PERLUASAN TEOREMA TITIK TETAP BANACH PADA RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

oleh:
DEVI ARINTIKA
0910940046-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

PERLUASAN TEOREMA TITIK TETAP BANACH PADA RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

DEVI ARINTIKA
0910940046-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PERLUASAN TEOREMA TITIK TETAP BANACH PADA RUANG METRIK PARSIAL

oleh:

DEVI ARINTIKA
0910940046-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 7 Februari 2014
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Drs. Mohamad Muslikh, M.Si.
NIP. 195910311989121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Devi Arintika**
NIM	**: 0910940046**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: Perluasan Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik Parsial**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 7 Februari 2014
yang menyatakan,

<u>Devi Arintika</u>
NIM 0910940046

PERLUASAN TEOREMA TITIK TETAP BANACH PADA RUANG METRIK PARSIAL

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dipelajari teorema titik tetap Banach pada ruang metrik parsial. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa teorema titik tetap Banach berlaku pada ruang metrik parsial.

Kata kunci : ruang metrik parsial, titik tetap.

EXPANSION OF BANACH FIXED POINT THEOREM ON PARTIAL METRIC SPACE

*ABSTRAC*T

The purpose of this final project is studying Banach fixed point theorem on partial metric spaces. The result of it is Banach fixed point theorem can be applied on partial metric space.

Keyword : partial metric spaces, fixed point.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul “Perluasan Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik Parsial”.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika. Skripsi ini juga dapat selesai karena bimbingan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang tulus kepada

1. Drs. Mohamad Muslikh. M.Si. selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Ratno Bagus E.W., S.Si.,M.Si.,Ph.D. dan Sa’adatul Fitri, S.Si., M.Sc. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. H. Sobri Abusini, MT. selaku Ketua Program Studi Matematika dan Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T selaku dosen Penasihat Akademik,
4. seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. Drs. Mustokhip (Bapak), Siti Umayanah (Ibu), Zayyin Khudlori (Kakak) dan seluruh keluarga besar atas segala doa, bantuan, dan motivasi yang tak pernah habis diberikan,
6. semua teman-teman Matematika angkatan 2009 atas semangat dan bantuan yang telah diberikan serta kebersamaannya selama ini,
7. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan.

Akhir kata, Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 7 Februari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{N}$	: himpunan bilangan asli
$\in$	: anggota himpunan
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real
(X, d)	: ruang metrik
$d(x, y)$	: fungsi jarak titik x dan y
(X, p)	: ruang metrik parsial
$\langle x_n \rangle$	: barisan x_n

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam ilmu matematika, ruang metrik merupakan kesatuan jarak yang didefinisikan antara unsur-unsur dari suatu himpunan. Metode ruang metrik telah digunakan selama puluhan tahun dalam berbagai aplikasi, misalnya dalam mesin pencari internet, klasifikasi citra atau klasifikasi protein.

Diperkenalkan oleh Matthews pada tahun1992, sebuah ruang metrik parsial merupakan generalisasi dari sebuah ruang metrik. Jarak suatu titik dari dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol. Hal ini memotivasi seorang ahli komputer untuk mendalami tentang ruang metrik parsial (Bukatin,2009).

Ruang metrik yang tidak selalu bernilai nol ketika berjarak dengan dirinya sendiri membuat teorema tentang pemetaan kontraksi sedikit mengalami perubahan. Dalam skripsi ini akan dibahas tentang teorema pemetaan kontraksi pada ruang metrik parsial.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, rumusan masalah yang akan dikemukakan dalam skripsi ini sebagai berikut:

1. Bagaimana definisi ruang metrik parsial?
2. Bagaimana teorema pemetaan kontraksi pada ruang metrik parsial?

1.3 Batasan Masalah

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini hanya tentang pemetaan kontraksi pada ruang metrik parsial.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Untuk mengetahui bagaimana definisi ruang metrik parsial.
2. Untuk mengetahui teorema pemetaan kontraksi pada ruang metrik parsial.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas tentang definisi dan teorema yang akan menjadi dasar pada pembahasan bab III,yaitu definisi ruang metrik, definisi barisan, definisi pemetaan, definisi titik tetap, dan definisi fungsi komposisi.

2.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1.1 (Ruang Metrik)
Diberikan himpunan X yang tidak kosong. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma dibawah ini:
M1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$;
M2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
M3. $d(x,y)= d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$;
M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap x, y dan $z \in X$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d disebut ruang metrik dan dinyatakan dengan (X,d)(Soemantri, 1988).

Contoh 2.1.2
Pandang $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan fungsi $d(x,y) = |x - y|$, untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$, maka d merupakan metrik.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa d adalah metrik
i. $d(x,y) = |x - y| \geq 0$ (sifat nilai mutlak)
ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
iii. $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$
iv. $d(x,y) = |x - y| = |x - z + z - y|$
$\leq |x - z| + |z - y|$
$= d(x,z) + d(z,y)$

Jadi, terbukti bahwa d merupakan metrik.

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1 (Barisan)
Diberikan ruang metrik X dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ serta fungsi

$$f : \mathbb{N} \to X$$

yang didefinisikan sebagai $f(n) = x_n \in X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. (Muslikh,2012).

Definisi 2.2.2 (Barisan Konvergen)
Diberikan ruang metrik (X, d) dan barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam X. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan konvergen ke x jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Barisan $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke x, ditulis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$, dimana titik x disebut limit barisan dari barisan $\langle x_n \rangle$ (Soemantri, 1988).

Teorema 2.2.3
Jika barisan $\langle x_n \rangle$ dalam (X, d) konvergen maka limit barisannya tunggal.

Bukti:
Misalkan barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke titik x dan y, akan dibuktikan $x = y$ (tunggal). Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Karena x_n konvergen ke x dan y maka terdapat $N_1 \epsilon N$ dan $N_2 \epsilon N$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2}$$

Jika bilangan $N = maks\{N_1, N_2\}$ maka dari ketaksamaan (2.1) dan (2.2) serta sifat ketaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Untuk setiap $n \geq N$. Jadi, $d(x, y) < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka $x = y$ tunggal.

Definisi 2.2.4 (Barisan Cauchy)
Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n > N$ berlaku

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

(Soemantri, 1988).

Teorema 2.2.5
Setiap barisan yang konvergen dalam suatu metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy (Soemantri, 1988).

Bukti:
Misalkan $x_n \to x$. Maka untuk setiap $\mathcal{E} > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil $m > n \geq N$, maka juga berlaku

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan pertidaksamaan segitiga, maka untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan demikian, $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy. Teorema tidak berlaku sebaliknya.

Definisi 2.2.6 (Ruang Metrik Lengkap)
Ruang metrik X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalam X konvergen di dalam X (Soemantri, 1988).

2.3 Pemetaan

Definisi 2.3.1 (Pemetaan)
Misalkan X dan Y himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari himpunan X ke himpunan Y dinotasikan dengan $f: X \rightarrow Y$ adalah suatu pengawanan setiap $x \in X$ dikawankan secara tunggal dengan $y \in Y$ dan ditulis $y = f(x)$ (Soemantri,1988).

Definisi 2.3.2 (Pemetaan Kontinu)
Misalkan $X = (X, d_a)$ dan $Y = (Y, d_b)$ adalah ruang-ruang metrik. Pemetaan $f: X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu di titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\mathcal{E} > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $d_a(x, x_0) < \delta$ maka berlaku

$$d_b(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

pemetaan f dikatakan kontinu pada X jika f kontinu di setiap titik anggota X (Soemantri, 1988).

Definisi 2.3.3 (Pemetaan Kontraksi)
Misalkan (X, d) ruang metrik. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan kontraksi, jika ada suatu bilangan real k dengan $0 \leq k < 1$ sedemikian sehingga:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X$$

untuk setiap $x, y \in X$ (Kreyszig, 1978).

2.4 Titik Tetap

Definisi 2.4.1 (Titik Tetap)
Misalkan f adalah pemetaan $f: X \rightarrow X$. Titik $x \in X$ disebut titik tetap f jika $x = f(x)$ (Kreyzig, 1978).

Teorema 2.4.2 (Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik)
Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap. Jika $f: X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraksi pada X, maka f mempunyai titik tetap yang tunggal (Kreyzig, 1978).

Bukti :
Ambil $x_0 \in X$ dan dibentuk barisan $\langle x_n \rangle$ dengan suku-suku sebagai berikut

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(f(x_m), f(x_{m-1})) \\ &\leq a\, d(x_m, x_{m-1}) \\ &= a\, d(f(x_{m-1}), f(x_{m-2})) \\ &\leq a^2\, d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \\ &\leq a^m\, d(x_1, x_0) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Ambil $\varepsilon > 0$, karena f kontraksi maka

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq a\, d(x, y),$$

dimana $0 \leq a < 1$. Ambil bilangan $n, m \in N$, dengan $n > m$ maka dengan sifat ketaksamaan segitiga pada metrik dan ketaksamaan (2.3), didapatkan

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\quad + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (a^m + a^{m+1} + \cdots + a^{n-2} + a^{n-1}) d(x_1, x_0) \\ &\leq a^m (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-m-1}) d(x_1, x_0) \\ &= a^m \sum_{i=0}^{n-m-1} a\;\, d(x_1, x_0) \\ &\leq a^m \textstyle\sum_{i=0}^{n-m-1} a^i\;\, d(x_1, x_0) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Karena $0 \leq a < 1$, maka deret $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ pada ketaksamaan (2.4) konvergen ke $\frac{1}{1-a}$ sehingga didapat

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0)$$

Untuk $n > m \geq N$.

Misal $d(x_1, x_0) = \lambda$, maka

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\lambda a^m}{1-a}$$

Dipilih $N \in \mathbb{N}$ dengan

$$N < \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-a)}{\lambda}\right)}{\ln a}$$

$$a^N < \frac{\varepsilon(1-a)}{\lambda}$$

Maka diperoleh

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\lambda a^m}{1-a} < \frac{\lambda a^n}{1-a} = \varepsilon$$

Dengan demikian $\langle x_n \rangle$barisan Cauchy.

Karena X lengkap, $\langle x_n \rangle$ konvergen, katakan $x_n \to x$. Akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari pemetaan f. Karena $x_n \to x$, berlaku :

$$d(x, f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = (1+a)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, $d(x, f(x)) = 0$. Berdasarkan sifat metrik didapatkan $x = f(x)$. Jadi, menurut definisi (2.3.1), x merupakan titik tetap dari pemetaan kontraksi f.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa titik tetap tunggal. Andaikan x dan y adalah titik tetap dari f, sehingga berlaku

$$x = f(x) \text{ dan } y = f(y).$$

Dengan demikian

$$d(x, y) = d\big(f(x), f(y)\big) \leq a\, d(x, y).$$

Karena $0 < a < 1$ sehingga $d(x, y) = 0$. Sehingga berdasarkan sifat metrik didapatkan $y = x$. Dengan demikian terbukti bahwa pemetaan konraksi pada X yang lengkap mempunyai titik tetap yang tunggal.■

2.5 Fungsi Komposisi

Definisi 2.5.1 (Fungsi Komposisi)
Fungsi komposisi adalah penggabungan operasi dua fungsi secara berurutan sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru.
Suatu fungsi f dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f, fungsi g dengan daerah asal D_g dan daerah hasil R_g untuk "f komposisi g" dilambangkan $f \circ g = \big\{(x, y) | x \in D_g, y \in R_f \text{ dan } f(g(x))\big\}$ dimana $D_g \cap R_f$.

Komposisi fungsi f terhadap dirinya sendiri dapat ditulis

$$(f \circ f)(x) = f^2(x)$$

$$(f \circ f^2)(x) = f^3(x)$$

.

.

.

$$(f \circ f^{n-1})(x) = f^n(x).$$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Ruang Metrik Parsial

Definisi 3.1.1 (Ruang Metrik Parsial)
Diberikan himpunan X yang tidak kosong. Fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ disebut metrik parsial pada X jika memenuhi aksioma-aksioma dibawah ini:
P1. $p(x,x) \leq p(x,y)$, untuk semua $x, y \in X$
P2. $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ jika dan hanya jika $x = y$
P3. $p(x,y) = p(y,x)$ (simetri)
P4. $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ (ketaksamaan segitiga).

Sebuah ruang metrik parsial adalah pasangan dari (X,p) yang mana X adalah sebuah himpunan tidak kosong dan p adalah suatu metrik parsial pada X.

Contoh 3.1.2
Misalkan $(X = \mathbb{R})$ didefinisikan $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga

$$p(x,y) = \frac{|x-y| + |x| + |y|}{2}$$

Maka $p(x,y)$ adalah ruang metrik parsial.

Bukti :
P1. $p(x,x) = |x|$

$$= \frac{|x-x| + |x| + |x|}{2}$$

$$= \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2}$$

$$= \frac{|x|}{2} + \frac{|x-y+y|}{2}$$

$$\leq \frac{|x|}{2} + \frac{|x-y| + |y|}{2}$$

$$= \frac{|x-y| + |y| + |x|}{2} = p(x,y).$$

P2. $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y) \Leftrightarrow x = y$

$$p(x,y) = p(x,x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{|x-y| + |x| + |y|}{2} = \frac{|x-x| + |x| + |x|}{2}$$
$$= \tfrac{2|x|}{2} = |x| \qquad (3.1)$$

$$p(x,x) = p(y,y) \Leftrightarrow |x| = |y| \qquad (3.2)$$
$$p(x,y) = p(y,y)$$
$$\Leftrightarrow \frac{|x-y| + |x| + |y|}{2} = \frac{|y-y| + |y| + |y|}{2}$$
$$= \tfrac{2|y|}{2} = |y| \qquad (3.3)$$

Dengan (3.2) dan (3.1) diperoleh

$$\frac{|x-y|}{2} + |x| = |x|$$
$$\frac{|x-y|}{2} = 0$$
$$|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Dengan (3.2) dan (3.3) diperoleh

$$\frac{|y-x|}{2} + |y| = |y|$$
$$\frac{|y-x|}{2} = 0$$
$$|y-x| = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Jadi terbukti bahwa $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y) \Leftrightarrow x = y$.

P3.
$$p(x,y) = \frac{|x-y| + |x| + |y|}{2}$$
$$= \frac{|y-x| + |y| + |x|}{2}$$
$$= p(y,x)$$

P4.
$$\frac{|x-z| + |x| + |z|}{2} + |y| = \frac{|x-z| + |x| + |z| + 2|y|}{2}$$
$$= \frac{|x-y+y-z| + |x| + |z| + 2|y|}{2}$$

$$\leq \frac{|x-y|+|y-z|+|x|+|z|+2|y|}{2}$$
$$= \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2} + \frac{|y-z|+|y|+|z|}{2}$$
$$= p(x,y) + p(y,z).$$

Jadi terbukti bahwa $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$.

Contoh 3.1.3

Diberikan (X,p) adalah ruang metrik parsial. Didefinisikan $d_p: X \times X \to \mathbb{R}$ sehingga

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

Maka d_p adalah metrik.

Bukti :

i. Ambil $x, y \in X$, didefinisikan

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$
$$\big(p(x,y) - p(x,x)\big) + (p(x,y) - p(y,y)) \geq 0$$
$$2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \geq 0$$

ii. $2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\big(p(x,y) - p(x,x)\big) + (p(x,y) - p(y,y)) = 0$$
$$p(x,y) - p(x,x) = 0 \Leftrightarrow p(x,y) = p(x,x),$$

dan

$$p(x,y) - p(y,y) = 0 \Leftrightarrow p(x,y) = p(y,y).$$

Jadi, $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ jika dan hanya jika $x = y$.

iii. $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$

$$= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x)$$
$$= d_p(y,x)$$

iv. $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$

$$= \big(p(x,y) - p(x,x)\big) + (p(x,y) - p(y,y))$$
$$\leq (p(x,z) + p(z,y) - p(z,z) - p(x,x))$$
$$+ (p(x,z) + p(z,y) - p(z,z) - p(y,y))$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(2p(x,z) - p(z,z) - p(x,x)\right) \\
&\qquad\qquad + (2p(z,y) - p(z,z) - p(y,y)) \\
&= d_p(x,z) + d_p(z,y)
\end{aligned}
$$

Jadi, $d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y)$.

Definisi 3.1.4 (Barisan Cauchy)
Sebuah barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X,p) adalah Cauchy jika terdapat $p(a,a) \geq 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in X$ sehingga untuk semua $n,m > N$,

$$|p(x_n, x_m) - p(a,a)| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain, $\langle x_n \rangle$ adalah Cauchy jika barisan $p(x_n, x_m)$ konvergen ke $p(a,a)$ untuk $n,m \to \infty$, atau $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = p(a,a)$. Jika (X,p) adalah ruang metrik maka $p(a,a) = 0$.

Definisi 3.1.5 (Barisan Konvergen)
Sebuah barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X,p) konvergen ke $a \in X$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq N$ berlaku

$$p(x_n, a) - p(a,a) < \varepsilon$$

dan

$$p(x_n, a) - p(x_n, x_n) < \varepsilon.$$

Barisan $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke a dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, a) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(a,a).$$

Jika sebuah barisan titik konvergen maka jarak terhadap dirinya sendiri adalah konvergen pada titik yang berjarak.

Teorema 3.1.6
Misal (X,p) adalah ruang metrik parsial dan barisan$\langle x_n \rangle$ di dalam X. Jika $\langle x_n \rangle$ konvergen, maka $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Bukti :
Misalkan barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke $a \in X$ maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga setiap $n \geq N$, berlaku :

$$p(x_n, a) - p(a, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$p(x_n, a) - p(x_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Untuk $m > N$ juga berlaku

$$p(x_m, a) - p(a, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$p(x_m, a) - p(x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan ketaksamaan segitiga , maka :

$$\begin{aligned}
&|p(x_n, x_m) - p(a, a)| \\
&\qquad \leq |p(x_n, a) + p(x_m, a) - p(a, a) - p(a, a)| \\
&\qquad \leq |p(x_n, a) - p(a, a)| + |p(x_m, a) - p(a, a)| \\
&\qquad = \big(p(x_n, a) - p(a, a)\big) + \big(p(x_m, a) - p(a, a)\big) \\
&\qquad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sehingga $|p(x_n, x_m) - p(a, a)| < \varepsilon.$

Jadi, terbukti bahwa setiap barisan yang konvergen merupakan barisan Cauchy.

Definisi 3.1.7 (Barisan Lengkap)
Suatu ruang metrik parsial (X, p) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen.

Definisi 3.1.8 (Kontraksi)
Diberikan ruang metrik parsial (X, p), pemetaan $f: X \to X$ disebut kontraksi jika terdapat $0 \leq c < 1$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$ berlaku

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq c\, p(x, y).$$

Teorema 3.1.9 (Matthews)
Diberikan ruang metrik parsial (X, p). Jika $f: X \to X$ adalah pemetaan kontraksi pada X, maka f mempunyai titik tetap yang tunggal.

Bukti :
Ambil $x_0 \in X$, kemudian dibentuk barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_{n+1} = f(x_n)$, sehingga diperoleh

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(x_1) = f\big(f(x_0)\big) = f^2(x_0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = f^n(x_0)$$

Dari definisi kontraksi (3.1.6) diperoleh

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= p\big(f(x_0), f(x_1)\big) \\ &\leq c\, p(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x_2, x_3) &= p\big(f(x_1), f(x_2)\big) \\ &\leq c\, p(x_1, x_2) \\ &\leq c\,\big(c\, p(x_0, x_1)\big) \\ &= c^2\, p(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Secara umum diperoleh

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq c^n\, p(x_0, x_1) \tag{3.1}$$

Ambil $n, k \in N$ dengan $n > k$, maka dengan ketaksamaan segitiga dan (3.1) didapatkan :

$$
\begin{aligned}
p(x_k, x_n) &\leq p(x_k, x_{k+1}) + p(x_{k+1}, x_n) - p(x_{k+1}, x_{k+1}) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + p(x_{k+1}, x_n) - p(x_{k+1}, x_{k+1}) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + p(x_{k+1}, x_n) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + p(x_{k+1}, x_{k+2}) + p(x_{k+2}, x_n) \\
&\qquad - p(x_{k+2}, x_{k+2}) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + c^{k+1}\, p(x_0, x_1) + p(x_{k+2}, x_n) \\
&\qquad - p(x_{k+2}, x_{k+2}) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + c^{k+1}\, p(x_0, x_1) + p(x_{k+2}, x_n) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + c^{k+1}\, p(x_0, x_1) + p(x_{k+2}, x_{k+3}) \\
&\qquad + p(x_{k+3}, x_n) - p(x_{k+3}, x_{k+3}) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + c^{k+1}\, p(x_0, x_1) + c^{k+2}\, p(x_0, x_1) \\
&\qquad + p(x_{k+3}, x_n) - p(x_{k+3}, x_{k+3}) \\
&\leq c^k\, p(x_0, x_1) + c^{k+1}\, p(x_0, x_1) + c^{k+2}\, p(x_0, x_1) \\
&\qquad + p(x_{k+3}, x_n) \\
&\leq c^k p(x_0, x_1) + c^{k+1} p(x_0, x_1) + c^{k+2} p(x_0, x_1) \ldots \\
&\qquad + c^{n-k} p(x_0, x_1) + c^{n-k-1} p(x_0, x_1) \\
&\leq c^k \left(1 + c + \cdots + c^{n-k} + c^{n-k-1}\right) p(x_0, x_1) \\
&= c^k \sum_{i=0}^{n-k-1} c^i\, p(x_0, x_1) \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Karena $0 \leq c < 1$, maka deret $\sum_{i=0}^{n-k-1} c^i$ pada ketaksamaan (3.2) konvergen ke $\frac{1}{1-c}$ sehingga didapat :

$$p(x_k, x_n) \leq \frac{c^k}{1-c} p(x_0, x_1).$$

Dimisalkan $p(x_0, x_1) = r$, untuk $n > k > N$ diperoleh

$$p(x_k, x_n) \leq \frac{rc^k}{1-c}.$$

Dipilih $N \in \mathbb{N}$ dengan

$$N < \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-c)}{r}\right)}{\ln c}$$

$$c^N < \frac{\varepsilon(1-c)}{r}$$

Sehingga $\frac{rc^N}{1-c} \leq \frac{r}{1-c} \cdot \frac{\varepsilon(1-c)}{r} < \varepsilon.$

Maka diperoleh

$$p(x_k, x_n) \leq \frac{rc^k}{1-c} \leq \frac{rc^N}{1-c} < \varepsilon.$$

Dengan demikian $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Karena X lengkap, $\langle x_n \rangle$ konvergen, katakan $x_n \to x^*$. Akan ditunjukkkan bahwa $x^* \in X$ adalah titik tetap pemetaan f. Menurut definisi (3.1.5) berlaku

$$p(x_n, x^*) - p(x^*, x^*) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.3}$$

Dan

$$p(x_n, x^*) - p(x_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \geq N$.

Dengan (3.3) dan (3.4) diperoleh

$$
\begin{aligned}
p(f(x^*),x^*) - p(x^*,x^*) \\
&\le p\big(f(x^*),f(x_n)\big) + p(f(x_n),x^*) - p\big(f(x_n),f(x_n)\big) \\
&\qquad - p(x^*,x^*) \\
&= \Big(p\big(f(x^*),f(x_n)\big) - p(x^*,x^*)\Big) \\
&\qquad + \Big(p(f(x_n),x^*) - p\big(f(x_n),f(x_n)\big)\Big) \\
&\le c\,\big(p(x^*,x_n) - p(x^*,x^*)\big) + c\,\big(p(x_n,x^*) - p(x_n,x_n)\big) \\
&\le c\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \le c\,\varepsilon < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Untuk semua $n \ge N$ dan $\varepsilon > 0$ sehingga $p(f(x^*),x^*) - p(x^*,x^*) = 0$, atau

$$p(f(x^*),x^*) = p(x^*,x^*), \tag{3.5}$$

Selain dari pada itu juga diperoleh

$$
\begin{aligned}
p(f(x^*),x^*) - p(f(x^*),f(x^*)) \\
&\le p\big(f(x^*),f(x_n)\big) + p(f(x_n),x^*) - p\big(f(x_n),f(x_n)\big) \\
&\qquad - p\big(f(x^*),f(x^*)\big) \\
&= p\big(f(x^*),f(x_n)\big) - p\big(f(x^*),f(x^*)\big) + p(f(x_n),x^*) \\
&\qquad - p\big(f(x_n),f(x_n)\big) \\
&\le c\,\big(p(x_n,x^*) - p(x_n,x_n)\big) + c\,\big(p(x_n,x^*) - p(x^*,x^*)\big) \\
&\le c\left(\tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \le c\,\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Untuk semua $n \ge N$ dan $\varepsilon > 0$ diperoleh $p(f(x^*),x^*) - p(f(x^*),f(x^*)) = 0$, atau

$$p(f(x^*),x^*) = p\big(f(x^*),f(x^*)\big) \tag{3.6}$$

Berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.6) diperoleh

$$p(f(x^*),x^*) = p(x^*,x^*) = p\big(f(x^*),f(x^*)\big).$$

Menurut aksioma P2 diperoleh $f(x^*) = x^*$, sehingga f mempunyai titik tetap $x^* \in X$.

Andaikan x^* dan y^* adalah titik tetap dari f sedemikian sehingga $x^* = f(x^*)$ dan $y^* = f(y^*)$, akan ditunjukkan $x^* = y^*$ tunggal.

$$\begin{aligned} p(x^*, y^*) - p(y^*, y^*) &= p\big(f(x^*), f(y^*)\big) - p\big(f(y^*), f(y^*)\big) \\ &\leq c\,\big(p(x^*, y^*) - p(y^*, y^*)\big) \end{aligned}$$

Karena $0 < c < 1$, sehingga

$$p(x^*, y^*) - p(y^*, y^*) = 0$$

Atau

$$p(x^*, y^*) = p(y^*, y^*) \tag{3.7}$$

Demikian juga dengan

$$\begin{aligned} p(x^*, y^*) - p(x^*, x^*) &= p\big(f(x^*), f(y^*)\big) - p\big(f(x^*), f(x^*)\big) \\ &\leq c\,\big(p(x^*, y^*) - p(x^*, x^*)\big) \end{aligned}$$

Karena $0 < c < 1$, sehingga

$$p(x^*, y^*) - p(x^*, x^*) = 0$$

atau

$$p(x^*, y^*) = p(x^*, x^*) \tag{3.8}$$

Berdasarkan persamaan (3.7) dan (3.8) diperoleh

$$p(x^*, x^*) = p(x^*, y^*) = p(y^*, y^*).$$

Menurut P2 diperoleh $x^* = y^*$. Sehingga titik tetap dari pemetaan f adalah tunggal. ■

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan didapatkan kesimpulan sebagai berikut :

1. Ruang metrik parsial merupakan generalisasi dari ruang metrik.
2. Pada ruang metrik parsial berlaku teorema titik tetap Banach.

4.2 Saran

Pada pembahasan selanjutnya, hal yang perlu untuk dikembangkan dalam skripsi ini adalah eksistensi titik tetap dalam ruang metrik parsial untuk pemetaan yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bukatin, M., dkk. 2009. *Partial Metric Spaces*. Publ. Int. Math 116. Hal 708-718.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Aplications*. John Wiley and Sons, Inc. Canada. Hal 299-303.

Muslikh, M. 2012. *Analisis Real*. Universitas Brawijaya Press. Malang. Hal 37-47.

Soemantri, R. 1988. *Analisis Real I*. Universitas Terbuka, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Hal 2.17-6.2.