GENERALIZED (σ, τ) *−DERIVATION* DI RING SEMIPRIMA

SKRIPSI

oleh :

YULIANI DEWI CAHYANINGRUM
0910941003-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

GENERALIZED (σ, τ) −*DERIVATION* DI RING SEMIPRIMA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :
Yuliani Dewi Cahyaningrum
0910941003-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

GENERALIZED $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ *−DERIVATION* DI RING SEMIPRIMA

oleh:
Yuliani Dewi Cahyaningrum
0910941003-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 5 Februari 2014
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Drs. Bambang Sugandi, M.Si
NIP. 195905151992031002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Yuliani Dewi Cahyaningrum
NIM : 0910941003-94
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : *Generalized* (σ,τ) $-$*Derivation* di Ring Semiprima

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 5 Februari 2014
Yang menyatakan,

(Yuliani Dewi Cahyaningrum)
NIM. 0910941003-94

GENERALIZED $\boldsymbol{(\sigma,\tau)}$ ***−DERIVATION*** **DI RING SEMIPRIMA**

ABSTRAK

Misal R adalah ring semiprima, I adalah *nonzero ideal* dari R, dan σ, τ adalah dua epimorfisma pada R. Suatu *additive mapping* $F: R \to R$ adalah *generalized* (σ, τ) *−derivation* pada R jika terdapat (σ, τ)-*derivation* $d: R \to R$ sedemikian sehingga $F(xy) = F(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ untuk setiap $x, y \in R$. Pada skripsi ini akan ditunjukkan bahwa jika $\tau(I)d(I) \neq 0$, maka R memuat *nonzero central ideal* dari R, jika salah satu dari persamaan berikut berlaku

(i). $F([x,y]) = \pm(x \circ y)_{\sigma,\tau}$; (ii). $F(x \circ y) = \pm[x,y]_{\sigma,\tau}$;
(iii). $F[x,y] = \pm[F(x),y]_{\sigma,\tau}$; (iv) . $F(x \circ y) = \pm(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}$;
(v). $F[x,y] = \pm[\sigma(y), G(x)]$, untuk setiap $x, y \in I$.

Kata Kunci: ***additive mapping, central,*** $\boldsymbol{(\sigma,\tau)}$***-derivation, generalized*** $\boldsymbol{(\sigma,\tau)}$***-derivation, nonzero ideal***

GENERALIZED (σ,τ) −DERIVATION IN SEMIPRIME RINGS

ABSTRACT

Let R be a semiprime ring, I a nonzero ideal of R, and σ,τ two epimorphisms of R. An additive mapping $F: R \to R$ is generalized (σ,τ)-derivation on R if there exists a (σ,τ)-derivation $d: R \to R$ such that $F(xy) = F(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ hold for all $x, y \in R$. In this paper, it is shown that if $\tau(I)d(I) \neq 0$, then R contains a nonzero central ideal of R, if one of the following holds
(i). $F([x,y]) = \pm(x \circ y)_{\sigma,\tau}$; (ii). $F(x \circ y) = \pm[x,y]_{\sigma,\tau}$;
(iii). $F[x,y] = \pm[F(x),y]_{\sigma,\tau}$; (iv) . $F(x \circ y) = \pm(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}$;
(v). $F[x,y] = \pm[\sigma(y), G(x)]$, for all $x, y \in I$.

Keywords: additive mapping, central, (σ,τ)-derivation, generalized (σ,τ)-derivation, nonzero ideal

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **"*Generalized* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$-*Derivation* di Ring Semiprima"** ini sesuai dengan waktu yang telah direncanakan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada teladan kita Rasulullah Muhammad SAW, seluruh keluarga, para sahabat dan pengikutnya yang setia sampai hari kiamat.

Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik atas dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan rasa hormat dan ungkapan terima kasih yang tulus kepada:

1. Drs. Bambang Sugandi, M.Si., selaku dosen pembimbing atas kesabaran, bimbingan, nasihat, dan arahan yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
2. Dr. Sobri Abusini, M.T., selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus dosen penasihat akademik yang sudah memberikan banyak nasihat, dukungan, dan saran selama penulis menempuh studi dan proses penulisan Skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen penguji yang telah banyak memberi masukan, saran dan kritik untuk Skripsi ini.
4. Dra. Ari Andari, M.S., selaku Ketua Bidang Ilmu Aljabar sekaligus dosen penguji yang telah banyak memberi masukan, saran dan kritik untuk Skripsi ini.
5. Segenap dosen Jurusan Matematika FMIPA UB atas transfer ilmu yang diberikan dan staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi.
6. Ibunda dan Ayahanda yang penulis banggakan dan cintai serta kakak dan adikku yang telah banyak memberikan dukungan, do'a dan pengorbanan baik secara moril maupun materil sehingga penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. Sahabat-sahabat penulis yang selalu menghibur, memotivasi dan memberikan dukungan serta do'a kepada penulis, Ami, Ila, Yeni,

Agasta, semua teman-teman di jurusan Matematika khususnya angkatan 2007, 2008, 2009, dan 2010 dan semua teman-teman Asrama Paser.

8. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan Skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih terdapat kekurangan. Untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari semua pihak guna penyempurnaan selanjutnya melalui email penulis yulianidewicahyaningrum@ymail.com. Akhirnya penulis berharap semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca umumnya.

Malang, 5 Februari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{C}$	Himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{N}$	Himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan semua bilangan riil
$\mathbb{Z}$	Himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	Himpunan semua bilangan bulat positif
$\mathbb{Z}_\mathrm{n}$	Himpunan bilangan bulat modulo n
I	Ideal
$\in$	Elemen (anggota)
$\notin$	Bukan elemen (bukan anggota)
$\subseteq$	Himpunan bagian (subset)
$\emptyset$	Himpunan kosong
$f: A \to B$	Pemetaan dari A ke B
$A \Longrightarrow B$	Implikasi jika A maka B
$*$	Sebarang operasi biner
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$\bullet$	Operasi pergandaan biasa
$\exists$	Terdapat
$\cap$	Irisan
$\cup$	Gabungan
$A \times B$	Hasil kali kartesius A dan B
$\blacksquare$	Akhir dari sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner yang memenuhi aksioma tertentu. Dengan kata lain struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen, yaitu himpunan, operasi, dan aksioma. Banyaknya operasi atau banyaknya aksioma menjadi pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan yang lain, sebagai contoh grup, semiring, ring, ring semiprima, dan lain sebagainya.

Ring merupakan perluasan dari konsep grup. Berbeda dengan grup yang merupakan sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dan operasi, ring merupakan sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan pergandaan. Di dalam ring terdapat subring dan ideal. Ideal ada dua macam yaitu ideal kanan dan ideal kiri. Jika suatu ideal memenuhi kedua jenis, ideal tersebut disebut ideal dua sisi.

Konsep tentang ring terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah ring semiprima. Ring semiprima ini juga terus dikembangkan dengan diterapkannya berbagai teori, seperti *derivation*. Pada tahun 2007 dalam jurnal Mohamad Nagy Daif memperkenalkan spesifikasi dari *derivation*, yaitu *On Generalized Derivation in Semiprime Rings.*

Selanjutnya, Basudeb Dhara dan Atanu Pattanayak pada tahun 2012 dalam jurnalnya yang berjudul *On Generalized* (σ,τ)-*Derivation in Semiprime Rings* memperkenalkan dan membahas mengenai definisi dan teorema yang berkaitan dengan *generalized* (σ,τ)-*derivation* di ring semiprima. Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan dibahas mengenai definisi dan teorema yang berkaitan dengan *generalized* (σ,τ)-*derivation* di ring semiprima.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi dan teorema beserta bukti-bukti yang berkaitan dengan *generalized* (σ,τ)-*derivation* di ring semiprima yang memuat *nonzero central ideal*.

1.3 Tujuan

Tujuan pembahasan skripsi ini adalah menjelaskan definisi dan teorema beserta bukti-bukti yang berkaitan dengan *generalized* (σ, τ)-*derivation* di ring semiprima yang memuat *nonzero central ideal*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi, contoh, dan teorema beserta buktinya sebagai acuan dalam membahas permasalahan yang akan disampaikan.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Sebagai dasar untuk memahami *Generalized* (σ, τ)-*Derivation* di Ring Semiprima, perlu dipahami beberapa istilah yang terkait di dalamnya termasuk pembahasan mengenai relasi, pemetaan, dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesius)

Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan dari semua pasangan terurut (x, y), dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesius dari A dan B, dinyatakan dengan:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Contoh 2.1.2

Diberikan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{c, d\}$, dan $C = \{y, z\}$. Tentukan hasil kali kartesius dari $A \times B$, $B \times C$, $B \times A$, dan $A \times B \times C$.

Bukti:

hasil kali kartesius dari $A \times B$, $B \times C$, $B \times A$, dan $A \times B \times C$ adalah.

$A \times B = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d)\}$

$B \times C = \{(c, y), (d, y), (c, z), (d, z)\}$

$B \times A = \{(c, 1), (d, 1), (c, 2), (d, 2), (c, 3), (d, 3)\}$

$A \times B \times C = \{(1, c, y), (2, c, y), (3, c, y), (1, c, z), (2, c, z), (3, c, z), (1, d, y), (2, d, y), (3, d, y), (1, d, z), (2, d, z), (3, d, z)\}.$

Definisi 2.1.3 (Relasi)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong, dan R adalah himpunan bagian (*subset*) dari $A \times B$, maka R disebut relasi dari A ke B.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Contoh 2.1.4

Diberikan himpunan $A = \{2, 3,4\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari A ke B dengan $(a, b) \in R$ jika a habis membagi b. Tentukan elemen-elemen dari R.

Bukti:

Elemen-elemen dari R adalah.

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}.$$

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat tunggal $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$, selanjutnya dituliskan sebagai $f(a) = b$.

Suatu pemetaan $f: A \to B$ disebut:

i. Injektif (1-1) jika untuk setiap a_1 dan a_2 elemen di A, berlaku jika $a_1 \neq a_2$ maka $f(a_1) \neq f(a_2)$.
ii. Surjektif (*onto*) jika untuk setiap elemen b di B, terdapat eleman a di A sedemikian sehingga $f(a) = b$.
iii. Bijektif jika f injektif dan surjektif.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Definisi 2.1.6 (Operasi Biner)

Misalkan S himpunan tak kosong, operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan $S \times S$ ke S, atau dinotasikan sebagai berikut:

$$*: S \times S \to S$$

Operasi biner pada S harus dalam bentuk pasangan terurut (a, b) dan dikawankan pada elemen S secara tunggal:

$$(a, b) \mapsto * \ (a, b) = a * b = c \in S$$

Dengan kata lain, S harus tertutup atas operasi biner pada S.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Definisi 2.1.7 (Pemetaan Identitas)

Misalkan A adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan $f: A \rightarrow A$ sedemikian sehingga $f(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ disebut sebagai pemetaan identitas pada A, atau dinotasikan dengan I_A.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.8 (*Additive Mapping*)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Suatu pemetaan $f: A \rightarrow B$ disebut *additive mapping* jika untuk setiap $a, b \in A$ memenuhi

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$

(Bartle, dkk., 1992)

Contoh 2.1.9

Diberikan himpunan $A = B = \mathbb{Z}$. Pemetaan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai $f(a) = 3a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$. Maka f merupakan suatu *additive mapping.*

Bukti:

Akan dibuktikan f merupakan suatu *additive mapping.*
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$.
$f(a + b) = 3(a + b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$
Jadi, f merupakan *additive mapping*.

■

2.2 Semigrup

Semigrup adalah suatu struktur aljabar yang sederhana dan dilengkapi dengan satu operasi biner. Semigrup merupakan suatu himpunan tidak kosong yang didalamnya terdapat satu operasi biner yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Definisi, contoh, serta teorema yang berkaitan dengan semigrup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)

Misalkan M adalah himpunan tidak kosong yang di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$, atau dinotasikan dengan $(M,*)$. $(M,*)$ disebut sebagai semigrup jika dan hanya jika:

(i) $(M,*)$ tertutup yaitu $(a * b) \in M$, untuk setiap $a, b \in M$.

(ii) $(M,*)$ assosiatif yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in M$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.2

Diberikan $\mathbb{Z}^+$ adalah himpunan bilangan bulat positif terhadap operasi penjumlahan. Maka $(\mathbb{Z}^+, +)$ merupakan semigrup.

Bukti:

Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(\mathbb{Z}^+, +)$ tertutup.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}^+$ maka $a + b \in \mathbb{Z}^+$. Misal diambil $a = \overline{1}$ dan $b = \overline{2}$ maka $\overline{1} + \overline{2} \in \mathbb{Z}^+$. Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}^+$. Jadi $(\mathbb{Z}^+, +)$ bersifat tertutup.
2. $(\mathbb{Z}^+, +)$ assosiatif.
   Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Misal diambil $a = \overline{1}, b = \overline{2}$, dan $c = \overline{3}$ maka
   $$(a + b) + c = a + (b + c).$$
   Dari ruas kiri diperoleh $(a + b) + c = (\overline{1} + \overline{2}) + \overline{3} = \overline{6}$.
   Dari ruas kanan diperoleh $a + (b + c) = \overline{1} + (\overline{2} + \overline{3}) = \overline{6}$.
   Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi $(\mathbb{Z}^+, +)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{Z}^+, +)$ memenuhi (1) dan (2) maka $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup.

■

Definisi 2.2.3 (Semigrup Komutatif)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup. Maka $(M,*)$ disebut semigrup komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in M$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.4

Diberikan semigrup $(\mathbb{Z}^+, +)$. Maka $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup komutatif.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup.
   $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup telah dibuktikan pada Contoh 2.2.2
2. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup komutatif.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}^+$ maka $a + b = b + a$.
   Misal diambil $a = \bar{1}$ dan $b = \bar{2}$ maka $\bar{1} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{1} = \bar{3}$
   Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}^+$ berlaku
   Jadi $(\mathbb{Z}^+, +)$ merupakan semigrup dan memenuhi sifat komutatif.

Karena $(\mathbb{Z}^+, +)$ memenuhi (1) dan (2) maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup komutatif.

■

Definisi 2.2.5 (Semigrup *Monoid*)

Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup dan mempunyai elemen identitas e terhadap operasi biner penjumlahan atau pergandaan, sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$ untuk setiap $a \in M$. Maka $(M,*)$ disebut semigrup dengan elemen identitas atau semigrup *monoid*.

(Durbin, 1992)

Contoh 2.2.6

Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan operasi pergandaan. Maka $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup *monoid*.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

   (i) $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$.

   Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$ diberikan pada Tabel 2.2 berikut:

   Tabel 2.1 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$ maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}_4$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

   (ii) $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ assosiatif yaitu $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$.

   Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

   Berdasarkan Tabel 2.1, misal diambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{2}$, dan $c = \bar{3}$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a \bullet b) \bullet c = (\bar{0} \bullet \bar{2}) \bullet \bar{3} = \bar{0}$$

   dan dari ruas kanan diperoleh

$$a \bullet (b \bullet c) = \bar{0} \bullet (\bar{2} \bullet \bar{3}) = \bar{0}.$$

   Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

   Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

   Karena $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ memenuhi (i) dan (ii) maka $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup.

2. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup yang *monoid*.

   Elemen identitas $\mathbb{Z}_4$ untuk pergandaan adalah 1 karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$.

Karena $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ memenuhi (1) dan (2) maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup *monoid*.

■

Teorema 2.2.7

Elemen identitas pada semigrup $(M,*)$ adalah tunggal.

(Whitelaw, 1995)

Bukti:

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup, dan $e, f \in M$ adalah elemen identitas. Akan ditunjukkan bahwa $e = f$. Karena f merupakan elemen identitas maka $f * e = e * f = e$. Karena e juga merupakan eleman identitas maka $e * f = f * e = f$. Dengan demikian $e = f$. Jadi, terbukti bahwa suatu semigrup hanya mempunyai elemen identitas yang tunggal.

■

Definisi 2.2.8 (Subsemigrup)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan P adalah himpunan bagian dari M. Jika $(P,*)$ merupakan semigrup, maka $(P,*)$ disebut subsemigrup dari $(M,*)$.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

2.3 Grup

Grup merupakan struktur aljabar yang lebih sempit dari semigrup, karena suatu himpunan dapat disebut sebagai suatu grup harus bersifat semigrup, mempunyai elemen identitas, dan setiap elemennya mempunyai invers. Definisi, contoh, dan teorema yang berkaitan dengan grup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 (Grup)

Misalkan G adalah himpunan tidak kosong yang di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$, atau dinotasikan dengan $(G,*)$. $(G,*)$ disebut sebagai grup jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

(i) Tertutup yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.

(ii) Assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(iii) Mempunyai elemen identitas yaitu terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$ sedemikian sehingga berlaku $e * a = a * e = a$.

(iv) Setiap elemen mempunyai invers yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

(Durbin, 1992)

Contoh 2.3.2

Diberikan $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Didefinisikan operasi biner $*$ pada G, yaitu untuk setiap $(a, b), (c, d) \in G$ berlaku
$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$. Maka G merupakan grup terhadap operasi $*$?

(Wijna, 2008)

Bukti:

Akan dibuktikan G merupakan grup. Jelas bahwa G bukan merupakan himpunan kosong.

1. Akan ditunjukkan bahwa G memenuhi sifat tertutup. Untuk sebarang $(a, b), (c, d) \in G$, maka $(a, b) * (c, d) \in G$.
2. Akan ditunjukkan bahwa G memenuhi sifat assosiatif. Untuk sebarang $(a, b), (c, d), (e, f) \in G$, dan dengan menggunakan sifat bilangan bulat diperhatikan bahwa:
$$\begin{aligned}((a, b) * (c, d)) * (e, f) &= (a + c, b + d) * (e * f)\\ &= (a + c + e, b + d + f)\\ &= (a, b) * (c + e, d + f)\\ &= (a, b) * ((c, d) * (e, f)).\end{aligned}$$
Jadi, terbukti bahwa sifat assosiatif berlaku.
3. Akan ditunjukkan bahwa G mempunyai elemen identitas. Jika dipilih elemen $(0,0) \in G$, maka untuk setiap $(a, b) \in G$ akan berlaku:
$$\begin{aligned}(0,0) * (a, b) &= (0 + a, 0 + b)\\ &= (a, b)\\ &= (a + 0, b + 0)\\ &= (a, b) * (0,0).\end{aligned}$$
Jadi, $(0,0) \in G$ merupakan elemen identitas pada G.

4. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen G mempunyai invers. Untuk sebarang $(a, b) \in G$ dipilih elemen $(-a, -b) \in G$, sehingga berlaku:

$$
\begin{aligned}
(a, b) * (-a, -b) &= (a + (-a), b + (-b)) \\
&= (a - a, b - b) \\
&= (0,0) \\
&= ((-a) + a, (-b) + b) \\
&= (-a, -b) * (a, b).
\end{aligned}
$$

Jadi, setiap elemen $(a, b) \in G$ memiliki elemen invers terhadap operasi $*$ yaitu $(-a, -b) \in G$.

Karena G memenuhi (1), (2), (3), dan (4) maka terbukti bahwa G adalah grup terhadap operasi $*$.

■

Dari Definisi 2.3.1, dapat disimpulkan bahwa suatu grup pasti merupakan semigrup. Akan tetapi tidak berlaku sebaliknya, yaitu tidak semua semigrup merupakan suatu grup.

Definisi 2.3.3 (Grup Komutatif)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $(G,*)$ disebut sebagai grup komutatif jika berlaku $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

(Isnarto, 2008)

Contoh 2.3.4

Grup $(G,*)$ pada Contoh 2.3.2 merupakan grup komutatif karena untuk setiap $(a, b), (c, d) \in G$ berlaku $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) * (a, b)$, sesuai dengan sifat komutatif pada penjumlahan bilangan bulat.

(Wijna, 2008)

Definisi 2.3.5 (Subgrup)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G. $(H,*)$ disebut subgrup dari $(G,*)$ jika $(H,*)$ juga merupakan suatu grup.

(Durbin, 1992)

Contoh 2.3.6

Diberikan G seperti didefinisikan pada Contoh 2.3.2. Misalkan $H = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathrm{G}$. Maka H merupakan subgrup dari G?

(Wijna, 2008)

Bukti:

Akan dibuktikan H merupakan subgrup dari G. Jelas bahwa H bukan merupakan himpunan kosong.

1. Akan ditunjukkan bahwa H memenuhi sifat tertutup. Untuk sebarang $(a, 0), (b, 0) \in H$, maka $(a, 0) * (b, 0) \in H$.
2. Akan ditunjukkan bahwa H memenuhi sifat assosiatif. Untuk sebarang $(a, 0), (b, 0), (c, 0) \in H$, dan dengan menggunakan sifat bilangan bulat diperhatikan bahwa:
$$\begin{aligned}\big((a, 0) * (b, 0)\big) * (c, 0) &= (a + b, 0) * (c, 0)\\ &= (a + b + c, 0)\\ &= (a, 0) * (b + c, 0)\\ &= (a, 0) * \big((b, 0) * (c, 0)\big).\end{aligned}$$
Jadi, terbukti bahwa sifat assosiatif berlaku.
3. Akan ditunjukkan bahwa H mempunyai elemen identitas. Jika dipilih elemen $(0,0) \in H$, maka untuk setiap $(a, 0) \in H$ akan berlaku:
$$\begin{aligned}(0,0) * (a, 0) &= (0 + a, 0)\\ &= (a, 0)\\ &= (a + 0,0)\\ &= (a, 0) * (0,0).\end{aligned}$$
Jadi, $(0,0) \in H$ merupakan elemen identitas pada H.
4. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen H mempunyai invers. Untuk sebarang $(a, 0) \in H$ dipilih elemen $(-a, 0) \in H$, sehingga akan berlaku:
$$\begin{aligned}(a, 0) * (-a, 0) &= (a + (-a), 0)\\ &= (a - a, 0)\\ &= (0,0)\\ &= \big((-a) + a, 0\big)\\ &= (-a, 0) * (a, 0).\end{aligned}$$
Jadi, setiap elemen $(a, 0) \in H$ memiliki elemen invers terhadap operasi $*$ yaitu $(-a, 0) \in H$.

Karena H memenuhi (1), (2), (3), dan (4) maka terbukti bahwa H adalah grup terhadap operasi $*$. Akibatnya H merupakan subgrup atas G.

■

Teorema 2.3.7

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G. $(H,*)$ subgrup dari $(G,*)$ jika dan hanya jika.

(i) $H \neq \emptyset$.

(ii) Jika $a \in H$ dan $b \in H$, maka $a * b \in H$.

(iii) Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

(Durbin, 1992)

Bukti:

$\Longrightarrow$ Jika diketahui $(H,*)$ subgrup maka

(i) Terdapat $e \in H$, sehingga terbukti bahwa $H \neq \emptyset$.

(ii) Terdapat $(H,*)$ subgrup, sehingga $(H,*)$ juga merupakan grup, maka $a * b \in H$ untuk setiap $a * b \in H$.

(iii) Untuk setiap $a \in H$, maka terdapat $b \in H$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$ berdasarkan aksioma ke (iv) dari grup. Jadi, $b = a^{-1} \in H$

Jadi terbukti (i), (ii), (iii) terpenuhi.

$\Longleftarrow$ Diketahui $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G yang memenuhi kondisi (i), (ii), (iii), akan dibuktikan bahwa $(H,*)$ subgrup dari $(G,*)$.

(i) Tertutup dipenuhi oleh kondisi (ii).

(ii) Ambil $a, b, c \in H$. Karena H adalah himpunan bagian dari G, maka untuk setiap $a, b, c \in G$, sehingga berlaku $a * (b * c) \in (a * b) * c$. Sifat assosiatif tersebut juga berlaku untuk setiap elemen di H.

(iii) Misalkan $a \in H$, dari kondisi (iii) maka $a^{-1} \in H$. Kondisi (ii) mengakibatkan $a * a^{-1} \in H$. Tetapi $a * a^{-1} \in G$, sedangkan $a * a^{-1} \in e$. Sehingga $e = a * a^{-1} \in H$. Terbukti bahwa setiap e adalah elemen identitas di H.

(iv) Setiap elemen di H mempunyai invers, terpenuhi pada kondisi (iii).

Karena H adalah himpunan bagian dari G, maka terbukti bahwa $(H,*)$ subgrup dari $(G,*)$.

■

2.4 Ring

Ring merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan pergandaan. Definisi, contoh, dan teorema yang berkaitan dengan ring diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 (Ring)

Misalkan R adalah himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan pergandaan, atau dinotasikan dengan $(R,+,\bullet)$. $(R,+,\bullet)$ disebut sebagai ring jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

(i) $(R,+)$ adalah grup komutatif.

(ii) $(R,\bullet)$ adalah semigrup.

(iii) $(R,+,\bullet)$ memenuhi hukum distributif yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku:
$(a+b)c = (ac)+(bc)$ dan
$a(b+c) = (ab)+(ac)$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Contoh 2.4.2

Diberikan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_3,+,\bullet)$ adalah ring.

Bukti:

$\mathbb{Z}_3$ adalah ring jika memenuhi

(i) $(\mathbb{Z}_3,+)$ grup komutatif.
Himpunan bilangan bulat modulo 3 terhadap operasi penjumlahan didefinisikan pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_3$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

a. Jelas $\mathbb{Z}_3$ tertutup terhadap operasi penjumlahan, karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}_3$

b. Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada $\mathbb{Z}_3$.
Misal diambil $a = \bar{0}, b = \bar{1}$, dan $c = \bar{2}$, maka

$$(\bar{0} + \bar{1}) + \bar{2} = \bar{1} + \bar{2} = \bar{0},$$

sedangkan pihak lain

$$\bar{0} + (\bar{1} + \overline{\bar{2})} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}.$$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ akan diperoleh $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi pada $(\mathbb{Z}_3, +)$ berlaku sifat assosiatif.

c. Elemen identitas pada $\mathbb{Z}_3$ untuk penjumlahan adalah $\bar{0}$, karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$.

d. Berdasarkan Tabel 2.2, diperoleh bahwa $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$, dan $\bar{2} + \bar{1} = \bar{0}$. Ini berarti $(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$, $(\bar{1})^{-1} = \bar{2}$, dan $(\bar{2})^{-1} = \bar{1}$. Jadi setiap elemen dalam $\mathbb{Z}_3$ mempunyai invers.

e. Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_3$. Misal diambil $a = \bar{1}$ dan $b = \bar{2}$, maka $\bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$ sedangkan di pihak lain $\bar{2} + \bar{1} = \bar{0}$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$.

(ii) Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ adalah semigrup.

a. $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ tertutup.
Opearasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_3$ akan diberikan pada Tabel 2.3 berikut.

Tabel 2.3 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_3$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_3$ maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}_3$. Jadi $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

b. $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ assosiatif, yaitu $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$. Jadi $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) Akan ditunjukkan berlaku sifat distributif pada $\mathbb{Z}_3$. Misal diambil $a = \bar{0}, b = \bar{1}$, dan $c = \bar{2}$, maka

a. $a \bullet (b + c) = \bar{0} \bullet (\bar{1} + \bar{2}) = \bar{0} \bullet \bar{2} = \bar{0}$, sedangkan di pihak lain $(a \bullet b) + (a \bullet c) = (\bar{0} \bullet \bar{1}) + (\bar{0} \bullet \bar{2}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.

b. $(a + b) \bullet c = (\bar{0} + \bar{1}) \bullet \bar{2} = \bar{1} \bullet \bar{2} = \bar{2}$, sedangkan di pihak lain $(a \bullet c) + (b \bullet c) = (\bar{0} \bullet \bar{3}) + (\bar{1} \bullet \bar{2}) = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$.

Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ akan diperoleh

$$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$$

dan

$$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c).$$

Karena $\mathbb{Z}_3$ memenuhi (i), (ii) dan (iii) maka terbukti $\mathbb{Z}_3$ adalah ring.

■

Definisi 2.4.3 (Ring Komutatif)

Suatu ring R disebut komutatif jika $(R, \bullet)$ bersifat komutatif yaitu $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap $a, b \in R$.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Contoh 2.4.4

Berdasarkan Contoh 2.4.2, akan dibuktikan $\mathbb{Z}_3$ adalah ring komutatif.

Bukti:

$\mathbb{Z}_3$ adalah ring komutatif, yaitu $a \bullet b = b \bullet a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$.

$\bar{0} \bullet \bar{1} = \bar{1} \bullet \bar{0} = \bar{0}$

$\bar{1} \bullet \bar{2} = \bar{2} \bullet \bar{1} = \bar{2}$

$\bar{2} \bullet \bar{0} = \bar{0} \bullet \bar{2} = \bar{0}$

Jadi $\mathbb{Z}_3$ merupakan ring komutatif terhadap pergandaan.

Definisi 2.4.5 (Subring)

Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring dan S adalah himpunan bagian dari R. $S \neq \emptyset$, maka $(S, +, \bullet)$ disebut sebagai subring dari $(R, +, \bullet)$ jika $(S, +, \bullet)$ juga merupakan suatu ring.

(Dummit dan Foote, 2002)

Teorema 2.4.6

Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring. Maka $S \subset R$ disebut subring jika
(i) $S \neq \emptyset$.
(ii) $x - y \in S$, untuk setiap $x, y \in S$.
(iii) $x \bullet y \in S$, untuk setiap $x, y \in S$.

(Hidayanto dan Santi Irawati, 2000)

Bukti:

(i) Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring. $S \subset R$ disebut subring dari R. Berdasarkan Definisi 2.4.5, $(S, +, \bullet)$ membentuk ring dengan operasi yang sama di $(R, +, \bullet)$. Karena $(S, +, \bullet)$ ring, maka $S \neq \emptyset$.
(ii) Selanjutnya, ambil sebarang $x, y \in S$. $y \in S$, berarti $-y \in S$. Karena $x, -y \in S$, maka $x + (-y) = x - y \in S$.
(iii) Ambil sebarang $x \in S$. Menurut (i) $y - y \in S$ dan $0 - x = -x \in S$. Sehingga apabila $x, y \in S$, maka $x, -y \in S$ dan $x - (-y) = x + y \in S$. Karena $S \subset R$ dan R adalah ring, maka elemen-elemen di S juga merupakan elemen di R. Disamping itu, juga memenuhi sifat assosiatif dan komutatif terhadap penjumlahan, assosiatif terhadap pergandaan, dan distributif terhadap pergandaan dan penjumlahan. Karena memenuhi sifat tersebut, maka S adalah ring.

■

Definisi 2.4.7 (Elemen Identitas pada Ring)

Suatu elemen e dalam ring R disebut elemen identitas atau elemen satuan pada R jika $ea = ae = a$ untuk setiap $a \in R$.

(Bhattacharya,dkk., 1994)

Definisi 2.4.8 (Subgrup *Additive*)

Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring, misalkan $(R, +)$ adalah grup *additive* dari $(R, +, \bullet)$, dan misalkan $(H, +)$ adalah subgrup dari $(R, +)$, maka $(H, +)$ disebut subgrup *additive* dari $(R, +, \bullet)$.

(Hartley dan Hawkes, 1970)

Contoh 2.4.9

Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan suatu ring. Akan ditunjukkan bahwa $H = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah subgrup *additive* dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $(H, +)$ adalah subgrup *additive* dari $\mathbb{Z}_4$.

1. Jelas $H \neq \emptyset$ dan $H \subseteq \mathbb{Z}_4$.
2. Ambil sebarang $a, b \in H$, maka $a + b \in H$
   misalkan diambil $\bar{0}, \bar{2} \in H$
   $\bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$
   $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$
   $\bar{2} + \bar{0} = \bar{2}$

Jadi H merupakan subgrup *additive* dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 2.4.10 (*Central*)

Suatu elemen r pada ring R dikatakan *central* jika $xr = rx$, untuk setiap $x \in R$. Himpunan semua elemen *central* membentuk subring pada R, dikenal sebagai *center* pada R.

(http://en.wikipedia.org/wiki/Glossary_of_ring_theory, 2010)

Contoh 2.4.11

Diketahui dari Contoh 2.4.4 bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan ring komutatif. *Central* dari r adalah elemen-elemen dalam $\mathbb{Z}_3$ yang memenuhi $xr = rx$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$. Sehingga *central* dari $\mathbb{Z}_3$ adalah $r = \bar{0}$, $r = \bar{1}$, dan $r = \bar{2}$. Karena
untuk $r = \bar{0}$ berlaku
$\bar{0}\bar{0} = \bar{0}\bar{0}$
$\bar{0}\bar{1} = \bar{1}\bar{0}$
$\bar{0}\bar{2} = \bar{2}\bar{0}$

untuk $r = \overline{1}$ berlaku
$\overline{1}\overline{0} = \overline{0}\overline{1}$
$\overline{1}\overline{1} = \overline{1}\overline{1}$
$\overline{1}\overline{2} = \overline{1}\overline{2}$

untuk $r = \overline{2}$ berlaku
$\overline{2}\overline{0} = \overline{0}\overline{2}$
$\overline{2}\overline{1} = \overline{1}\overline{2}$
$\overline{2}\overline{2} = \overline{2}\overline{2}$

Definisi 2.4.12 (*Center* Dari Ring *R*)

Misalkan R adalah ring. $Z(R) = \{x \in R | ax = xa, \forall a \in R\}$ adalah *center* dari ring R.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Contoh 2.4.13

Berdasarkan Contoh 2.4.11, diketahui center dari $\mathbb{Z}_3$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_3) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}.$$

Teorema 2.4.14 ($\boldsymbol{Z(R)}$ Subring Dari Ring *R*)

Misalkan R adalah ring. $Z(R) = \{x \in R | ax = xa, \forall a \in R\}$ adalah subring dari ring R.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Bukti:

Misalkan R adalah ring dan $Z(R) = S$. Karena $0 \in S$, maka $S \neq \emptyset$. Misalkan $a, b \in S$ dan $x \in R$. Maka
$(a - b)x = ax - bx = xa - xb = x(a - b)$. Jadi, $(a - b) \in S$.
$(ab)x = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$. Jadi, $ab \in S$.

■

Definisi 2.4.15 (Ring Prima)

Suatu ring R disebut prima jika untuk setiap $a, b \in R$:

$$aRb = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ atau } b = 0$$

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Contoh 2.4.16

Diberikan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_5, +,\bullet)$ merupakan ring prima.

Bukti:

Dengan menggunakan kontraposisi akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5, +,\bullet)$ adalah ring prima, jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $aRb \neq \{0\}$.
Misalkan $a = \bar{1}$ dan $b = \bar{2}$, untuk sebarang $r \neq \bar{0}$ terdapat

$$\begin{aligned}
&\bar{1}.\bar{1}.\bar{2} = \bar{1}.\bar{2} = \bar{2}\\
&\bar{1}.\bar{2}.\bar{2} = \bar{2}.\bar{2} = \bar{4}\\
&\bar{1}.\bar{3}.\bar{2} = \bar{3}.\bar{2} = \bar{1}\\
&\bar{1}.\bar{4}.\bar{2} = \bar{4}.\bar{2} = \bar{3}.
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk sebarang $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $aRb \neq \{0\}$, jika $aRb = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$, untuk setiap $a, b \in R$. Jadi $(\mathbb{Z}_5, +,\bullet)$ merupakan ring prima.

■

Definisi 2.4.17 (Homomorfisma Ring)

Misalkan f adalah pemetaan dari ring R ke ring S. Maka f disebut homomorfisma ring jika memenuhi:
i. $f(a + b) = f(a) + f(b),$ untuk setiap $a, b \in R.$
ii. $f(ab) = f(a)f(b),$ untuk setiap $a, b \in R.$
f disebut epimorfisma jika f adalah homomorfisma yang surjektif.
f disebut monomorfisma jika f adalah homomorfisma yang injektif.
f disebut isomorfisma jika f adalah homomorfisma yang bijektif.
Endomorfisma dari ring R adalah homomorfisma dari ring R ke dirinya sendiri.
Automorfisma dari ring R adalah isomorfisma dari ring R ke dirinya sendiri.

(Hartley dan Hawkes, 1970)

Contoh 2.4.18

Diberikan $\mathbb{Z}$ dan $M_2(\mathbb{Z})$ adalah ring. Pemetaan f yang didefinisikan sebagai berikut merupakan homomorfisma ring.

$$f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}), \text{ dengan } f(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

Bukti:

(i) $$f(x+y) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$
$$= f(x) + f(y)$$

(ii) $$f(xy) = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$
$$= f(x)f(y)$$

Karena f memenuhi (i) dan (ii) jadi terbukti bahwa f merupakan homomorfisma ring.

■

Definisi 2.4.19 (Komutator)

Misalkan R adalah ring. $[a,b]$ disebut komutator dari R, jika memenuhi:

$$[a,b] = ab - ba, \text{ untuk setiap } a,b \in R.$$

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Proposisi 2.4.20

Dari Definisi 2.4.12 berlaku sifat:

i. $[a+b,c] = [a,c] + [b,c]$
ii. $[a,b+c] = [a,b] + [a,c]$
iii. $[a,b] = -[b,a]$

Bukti:

i. $$[a+b,c] = (a+b)c - c(a+b)$$
$$= ac + bc - ca - cb$$
$$= ac - ca + bc - cb = [a,c] + [b,c]$$

ii. $$[a,b+c] = a(b+c) - (b+c)a$$
$$= ab + ac - ba - ca$$
$$= ab - ba + ac - ca = [a,b] + [a,c]$$

iii. $[a,b] = ab - ba$
$= -(ba - ab)$
$= -[b,a]$

Contoh 2.4.21

Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan komutator.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$, misalkan diambil $a = \bar{1}$ dan $b = \bar{2}$, maka
$[a,b] = ab - ba$
$= \bar{1}\bar{2} - \bar{2}\bar{1}$
$= \bar{0}.$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ akan diperoleh

$$[a,b] = ab - ba.$$

Maka terbukti $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah komutator.

■

Definisi 2.4.22 (Anti-komutator)

Misalkan R adalah ring. $(a \circ b)$ disebut anti-komutator dari R, jika memenuhi:

$$(a \circ b) = ab + ba, \text{ untuk setiap } a, b \in R.$$

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Contoh 2.4.23

Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan komutator.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$, misalkan diambil $a = \bar{1}$ dan $b = \bar{2}$, maka
$(a \circ b) = ab + ba$
$= \bar{1}\bar{2} + \bar{2}\bar{1}$
$= \bar{0}.$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ akan diperoleh

$$(a \circ b) = ab + ba.$$

Maka terbukti $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah anti-komutator.

■

Definisi 2.4.24 (Komutator Atas σ dan τ)

Misalkan R adalah ring, σ dan τ adalah dua epimorfisma pada R. $[a, b]_{\sigma,\tau}$ disebut komutator atas σ dan τ, jika memenuhi:

$$[a, b]_{\sigma,\tau} = a\sigma(b) - \tau(b)a, \text{ untuk setiap } a, b \in R.$$

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Definisi 2.4.25 (Anti-komutator Atas σ dan τ)

Misalkan R adalah ring, σ dan τ adalah dua epimorfisma pada R. $(a \circ b)_{\sigma,\tau}$ disebut anti-komutator atas σ dan τ, jika memenuhi:

$$(a \circ b)_{\sigma,\tau} = a\sigma(b) + \tau(b)a, \text{ untuk setiap } a, b \in R.$$

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Definisi 2.4.26 (Idempoten)

Elemen x dalam ring R disebut elemen idempoten dari R jika $x^2 = x$.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

2.5 Ideal

Definisi 2.5.1 (Ideal)

Himpunan bagian tak kosong I pada ring R disebut ideal kanan (kiri) pada R jika:

(i) $a - b \in I$, untuk setiap $a, b \in I$

(ii) $ar \in I (ra \in I)$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$

Jika I ideal kiri dan ideal kanan pada R ($ra \in I$ dan $ar \in I$) maka I disebut ideal dua sisi.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Contoh 2.5.2

Diberikan ring $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.

Akan ditunjukkan $M = \left\{ \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ideal kanan di R.

Bukti:

1. Jelas $M \neq \emptyset$ dan $M \subseteq R$.
2. Ambil sebarang $P, Q \in M$ dan $T \in R$. Maka P, Q dan T dapat dinyatakan sebagai $P = \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $k, l, u, v, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Maka

$$P - Q = \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} k-u & l-v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$$

$$PT = \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ka+lc & kb+ld \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M.$$

$$TP = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ak & al \\ ck & cl \end{bmatrix} \notin M.$$

Jadi, M merupakan ideal kanan di R.

■

Contoh 2.5.3

Diberikan ring $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Akan ditunjukkan $N = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & l \end{bmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ideal kiri di R.

Bukti:

1. Jelas $N \neq \emptyset$ dan $N \subseteq R$.
2. Ambil sebarang $K, L \in N$ dan $T \in R$. Maka X, Y dan T dapat dinyatakan sebagai $K = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & l \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & v \end{bmatrix}$ dan $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $k, l, u, v, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Maka

$$K - L = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & v \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & k-u \\ 0 & l-v \end{bmatrix} \in N$$
$$TK = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ak+bl \\ 0 & ck+dl \end{bmatrix} \in N.$$

$$KT = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} kc & kd \\ lc & ld \end{bmatrix} \notin N.$$

Jadi, N merupakan ideal kiri di R.

■

Definisi 2.5.4 (*Nonzero Central Ideal*)

Misalkan R adalah ring, J adalah *nonzero ideal* dari R. J disebut *nonzero central ideal* jika $J \subseteq Z(R)$.

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Definisi 2.5.5 (Ideal Prima)

Misalkan R adalah ring, I adalah ideal dari R. I disebut prima jika untuk setiap ideal-ideal $A, B \subseteq R$ dengan $AB \subseteq I$, maka $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$.

(Anwar, dkk., 2010)

Contoh 2.5.6

Diberikan $\mathbb{Z}[x]$ merupakan suatu ring. Maka (x) merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan (x) ideal di $\mathbb{Z}[x]$.
   (i) Jelas bahwa $(x) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ dan $(x) \neq \emptyset$.
   (ii) Ambil sebarang $f(x), g(x) \in (x)$. Maka $f(x)$ dan $g(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x) = xp(x)$ dan $g(x) = xq(x)$, dengan $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Sehingga
   $$f(x) + g(x) = xp(x) + xq(x)$$
   $$= x\big(p(x) + q(x)\big), p(x) + q(x) \in \mathbb{Z}[x].$$
   Jadi, $f(x) + g(x) \in (x)$.
   (iii) Ambil sebarang $f(x) \in (x)$ dan $s(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x) = xp(x), p(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Sehingga $f(x)s(x) = xp(x)s(x)$, dengan $p(x)s(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Jadi, $f(x)s(x) \in (x)$.

Dari (i), (ii), dan (iii) terbukti bahwa (x) ideal di $\mathbb{Z}[x]$.

2. Ambil sebarang ideal kanan A dan B di $\mathbb{Z}[x]$ sedemikian sehingga $AB \subseteq (x)$. Selanjutnya ambil sebarang $f(x) \in A$ dan $g(x) \in B$. Maka $f(x)g(x) \in AB \subseteq (x)$. Sehingga dapat dinyatakan dengan $f(x)g(x) = xh(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Misal
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots, a_i \in \mathbb{Z}. i = 0,1,2, ...$
$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, b_i \in \mathbb{Z}. i = 0,1,2, ...$
$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots, c_i \in \mathbb{Z}. i = 0,1,2, ...$
Maka
$(a_0 + a_1x + \cdots)(b_0 + b_1x + \cdots) = x(c_0 + c_1x + \cdots)$
$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots = c_0x + c_1x^2 + \cdots$
Berarti $a_0b_0 = 0$. Karena $\mathbb{Z}$ tidak mempunyai pembagi nol sejati, maka $a_0 = 0$ atau $b_0 = 0$, sehingga
$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots = x(a_1 + a_2x + \cdots)$
atau
$g(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots = x(b_1 + b_2x + \cdots)$
Maka $f(x) \in (x)$ atau $g(x) \in (x)$. Karena untuk setiap $f(x) \in A$ dan $g(x) \in B$ berlaku $f(x) \in (x)$ atau $g(x) \in (x)$ maka $A \subseteq (x)$ atau $B \subseteq (x)$. Jadi terbukti (x) merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$.

■

Definisi 2.5.7 (Ideal Semiprima)

Suatu ideal I di ring R disebut ideal semiprima di ring R jika untuk setiap A ideal di ring R berlaku jika $A^2 \subseteq I$ maka $A \subseteq I$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.5.8

$\bar{X} = \{2l | l \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal semiprima di ring $\mathbb{Z}$.

Bukti:

Jelas bahwa $\bar{X}$ merupakan ideal di ring $\mathbb{Z}$. Ambil sebarang ideal A di ring $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $A^2 \subseteq \bar{X}$. Selanjutnya ambil sebarang $x \in A$. Maka $x \bullet x = x^2 \in A^2 \subseteq \bar{X}$. Hal ini berarti bahwa $x^2 \in \bar{X}$. Dengan kata lain x^2 merupakan bilangan genap atau nol. Maka x

pasti merupakan bilangan genap atau nol. Dengan kata lain dapat dinyatakan sebagai $x = 2l, l \in \mathbb{Z}$. Jadi $x \in \bar{X}$. Karena untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \in \bar{X}$, maka $A \subseteq \bar{X}$. Sehingga terbukti bahwa $\bar{X}$ merupakan ideal semiprima di ring $\mathbb{Z}$.

■

Berdasarkan Definisi 2.5.5 dan Definisi 2.5.7 dapat dikatakan bahwa setiap ideal prima di ring R adalah ideal semiprima.

2.6 *Derivation*

Definisi 2.6.1 (*Derivation*)

Misalkan R adalah ring dan didefinisikan $d: R \to R$ adalah *additive mapping*. $d: R \to R$ disebut *derivation* jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $d(ab) = d(a)b + ad(b)$.

(M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)

Contoh 2.6.2

Misalkan R adalah ring dan suatu pemetaan $d: R \to R$ yang didefinisikan oleh $d(a) = xa - ax$, untuk setiap $a \in R$. Maka d merupakan suatu *derivation*.

Bukti:

i. Akan dibuktikan d adalah pemetaan aditif.

$$\begin{aligned} d(a+b) &= x(a+b) - (a+b)x \\ &= xa + xb - (ax + bx) \\ &= xa - ax + xb - bx \\ &= d(a) + d(b) \end{aligned}$$

ii. Akan dibuktikan d adalah *derivation*.

$$\begin{aligned} d(ab) &= xab - abx \\ &= xab - axb + axb - abx \\ &= (xa - ax)b + a(xb - bx) \\ &= d(a)b + ad(b) \end{aligned}$$

Jadi terbukti d adalah *derivation*.

■

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang definisi, contoh, dan teorema beserta buktinya yang berkaitan dengan *Generalized* (σ, τ)-*Derivation* di *Ring Semiprima* (σ, τ)-*derivation.*

3.1 Ring Semiprima

Definisi 3.1.1 (Ring Semiprima)

Misalkan R adalah ring. R disebut ring semiprima jika

$aRa = 0 \Longrightarrow a = 0$, untuk setiap $a \in R$.

(M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)

Contoh 3.1.2

Diberikan $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_7, +, \bullet)$ merupakan ring semiprima.

Bukti:

Dengan menggunakan kontraposisi akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_7, +, \bullet)$ adalah ring semiprima, jika $a \neq 0$ maka $aRa \neq \{0\}$.
Misalkan $a = \bar{2}$, untuk sebarang $r \neq \bar{0}$ terdapat

$$\bar{2}.\bar{1}.\bar{2} = \bar{2}.\bar{2} = \bar{4}$$
$$\bar{2}.\bar{2}.\bar{2} = \bar{4}.\bar{2} = \bar{1}$$
$$\bar{2}.\bar{3}.\bar{2} = \bar{6}.\bar{2} = \bar{5}$$
$$\bar{2}.\bar{4}.\bar{2} = \bar{1}.\bar{2} = \bar{2}$$
$$\bar{2}.\bar{5}.\bar{2} = \bar{3}.\bar{2} = \bar{6}$$
$$\bar{2}.\bar{6}.\bar{2} = \bar{5}.\bar{2} = \bar{3}$$

Dengan cara yang sama untuk sebarang $a \neq 0$ maka $aRa \neq \{0\}$, jika $aRa = 0$ maka $a = 0$, untuk setiap $a \in R$. Jadi $(\mathbb{Z}_7, +, \bullet)$ merupakan ring semiprima.

■

3.2 *Generalized* (σ, τ)-*Derivation* di Ring Semiprima

Definisi 3.2.1 (*Generalized Derivation*)

Misalkan R adalah ring semiprima, suatu *additive mapping* $F: R \to R$ dikatakan *generalized derivation* jika terdapat *derivation* $d: R \to R$ sedemikian sehingga

$$F(ab) = F(a)b + ad(b), \text{ untuk setiap } a, b \in R.$$

(M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)

Contoh 3.2.2

Diberikan ring semiprima R yang didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Misalkan p elemen tidak nol dari $\mathbb{Z}$ dan *additive mapping* F, d didefinisikan sebagai berikut.

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa + pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa - pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan d adalah *derivation*. Maka F adalah *generalized derivation.*

Bukti:

Ambil $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ dan $A, B \in R$.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$F(A) = F\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(B) = f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_2 - pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan

$$F(AB) = F(A)B + Ad(B)$$

Untuk ruas kiri, diperoleh

$$\begin{aligned} F(AB) &= F\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= F\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1a_2 + pc_1c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, c_1, a_2, c_2, p \in \mathbb{Z}$.

Untuk ruas kanan, diperoleh

$$F(A)B + Ad(B)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & pa_2 - pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (pa_1 + pc_1)c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1(pa_2 - pc_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (pa_1 + pc_1)c_2 + a_1(pa_2 - pc_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & pa_1c_2 + pc_1c_2 + a_1pa_2 - a_1pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & pc_1c_2 + a_1pa_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & pa_1a_2 + pc_1c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a_1, a_2, c_1, c_2, p \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 3.2.1, terbukti F merupakan *generalized derivation*.

■

Definisi 3.2.3 ((*σ*, *τ*)-*Derivation*)

Misalkan R adalah ring semiprima, dan misalkan σ dan τ adalah epimorfisma pada ring R, sebuah *additive mapping* $d: R \to R$ disebut (σ, τ)-*derivation* jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku

$d(ab) = d(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b)$, untuk setiap $a, b \in R$.

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Contoh 3.2.4

Misalkan R adalah ring semiprima dengan elemen idempoten yaitu $e^2 = e$

$\sigma: R \to R$	$\tau: R \to R$	$d: R \to R$
$a \mapsto a$	$a \mapsto (1 - e)a$	$a \mapsto ea$

dengan $e \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa d adalah (σ, τ)-*derivation.*

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, e \in R$. Pertama akan dibuktikan bahwa d *additive mapping*

$$d(a + b) = e(a + b) = ea + eb = d(a) + d(b)$$

Terbukti bahwa d adalah *additive mapping*, kemudian akan ditunjukkan

$d(ab) = \tau(a)d(b) + d(a)\sigma(b)$

$$
\begin{aligned}
d(ab) &= eab \\
&= eab - eab + eab
\end{aligned}
$$

karena $e \in C$ dan $e = e^2$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
d(ab) &= aeb - eab + eab \\
&= aeb - e^2ab + eab \\
&= aeb - eaeb + eab \\
&= (a - ea)eb + eab \\
&= \tau(x)d(b) + d(x)\sigma(y)
\end{aligned}
$$

■

Definisi 3.2.5 (*Generalized* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$*-Derivation*)

Misalkan R adalah ring semiprima, misalkan σ dan τ adalah epimorfisma pada ring R. Suatu *additive mapping* $F: R \to R$ disebut *generalized* (σ, τ)*-derivation* jika terdapat $d: R \to R$ yang merupakan (σ, τ)*-derivation* sedemikian sehingga

$$F(ab) = F(a)\sigma(b) + \tau(a)d(b), \text{ untuk setiap } a, b \in R.$$

(Dhara dan Pattanayak, 2012)

Contoh 3.2.6

Diberikan ring semiprima $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$.

Didefinisikan $\sigma, \tau: R \to R$ yang memenuhi

$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

didefinisikan $d: R \to R$ yang memenuhi

$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dan didefinisikan $F: R \to R$ yang memenuhi

$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka F adalah *generalized* (σ, τ)*-derivation*.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B \in R$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}$

i. Akan dibuktikan F adalah *additive mapping*

$$F(A+B) = F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right)$$
$$= F\left(\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ 0 & c+r \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} a+p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi F adalah *additive mapping*.

ii. Akan dibuktikan F adalah *generalized* (σ, τ)-*derivation*

Untuk ruas kiri, diperoleh

$$F(AB) = F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right)$$
$$= F\left(\begin{bmatrix} ap & aq+br \\ 0 & cr \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} ap & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk ruas kanan, diperoleh

$F(A)\sigma(B) + \tau(A)d(B)$

$$= F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)\sigma\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) + \tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)d\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ap & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, $F(AB) = F(A)\sigma(B) + \tau(A)d(B)$.

Berdasarkan Definisi 3.2.5, terbukti F merupakan *generalized* (σ, τ)-*derivation*.

■

3.3 Teorema *Generalized* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$*-derivation* di Ring Semiprima

Untuk membuktikan teorema yang akan dibahas menggunakan identitas dasar sebagai berikut:

$$[xy,z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(z)]y = x[y,\sigma(z)] + [x,z]_{\sigma,\tau}y,$$
$$[x,yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z),$$
$$\begin{aligned}(x\circ(yz))_{\sigma,\tau} &= (x\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(z) - \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau}\\ &= \tau(y)(x\circ z)_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\,\sigma(z),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}((xy)\circ z)_{\sigma,\tau} &= x(y\circ z)_{\sigma,\tau} - [x,\tau(z)]y\\ &= (x\circ z)_{\sigma,\tau}y + x[y,\sigma(z)].\end{aligned}$$

Pada pembahasan ini, R adalah ring semiprima dengan *center* $Z(R)$.

Teorema 3.3.1

Misalkan R adalah ring semiprima, I suatu *nonzero ideal* dari R, σ dan τ dua epimorfisma pada R dan F suatu *generalized* (σ,τ)-*derivation* yang berhubungan dengan d: (σ,τ)-*derivation* dari R sedemikian sehingga $\tau(I)d(I) \neq 0$. Jika $F([x,y]) = \pm(x\circ y)_{\sigma,\tau}$ untuk setiap $x,y \in I$, maka R memuat *nonzero central ideal*.

Bukti 1:

Pertama perhatikan kasus

$$F([x,y]) = (x\circ y)_{\sigma,\tau} \tag{3.1}$$

untuk setiap $x,y \in I$.

Ganti y dalam persamaan (3.1) dengan yx, diperoleh

$$F([x,yx]) = (x\circ yx)_{\sigma,\tau}$$
$$F([x,y])\sigma(x) + \tau([x,y])d(x) = (x\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}. \tag{3.2}$$

Kalikan persamaan (3.1) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F([x,y])\sigma(x) = (x\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x). \tag{3.3}$$

Masukkan persamaan (3.3) kedalam persamaan (3.2), diperoleh

$$F([x,y])\sigma(x) + \tau([x,y])d(x) = (x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$(x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau([x,y])d(x) = (x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$\tau([x,y])d(x) = -\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.4)$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Kemudian ganti y dalam persamaan (3.4) dengan ry, diperoleh

$$\tau([x,ry])d(x) = -\tau(ry)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$\tau((r)[x,y] + [x,r](y))d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$(\tau(r)\tau([x,y]) + \tau([x,r])\tau(y))d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.5)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Dengan menggunakan perkalian kiri (*left multiplying*), kalikan persamaan (3.4) dengan $\tau(r)$, diperoleh

$$\tau(r)\tau([x,y])d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.6)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.5) dengan persamaan (3.6), diperoleh

$$\begin{array}{r} \tau(r)\tau([x,y])d(x) + \tau([x,r])\tau(y)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \\ \tau(r)\tau([x,y])d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \\ \hline \tau([x,r])\tau(y)d(x) = 0 \end{array} -$$

$$(3.7)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.7) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x,r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \qquad (3.8)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.8) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \qquad (3.9)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \qquad (3.10)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \tag{3.11}$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R, J]R[R, J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R, J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Bukti 2:

Pertama perhatikan kasus

$$F([x, y]) = -(x \circ y)_{\sigma,\tau} \tag{3.12}$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Ganti y dalam persamaan (3.12) dengan yx, diperoleh

$$F([x, yx]) = -(x \circ yx)_{\sigma,\tau}$$

$$F([x, y])\sigma(x) + \tau([x, y])d(x) = -((x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau})$$

$$F([x, y])\sigma(x) + \tau([x, y])d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} - (x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x). \tag{3.13}$$

Kalikan persamaan (3.12) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F([x, y])\sigma(x) = -(x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x). \tag{3.14}$$

Masukkan persamaan (3.14) kedalam persamaan (3.13), diperoleh

$$F([x, y])\sigma(x) + \tau([x, y])d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} - (x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x)$$

$$-(x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau([x, y])d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} - (x \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x)$$

$$\tau([x, y])d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} \tag{3.15}$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Kemudian ganti y dalam persamaan (3.15) dengan ry, diperoleh

$$\tau([x,ry])d(x) = \tau(ry)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$\tau\{\,(r)[x,y] + [x,r](y)\}d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$(\tau(r)\tau([x,y]) + \tau([x,r])\tau(y))d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.16)$$

untuk setiap $x, y \in R$ dan $r \in R$.

Dengan menggunakan perkalian kiri (*left multiplying*), kalikan persamaan (3.15) dengan $\tau(r)$, diperoleh

$$\tau(r)\tau([x,y])d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.17)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.16) dengan persamaan (3.17), diperoleh

$$\begin{array}{rl} (\tau(r)\tau([x,y]) + \tau([x,r])\tau(y))d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} & \\ \tau(r)\tau([x,y])d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} & - \\ \hline \tau([x,r])\tau(y)d(x) = 0 & \end{array}$$

(3.18)

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.18) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x,r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \qquad (3.19)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.19) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R,\tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \qquad (3.20)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap\, P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R,\tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \qquad (3.21)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R,\tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R,\tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$.

Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \qquad (3.22)$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R, J]R[R, J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R, J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Teorema 3.3.2

Misalkan R adalah ring semiprima, I suatu *nonzero ideal* dari R, σ dan τ dua epimorfisma pada R dan F suatu *generalized* (σ, τ)-*derivation* yang berhubungan dengan d: (σ, τ)-*derivation* dari R sedemikian sehingga $\tau(I)d(I) \neq 0$. Jika $F(x \circ y) = \pm[x, y]_{\sigma,\tau}$ untuk setiap $x, y \in I$, maka R memuat *nonzero central ideal.*

Bukti 1:

Pertama perhatikan kasus

$$F(x \circ y) = [x, y]_{\sigma,\tau} \qquad (3.23)$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Ganti y dalam persamaan (3.23) dengan yx, diperoleh

$$F(x \circ yx) = [x, yx]_{\sigma,\tau}$$

$$F(x \circ y)\,\sigma(x) + \tau(x \circ y)d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} + [x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(x). \qquad (3.24)$$

Kalikan persamaan (3.23) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F(x \circ y)\sigma(x) = [x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(x). \qquad (3.25)$$

Masukkan persamaan (3.25) kedalam persamaan (3.24), diperoleh

$$F(x \circ y)\,\sigma(x) + \tau(x \circ y)d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} + [x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)$$

$$[x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau(x \circ y)d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} + [x, y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)$$

$$\tau(x \circ y)d(x) = \tau(y)[x, x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.26)$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Kemudian ganti y dalam persamaan (3.15) dengan ry, diperoleh

$$\tau(x \circ ry)d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$\tau((r)(x \circ y) + ([x,r])(y))d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$\tau(r)\tau(x \circ y)d(x) + \tau([x,r])\tau(y)d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \quad (3.27)$$

untuk setiap $x, y \in R$ dan $r \in R$.

Dengan menggunakan perkalian kiri (*left multiplying*), kalikan persamaan (3.26) dengan $\tau(r)$, diperoleh

$$\tau(r)\tau(x \circ y)d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \quad (3.28)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.27) dengan persamaan (3.28), diperoleh

$$\begin{array}{r} \tau(r)\tau(x \circ y)d(x) + \tau([x,r])\tau(y)d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \\ \tau(r)\tau(x \circ y)d(x) = \tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \\ \hline \tau([x,r])\tau(y)d(x) = 0 \end{array} -$$

(3.29)

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.29) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x,r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.30)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.30) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \quad (3.31)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \quad (3.32)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$.

Oleh karena itu, $[R,\tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R,\tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R,\tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \qquad (3.33)$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R,J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R,J]R[R,J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R,J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Bukti 2:

Pertama perhatikan kasus

$$F(x \circ y) = -[x,y]_{\sigma,\tau} \qquad (3.34)$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Ganti y dalam persamaan (3.34) dengan yx, diperoleh

$$F(x \circ yx) = -[x,yx]_{\sigma,\tau}$$

$$F(x\circ y)\,\sigma\,(x) + \tau(x\circ y)d(x) = -(\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma\,(x))$$

$$F(x\circ y)\,\sigma\,(x) + \tau(x\circ y)d(x) = -\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} - [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma\,(x). \qquad (3.35)$$

Kalikan persamaan (3.34) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F(x\circ y)\sigma\,(x) = -[x,y]_{\sigma,\tau}\sigma\,(x). \qquad (3.36)$$

Masukkan persamaan (3.36) kedalam persamaan (3.35), diperoleh

$$F(x\circ y)\,\sigma\,(x) + \tau(x\circ y)d(x) = -\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} - [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma\,(x)$$

$$-[x,y]_{\sigma,\tau}\sigma\,(x) + \tau(x\circ y)d(x) = -\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} - [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma\,(x)$$

$$\tau(x\circ y)d(x) = -\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.37)$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Kemudian ganti y dalam persamaan (3.37) dengan ry, diperoleh

$$\tau(x\circ ry)d(x) = -\tau(ry)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$\tau((r)(x\circ y) + ([x,r])(y))d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau}$$

$$\tau(r)\tau(x\circ y)d(x) + \tau([x,r])\tau(y)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.38)$$

untuk setiap $x, y \in R$ dan $r \in R$.

Dengan menggunakan perkalian kiri (*left multiplying*), kalikan persamaan (3.37) dengan $\tau(r)$, diperoleh

$$\tau(r)\tau(x \circ y)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \qquad (3.39)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.38) dengan persamaan (3.39), diperoleh

$$\begin{array}{r} \tau(r)\tau(x \circ y)d(x) + \tau([x,r])\tau(y)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \\ \tau(r)\tau(x \circ y)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[x,x]_{\sigma,\tau} \\ \hline \tau([x,r])\tau(y)d(x) = 0 \end{array} -$$

$$(3.40)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.40) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x,r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \qquad (3.41)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.41) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \qquad (3.42)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \qquad (3.43)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \qquad (3.44)$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari

R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R,J]R[R,J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R,J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Teorema 3.3.3

Misalkan R adalah ring semiprima, I suatu *nonzero ideal* dari R, σ dan τ dua epimorfisma pada R dan F suatu *generalized* (σ,τ)-*derivation* yang berhubungan dengan d: (σ,τ)-*derivation* dari R sedemikian sehingga $\tau(I)d(I) \neq 0$. Jika $F[x,y] = \pm[F(x),y]_{\sigma,\tau}$ untuk semua $x, y \in I$, maka R memuat *nonzero central ideal.*

Bukti 1:

Pertama diasumsikan $F[x,y] = [F(x),y]_{\sigma,\tau}$, untuk setiap $x, y \in I$. Hal ini menyebabkan bahwa

$$F(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) - F(y)\sigma(x) - \tau(y)d(x) = [F(x),y]_{\sigma,\tau}. \tag{3.45}$$

Ganti y dalam persamaan (3.45) dengan yx, diperoleh

$$\begin{aligned}
&F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(yx) - F(yx)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x)\\
&\qquad = [F(x),yx]_{\sigma,\tau}\\
&F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) + \tau(x)\tau(y)d(x) - F(y)\sigma(x)\sigma(x)\\
&-\tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x)\\
&\qquad = \tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau} + [F(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)\\
&F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)(d(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x)) - F(y)\sigma(x)^2\\
&-\tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x)\\
&\qquad = \tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau} + [F(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(x).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Dengan menggunakan perkalian kanan (*right multiplying*) kalikan persamaan (3.45) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
&F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) - F(y)\sigma(x)\sigma(x) - \tau(y)d(x)\sigma(x)\\
&\qquad = [F(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

kemudian kurangkan persamaan (3.46) dengan persamaan (3.47), diperoleh

$$\begin{aligned}
&\tau(x)\tau(y)d(x) - \tau(y)\tau(x)d(x) + [F(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)\\
&\qquad\qquad = \tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau} + [F(x),y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)
\end{aligned}$$

$$\tau(x)\tau(y)d(x) - \tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau}. \tag{3.48}$$

Ganti y dalam persamaan (3.48) dengan ry, diperoleh

$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} \quad (3.49)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Dengan menggunakan perkalian kiri (*left multiplying*) kalikan persamaan (3.48) dengan $\tau(r)$, diperoleh

$$\tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} \quad (3.50)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.49) dengan persamaan (3.50), diperoleh

$$\begin{array}{l} \tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} \\ \underline{\tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}} \; - \\ \tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = 0 \end{array}$$

$$(\tau(x)\tau(r) - \tau(r)\tau(x))\tau(y)d(x) = 0$$

$$[\tau(x), \tau(r)]\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.51)$$

merupakan

$$\tau([x, r])\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.52)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.52) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x, r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.53)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.53) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \quad (3.54)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \quad (3.55)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \qquad (3.56)$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R, J]R[R, J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R, J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Bukti 2:

Pertama diasumsikan $F[x \circ y] = -[F(x), y]_{\sigma,\tau}$, untuk setiap $x, y \in I$. Hal ini menyebabkan bahwa

$$F(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) - F(y)\sigma(x) - \tau(y)d(x) = -[F(x), y]_{\sigma,\tau}. \qquad (3.57)$$

Ganti y dalam persamaan (3.57) dengan yx, diperoleh

$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(yx) - F(yx)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= -[F(x), yx]_{\sigma,\tau}$$
$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) + \tau(x)\tau(y)d(x) - F(y)\sigma(x)\sigma(x)$$
$$-\tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= -\{\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} + [F(x), y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)\}$$
$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)(d(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x)) - F(y)\sigma(x)^2$$
$$-\tau(y)d(x)\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= -\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} - [F(x), y]_{\sigma,\tau}\sigma(x). \qquad (3.58)$$

Dengan menggunakan perkalian kanan (*right multiplying*) kalikan persamaan (3.57) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) - F(y)\sigma(x)\sigma(x) - \tau(y)d(x)\sigma(x)$$
$$= -[F(x), y]_{\sigma,\tau}\sigma(x) \qquad (3.59)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.58) dengan persamaan (3.59), diperoleh

$$\tau(x)\tau(y)d(x) - \tau(y)\tau(x)d(x) - [F(x), y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)$$
$$= -\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} - [F(x), y]_{\sigma,\tau}\sigma(x)$$
$$\tau(x)\tau(y)d(x) - \tau(y)\tau(x)d(x) = -\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}. \qquad (3.60)$$

Ganti y dalam persamaan (3.60) dengan ry, diperoleh

$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} \quad (3.61)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Dengan menggunakan perkalian kiri (*left multiplying*) kalikan persamaan (3.60) dengan $\tau(r)$, diperoleh

$$\tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} \quad (3.62)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.61) dengan persamaan (3.62), diperoleh

$$\begin{array}{l} \tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} \\ \underline{\tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = -\tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}} \; - \\ \tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x) = 0 \end{array}$$

$$(\tau(x)\tau(r) - \tau(r)\tau(x))\tau(y)d(x) = 0$$

$$[\tau(x), \tau(r)]\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.63)$$

merupakan

$$\tau([x, r])\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.64)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.64) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x, r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.65)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.65) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \quad (3.66)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \quad (3.67)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R,\tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R,\tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R,\tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R,\tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R,R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \qquad (3.68)$$

dan juga $[R,R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R,J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R,J]R[R,J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R,J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Teorema 3.3.4

Misalkan R adalah ring semiprima, I suatu *nonzero ideal* dari R, σ dan τ dua epimorfisma pada R dan F suatu *generalized* (σ,τ)-*derivation* yang berhubungan dengan $d\colon(\sigma,\tau)$-*derivation* dari R sedemikian sehingga $\tau(I)d(I) \neq 0$. Jika $F(x\circ y) = \pm(F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}$ untuk semua $x,y \in I$, maka R memuat *nonzero central ideal*.

Bukti 1:

Asumsi pertama anggap $F(x\circ y) = (F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}$ untuk setiap $x,y \in I$. Hal ini menyebabkan bahwa

$$F(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) + F(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x) = (F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}. \qquad (3.69)$$

Ganti y dalam persamaan (3.69) dengan yx, diperoleh

$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(yx) + F(yx)\sigma(x) + \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= (F(x)\circ yx)_{\sigma,\tau}$$
$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) + \tau(x)\tau(y)d(x) + F(y)\sigma(x)\sigma(x)$$
$$+\tau(y)d(x)\sigma(x) + \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= (F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau}$$
$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)\big(d(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x)\big) + (F(y)\sigma(x) +$$
$$\tau(y)d(x))\sigma(x) + \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= (F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau}. \qquad (3.70)$$

Dengan menggunakan perkalian kanan (*right multiplying*) kalikan persamaan (3.69) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) + F(y)\sigma(x)\sigma(x) + \tau(y)d(x)\sigma(x)$$
$$= (F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x), \qquad (3.71)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.70) dengan persamaan (3.71), diperoleh

$$F(x)\sigma(y)\sigma(x)+\tau(x)(d(y)\sigma(x)+\tau(y)d(x))+(F(y)\sigma(x)+\tau(y)d(x))\sigma(x)+\tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$=(F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x)-\tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau}$$
$$(F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x)+\ \tau(x)\tau(y)d(x)+\tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$=(F(x)\circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x)-\tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau}$$
$$\tau(x)\tau(y)d(x)+\tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$=-\tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau}. \qquad (3.72)$$

Ganti y dalam persamaan (3.72) dengan ry, diperoleh

$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x)+\tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x)=-\tau(r)\tau(y)[F(x),x]_{\sigma,\tau}. \qquad (3.73)$$

Masukkan persamaan (3.72) kedalam persamaan (3.73) didapatkan

$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x)+\tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x)=(\tau(x)\tau(y)d(x)+\tau(y)\tau(x)d(x))\tau(r)$$
$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x)+\tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x)=\tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x)+\tau(r)\,\tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x)-\ \tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x)=0$$
$$(\tau(x)\tau(r)-\tau(r)\tau(x))\tau(y)d(x)=0$$
$$[\tau(x),\tau(r)]\tau(y)d(x)=0$$
$$\tau([x,r])\tau(y)d(x)=0 \qquad (3.74)$$

untuk setiap $x,y\in I$ dan $r\in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.74) dengan sy, dimana $s\in R$, diperoleh

$$\tau([x,r])\tau(s)\tau(y)d(x)=0 \qquad (3.75)$$

untuk setiap $x,y\in I$ dan $r,s\in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.75) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R,\tau(x)]R\tau(I)d(x)=0. \qquad (3.76)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega=\{P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha=\{0\}$. Jika $P\in\Omega$ dan $x\in I$, maka

$$[R,\tau(x)]\subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x)\subseteq P. \qquad (3.77)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \qquad (3.78)$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R, J]R[R, J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R, J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Bukti 2:

Asumsi pertama anggap $F(x \circ y) = -(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}$ untuk setiap $x, y \in I$. Hal ini menyebabkan bahwa

$$F(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y) + F(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x) = -(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}. \qquad (3.79)$$

Ganti y dalam persamaan (3.79) dengan yx, diperoleh

$$\begin{aligned} &F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(yx) + F(yx)\sigma(x) + \tau(y)\tau(x)d(x) \\ &\qquad = -(F(x) \circ yx)_{\sigma,\tau} \\ &F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) + \tau(x)\tau(y)d(x) + F(y)\sigma(x)\sigma(x) \\ &+\tau(y)d(x)\sigma(x) + \tau(y)\tau(x)d(x) \\ &\qquad = -\{(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) - \tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}\} \\ &F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)\{d(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x)\} \\ &+\{F(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x)\}\sigma(x) + \tau(y)\tau(x)d(x) \\ &\qquad = -(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}. \end{aligned} \qquad (3.80)$$

Dengan menggunakan perkalian kanan (*right multiplying*) kalikan persamaan (3.79) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$\begin{aligned} &F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)d(y)\sigma(x) + F(y)\sigma(x)\sigma(x) + \tau(y)d(x)\sigma(x) \\ &\qquad = -(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x), \end{aligned} \qquad (3.81)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.80) dengan persamaan (3.81), diperoleh

$$F(x)\sigma(y)\sigma(x) + \tau(x)(d(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x))$$
$$+(F(y)\sigma(x) + \tau(y)d(x))\sigma(x) + \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= -(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}$$
$$-(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau(x)\tau(y)d(x) + \tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$= -(F(x) \circ y)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}$$
$$\tau(x)\tau(y)d(x) + \tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau}. \quad (3.82)$$

Ganti y dalam persamaan (3.82) dengan ry, diperoleh

$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) + \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(r)\tau(y)[F(x), x]_{\sigma,\tau} \quad (3.83)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Masukkan persamaan (3.82) kedalam persamaan (3.83), didapatkan

$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) + \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = (\tau(x)\tau(y)d(x) + \tau(y)\tau(x)d(x))\tau(r)$$
$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) + \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x) = \tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x) + \tau(r)\tau(y)\tau(x)d(x)$$
$$\tau(x)\tau(r)\tau(y)d(x) - \tau(r)\tau(x)\tau(y)d(x) = 0$$
$$(\tau(x)\tau(r) - \tau(r)\tau(x))\tau(y)d(x) = 0$$
$$[\tau(x), \tau(r)]\tau(y)d(x) = 0$$
$$\tau([x, r])\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.84)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.84) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x, r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \quad (3.85)$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.85) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \quad (3.86)$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \quad (3.87)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \quad (3.88)$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R, J]R[R, J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R, J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Teorema 3.3.5

Misalkan R adalah ring semiprima, I suatu *nonzero ideal* dari R, σ dan τ dua epimorfisma pada R dan F suatu *generalized* (σ, τ)-*derivation* yang berhubungan dengan d: (σ, τ)-*derivation* dari R sedemikian sehingga $\tau(I)d(I) \neq 0$. Jika $F[x, y] = \pm[\sigma(y), G(x)]$ untuk semua $x, y \in I$, maka R memuat *nonzero central ideal*.

Bukti 1:

Mulai dengan kasus

$$F[x, y] = [\sigma(y), G(x)]. \quad (3.89)$$

Ganti y dalam persamaan (3.89) dengan yx, diperoleh

$$F[x, yx] = [\sigma(y)\sigma(x), G(x)]$$
$$F[(x, y)]\sigma(x) + \tau([x, y])d(x) = [\sigma(y)\sigma(x), G(x)]. \quad (3.90)$$

Dengan menggunakan perkalian kanan (*right multiplying*) kalikan persamaan (3.89) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F[(x, y)]\sigma(x) = [\sigma(y), G(x)]\sigma(x), \quad (3.91)$$

kemudian kurangkan persamaan (3.90) dengan persamaan (3.91), diperoleh

$$
\begin{array}{r}
F[(x,y)]\sigma(x) + \tau([x,y])d(x) = [\sigma(y)\sigma(x), G(x)] \\
F[(x,y)]\sigma(x) = [\sigma(y), G(x)]\sigma(x) \\
\hline
\tau([x,y])d(x) = \sigma(y)[\sigma(x), G(x)]
\end{array} -
$$

(3.92)

untuk setiap $x, y \in I$.

Ganti y dalam persamaan (3.92) dengan ry, diperoleh

$$\tau([x,ry])d(x) = \sigma(r)\sigma(y)[\sigma(x), G(x)]$$

$$\tau([x,r])\tau(y)d(x) = 0. \tag{3.93}$$

Ganti y dalam persamaan (3.93) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x,r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \tag{3.94}$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.94) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \tag{3.95}$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \tag{3.96}$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \tag{3.97}$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari

R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R,J]R[R,J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R,J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

Bukti 2:
Mulai dengan kasus

$$F[x,y] = -[\sigma(y), G(x)]. \tag{3.98}$$

Ganti y dalam persamaan (3.98) dengan yx, diperoleh

$$F[x,yx] = -[\sigma(y)\sigma(x), G(x)]$$
$$F[(x,y)]\sigma(x) + \tau([x,y])d(x) = -[\sigma(y)\sigma(x), G(x)]. \tag{3.99}$$

Dengan menggunakan perkalian kanan (*right multiplying*) kalikan persamaan (3.98) dengan $\sigma(x)$, diperoleh

$$F[x,y]\sigma(x) = -[\sigma(y), G(x)]\sigma(x). \tag{3.100}$$

Kurangkan dari (3.99)

$$F[(x,y)]\sigma(x) + \tau([x,y])d(x) = -[\sigma(y)\sigma(x), G(x)]$$
$$-[\sigma(y), G(x)]\sigma(x) + \tau([x,y])d(x) = -[\sigma(y)\sigma(x), G(x)]$$
$$\tau([x,y])d(x) = -\sigma(y)[\sigma(x), G(x)] \tag{3.101}$$

untuk setiap $x, y \in I$.

Ganti y dalam persamaan (3.101) dengan ry, diperoleh

$$\tau([x,ry])d(x) = -\sigma(r)\sigma(y)[\sigma(x), G(x)]$$
$$\tau([x,r])\tau(y)d(x) = 0 \tag{3.102}$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$.

Ganti y dalam persamaan (3.102) dengan sy, dimana $s \in R$, diperoleh

$$\tau([x,r])\tau(s)\tau(y)d(x) = 0 \tag{3.103}$$

untuk setiap $x, y \in I$ dan $r, s \in R$.

Karena τ adalah epimorfisma di R, maka persamaan (3.103) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[R, \tau(x)]R\tau(I)d(x) = 0. \tag{3.104}$$

Karena R adalah ring semiprima, maka R memuat keluarga himpunan $\Omega = \{P_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ dari ideal-ideal prima sedemikian sehingga $\cap P_\alpha = \{0\}$. Jika $P \in \Omega$ dan $x \in I$, maka

$$[R, \tau(x)] \subseteq P \text{ atau } \tau(I)d(x) \subseteq P. \qquad (3.105)$$

Konstruksikan dua subgrup *additive* $T_1 = \{x \in I | [R, \tau(x)] \subseteq P\}$ dan $T_2 = \{x \in I | \tau(x)d(x) \subseteq P\}$. Maka $T_1 \cup T_2 = I$. Karena sebuah grup tidak dapat tersusun atas gabungan dua subgrupnya, yaitu $T_1 = I$ atau $T_2 = I$, maka $[\tau(I), R] \subseteq P$ atau $\tau(I)d(I) \subseteq P$. Jadi kedua kasus sama-sama menghasilkan $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Omega$. Oleh karena itu, $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, sehingga $[R, \tau(I)]\tau(I)d(I) = 0$. Jadi

$$0 = [R, \tau(RIR)]\tau(RI)d(I) = [R, R\,\tau(I)R]R\tau(I)d(I) \qquad (3.106)$$

dan juga $[R, R\,\tau(I)d(I)R]R\tau(I)d(I)R$. Hal ini mengakibatkan $0 = [R, J]RJ$, dimana $J = R\,\tau(I)d(I)R$ adalah sebuah *nonzero ideal* dari R, karena $\tau(I)d(I) \neq 0$. Maka $0 = [R, J]R[R, J]$. Karena R adalah ring semiprima, maka $0 = [R, J]$, yaitu $J \subseteq Z(R)$.

■

BAB IV
KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Suatu (σ, τ)-*derivation* adalah *generalized* (σ, τ)-*derivation* tetapi tidak berlaku sebaliknya.
2. Jika $\tau(I)d(I) \neq 0$, dimana R adalah ring semiprima, I suatu *nonzero ideal* pada R, σ dan τ dua epimorfisma pada R, dan F suatu *generalized* (σ, τ)-*derivation* yang berhubungan dengan d: (σ, τ)-*derivation* dari R, maka R memuat *nonzero central ideal* dari R.

DAFTAR PUSTAKA

Anwar , Y. S. dan Arifin, S. 2010. *Teori Ring Lanjut (Modul Prima).* Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Bartle R. G, Sherbert D. R. 1992. *Introduction to Real Analysis*. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. Singapore.

Bhattacharya, P. B.,S.K. Jain dan S. R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Bhattacharya, P. B.,S.K. Jain dan S. R. Nagpaul. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Daif, M.N. dan M.S. Tammam El-Sayiad. 2007. *On Generalized Derivation in Semiprime Rings*. International Journal Contemp Mathematics and Science. Vol. 2, No. 30. Kairo. Halaman 1481-1486

Dhara, Basudeb. dan A. Pattanayak. 2012. *On Generalized* (σ,τ)-*Derivation in Semiprime Rings.* International Scholarly Research Network Algebra. Vol. 2012, Article ID 120251.

Dummit, D. S. dan R. M. Foote. 2002. *Abstract Algebra Second Edition.* John Wiley and Sons, Inc. New York. Halaman 224-231.

Durbin, Jhon R. 1992. *Modern Algebra, An Introduction*. John Wiley & Sons, Inc. Kanada.

Hartley dan Hawkes. 1970. *Ring, Modules, and Linear Algebra.* Chapman and Hall. London.

Hidayanto, Erry, dan Santi Irawati. 2000. *Struktur Aljabar II*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Malang. Malang.

http://en.wikipedia.org/wiki/Glossary_of_ring_theory. 2010. Tanggal Akses 28 Juni 2013.

Isnarto. 2008. *Pengantar Struktur Aljabar I*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Semarang. Halaman 16.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall, Inc. New York.

Wijna. 2008. *Struktur Aljabar Grup*. http://wijna.web.ugm.ac.id. Tanggal akses 29 April 2013.