2.1 Operasi pergandaan pada G

$\bullet$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-1}$
$\mathbf{1}$	1	-1
$\mathbf{-1}$	-1	1

Berdasarkan Tabel 2.1, terlihat bahwa

i. Tertutup terhadap pergandaan terpenuhi.
ii. Asosiatif terhadap pergandaan.

Ambil sebarang $a, b, c \in G$. Misalkan $a = -1$, $b = 1$, dan $c = -1$, maka

$(a \bullet b) \bullet c = (-1 \bullet 1) \bullet (-1) = (-1) \bullet (-1) = 1,$

$a \bullet (b \bullet c) = (-1) \bullet \left(1 \bullet (-1)\right) = (-1) \bullet (-1) = 1.$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in G$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$

iii. Memiliki elemen identitas yaitu 1, sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $1 \bullet a = a \bullet 1 = a$.
iv. Setiap elemen memiliki invers, yaitu:
invers dari 1 adalah 1 sedemikian sehingga $1 \bullet 1 = 1$,
invers dari -1 adalah -1 sedemikian sehingga $-1 \bullet (-1) = 1$.
Karena aksioma i, ii, iii, dan iv terpenuhi maka $(G, \bullet)$ merupakan grup. ■

Definisi 2.3.3 (Grup komutatif)
Sebuah grup G disebut komutatif (abelian) jika operasi binernya memenuhi hukum komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

(Chaudhuri, 1983)

Contoh 2.3.4
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_4$. Maka $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup komutatif.

Bukti.

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.2, terlihat bahwa
i. Tertutup terhadap penjumlahan terpenuhi.
ii. Asosiatif terhadap penjumlahan.
Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{2}$, $b = \bar{3}$, dan $c = \bar{1}$, maka
$(a + b) + c = (\bar{2} + \bar{3}) + \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$,
$a + (b + c) = \bar{2} + (\bar{3} + \bar{1}) = \bar{2} + \bar{0} = \bar{2}$.
Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
iii. Mempunyai elemen identitas yaitu $\bar{0}$, sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$.

iv. Setiap elemen memiliki invers, yaitu:

invers dari $\overline{0}$ adalah $\overline{0}$ sedemikian sehingga $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$,
invers dari $\overline{1}$ adalah $\overline{3}$ sedemikian sehingga $\overline{1} + \overline{3} = \overline{0}$,
invers dari $\overline{2}$ adalah $\overline{2}$ sedemikian sehingga $\overline{2} + \overline{2} = \overline{0}$,
invers dari $\overline{3}$ adalah $\overline{1}$ sedemikian sehingga $\overline{3} + \overline{1} = \overline{0}$.

v. Komutatif terhadap penjumlahan.

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \overline{2}$ dan $b = \overline{3}$ maka $a + b = b + a = \overline{1}$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$, $a + b = b + a$.

Karena aksioma i, ii, iii, iv, dan v terpenuhi maka $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup komutatif. ■

Definisi 2.3.5 (Subgrup)

Sebuah himpunan tak kosong H yang merupakan subset dari grup G disebut subgrup dari G, jika H merupakan grup dengan operasi biner yang sama dengan G.

(Chaudhuri, 1983)

Teorema 2.3.6

Misalkan $(G, *)$ adalah grup dan H subset dari G. H disebut subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi

i. untuk setiap $a, b \in H$, maka $a * b \in H$.

ii. untuk setiap $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$.

(Bhattacharya, dkk., 1995)

Bukti.

$(\Rightarrow)$ Diketahui H subgrup dari G. Karena H subgrup, berarti H adalah grup, sehingga i dan ii terpenuhi.

$(\Leftarrow)$ Diketahui H subset dari G dan berlaku i dan ii. Akan dibuktikan H subgrup. Tertutup telah dipenuhi oleh i. Assosiatif dengan sendirinya dipenuhi karena semua elemen di H juga merupakan elemen di G. Ambil sebarang $a \in H$, dari ii maka terdapat $a^{-1} \in H$. Karena $a, a^{-1} \in H$ dan berlaku sifat tertutup. Maka $a * a^{-1} \in H$, sehingga diperoleh $a * a^{-1} = e \in H$. Setiap elemen mempunyai invers dipenuhi oleh ii. ■

Contoh 2.3.7
Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ dan $H = \{3n | n \in \mathbb{Z}\}$ adalah subset dari $\mathbb{Z}$. Maka $(H, +)$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}$.

Bukti.
Himpunan $H = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \ldots\}$ subset dari $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa H adalah subgrup.

i. Ambil sebarang $a, b \in H$. Misalkan $a = 3n_1$ dan $b = 3n_2$ untuk $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} a + b &= 3n_1 + 3n_2 \\ &= 3(n_1 + n_2). \end{aligned}$$

Karena $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, maka $n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $3(n_1 + n_2) \in H$.

ii. Untuk setiap $3n \in H$ memiliki invers $-3n \in H$, sedemikian sehingga

$$3n + (-3n) = 0.$$

Terbukti $(H, +)$ adalah subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$. ■

2.4 Ring

Ring merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan ring.

Definisi 2.4.1 (Ring)
Misalkan R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan pergandaan. Maka $(R, +, \bullet)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut.

I. $(R, +)$ grup komutatif.
II. $(R, \bullet)$ semigrup.
III. Berlaku hukum distributif kiri dan kanan, yaitu
i. untuk setiap $a, b, c \in R$, $a(b + c) = ab + ac$
ii. untuk setiap $a, b, c \in R$, $(b + c)a = ba + ca$

(Chaudhuri, 1983)

Contoh 2.4.2

Diberikan himpunan matriks $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$. Maka $(M, +, \bullet)$ merupakan ring.

Bukti.

Ambil sebarang matriks $A, B, C \in M$. Misalkan
$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix}$.

I. Akan ditunjukkan $(M, +)$ grup komutatif.

Terhadap penjumlahan berlaku:

i. Tertutup

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 0 & z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in M.$$

ii. Asosiatif: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 0 & z_1 + z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & z_1 + z_2 + z_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + x_3 & y_2 + y_3 \\ 0 & z_2 + z_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & z_1 + z_2 + z_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

iii. Terdapat elemen identitas $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ sedemikian sehingga

$$A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + A = A.$$

iv. Untuk setiap $A \in M$ mempunyai invers.

Jika $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}$ maka invers dari A adalah

$$-A = \begin{bmatrix} -x_1 & -y_1 \\ 0 & -z_1 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga $A + (-A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

v. Komutatif: $A + B = B + A$

$$A + B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 0 & z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

$$B + A = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 0 & z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

II. Akan ditunjukkan $(M,\bullet)$ semigrup.

Terhadap pergandaan berlaku:

i. Tertutup

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \bullet x_2 & x_1 \bullet y_2 + y_1 \bullet z_2 \\ 0 & z_1 \bullet z_2 \end{bmatrix} \in M.$$

ii. Asosiatif: $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$.

$$(A \bullet B) \bullet C = \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) \bullet \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \bullet x_2 & x_1 \bullet y_2 + y_1 \bullet z_2 \\ 0 & z_1 \bullet z_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 & x_1 \bullet x_2 \bullet y_3 + z_3(x_1 \bullet y_2 + y_1 \bullet z_2) \\ 0 & z_1 \bullet z_2 \bullet z_3 \end{bmatrix}.$$

$$A \bullet (B \bullet C) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 \bullet x_3 & x_2 \bullet y_3 + y_2 \bullet z_3 \\ 0 & z_2 \bullet z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 & x_1(x_2 \bullet y_3 + y_2 \bullet z_3) + y_1(z_2 \bullet z_3) \\ 0 & z_1 \bullet z_2 \bullet z_3 \end{bmatrix}.$$

III. Berlaku hukum distributif kiri dan kanan.

i. Hukum distributif kiri: $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$

$$A \bullet (B + C) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 + x_3 & y_2 + y_3 \\ 0 & z_2 + z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \bullet (x_2 + x_3) & x_1 \bullet (y_2 + y_3) + y_1 \bullet (z_2 + z_3) \\ 0 & z_1 \bullet (z_2 + z_3) \end{bmatrix}.$$

$$A \bullet B + A \bullet C = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \bullet x_2 & x_1 \bullet y_2 + y_1 \bullet z_2 \\ 0 & z_1 \bullet z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \bullet x_3 & x_1 \bullet y_3 + y_1 \bullet z_3 \\ 0 & z_1 \bullet z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \bullet (x_2 + x_3) & x_1 \bullet (y_2 + y_3) + y_1 \bullet (z_2 + z_3) \\ 0 & z_1 \bullet (z_2 + z_3) \end{bmatrix}.$$

ii. Hukum distributif kanan: $(B + C) \bullet A = B \bullet A + C \bullet A$

$$(B + C) \bullet A = \left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \right) \bullet \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 + x_3 & y_2 + y_3 \\ 0 & z_2 + z_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_2 + x_3) \bullet x_1 & (x_2 + x_3) \bullet y_1 + (y_2 + y_3) \bullet z_1 \\ 0 & (z_2 + z_3) \bullet z_1 \end{bmatrix}.$$

$$B \bullet A + C \bullet A = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & z_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \bullet x_1 & x_2 \bullet y_1 + y_2 \bullet z_1 \\ 0 & z_2 \bullet z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \bullet x_1 & x_3 \bullet y_1 + y_3 \bullet z_1 \\ 0 & z_3 \bullet z_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_2 + x_3) \bullet x_1 & (x_2 + x_3) \bullet y_1 + (y_2 + y_3) \bullet z_1 \\ 0 & (z_2 + z_3) \bullet z_1 \end{bmatrix}.$$

Karena aksioma I, II, III terpenuhi maka $(M, +, \bullet)$ merupakan ring. ■

Definisi 2.4.3 (Ring komutatif)
Jika dalam ring R terhadap operasi pergandaan berlaku aksioma komutatif maka ring R disebut ring komutatif atau abelian.

(Chaudhuri, 1983)

Contoh 2.4.4
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_4$. Maka $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan ring komutatif.

Bukti.

I. Berdasarkan Contoh 2.3.4, $(\mathbb{Z}_4, +)$ grup komutatif.

II. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ semigrup komutatif.

Tabel 2.3 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\bullet$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.3, terlihat bahwa

i. Tertutup terhadap pergandaan terpenuhi.

ii. Asosiatif terhadap pergandaan.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{2}$, $b = \bar{1}$, dan $c = \bar{3}$, maka

$(a \bullet b) \bullet c = (\bar{2} \bullet \bar{1}) \bullet \bar{3} = \bar{2} \bullet \bar{3} = \bar{2}$,

$a \bullet (b \bullet c) = \bar{2} \bullet (\bar{1} \bullet \bar{3}) = \bar{2} \bullet \bar{3} = \bar{2}$.

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

iii. Komutatif terhadap pergandaan.

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{2}$ dan $b = \bar{1}$, maka $a \bullet b = b \bullet a = \bar{2}$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$, $a \bullet b = b \bullet a$.

III. Berlaku hukum distributif kiri dan kanan.

Ambil $a = \bar{1}$, $b = \bar{2}$, dan $c = \bar{3}$. Berdasakan Tabel 2.2 dan Tabel 2.3 memenuhi aksioma berikut.

i. Hukum distributif kiri: $\bar{1} \bullet (\bar{2} + \bar{3}) = \bar{1} \bullet \bar{2} + \bar{1} \bullet \bar{3} = \bar{1}$,

ii. Hukum distributif kanan: $(\bar{2} + \bar{3}) \bullet \bar{1} = \bar{2} \bullet \bar{1} + \bar{3} \bullet \bar{1} = \bar{1}$.

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ dan $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$.

Karena aksioma I, II, III terpenuhi maka $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan ring komutatif. ■

Definisi 2.4.5 (Ring dengan elemen satuan)
Jika dalam ring R terhadap operasi pergandaan terdapat elemen e sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a \bullet e = e \bullet a = a$, maka R disebut ring dengan elemen satuan.

(Chaudhuri, 1983)

Contoh 2.4.6
Berdasarkan Contoh 2.4.4 dan terlihat pada Tabel 2.3 bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ memiliki elemen satuan yaitu $\bar{1}$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a \bullet \bar{1} = \bar{1} \bullet a = a$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan ring dengan elemen satuan.

Definisi 2.4.7 (Subgrup aditif dari ring)
Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring, $(R, +)$ adalah grup aditif dari $(R, +, \bullet)$, dan $(S, +)$ adalah subgrup dari $(R, +)$. Maka $(S, +)$ adalah subgrup aditif dari $(R, +, \bullet)$.

(Hartley dan Hawkes, 1970)

2.5 Elemen Nilpoten

Elemen nilpoten merupakan suatu elemen dalam ring sedemikian sehingga memenuhi syarat tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh elemen nilpoten.

Definisi 2.5.1 (Elemen nilpoten)
Misalkan R adalah ring, suatu $a \in R$ disebut elemen nilpoten jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$.

(Bhattacharya, dkk., 1995)

Contoh 2.5.2
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_8, +, \bullet)$. Akan ditentukan elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_8$.

Penyelesaian.
$\mathbb{Z}_8$ memiliki anggota sebagai berikut, $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$.
Untuk $\bar{0}$ terdapat $n = 1$, sedemikian sehingga $\bar{0}^1 = \bar{0}$.

Untuk $\bar{1}$ tidak dapat ditemukan nilai n berapapun, sedemikian sehingga $\bar{1}^n = \bar{0}$.
Untuk $\bar{2}$ terdapat $n = 3$, sedemikian sehingga $\bar{2}^3 = \bar{0}$.
Untuk $\bar{3}$ tidak dapat ditemukan nilai n berapapun, sedemikian sehingga $\bar{3}^n = \bar{0}$.
Untuk $\bar{4}$ terdapat $n = 2$, sedemikian sehingga $\bar{4}^2 = \bar{0}$.
Untuk $\bar{5}$ tidak dapat ditemukan nilai n berapapun, sedemikian sehingga $\bar{5}^n = \bar{0}$.
Untuk $\bar{6}$ terdapat $n = 3$, sedemikian sehingga $\bar{6}^3 = \bar{0}$.
Untuk $\bar{7}$ tidak dapat ditemukan nilai n berapapun, sedemikian sehingga $\bar{7}^n = \bar{0}$.
Berdasarkan uraian yang telah diberikan, maka elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$.

2.6 Ring Polinomial

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan ring polinomial.

Definisi 2.6.1 (Polinomial)
Misalkan R adalah ring dan diberikan jumlahan dalam bentuk

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

di mana $n \geq 0$ dan setiap $a_i \in R$ disebut polinomial dalam variabel x dengan koefisien a_i di R. Jika $a_n \neq 0$ maka disebut polinomial berderajat n.

(Dummit dan Foote, 2004)

Definisi 2.6.2 (Ring polinomial)
Himpunan semua polinomial di mana koefisien polinomial anggota dari R yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan membentuk sebuah ring yang disebut ring polinomial atas R, dan dinotasikan dengan $R[x]$.

(Dummit dan Foote, 2004)

Contoh 2.6.3
Berdasarkan Contoh 2.4.4, $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring komutatif.

Diberikan $\mathbb{Z}_4[x] = \{a + bx | a, b \in \mathbb{Z}_4\}$ dan didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut.

$$(a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x,$$
$$(a_1 + b_1x) \bullet (a_2 + b_2x) = (a_1 \bullet a_2) + (b_1 \bullet b_2)x.$$

Maka $(\mathbb{Z}_4[x], +, \bullet)$ merupakan ring polinomial.

Bukti.

Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_4[x], +, \bullet)$ memenuhi aksioma ring. Ambil sebarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$ dengan $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $f(x) = \bar{1} + \bar{2}x,\ g(x) = \bar{2} + \bar{1}x,\ h(x) = \bar{2} + \bar{0}x$.

I. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_4[x], +)$ grup komutatif.

i. Tertutup terhadap penjumlahan terpenuhi dari definisi.

ii. Asosiatif terhadap penjumlahan.

$$\begin{aligned}\big(f(x) + g(x)\big) + h(x) &= \big((\bar{1} + \bar{2}x) + (\bar{2} + \bar{1}x)\big) + (\bar{2} + \bar{0}x)\\ &= (\bar{3} + \bar{3}x) + (\bar{2} + \bar{0}x)\\ &= \bar{1} + \bar{3}x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) &= (\bar{1} + \bar{2}x) + \big((\bar{2} + \bar{1}x) + (\bar{2} + \bar{0}x)\big)\\ &= (\bar{1} + \bar{2}x) + (\bar{0} + \bar{1}x)\\ &= \bar{1} + \bar{3}x.\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$ dengan $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_4$ (lihat Lampiran 1).

iii. Terdapat elemen identitas $e = (\bar{0} + \bar{0}x)$, sehingga untuk setiap $f(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$ berlaku $f(x) + (\bar{0} + \bar{0}x) = f(x)$.

iv. Setiap $f(x)$ mempunyai invers yaitu $-f(x) = -a + (-b)x$.

v. Komutatif terhadap penjumlahan.

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (\bar{3} + \bar{3}x)$.

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$ di mana $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_4$ (lihat Lampiran 1).

II. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_4[x], \bullet)$ semigrup.

i. Tertutup terhadap pergandaan terpenuhi dari definisi.

ii. Asosiatif terhadap pergandaan.

$$\begin{aligned}\big(f(x) \bullet g(x)\big) \bullet h(x) &= \big((\bar{1} + \bar{2}x) \bullet (\bar{2} + \bar{1}x)\big) \bullet (\bar{2} + \bar{0}x)\\ &= (\bar{2} + \bar{2}x) \bullet (\bar{2} + \bar{0}x)\\ &= (\bar{0} + \bar{0}x) = \bar{0}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) \bullet \big(g(x) \bullet h(x)\big) &= (\bar{1} + \bar{2}x) \bullet \big((\bar{2} + \bar{1}x) \bullet (\bar{2} + \bar{0}x)\big) \\
&= (\bar{1} + \bar{2}x) \bullet (\bar{0} + \bar{0}x) \\
&= (\bar{0} + \bar{0}x) = \bar{0}.
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$ (lihat Lampiran 2).

III. Berlaku hukum distributif kiri dan kanan.

i. Hukum distributif kiri.

$$
\begin{aligned}
f(x) \bullet \big(g(x) + h(x)\big) &= (\bar{1} + \bar{2}x) \bullet \big((\bar{2} + \bar{1}x) + (\bar{2} + \bar{0}x)\big) \\
&= (\bar{1} + \bar{2}x) \bullet (\bar{0} + \bar{1}x) \\
&= (\bar{0} + \bar{2}x) = \bar{2}x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet h(x) &= (\bar{1} + \bar{2}x) \bullet (\bar{2} + \bar{1}x) + (\bar{1} + \bar{2}x) \bullet (\bar{2} + \bar{0}x) \\
&= (\bar{2} + \bar{2}x) + (\bar{2} + \bar{0}x) \\
&= (\bar{0} + \bar{2}x) = \bar{2}x.
\end{aligned}
$$

ii. Hukum distributif kanan.

$$
\begin{aligned}
\big(g(x) + h(x)\big) \bullet f(x) &= \big((\bar{2} + \bar{1}x) + (\bar{2} + \bar{0}x)\big) \bullet (\bar{1} + \bar{2}x) \\
&= (\bar{0} + \bar{1}x) \bullet (\bar{1} + \bar{2}x) \\
&= (\bar{0} + \bar{2}x) = \bar{2}x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x) \bullet f(x) + h(x) \bullet f(x) &= (\bar{2} + \bar{1}x) \bullet (\bar{1} + \bar{2}x) + (\bar{2} + \bar{0}x) \bullet (\bar{1} + \bar{2}x) \\
&= (\bar{2} + \bar{2}x) + (\bar{2} + \bar{0}x) \\
&= (\bar{0} + \bar{2}x) = \bar{2}x.
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$.

Karena aksioma I, II, III terpenuhi maka $(\mathbb{Z}_4[x], +, \bullet)$ merupakan ring polinomial. ■

2.7 Ideal

Ideal merupakan suatu subset dari ring yang memenuhi aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan ideal.

Definisi 2.7.1 (Ideal)
Misalkan R merupakan ring, I adalah himpunan tak kosong dan subset dari R.
I disebut ideal kiri jika dan hanya jika dipenuhi
(i) untuk setiap $a, b \in I, a - b \in I$,
(ii) untuk setiap $a \in I, r \in R, ra \in I$.
I disebut ideal kanan jika dan hanya jika dipenuhi
(i) untuk setiap $a, b \in I, a - b \in I$,
(ii) untuk setiap $a \in I, r \in R, ar \in I$.
Jika untuk setiap $a \in I, r \in R,\ ar = ra \in I$ maka I disebut ideal dua sisi.
(Bhattacharya, dkk., 1995)

Contoh 2.7.2
Berdasarkan Contoh 2.6.3 $(\mathbb{Z}_4[x], +, \bullet)$ merupakan ring polinomial. Maka $I[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4[x]$.

Bukti.
Akan ditunjukkan $I[x]$ merupakan ideal.

Tabel 2.4 $f(x) - g(x)$ pada $I[x]$

$f(x)$ \ $g(x)$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$	$\bar{\mathbf{2}} + \bar{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}x$	$\bar{2} + \bar{2}x$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2} + \bar{2}x$	$\bar{2}x$
$\bar{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$	$\bar{2}x$	$\bar{2} + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{2}} + \bar{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$	$\bar{2} + \bar{2}x$	$\bar{2}x$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

i. Berdasarkan Tabel 2.4 terlihat bahwa
untuk setiap $f(x), g(x) \in I[x]$, maka $f(x) - g(x) \in I[x]$.
ii. Ambil sebarang $f(x) \in I[x]$ dan $r(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$. Misalkan
$f(x) = \bar{2} + \bar{2}x$ dan $r(x) = \bar{1} + \bar{3}x$. Maka
$f(x) \bullet r(x) = \bar{2} + \bar{2}x \in I[x]$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $f(x) \in I[x]$ dan $r(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$ (lihat Lampiran 3).
Karena i dan ii terpenuhi maka $I[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4[x]$. ■

Definisi 2.7.3 (Ideal sejati)
Ideal sejati I dari ring R adalah ideal selain R dan $\{0\}$.

(Chaudhuri,1983)

Contoh 2.7.4
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +,\bullet)$. Maka $(\mathbb{Z}_8, +,\bullet)$ memiliki ideal sejati.

Bukti.
Ideal-ideal di $\mathbb{Z}_8$ adalah $I_1 = \{0\}$, $I_2 = \{\mathbb{Z}_8\}$, $I_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, dan $I_4 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$. Maka terbukti $(\mathbb{Z}_8, +,\bullet)$ adalah ring yang memiliki ideal sejati yaitu I_3 dan I_4. ■

Definisi 2.7.5 (Ideal semiprima)
Misalkan R adalah ring dan I adalah ideal sejati dari R. I dinamakan ideal semiprima jika untuk setiap $a \in R$ berlaku $a^2 \in I \Longrightarrow a \in I$.

(Dakheel, 2010)

Contoh 2.7.6
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +,\bullet)$ dan $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$. Maka I adalah ideal semiprima dari $\mathbb{Z}_8$.

Bukti.
Akan ditunjukkan I merupakan ideal

Tabel 2.5 $a - b$ pada I

$a \backslash b$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{6}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Tabel 2.6 ar dengan $a \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_8$

$a \backslash r$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{7}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.5 dan 2.6 terlihat bahwa
i. untuk setiap $a, b \in I$ maka $a - b \in I$,
ii. untuk setiap $a \in I, r \in R$ maka $ar \in I$.
Karena i dan ii terpenuhi maka $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_8$.

Selanjutnya akan ditunjukkan I adalah ideal semiprima dari $\mathbb{Z}_8$ dengan menggunakan kontraposisi, yaitu untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_8$ berlaku

$$a \notin I \Longrightarrow a^2 \notin I.$$

Ambil $a \in \mathbb{Z}_8$ dan $a \notin I$, yaitu $a = \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$.
Untuk $a = \bar{1}$, berlaku jika $a = \bar{1} \notin I$ maka $a^2 = \bar{1}^2 = \bar{1} \notin I$.
Untuk $a = \bar{3}$, berlaku jika $a = \bar{3} \notin I$ maka $a^2 = \bar{3}^2 = \bar{1} \notin I$.
Untuk $a = \bar{5}$, berlaku jika $a = \bar{5} \notin I$ maka $a^2 = \bar{5}^2 = \bar{1} \notin I$.
Untuk $a = \bar{7}$, berlaku jika $a = \bar{7} \notin I$ maka $a^2 = \bar{7}^2 = \bar{1} \notin I$.
Karena kontraposisi benar maka dapat disimpulkan bahwa
$I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ adalah ideal semiprima dari $\mathbb{Z}_8$. ■

Definisi 2.7.7 (Ideal faktor)
Misalkan I dan J adalah ideal-ideal dari ring R. Didefinisikan ideal faktor yaitu $(I{:}J) = \{aJ \subseteq I | a \in R\}$.

(Refaei dan Al-Zoubi, 2004)

Contoh 2.7.8
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_8, +, \bullet)$. Diketahui $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan $J = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ adalah ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_8$. Akan ditentukan $(I{:}J)$.

Penyelesaian.
Ambil $a \in \mathbb{Z}_8$ dan $J = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ maka

$$\begin{aligned} aJ = {} & \bar{0} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}, \\ & \bar{1} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}, \\ & \bar{2} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}, \\ & \bar{3} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}, \\ & \bar{4} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}, \end{aligned}$$

$\bar{5} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}$,
$\bar{6} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}$,
$\bar{7} \bullet \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}$,
sehingga $(I:J) = \left\{\{\bar{0}\}, \{\bar{0}, \bar{4}\}\right\}$.

Contoh 2.7.9
Diberikan ring komutatif $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$. Diketahui $I = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $J = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditentukan $(I:J)$.
Penyelesaian.
Ambil $a \in \mathbb{Z}_6$ dan $J = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ maka
$aJ = \bar{0} \bullet \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}$,
$\bar{1} \bullet \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$,
$\bar{2} \bullet \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{2}\}$,
$\bar{3} \bullet \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}$,
$\bar{4} \bullet \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$,
$\bar{5} \bullet \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{2}\}$,
sehingga $(I:J) = \left\{\{\bar{0}\}\right\}$.

2.8 Ring Faktor

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan ring faktor.

Definisi 2.8.1 (Ring faktor)
Misalkan R adalah ring, I adalah ideal dua sisi di R. R/I adalah $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots\}$ di mana $\bar{a} = a + I$, $\bar{b} = b + I$, $\bar{c} = c + I$, dan seterusnya dengan $a, b, c \in R$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I,$$
$$(a + I) \bullet (b + I) = (a \bullet b) + I.$$

Maka R/I disebut ring faktor.

(Chaudhuri,1983)

Contoh 2.8.2
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ dan $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_4$. Maka anggota dari $\mathbb{Z}_4/I$ adalah $\{I, \bar{1} + I\}$.

Bukti.
Ambil $a \in \mathbb{Z}_4$, yaitu $a = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ maka
$a + I = \bar{0} + I = I,$
$\bar{1} + I = \{\bar{1}, \bar{3}\},$
$\bar{2} + I = \{\bar{2}, \bar{0}\} = I,$
$\bar{3} + I = \{\bar{3}, \bar{1}\} = \bar{1} + I.$
Jadi, anggota dari $\mathbb{Z}_4/_I = \{I, \bar{1} + I\}$. ■

2.9 *Direct Sum* dari Ideal

Definisi 2.9.1 (*Direct sum* dari ideal)
Misalkan R adalah ring dan andaikan R memiliki ideal-ideal $I_1, I_2, \dots, I_n$ sedemikian sehingga
(i) $R = \sum_{i=1}^{n} I_i$, dan
(ii) $I_i \cap \sum_{j \neq i} I_j = \{0\}$ untuk $i = 1,2, \dots, n$.
Maka R disebut *direct sum* dari ideal I_i dan dinotasikan sebagai
$$R = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus \dots \oplus I_n.$$
(Hartley dan Hawkes, 1970)

Contoh 2.9.2
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$. Ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $I_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6 = I_1 \oplus I_2$.

Bukti.
(i) $I_1 + I_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$
$= \mathbb{Z}_6.$

(ii) $I_1 \cap I_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\} \cap \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$= \{\bar{0}\}.$

Karena memenuhi (i) dan (ii) maka $\mathbb{Z}_6 = I_1 \oplus I_2$. ■

Contoh 2.9.3
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_{15}, +, \bullet)$. Ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $I_1 = \{\bar{0}\}$, $I_2 = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$, dan $I_3 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_{15} = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3$.

Bukti.
$I_1 + I_2 = \{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$,
$I_1 + I_3 = \{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$,
$I_2 + I_3 = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$
$= \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{14}, \bar{2}, \overline{10}, \overline{13}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$.

(i) $I_1 + I_2 + I_3 = \{\bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$
$= \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$
$= \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{14}, \bar{2}, \overline{10}, \overline{13}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$
$= \mathbb{Z}_{15}$.

(ii) $I_1 \cap (I_2 + I_3) = \{\bar{0}\} \cap \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{14}, \bar{2}, \overline{10}, \overline{13}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$
$= \{\bar{0}\}$.
$I_2 \cap (I_1 + I_3) = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} \cap \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$
$= \{\bar{0}\}$.

$I_3 \cap (I_1 + I_2) = \{\bar{0}\} \cap \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$
$= \{\bar{0}\}$.
Karena memenuhi (i) dan (ii) maka $\mathbb{Z}_{15} = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3$. ■

Lemma 2.9.4
Misalkan R adalah *direct sum* dari ideal-ideal $I_1, I_2, \dots, I_n$. Maka setiap elemen $r \in R$ dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n \,,$$

di mana $r_i \in I_i$.

(Hartley dan Hawkes, 1970)

Bukti.
Karena $R = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$, untuk setiap $r \in R$ dapat dinyatakan sebagai

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n.$$

Andaikan $r \in R$ dapat dinyatakan dalam bentuk lain sebagai

$$r = r_1{}' + r_2{}' + \cdots + r_n{}',$$

di mana $r_i, r_i{}' \in I_i$ untuk $i = 1, \dots, n$,
sehingga

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r_1{}' + r_2{}' + \cdots + r_n{}',$$

dapat dituliskan sebagai

$$(r_1 - r_1') + (r_2 - r_2') + \cdots + (r_n - r_n') = 0,$$

di mana $r_i, r_i' \in I_i$, sehingga $r_i - r_i' \in I_i$ untuk $i = 1, \dots, n$.
Maka $r_1 - r_1' = 0, \dots, r_n - r_n' = 0$, artinya untuk setiap i diperoleh

$$r_i = r_i',$$

sehingga untuk setiap $r \in R$ dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$. ■

Contoh 2.9.5
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$. Ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $I_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Serta telah ditunjukkan pada Contoh 2.9.2 bahwa $\mathbb{Z}_6 = I_1 \oplus I_2$. Akan ditunjukkan setiap $r \in \mathbb{Z}_6$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $r = r_1 + r_2$ di mana $r_1 \in I_1, r_2 \in I_2$.

Bukti.
$r = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \in \mathbb{Z}_6$, maka
$r = r_1 + r_2$, di mana $r_1 \in I_1, r_2 \in I_2$
$\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$,
$\bar{1} = \bar{3} + \bar{4}$,
$\bar{2} = \bar{0} + \bar{2}$,
$\bar{3} = \bar{3} + \bar{0}$,
$\bar{4} = \bar{0} + \bar{4}$,
$\bar{5} = \bar{3} + \bar{2}$.
Jadi setiap elemen $r \in \mathbb{Z}_6$ dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk $r = r_1 + r_2$. ■

2.10 *Diret Product* dari Ring

Definisi 2.10.1 (*Direct product* dari ring)
Misalkan $(R_1, +, \bullet)$ dan $(R_2, +, \bullet)$ adalah dua ring. Maka *direct product* dari ring R_1 dan R_2 yang dinotasikan sebagai $R_1 \times R_2$ adalah

$$\{(r_1, r_2) |\; r_1 \in R_1,\; r_2 \in R_2\}.$$

Didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut:
(i) $(r_1, r_2) + (s_1, s_2) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$,
(ii) $(r_1, r_2) \bullet (s_1, s_2) = (r_1 \bullet s_1, r_2 \bullet s_2)$.

(Dummit dan Foote, 2004)

Contoh 2.10.2
Diberikan ring $(\mathbb{Z}_2, +, \bullet)$ dan $(\mathbb{Z}_3, +, \bullet)$. Akan ditentukan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Penyelesaian.
$\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_3$ memiliki anggota sebagai berikut $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, maka

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})\}.$$

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi, contoh, proposisi, lemma, dan teorema yang berkaitan dengan *graded* ideal semiprima dari sebuah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan dinotasikan sebagai (R, G). Pada pembahasan ini, contoh dari G-*graded* ring komutatif dikhususkan pada ring polinomial yang berbentuk $a + bx$. Berikut ini diberikan definisi G-*graded* ring komutatif yang memiliki peran penting pada pembahasan selanjutnya.

3.1 *G-Graded* Ring Komutatif

Definisi 3.1.1 (*G-Graded* ring komutatif)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan R adalah ring komutatif dengan elemen identitas tak nol, maka R adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol jika terdapat subgrup aditif R_g dari R sedemikian sehingga untuk semua $g, h \in G$, $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ dan $R_g R_h \subset R_{g*h}$.

(Nastasescu dan Oystaeyen, 1982)

Catatan:
1. $R_g = \{rx^g \mid r \in R,\ g \in G\}$.
2. $R_g R_h = \left\{\sum_{g,h\in G} r_g r_h \mid r_g \in R_g, r_h \in R_h\right\}$.

Contoh 3.1.2
Diberikan grup $(\mathbb{Z}_2, +)$. Berdasarkan Contoh 2.6.3 $(\mathbb{Z}_4[x], +, \bullet)$ merupakan ring komutatif di mana $\mathbb{Z}_4[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\}$ dan didefinisikan:

$$(a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x,$$
$$(a_1 + b_1x) \bullet (a_2 + b_2x) = (a_1 \bullet a_2) + (b_1 \bullet b_2)x.$$

Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_4[x], +, \bullet)$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif.

Bukti.
Ambil $R_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$. Akan ditunjukkan $R_{\bar{0}}$ subgrup aditif dari $\mathbb{Z}_4[x]$.

Tabel 3.1 Operasi penjumlahan pada $R_{\bar{0}}$ terhadap $\mathbb{Z}_4[x]$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.1 terlihat bahwa
i. Tertutup terhadap penjumlahan terpenuhi.
ii. Setiap elemen memiliki invers, yaitu:
invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ sedemikian sehingga $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$,
invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{3}$ sedemikian sehingga $\bar{1}+\bar{3}=\bar{0}$,
invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$ sedemikian sehingga $\bar{2}+\bar{2}=\bar{0}$,
invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{1}$ sedemikian sehingga $\bar{3}+\bar{1}=\bar{0}$.
Karena memenuhi i dan ii maka $R_{\bar{0}}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ adalah subgrup aditif dari $\mathbb{Z}_4[x]$.

Akan ditunjukkan $R_{\bar{1}}=\{\bar{0},x,\bar{2}x,\bar{3}x\}$ subgrup aditif dari $\mathbb{Z}_4[x]$.

Tabel 3.2 Operasi penjumlahan pada $R_{\bar{1}}$ terhadap $\mathbb{Z}_4[x]$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\boldsymbol{x}$	$\bar{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$	$\bar{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	x	$\bar{2}x$	$\bar{3}x$
$\boldsymbol{x}$	x	$\bar{2}x$	$\bar{3}x$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$	$\bar{2}x$	$\bar{3}x$	$\bar{0}$	x
$\bar{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}$	$\bar{3}x$	$\bar{0}$	x	$\bar{2}x$

Berdasarkan Tabel 3.2 terlihat bahwa
i. Tertutup terhadap penjumlahan terpenuhi.
ii. Setiap elemen memiliki invers, yaitu:
invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ sedemikian sehingga $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$,
invers dari x adalah $\bar{3}x$ sedemikian sehingga $x+\bar{3}x=\bar{0}$,
invers dari $\bar{2}x$ adalah $\bar{2}x$ sedemikian sehingga $\bar{2}x+\bar{2}x=\bar{0}$,
invers dari $\bar{3}x$ adalah x sedemikian sehingga $\bar{3}x+x=\bar{0}$.

Karena memenuhi i dan ii maka $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$ adalah subgrup aditif dari $\mathbb{Z}_4[x]$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_4[x]$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif.

I. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_4[x] = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$.

   i. $R_{\bar{0}} + R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} + \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$
   $= \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x, \bar{1}, \bar{1} + x, \dots, \bar{3} + \bar{3}x\}$
   $= \mathbb{Z}_4[x]$.

   ii. $R_{\bar{0}} \cap R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \cap \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\} = \{\bar{0}\}$.

II. Akan ditunjukkan

$R_g R_h = \left\{\sum_{g,h \in G} r_g s_h \mid r_g \in R_g, r_h \in R_h\right\} \subset R_{g+h}$ untuk semua $g, h \in \mathbb{Z}_2$, yaitu

$R_{\bar{0}} R_{\bar{0}} = \{\bar{0}\} \subset R_{\bar{0}+\bar{0}} = R_{\bar{0}}$,

$R_{\bar{0}} R_{\bar{1}} = \{\bar{0}\} \subset R_{\bar{0}+\bar{1}} = R_{\bar{1}}$,

$R_{\bar{1}} R_{\bar{0}} = R_{\bar{0}} R_{\bar{1}}$ karena ringnya komutatif,

$R_{\bar{1}} R_{\bar{1}} = \{\bar{0}\} \subset R_{\bar{1}+\bar{1}} = R_{\bar{0}}$.

Karena memenuhi I dan II maka $\mathbb{Z}_4[x]$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif, selanjutnya dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$. ■

3.2 *Graded Ideal*

Definisi 3.2.1 (*Graded ideal*)

Misalkan I adalah ideal dari R yaitu ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan (R, G) adalah G-*graded ring* komutatif dengan elemen identitas tak nol. Maka I adalah *graded ideal* dari (R, G) jika $I = \bigoplus_{g \in G} I_g$, di mana $I_g = I \cap R_g$ untuk $g \in G$.

(Abhyankar, 2006)

Contoh 3.2.2

Berdasarkan Contoh 3.1.2 $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif dengan $R_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$. Berdasarkan Contoh 2.7.2 $I[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4[x]$. Akan dibuktikan $I[x]$ adalah *graded ideal* dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$.

Bukti.

Akan ditunjukkan $I[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded ideal* dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$, yaitu $I[x] = I_{\bar{0}} \oplus I_{\bar{1}}$.

Didefinisikan

$$
\begin{aligned}
I_{\bar{0}} &= I[x] \cap R_{\bar{0}} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\} \cap \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{\bar{1}} &= I[x] \cap R_{\bar{1}} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\} \cap \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{2}x\},
\end{aligned}
$$

sehingga

i. $I_{\bar{0}} + I_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{2}\} + \{\bar{0}, \bar{2}x\} = \{\bar{0}, \bar{2}x, \bar{2}, \bar{2} + \bar{2}x\} = I[x]$.

ii. $I_{\bar{0}} \cap I_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{2}\} \cap \{\bar{0}, \bar{2}x\} = \{\bar{0}\}$.

Karena i dan ii terpenuhi maka $I[x] = I_{\bar{0}} \oplus I_{\bar{1}}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $I[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded ideal* dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$. ■

3.3 *Graded* Ideal Semiprima

Pada bagian ini didefinisikan *graded* ideal semiprima dan diberikan beberapa sifat dari *graded* ideal semiprima.

Definisi 3.3.1 (*Graded* ideal semiprima)
Misalkan (R, G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan P adalah *graded* ideal sejati dari (R, G). P disebut *graded* ideal semiprima jika untuk setiap $a, b \in \bigcup_{g \in G} R_g$ dan terdapat $k \in \mathbb{Z}^+$ berlaku

$$a^k b \in P \Longrightarrow ab \in P.$$

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Contoh 3.3.2
Diketahui $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif, di mana $R_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$. Berdasarkan Contoh 3.2.2

$P[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded ideal* dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$. Akan dibuktikan $P[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded* ideal semiprima.

Bukti.
Akan ditunjukkan $P[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded* ideal semiprima dengan menggunakan kontraposisi, yaitu
untuk setiap $f(x), g(x) \in \bigcup_{g \in G} R_g$ sedemikian sehingga terdapat $k \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $f(x) \bullet g(x) \notin P[x] \Longrightarrow f(x)^k \bullet g(x) \notin P[x]$.
Didefinisikan

$$\begin{aligned} R_{\bar{0}} \cup R_{\bar{1}} &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \cup \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\} \end{aligned}$$

Ambil sebarang $f(x), g(x) \in \bigcup_{g \in G} R_g$. Misalkan $f(x) = x$ dan $g(x) = \bar{3}x$ sedemikian sehingga terdapat $k = 2$ maka berlaku

$$x \bullet \bar{3}x = \bar{3}x \notin P[x] \Longrightarrow (x)^2 \bullet \bar{3}x = x \bullet \bar{3}x = \bar{3}x \notin P[x].$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $f(x), g(x) \in \bigcup_{g \in G} R_g$ (lihat Lampiran 4).
Karena kontraposisi benar maka dapat disimpulkan bahwa
$P[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded* ideal semiprima dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$.
■

Definisi 3.3.3 (Subgrup semiprima)
Misalkan P adalah *graded ideal* dari (R, G). Untuk $g \in G$, P_g adalah subgrup semiprima dari R_g jika untuk setiap $a_g, b_g \in R_g$ dan terdapat
$k \in \mathbb{Z}^+$ berlaku

$${a_g}^k b_g \in P_g \Longrightarrow a_g b_g \in P_g.$$

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Contoh 3.3.4
Diketahui $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif dengan $R_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$. Diketahui
$P[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded ideal* dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$. Akan ditunjukkan $P_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah subgrup semiprima dari $R_{\bar{0}}$ dan $P_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{2}x\}$ adalah subgrup semiprima dari $R_{\bar{1}}$.

Bukti.

i. Akan ditunjukkan $P_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah subgrup semiprima dari $R_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Dengan menggunakan kontraposisi, yaitu untuk setiap $a_{\bar{0}}, b_{\bar{0}} \in R_{\bar{0}}$ sedemikian sehingga terdapat $k \in \mathbb{Z}^+$ berlaku

$$a_{\bar{0}} \bullet b_{\bar{0}} \notin P_{\bar{0}} \Longrightarrow {a_{\bar{0}}}^k \bullet b_{\bar{0}} \notin P_{\bar{0}}.$$

Ambil sebarang $a_{\bar{0}}, b_{\bar{0}} \in R_{\bar{0}}$. Misalkan $a_{\bar{0}} = \bar{3}$ dan $b_{\bar{0}} = \bar{3}$ sedemikian sehingga terdapat $k = 2$ maka berlaku

$$\bar{3} \bullet \bar{3} = \bar{1} \notin P_{\bar{0}} \Longrightarrow \bar{3}^2 \bullet \bar{3} = \bar{3} \notin P_{\bar{0}}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a_{\bar{0}}, b_{\bar{0}} \in R_{\bar{0}}$ (lihat Lampiran 5).

Karena kontraposisi benar maka dapat disimpulkan bahwa $P_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah subgrup semiprima dari $R_{\bar{0}} = \mathbb{Z}_4$. ■

ii. Akan ditunjukkan $P_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{2}x\}$ adalah subgrup semiprima dari $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$. Dengan menggunakan kontraposisi, yaitu untuk setiap $a_{\bar{1}}, b_{\bar{1}} \in R_{\bar{1}}$ sedemikian sehingga terdapat $k \in \mathbb{Z}^+$ berlaku

$$a_{\bar{1}} \bullet b_{\bar{1}} \notin P_{\bar{1}} \Longrightarrow {a_{\bar{1}}}^k \bullet b_{\bar{1}} \notin P_{\bar{1}}.$$

Ambil sebarang $a_{\bar{1}}, b_{\bar{1}} \in R_{\bar{1}}$. Misalkan $a_{\bar{1}} = \bar{3}x$ dan $b_{\bar{1}} = x$ sedemikian sehingga terdapat $k = 2$ maka berlaku

$$\bar{3}x \bullet x = \bar{3}x \notin P_{\bar{1}} \Longrightarrow (\bar{3}x)^2 \bullet x = x \notin P_{\bar{1}}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a_{\bar{1}}, b_{\bar{1}} \in R_{\bar{1}}$ (lihat Lampiran 6).

Karena kontraposisi benar maka dapat disimpulkan bahwa $P_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{2}x\}$ adalah subgrup semiprima $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$ ■

Proposisi 3.3.5

Misalkan (R, G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan $P = \bigoplus_{g \in G} P_g$ adalah *graded ideal* dari (R, G). Jika P_g adalah subgrup semiprima dari R_g untuk setiap $g \in G$, maka P adalah *graded* ideal semiprima dari (R, G).

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Bukti.

Diketahui P_g subgrup semiprima dari R_g maka berlaku

jika $a_g{}^k b_g \in P_g$ maka $a_g b_g \in P_g$, di mana untuk setiap $a_g, b_g \in R_g$. Akan dibuktikan $P = \bigoplus_{g \in G} P_g$ adalah *graded* ideal semiprima, yaitu untuk setiap $a, b \in \bigcup_{g \in G} R_g$ berlaku $a^k b \in P \Longrightarrow ab \in P$.
Ambil sebarang $a, b \in \bigcup_{g \in G} R_g$ dan misalkan $a^k b \in P$ sehingga

$$a^k b = \sum_{g_i \in G} x_{g_i} = \left(x_{g_1} + x_{g_2} + \cdots + x_{g_n}\right),$$

di mana $x_{g_i} \in P_{g_i}, i = 1,2, \dots, n$. Karena $P_{g_i} \subseteq R_{g_i} \subseteq R$ maka $x_{g_1}, x_{g_2}, \dots, x_{g_n} \in R$, berarti $a^k b \in R$. Dan karena R_{g_i} subgrup dari R, jelas $a^k b \in R_{g_i}$ untuk suatu g_i. Serta karena P_{g_i} subgrup dari R_{g_i}, jelas $a^k b \in P_{g_i}$ untuk suatu g_i. Berdasarkan Definisi 3.3.3 diperoleh jika $a^k b \in P_{g_i}$ maka $ab \in P_{g_i}$ untuk suatu g_i. Dengan memperhatikan $P = \bigoplus_{g_i \in G} P_{g_i}$ jelas bahwa $ab \in P$. ∎

Contoh 3.3.6
Diketahui $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif dengan $R_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $R_{\bar{1}} = \{\bar{0}, x, \bar{2}x, \bar{3}x\}$. Berdasarkan Contoh 3.3.4 $P_{\bar{0}} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah subgrup semiprima dari $R_{\bar{0}}$ dan $P_{\bar{1}}[x] = \{\bar{0}, \bar{2}x\}$ adalah subgrup semiprima dari $R_{\bar{1}}$, sehingga
$P_{\bar{0}} \oplus P_{\bar{1}} = \{\bar{0}, \bar{2}x, \bar{2}, \bar{2} + \bar{2}x\} = P[x]$. Berdasarkan Contoh 3.3.2 $P[x] = \{\bar{0}, \bar{2}x, \bar{2}, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded* ideal semiprima dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$.

Lemma 3.3.7
Misalkan (R, G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol, jika I dan J adalah *graded ideal* dari (R, G) maka $I + J, I \cap J, IJ$, dan $(I : J)$ adalah *graded ideal* dari (R, G).
(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Bukti.
a. Kasus $I + J$.

Akan ditunjukkan bahwa $I + J$ *graded ideal* dari (R, G), yaitu

$$\begin{aligned}(I + J) &= \bigoplus_{g_i \in G} (I + J)_{g_i} \\ &= \bigoplus_{g_i \in G} \left((I + J) \cap R_{g_i}\right).\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Definisi 2.9.1, akan ditunjukkan
i. $(I + J) = \sum_{g_i \in G} (I + J)_{g_i}$.

Oleh karena I dan J adalah *graded ideal* maka $I = \sum_{g_i \in G} I_{g_i}$ dan $J = \sum_{g_i \in G} J_{g_i}$, sehingga

$$\sum_{g_i \in G} I_{g_i} + \sum_{g_i \in G} J_{g_i} = \sum_{g_i \in G} (I + J)_{g_i}.$$

Dengan menggunakan Definisi 3.2.1 dapat ditulis

$$\sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) + \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right) = \sum_{g_i \in G} \left((I + J) \cap R_{g_i}\right).$$

Misalkan $A = \sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) + \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right)$ dan $B = \sum_{g_i \in G} \left((I + J) \cap R_{g_i}\right)$, akan ditunjukkan $A = B$.

Ambil $x \in A$. Misalkan

$$\begin{aligned} x &= a_{g_1} + a_{g_2} + \cdots + a_{g_n} + b_{g_1} + b_{g_2} + \cdots + b_{g_n} \\ &= \left(a_{g_1} + b_{g_1}\right) + \cdots + \left(a_{g_n} + b_{g_n}\right) \\ &= \sum_{g_i \in G} \left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in \sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) + \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right), \qquad (3.1) \end{aligned}$$

di mana $a_{g_i} \in I$, $a_{g_i} \in R_{g_i}$, $b_{g_i} \in J$, dan $b_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya $\left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in (I + J) \cap R_{g_i}$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= \left(a_{g_1} + b_{g_1}\right) + \cdots + \left(a_{g_n} + b_{g_n}\right) \in (I + J) \cap R_{g_1} + \cdots + (I + J) \cap R_{g_n} \\ &= \sum_{g_i \in G} \left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in \sum_{g_i \in G} (I + J) \cap R_{g_i}. \qquad (3.2) \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.1) dan (3.2) diperoleh $A \subseteq B$.

Sebaliknya ambil $x \in B$. Misalkan

$$\begin{aligned} x &= \left(a_{g_1} + b_{g_1}\right) + \cdots + \left(a_{g_n} + b_{g_n}\right) \\ &= \sum_{g_i \in G} \left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in \sum_{g_i \in G} (I + J) \cap R_{g_i}, \qquad (3.3) \end{aligned}$$

di mana $\left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in (I + J)$ dan $\left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in R_{g_i}$.
$\left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in (I + J)$ artinya $a_{g_i} \in I$ dan $b_{g_i} \in J$, sedangkan $\left(a_{g_i} + b_{g_i}\right) \in R_{g_i}$ artinya $a_{g_i} \in R_{g_i}$ dan $b_{g_i} \in R_{g_i}$.
Perhatikan $a_{g_i} \in I$ dan $a_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya $a_{g_i} \in I \cap R_{g_i}$.
Perhatikan $b_{g_i} \in J$ dan $b_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya $b_{g_i} \in J \cap R_{g_i}$, sehingga

$$x = \sum_{g_i \in G} a_{g_i} + \sum_{g_i \in G} b_{g_i} \in \sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) + \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right). \qquad (3.4)$$

Berdasarkan (3.3) dan (3.4) diperoleh $B \subseteq A$. Oleh karena $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka $A = B$, dengan kata lain

$$\sum_{g_i\in G}\left(I\cap R_{g_i}\right)+\sum_{g_i\in G}\left(J\cap R_{g_i}\right)=\sum_{g_i\in G}\left((I+J)\cap R_{g_i}\right). \quad \blacksquare$$

ii. Akan ditunjukkan $(I+J)_{g_i}\cap\sum_{g_j\neq g_i}(I+J)_{g_j}=\{0\}$, atau dengan kata lain $\left((I+J)\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left((I+J)\cap R_{g_j}\right)=\{0\}$.

Karena I, J adalah *graded ideal* maka berlaku

$$\left(I\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left(I\cap R_{g_j}\right)=\{0\}$$

dan

$$\left(J\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left(J\cap R_{g_j}\right)=\{0\}.$$

Ambil $x\in\left((I+J)\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left((I+J)\cap R_{g_j}\right)$ maka $x\in\left((I+J)\cap R_{g_i}\right)$ dan $x\in\sum_{g_j\neq g_i}\left((I+J)\cap R_{g_j}\right)$.

Perhatikan $x\in\left((I+J)\cap R_{g_i}\right)$. Misalkan $x=a_{g_i}+b_{g_i}$, di mana $a_{g_i}\in I$, $b_{g_i}\in J$, dan $\left(a_{g_i}+b_{g_i}\right)\in R_{g_i}$.

Perhatikan

$$x\in\sum_{g_j\neq g_i}\left((I+J)\cap R_{g_j}\right).$$

Misalkan

$$\begin{aligned} a_{g_i}+b_{g_i} &= \sum_{g_j\neq g_i}(a+b)_{g_j} \\ &= (a+b)_{g_1}+(a+b)_{g_2}+..+(a+b)_{g_n} \\ &= a_{g_1}+b_{g_1}+\cdots+a_{g_n}+b_{g_n} \\ &= a_{g_1}+a_{g_2}+\cdots+a_{g_n}+b_{g_1}+b_{g_2}+\cdots+b_{g_n} \\ &= \sum_{g_j\neq g_i}a_{g_j}+\sum_{g_j\neq g_i}b_{g_j}, \end{aligned}$$

di mana $a_{g_i}\in\sum_{g_j\neq g_i}I_{g_j}$ dan $b_{g_i}\in\sum_{g_j\neq g_i}J_{g_j}$. Oleh karena $a_{g_i}\in I$, $a_{g_i}\in\sum_{g_j\neq g_i}I_{g_j}$ dan $a_{g_i}\in R_{g_i}$ artinya

$$a_{g_i}\in\left(I\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left(I\cap R_{g_j}\right),$$

sehingga diperoleh $a_{g_i} = 0$. Oleh karena $b_{g_i} \in J$, $b \in \sum_{g_j \neq g_i} J_{g_j}$, dan $b_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya

$$b_{g_i} \in \left(J \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} \left(J \cap R_{g_j}\right),$$

sehingga diperoleh $b_{g_i} = 0$.

Jadi untuk setiap $x \in \left((I+J) \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} \left((I+J) \cap R_{g_j}\right)$ berlaku $x = a_{g_i} + b_{g_i} = 0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\left((I+J) \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} \left((I+J) \cap R_{g_j}\right) = \{0\}. \qquad \blacksquare$$

b. Kasus $I \cap J$.

Akan ditunjukkan bahwa $I \cap J$ *graded ideal* dari (R, G) yaitu

$$(I \cap J) = \bigoplus_{g_i \in G} (I \cap J)_{g_i} = \bigoplus_{g_i \in G} \left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right).$$

Dengan menggunakan Definisi 2.9.1, akan ditunjukkan

i. $(I \cap J) = \sum_{g_i \in G} (I \cap J)_{g_i}$.

Oleh karena I dan J adalah *graded ideal* maka $I = \sum_{g_i \in G} I_{g_i}$ dan $J = \sum_{g_i \in G} J_{g_i}$, sehingga

$$\sum_{g_i \in G} I_{g_i} \cap \sum_{g_i \in G} J_{g_i} = \sum_{g_i \in G} (I \cap J)_{g_i}.$$

Dengan menggunakan Definisi 3.2.1 dapat ditulis

$$\sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right) = \sum_{g_i \in G} \left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right).$$

Misalkan

$$A = \sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right)$$

dan

$$B = \sum_{g_i \in G} \left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right),$$

akan ditunjukkan $A = B$. Ambil $x \in A$. Misalkan

$$x = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n} \in \sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right), \qquad (3.5)$$

di mana $r_{g_i} \in I$, $r_{g_i} \in R_{g_i}$, dan $r_{g_i} \in J$ artinya $r_{g_i} \in I \cap J \cap R_{g_i}$, sehingga diperoleh

$$x = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n} \in \left(I \cap J \cap R_{g_1}\right) + \cdots + \left(I \cap J \cap R_{g_n}\right),$$

atau dapat ditulis

$$x = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n} \in \sum_{g_i \in G} \left((I \cap J) \cap R_{g_i} \right). \quad (3.6)$$

Berdasarkan (3.5) dan (3.6) diperoleh $A \subseteq B$.

Sebaliknya, ambil $x \in B$. Misalkan

$$x = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n} \in \sum_{g_i \in G} \left((I \cap J) \cap R_{g_i} \right), \quad (3.7)$$

di mana $r_{g_i} \in I$, $r_{g_i} \in J$, dan $r_{g_i} \in R_{g_i}$. Perhatikan $r_{g_i} \in I$ dan $r_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya $r_{g_i} \in I \cap R_{g_i}$, sehingga diperoleh

$$x = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n} \in \left(I \cap R_{g_1}\right) + \cdots + \left(I \cap R_{g_n}\right),$$

atau dapat ditulis

$$x = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n} \in \sum_{g_i \in G} I \cap R_{g_i}. \quad (3.8)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$x = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n} \in \sum_{g_i \in G} J \cap R_{g_i}. \quad (3.9)$$

Berdasarkan (3.8) dan (3.9) diperoleh

$$x \in \sum_{g_i \in G} \left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_i \in G} \left(J \cap R_{g_i}\right). \quad (3.10)$$

Berdasarkan (3.7) dan (3.10) diperoleh $B \subseteq A$. Oleh karena $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka $A = B$, dengan kata lain

$$\textstyle\sum_{g_i \in G}\left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_i \in G}\left(J \cap R_{g_i}\right) = \sum_{g_i \in G}\left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right). \quad \blacksquare$$

ii. Akan ditunjukkan $(I \cap J)_{g_i} \cap \sum_{g_j \neq g_i} (I \cap J)_{g_j} = \{0\}$.

Karena I, J *graded ideal* maka

$$\left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \textstyle\sum_{g_j \neq g_i} \left(I \cap R_{g_j}\right) = \{0\},$$

dan

$$\left(J \cap R_{g_i}\right) \cap \textstyle\sum_{g_j \neq g_i} \left(J \cap R_{g_j}\right) = \{0\}.$$

Dengan menggunakan Definisi 3.2.1

$$(I \cap J)_{g_i} \cap \textstyle\sum_{g_j \neq g_i} (I \cap J)_{g_j} = \{0\},$$

dapat ditulis sebagai

$$\left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} \left((I \cap J) \cap R_{g_j}\right) = \{0\}.$$

Ambil

$$x \in \left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} \left((I \cap J) \cap R_{g_j}\right),$$

maka $x \in \left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right)$ dan $x \in \sum_{g_j \neq g_i} \left((I \cap J) \cap R_{g_j}\right)$.

Perhatikan $x \in \left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right)$ maka $x \in I$, $x \in J$, dan $x \in R_{g_i}$, sehingga

$$x \in I \cap R_{g_i}. \tag{3.11}$$

Selanjutnya perhatikan $x \in \sum_{g_j \neq g_i} \left((I \cap J) \cap R_{g_j}\right)$. Misalkan

$$\begin{aligned} x &= k_{g_1} + k_{g_2} + \cdots + k_{g_n} \\ &= \sum_{g_j \neq g_i} k_{g_j} \in \sum_{g_j \neq g_i} \left((I \cap J) \cap R_{g_j}\right), \end{aligned}$$

di mana $k_{g_j} \in I$, $k_{g_j} \in J$, dan $k_{g_j} \in R_{g_j}$ sehingga $k_{g_j} \in I \cap R_{g_j}$.

Oleh karena itu diperoleh

$$x \in \sum_{g_j \neq g_i} I \cap R_{g_j}. \tag{3.12}$$

Berdasarkan (3.11) dan (3.12) diperoleh

$$x \in \left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} I \cap R_{g_j}.$$

Karena $\left(I \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} I \cap R_{g_j} = \{0\}$ sehingga $x = 0$.

Dengan cara yang sama diperoleh $\left(J \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} J \cap R_{g_j} = \{0\}$ sehingga $x = 0$. Jadi

$$\left((I \cap J) \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i} \left((I \cap J) \cap R_{g_j}\right) = \{0\}. \qquad \blacksquare$$

c. Kasus IJ.

Akan ditunjukkan bahwa IJ *graded ideal* dari (R, G) yaitu

$$\begin{aligned} (IJ) &= \bigoplus_{g_i \in G} (IJ)_{g_i} \\ &= \bigoplus_{g_i \in G} \left((IJ) \cap R_{g_i}\right) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Definisi 2.9.1, akan ditunjukkan

i. $(IJ) = \sum_{g_i \in G} (IJ)_{g_i}$.

Oleh karena I dan J adalah *graded ideal* maka $I = \sum_{g_i \in G} I_{g_i}$ dan $J = \sum_{g_i \in G} J_{g_i}$, sehingga

$$\sum_{g_i \in G} I_{g_i} \sum_{g_i \in G} J_{g_i} = \sum_{g_i \in G} (IJ)_{g_i}.$$

Dengan menggunakan Definisi 3.2.1 dapat ditulis

$$\sum_{g_i \in G}\left(I \cap R_{g_i}\right) \sum_{g_i \in G}\left(J \cap R_{g_i}\right) = \sum_{g_i \in G}\left((IJ) \cap R_{g_i}\right).$$

Misalkan $A = \sum_{g_i \in G}\left(I \cap R_{g_i}\right) \sum_{g_i \in G}\left(J \cap R_{g_i}\right)$ dan $B = \sum_{g_i \in G}\left((IJ) \cap R_{g_i}\right)$, akan ditunjukkan $A = B$.

Ambil $x \in A$. Misalkan

$$\begin{aligned} x &= r_{g_1}s_{g_1} + r_{g_2}s_{g_2} + \cdots + r_{g_n}s_{g_n} \\ &= \sum_{g_i \in G} r_{g_i}s_{g_i} \in \sum_{g_i \in G}\left(I \cap R_{g_i}\right) \sum_{g_i \in G}\left(J \cap R_{g_i}\right), \end{aligned} \qquad (3.13)$$

di mana $r_{g_i} \in \left(I \cap R_{g_i}\right)$ dan $s_{g_i} \in \left(J \cap R_{g_i}\right)$, maka $r_{g_i} \in I$, $r_{g_i} \in R_{g_i}$, $s_{g_i} \in J$, dan $s_{g_i} \in R_{g_i}$. Oleh karena itu $r_{g_i}s_{g_i} \in \left((IJ) \cap R_{g_i}\right)$, sehingga

$$x = r_{g_1}s_{g_1} + \cdots + r_{g_n}s_{g_n} \in \left(IJ \cap R_{g_1}\right) + \cdots + \left(IJ \cap R_{g_n}\right),$$

atau dapat ditulis

$$x = r_{g_1}s_{g_1} + \cdots + r_{g_n}s_{g_n} \in \sum_{g_i \in G}\left((IJ) \cap R_{g_i}\right). \qquad (3.14)$$

Berdasarkan (3.13) dan (3.14) diperoleh $A \subseteq B$.

Sebaliknya, ambil $x \in B$. Misalkan

$$x = r_{g_1}s_{g_1} + r_{g_2}s_{g_2} + \cdots + r_{g_n}s_{g_n} \in \sum_{g_i \in G}\left((IJ) \cap R_{g_i}\right), \qquad (3.15)$$

di mana $r_{g_i}s_{g_i} \in IJ$ dan $r_{g_i}s_{g_i} \in R_{g_i}$.

$r_{g_i}s_{g_i} \in IJ$ artinya $r_{g_i} \in I$ dan $s_{g_i} \in J$, sedangkan $r_{g_i}s_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya $r_{g_i} \in R_{g_i}$ dan $s_{g_i} \in R_{g_i}$. Perhatikan $r_{g_i} \in I$ dan $r_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya $r_{g_i} \in I \cap R_{g_i}$. Perhatikan $s_{g_i} \in J$ dan $s_{g_i} \in R_{g_i}$ artinya $s_{g_i} \in J \cap R_{g_i}$, sehingga

$$x = r_{g_1}s_{g_1} + \cdots + r_{g_n}s_{g_n} \in \sum_{g_i \in G}\left(I \cap R_{g_i}\right) \sum_{g_i \in G}\left(J \cap R_{g_i}\right), \qquad (3.16)$$

Berdasarkan (3.15) dan (3.16) diperoleh $B \subseteq A$. Oleh karena $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka $A = B$, dengan kata lain

$$\sum_{g_i\in G}(I\cap R_{g_i})\sum_{g_i\in G}(J\cap R_{g_i}) = \sum_{g_i\in G}\left((IJ)\cap R_{g_i}\right). \qquad \blacksquare$$

ii. Akan ditunjukkan $(IJ)_{g_i}\cap\sum_{g_j\neq g_i}(IJ)_{g_j} = \{0\}$, dengan kata lain $\left((IJ)\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left((IJ)\cap R_{g_j}\right) = \{0\}$. Karena I, J adalah *graded ideal* maka

$$\left(I\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left(I\cap R_{g_j}\right) = \{0\}$$

dan

$$\left(J\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left(J\cap R_{g_j}\right) = \{0\}.$$

Ambil $x\in\left((IJ)\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left((IJ)\cap R_{g_j}\right)$ maka $x\in\left((IJ)\cap R_{g_i}\right)$ dan $x\in\sum_{g_j\neq g_i}\left((IJ)\cap R_{g_j}\right)$.

Perhatikan $x\in\left((IJ)\cap R_{g_i}\right)$. Misalkan $x = a_{g_i}b_{g_i}$, di mana $a_{g_i}\in I$, $b_{g_i}\in J$, dan $a_{g_i}b_{g_i}\in R_{g_i}$.

Perhatikan $x\in\sum_{g_j\neq g_i}\left((IJ)\cap R_{g_j}\right)$. Misalkan

$$\begin{aligned}
a_{g_i}b_{g_i} &= \sum_{g_j\neq g_i}(ab)_{g_j}\\
&= (ab)_{g_1} + (ab)_{g_2} + .. + (ab)_{g_n}\\
&= a_{g_1}b_{g_1} + \cdots + a_{g_n}b_{g_n}\\
&= \left(a_{g_1} + a_{g_2} + \cdots + a_{g_n}\right)\left(b_{g_1} + b_{g_2} + \cdots + b_{g_n}\right)\\
&= \sum_{g_j\neq g_i}a_{g_j}\sum_{g_j\neq g_i}b_{g_j},
\end{aligned}$$

di mana $a_{g_i}\in\sum_{g_j\neq g_i}I_{g_j}$ dan $b_{g_i}\in\sum_{g_j\neq g_i}J_{g_j}$. Oleh karena $a_{g_i}\in I$, $a_{g_i}\in\sum_{g_j\neq g_i}I_{g_j}$, dan $a_{g_i}\in R_{g_i}$ artinya

$$a_{g_i}\in\left(I\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left(I\cap R_{g_j}\right),$$

sehingga diperoleh $a_{g_i} = 0$. Oleh karena $b_{g_i}\in J$, $b\in\sum_{g_j\neq g_i}J_{g_j}$, dan $b_{g_i}\in R_{g_i}$ artinya

$$b_{g_i}\in\left(J\cap R_{g_i}\right)\cap\sum_{g_j\neq g_i}\left(J\cap R_{g_j}\right),$$

sehingga diperoleh $b_{g_i} = 0$.

Jadi untuk setiap $x \in \left((IJ) \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i}\left((IJ) \cap R_{g_j}\right)$ berlaku $x = a_{g_i} b_{g_i} = 0$, sehingga dapat disimpulkan

$$\left((IJ) \cap R_{g_i}\right) \cap \sum_{g_j \neq g_i}\left((IJ) \cap R_{g_j}\right) = \{0\}. \qquad \blacksquare$$

d. Kasus $(I: J)$.

Diketahui I dan J adalah *graded ideal* dari (R, G). Akan dibuktikan $(I: J)$ adalah *graded ideal* dari (R, G).
Misalkan $r \in (I: J)$ di mana

$$r = \sum_{g_i \in G} r_{g_i} = r_{g_1} + r_{g_2} + \cdots + r_{g_n},$$

akan ditunjukkan $r_{g_i} \in (I: J)$.
Karena $r \in (I: J)$ artinya $r = aJ \subseteq I$, sehingga $rJ \subseteq I$. Maka berlaku $\sum_{g_i \in G} r_{g_i} J \subseteq I$. Misalkan $c \in J$ maka $r_{g_i} c \in I$ untuk sebarang $c \in J$. Oleh karena $r \in (I: J)$ diperoleh $rc \in I$, jelas bahwa $\sum_{g_i \in G} r_{g_i} c \in I$. Dengan demikian untuk sebarang $c \in J$ diperoleh $r_{g_i} J \subseteq I$ untuk semua $i = 1,2, \dots, n$. Oleh karena itu, $r_{g_i} \in (I: J)$ maka terbukti bahwa $(I: J)$ adalah *graded ideal* dari (R, G). ■

Proposisi 3.3.11
Misalkan (R, G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan I adalah *graded ideal* dari (R, G). Jika P adalah *graded* ideal semiprima dari (R, G) sedemikian sehingga jika $I^n \subseteq P$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, maka $I \subseteq P$.

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Bukti.
Diketahui $I^n \subseteq P$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya akan dibuktikan $I \subseteq P$. Misalkan $a \in I$ maka dapat dinyatakan sebagai

$$a = \sum_{g \in G} a_g ,$$

di mana $a_g \in I \cap R_g$, artinya $a_g \in I$ dan $a_g \in R_g$.
Perhatikan $a_g \in I$ dan Definisi 2.7.1 (ii) dengan mengambil $r = a_g \in I$ diperoleh

$$a_g{}^n \in I, \tag{3.17}$$

sehingga berlaku $a_g{}^n \in I^n$. Oleh karena $I^n \subseteq P$ diperoleh

$$a_g{}^n \in P. \tag{3.18}$$

Berdasarkan (3.17) dan (3.18) maka $I \subseteq P$. ■

Proposisi 3.3.12

Misalkan (R, G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan I adalah *graded ideal* dari (R, G). Jika P adalah *graded* ideal semiprima dari (R, G) sedemikian sehingga jika $I^n = P$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, maka $I = P$.

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Bukti.

Diketahui $I^n = P$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya akan dibuktikan $I = P$. Jika $I^n = P$ maka $I^n \subseteq P$ dan $P \subseteq I^n$. Perhatikan $P \subseteq I^n$. Karena ${a_g}^n \in P$ maka ${a_g}^n \in I^n$. Selanjutnya berlaku ${a_g}^n \in I$, jelas $P \subseteq I$. Dengan menggunakan Proposisi 3.3.11 diperoleh $I \subseteq P$ dan $P \subseteq I$, dengan kata lain $I = P$. ■

Definisi 3.3.13 (*Graded* ring faktor)

Misalkan (R, G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan I adalah *graded* ideal dari (R, G), maka $(R, G)/_I = \{a + I, b + I, \dots\}$ adalah *graded* ring faktor di mana

$a, b, \dots \in (R, G)$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut.

i. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$,

ii. $(a + I) \bullet (b + I) = (a \bullet b) + I$.

(Nastasescu dan Oystaeyen, 1982)

Contoh 3.3.14

Diketahui $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$ adalah $\mathbb{Z}_2$-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan $I[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\}$ adalah *graded* ideal dari $(\mathbb{Z}_4[x], \mathbb{Z}_2)$. Akan ditentukan anggota dari $\mathbb{Z}_4[x]/I[x]$.

Penyelesaian.
Ambil $a \in \mathbb{Z}_4[x]$, maka $a + I[x]$ adalah
$\bar{0} + I[x] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x\} = I[x]$,
$x + I[x] = \{x, \bar{2} + x, \bar{3}x, \bar{2} + \bar{3}x\}$,
$\bar{2}x + I[x] = \{\bar{2}x, \bar{2} + \bar{2}x, \bar{0}, \bar{2}\} = I[x]$,
$\bar{3}x + I[x] = \{\bar{3}x, \bar{2} + \bar{3}x, x, \bar{2} + x\} = x + I[x]$,
$\bar{1} + I[x] = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{1} + \bar{2}x, \bar{3} + \bar{2}x\}$,
$(\bar{1} + x) + I[x] = \{\bar{1} + x, \bar{3} + x, \bar{1} + \bar{3}x, \bar{3} + \bar{3}x\}$,
$(\bar{1} + \bar{2}x) + I[x] = \{\bar{1} + \bar{2}x, \bar{3} + \bar{2}x, \bar{1}, \bar{3}\} = \bar{1} + I[x]$,
$(\bar{1} + \bar{3}x) + I[x] = \{\bar{1} + \bar{3}x, \bar{3} + \bar{3}x, \bar{1} + x, \bar{3} + x\} = (\bar{1} + x) + I[x]$,
$\bar{2} + I[x] = \{\bar{2}, \bar{0}, \bar{2} + \bar{2}x, \bar{2}x\} = I[x]$,
$(\bar{2} + x) + I[x] = \{\bar{2} + x, x, \bar{2} + \bar{3}x, \bar{3}x\} = x + I[x]$,
$(\bar{2} + \bar{2}x) + I[x] = \{\bar{2} + \bar{2}x, \bar{2}x, \bar{2}, \bar{0}\} = I[x]$,
$(\bar{2} + \bar{3}x) + I[x] = \{\bar{2} + \bar{3}x, \bar{3}x, \bar{2} + x, x\} = x + I[x]$,
$\bar{3} + I[x] = \{\bar{3}, \bar{1}, \bar{3} + \bar{2}x, \bar{1} + \bar{2}x\} = \bar{1} + I[x]$,
$(\bar{3} + x) + I[x] = \{\bar{3} + x, \bar{1} + x, \bar{3} + \bar{3}x, \bar{1} + \bar{3}x\} = (\bar{1} + x) + I[x]$,
$(\bar{3} + \bar{2}x) + I[x] = \{\bar{3} + \bar{2}x, \bar{1} + \bar{2}x, \bar{3}, \bar{1}\} = \bar{1} + I[x]$,
$(\bar{3} + \bar{3}x) + I[x] = \{\bar{3} + \bar{3}x, \bar{1} + \bar{3}x, \bar{3} + x, \bar{1} + x\} = (\bar{1} + x) + I[x]$.
Jadi $\mathbb{Z}_4[x]/I[x] = \{I[x], x + I[x], \bar{1} + I[x], (\bar{1} + x) + I[x]\}$.

Proposisi 3.3.15
Misalkan $I \subseteq P$ adalah *graded* ideal sejati dari (R, G). P adalah *graded* ideal semiprima dari (R, G) jika dan hanya jika P/I adalah *graded* ideal semiprima dari $(R, G)/I$.

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Bukti.
$(\Longrightarrow)$ Diketahui P adalah *graded* ideal semiprima dari (R, G).

Akan dibuktikan ${}^{P}/_{I}$ adalah *graded* ideal semiprima dari ${}^{(R,G)}/_{I}$.

Ambil $a, b \in \bigcup_{g\in G} R_g$, misalkan $a^k b \in P$. Dengan menggunakan Definisi 3.3.13 diperoleh

$$\left(a^k b + I\right) \in {}^{P}/_{I}. \tag{3.19}$$

Selanjutnya persamaan (3.19) dapat ditulis

$$\begin{aligned}\left(a^k b + I\right) &= \left(a^k + I\right)(b + I) \in {}^{P}/_{I} \\ &= (a.a.\dots.a + I)(b + I) \in {}^{P}/_{I} \\ &= \underbrace{(a + I)(a + I)\dots(a + I)}_{k}\ (b + I) \in {}^{P}/_{I} \\ &= (a + I)^k(b + I) \in {}^{P}/_{I}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Berdasarkan Definisi 3.3.1 berlaku jika $a^k b \in P$ maka $ab \in P$. Oleh karena itu dari persamaan (3.20) juga berlaku

$$(a + I)^k(b + I) \in {}^{P}/_{I} \Rightarrow (a + I)\ (b + I) \in {}^{P}/_{I},$$

dengan kata lain dari persamaan (3.20) diperoleh $(ab + I) \in {}^{P}/_{I}$. ■

($\Leftarrow$) Diketahui ${}^{P}/_{I}$ adalah *graded* ideal semiprima dari ${}^{(R,G)}/_{I}$.

Akan dibuktikan P adalah *graded* ideal semiprima dari (R, G).

Ambil $(a + I), (b + I) \in {}^{\bigcup_{g\in G} R_g}/_{I}$. Misalkan

$(a + I)^k(b + I) \in {}^{P}/_{I}$, di mana

$$(a + I)^k(b + I) = \underbrace{(a + I)(a + I)\dots(a + I)}_{k}\ (b + I) \in {}^{P}/_{I}. \tag{3.21}$$

Dengan menggunakan Definisi 3.3.13, persamaan (3.21) dapat ditulis sebagai

$$\left(a^k b + I\right) \in {}^{P}/_{I}, \tag{3.22}$$

di mana $a^k b \in P$. Berdasarkan persamaan (3.22) dan Definisi 3.3.1 berlaku

$$\left(a^k b + I\right) \in {}^{P}/_{I} \Rightarrow (ab + I) \in {}^{P}/_{I}.$$

Oleh karena itu diperoleh jika $a^k b \in P$ maka $ab \in P$. ■

Proposisi 3.3.16
Misalkan $(R,G) = (R,G)_1 \times (R,G)_2$ dimana $(R,G)_i$ adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol untuk $i = 1,2$, maka berlaku

(1) P_1 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_1$ jika dan hanya jika $P_1 \times (R,G)_2$ adalah *graded* ideal semiprima dari (R,G).

(2) P_2 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_2$ jika dan hanya jika $(R,G)_1 \times P_2$ adalah *graded* ideal semiprima dari (R,G).

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Bukti.
(1) $(\Longrightarrow)$ Diketahui P_1 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_1$. Akan dibuktikan $P_1 \times (R,G)_2$ adalah *graded* ideal semiprima dari (R,G). Diketahui bahwa $(R,G) = (R,G)_1 \times (R,G)_2$, maka

$$\begin{aligned} \bigcup_{g\in G} R_g &= \bigcup_{g\in G}\left[\left(R_g\right)_1 \times \left(R_g\right)_2\right], \\ &= \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_1 \times \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_2. \end{aligned}$$

Ambil $m, n \in \bigcup_{g\in G} R_g$. Misalkan $m = (a_1, a_2)$ dan $n = (b_1, b_2)$, di mana $a_1, b_1 \in \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_1$ dan $a_2, b_2 \in \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_2$.
Misalkan $(a_1, a_2)^k (b_1, b_2) \in P_1 \times (R,G)_2$, sehingga

$$\begin{aligned} (a_1, a_2)^k (b_1, b_2) &= \underbrace{(a_1, a_2)(a_1, a_2) \dots (a_1, a_2)}_{k} (b_1, b_2) \\ &= \left(a_1{}^k, a_2{}^k\right)(b_1, b_2) \\ &= \left(a_1{}^k\, b_1, a_2{}^k\, b_2\right) \in P_1 \times (R,G)_2, \end{aligned} \qquad (3.23)$$

di mana $a_1{}^k\, b_1 \in P_1$ dan $a_2{}^k\, b_2 \in (R,G)_2$. Dengan memperhatikan $a_1{}^k\, b_1 \in P_1$ dan Definisi 3.3.1 maka dari persamaan (3.23) diperoleh $a_1 b_1 \in P_1$, dengan kata lain

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) \in P_1 \times (R,G)_2. \qquad \blacksquare$$

$(\Longleftarrow)$ Diketahui $P_1 \times (R,G)_2$ adalah *graded* ideal semiprima dari (R,G). Akan dibuktikan P_1 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_1$. Ambil $a_1, b_1 \in \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_1$ dan misalkan $a_1{}^k\, b_1 \in P_1$, sehingga

$$\left(a_1{}^k\, b_1, a_2{}^k\, b_2\right) \in P_1 \times (R,G)_2. \qquad (3.24)$$

Selanjutnya persamaan (3.24) dapat ditulis

$$\left(a_1{}^k, a_2{}^k\right)(b_1, b_2) = (a_1, a_2)^k(b_1, b_2) \in P_1 \times (R,G)_2. \quad (3.25)$$

Berdasarkan persamaan (3.25) dan Definisi 3.3.1 berlaku $(a_1, a_2)^k(b_1, b_2) \in P_1 \times (R,G)_2 \Longrightarrow (a_1, a_2)(b_1, b_2) \in P_1 \times (R,G)_2$ dengan kata lain

$$\left(a_1{}^k b_1, a_2{}^k b_2\right) \in P_1 \times (R,G)_2 \Longrightarrow (a_1b_1, a_2b_2) \in P_1 \times (R,G)_2.$$

Oleh karena itu diperoleh jika $a_1{}^k b_1 \in P_1$ maka $a_1b_1 \in P_1$.
Jadi P_1 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_1$. ■

(2) ($\Longrightarrow$) Diketahui P_2 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_2$. Selanjutnya akan dibuktikan $(R,G)_1 \times P_2$ adalah *graded* ideal semiprima dari (R,G). Ambil $m,n \in \bigcup_{g\in G} R_g$. Misalkan $m = (a_1, a_2)$ dan $n = (b_1, b_2)$, di mana $a_1, b_1 \in \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_1$ dan $a_2, b_2 \in \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_2$. Misalkan $(a_1, a_2)^k(b_1, b_2) \in (R,G)_1 \times P_2$, sehingga

$$\begin{aligned}(a_1, a_2)^k(b_1, b_2) &= \underbrace{(a_1, a_2)(a_1, a_2) \dots (a_1, a_2)}_{k}(b_1, b_2)\\ &= \left(a_1{}^k, a_2{}^k\right)(b_1, b_2)\\ &= \left(a_1{}^k b_1, a_2{}^k b_2\right) \in (R,G)_1 \times P_2, \qquad (3.26)\end{aligned}$$

di mana $a_1{}^k b_1 \in (R,G)_1$ dan $a_2{}^k b_2 \in P_2$. Dengan memperhatikan $a_2{}^k b_2 \in P_2$ dan Definisi 3.3.1 maka dari persamaan (3.26) diperoleh $a_2b_2 \in P_2$, dengan kata lain

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) \in (R,G)_1 \times P_2.$$ ■

($\Longleftarrow$) Diketahui $(R,G)_1 \times P_2$ adalah *graded* ideal semiprima dari (R,G). Akan dibuktikan P_2 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_2$. Ambil $a_2, b_2 \in \left(\bigcup_{g\in G} R_g\right)_2$ dan misalkan $a_2{}^k b_2 \in P_2$, sehingga

$$\left(a_1{}^k b_1, a_2{}^k b_2\right) \in (R,G)_1 \times P_2. \quad (3.27)$$

Selanjutnya persamaan (3.27) dapat ditulis

$$\left(a_1{}^k, a_2{}^k\right)(b_1, b_2) = (a_1, a_2)^k(b_1, b_2) \in (R,G)_1 \times P_2. \quad (3.28)$$

Berdasarkan persamaan (3.28) dan Definisi 3.3.1 berlaku $(a_1, a_2)^k(b_1, b_2) \in (R,G)_1 \times P_2 \Longrightarrow (a_1, a_2)(b_1, b_2) \in (R,G)_1 \times P_2$, dengan kata lain

$$\left({a_1}^k b_1, {a_2}^k b_2\right) \in (R,G)_1 \times P_2 \Longrightarrow (a_1 b_1, a_2 b_2) \in (R,G)_1 \times P_2.$$

Oleh karena itu diperoleh jika ${a_2}^k b_2 \in P_2$ maka $a_2 b_2 \in P_2$.

Jadi P_2 adalah *graded* ideal semiprima dari $(R,G)_2$. ■

Teorema 3.3.17

Misalkan (R,G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan P adalah *graded ideal* dari (R,G). P adalah graded ideal semiprima dari (R,G) jika dan hanya jika *graded* ring $(R,G)/_P$ tidak memiliki elemen nilpoten tak nol.

(Farzalipour dan Ghiasvand, 2013)

Bukti.

($\Longrightarrow$) Diketahui P adalah *graded* ideal semiprima dari (R,G).

Akan dibuktikan $(R,G)/_P$ tidak memiliki elemen nilpoten tak nol.

Ambil sebarang $(a+P) \in (R,G)/_P$. Diasumsikan bahwa

$(a+P)^n = 0_{(R,G)/_P}$, di mana $0_{(R,G)/_P} = P$.

$(a+P)^n = 0_{(R,G)/_P}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\underbrace{(a+P)(a+P)\dots(a+P)}_{n} = 0_{(R,G)/_P}.$$

Berdasarkan Definisi 3.3.13 diperoleh

$$(a^n + P) = 0_{(R,G)/_P},$$

maka

$$(a^n + P) = P,$$

jelas bahwa $a^n \in P$. Berdasarkan Definisi 3.3.1 berlaku jika $a^n \in P$ maka $a \in P$, sehingga

$$(a+P) = P.$$

Dengan kata lain

$$(a+P) = 0_{(R,G)/_P}.$$ ■

($\Leftarrow$) Diketahui ${}^{(R,G)}/_{P}$ tidak memiliki elemen nilpoten tak nol.

Selanjutnya akan dibuktikan P adalah *graded* ideal semiprima, yaitu $a^n b \in P \Rightarrow ab \in P$, di mana $a, b \in \bigcup_{g\in G} R_g$. Misalkan $(ab + P)$ elemen nilpoten dari ${}^{(R,G)}/_{P}$, maka berlaku

$$(ab + P)^n = 0_{(R,G)/_{P}},$$

di mana $0_{(R,G)/_{P}} = P$. Oleh karena ${}^{(R,G)}/_{P}$ tidak memiliki elemen nilpoten tak nol maka $(ab + P) = 0_{(R,G)/_{P}}$. Dengan kata lain

$$(ab + P) = P,$$

sehingga jelas bahwa $ab \in P$. ∎

BAB IV
KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol yang dinotasikan sebagai (R, G) adalah *direct sum* subgrup-subgrup aditif sebanyak order grup G dari ring komutatif dengan elemen identitas tak nol dan memenuhi syarat tertentu.
2. Misalkan (R, G) adalah G-*graded* ring komutatif dengan elemen identitas tak nol. $P = \bigoplus_{g \in G} P_g$, I, J adalah *graded ideal* dari (R, G) berlaku
   a. Jika P_g adalah subgrup semiprima maka P adalah *graded* ideal semiprima dari (R, G).
   b. Jumlahan, irisan, dan pergandaan dari I, J adalah *graded* ideal.
3. Suatu *graded ideal* P adalah *graded* ideal semiprima jika dan hanya jika *graded* ring faktor dari P oleh I adalah *graded* ideal semiprima.
4. Suatu *graded ideal* adalah *graded* ideal semiprima jika dan hanya jika *graded* ring faktor dari G-*graded* ring oleh *graded ideal*-nya tidak memiliki elemen nilpoten tak nol.

DAFTAR PUSTAKA

Abhyankar, S S. 2006. *Lectures on Algebra*. Volume I. World Scientific Publishing Co., Pte. Ltd. Singapore.

Bhattacharya, P.B., dkk. 1995. *Basic Abstract Algebra*. S*econd edition*. Cambridge University Press. New York.

Chaudhuri, N.P. 1983. *Abstract Algebra*. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited. New Delhi.

Dakheel, S.O. 2010. *S-Prime Submodules and Some Related Concepts.* University of Baghdad. Iraq.

Dummit, S.D dan M.R. Foote. 2004. *Abstract Algebra. Third edition.* John Wiley and Sons, Inc. USA.

Farzalipour, F dan P. Ghiasvand. 2013. On Graded Semiprime and Graded Weakly Semiprime Ideals. *International Electronic Journal of Algebra*. Volume 13. Hal 15-22.

Hartley, B dan T.O Hawkes. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra*. Spottiswoode, Ballantyne &Co., Ltd. London.

Nastasescu, C dan F. V Oystaeyen. 1982. *Graded Ring Theory.* North Holland Publishing Company. Amsterdam.

Refaei, M dan K. Al-Zoubi. 2004. On Graded Primary Ideals. *Turk Journal Math*. Volume 28. Hal 217-229.

Whitelaw, T.A.1995. *Introduction to Abstract Algebra. Third edition.* Department of Mathematics University of Glasgow. Blackie Academic and Professional. Glasgow.