

**BIFURKASI HOPF PADA SISTEM *PREDATOR PREY*
DENGAN PENGARUH ALELOPATI**

SKRIPSI

oleh:

SULVI EKA YULIANSARI

0910940079-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

**BIFURKASI HOPF PADA SISTEM *PREDATOR PREY*
DENGAN PENGARUH ALELOPATI**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

SULVI EKA YULIANSARI
0910940079-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
BIFURKASI HOPF PADA SISTEM *PREDATOR PREY*
DENGAN PENGARUH ALELOPATI

oleh
SULVI EKA YULIANSARI
0910940079-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 1 Februari 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing

Dr. Agus Suryanto., M.Sc.
NIP. 196908071994121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sulvi Eka Yuliansari

NIM : 0910940079

Jurusan : Matematika

Penulis skripsi berjudul: *Bifurkasi Hopf Pada Sistem Predator Prey* dengan Pengaruh Alelopati

dengan ini menyatakan bahwa

1. skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan atau referensi,
2. apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang,
yang menyatakan,

(Sulvi Eka Yuliansari)

NIM. 0910940079

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BIFURKASI HOPF PADA SISTEM *PREDATOR PREY* DENGAN PENGARUH ALELOPATI

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas bifurkasi Hopf pada model *predator prey* dengan adanya pengaruh alelopati. Diasumsikan *predator* dapat menghasilkan alelokimia yang dapat menghambat pertumbuhan atau perkembangan populasi *prey*. Pengaruh waktu tunda diskrit τ dalam model ini juga dikaji, di mana waktu tunda ini merupakan waktu bagi *predator* untuk menghasilkan alelokimia. Terdapat dua laju pertumbuhan populasi yang dikaji, yaitu laju pertumbuhan populasi *prey* $x(t)$ dan laju pertumbuhan populasi *predator* $y(t)$, sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinear tundaan dengan dua persamaan. Analisis dinamik model seperti perhitungan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan diselidiki dalam pembahasan. Model dengan waktu tunda dapat menghasilkan bifurkasi Hopf, di mana bifurkasi tersebut terjadi saat τ melewati waktu tunda kritis τ_0 . Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk menguji hasil analisis yang diperoleh.

Kata kunci: *bifurkasi Hopf, model predator prey, alelopati*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



HOPF BIFURCATION A PREDATOR PREY SYSTEM WITH ALLELOPATHY EFFECT

ABSTRACT

This final project discussed Hopf bifurcation on predator prey model with Allelopathy effect. Predator is assumed to be able to produce allelochemic that can inhibit the growth or development of prey population. The influence of discrete time delay τ in this model is also discussed. Time delay is time for predator to produce allelochemic. There are two growth rates of population, the growth rate population of prey $x(t)$ and the growth rate population of predator $y(t)$, so it results a delayed nonlinear differential equation system with two equations. Dynamical analysis of model such as calculation of equilibrium point, conditions of equilibrium point existence and the stability of equilibrium point are investigated. Model with delay may result Hopf bifurcation which occurs when τ passes through to critical time delay τ_0 . Finally, some numerical simulations are given to test analysis result.

Keywords: Hopf bifurcation, predator prey model, allelopathy

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Bifurkasi Hopf Pada Sistem Predator Prey dengan Pengaruh Alelopati* dengan baik. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, kritikan, saran, waktu, serta kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi ini dan selalu mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini,
2. Drs. M. Muslikh, M.Si dan Dr. Ratno Bagus E.W., M.Si., selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku Ketua Program Studi Matematika,
4. Semua bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. Ayah, Ibu, adik-adikku tersayang dan semua anggota keluarga besarku atas segala doa dan dukungan yang telah diberikan,
6. Hubbii Onie yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi yang tak pernah habis,
7. Ivan, Elok, Mbak Mimin, Mbak Puji atas semua motivasi dan kesediaan bantuannya saat penulis perlukan,
8. Teman-teman Math A 2009 atas doa, dukungan dan kebersamaan selama ini,
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang turut membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak

kekurangan. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis sulvieka@gmail.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 19 Januari 2013

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Persamaan Diferensial	3
2.2 Sistem Dinamik	4
2.2.1 Sistem Otonomous Linear	5
2.2.2 Sistem Otonomous Nonlinear	6
2.3 Model <i>Predator Prey</i> Dua Spesies	7
2.4 Model Pertumbuhan Logistik	8
2.5 Kriteria Routh Hurwitz	10
2.6 Persamaan Diferensial Tundaan	11
2.7 Eksistensi Nilai Tundaan Kritis	12
2.8 Bifurkasi Hopf	14
2.8.1 Bifurkasi Hopf <i>Subcritical</i>	14
2.8.2 Bifurkasi Hopf <i>Supercritical</i>	15
BAB III PEMBAHASAN	17
3.1 Konstruksi Model	17
3.1.1 Model populasi <i>prey</i>	17
3.1.2 Model populasi <i>predator</i>	17
3.1.3 Model <i>predator prey</i> dengan pengaruh alelopati... ..	18

3.2 Titik Kesetimbangan Sistem	18
3.2.1 Titik Kesetimbangan $E_0(0,0)$	19
3.2.2 Titik Kesetimbangan $E_1\left(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0\right)$	19
3.2.3 Titik Kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$	19
3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan	20
3.3.1 Titik Kesetimbangan $E_0(0,0)$	20
3.3.2 Titik Kesetimbangan $E_1\left(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0\right)$	21
3.3.3 Titik Kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$	21
3.3.3.1 titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ tanpa waktu tunda $\tau = 0$	22
3.3.3.2 titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ dengan waktu tunda $\tau \neq 0$	22
3.4 Simulasi Numerik dan Kajian Perilaku Solusi	28
3.4.1 Simulasi model tanpa waktu tunda	28
3.4.2 Simulasi model dengan waktu tunda	29
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	31
4.1 Kesimpulan	31
4.2 Saran	31
DAFTAR PUSTAKA	33
LAMPIRAN	35

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Kurva model pertumbuhan logistik	9
Gambar 2.2 Bifurkasi Hopf <i>subcritical</i>	15
Gambar 2.3 Bifurkasi Hopf <i>supercritical</i>	16
Gambar 3.1 Potret fase model tanpa waktu tunda	28
Gambar 3.2 Potret fase model untuk $\tau = 1.2$	29
Gambar 3.3 Potret fase model untuk $\tau = 1.43$	30



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.1 Syarat Eksistensi dan Kestabilan

Titik Kesetimbangan 27

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1	Penurunan Linearisasi Model dengan Waktu Tunda	35
Lampiran 2	Perhitungan Persamaan Karakteristik Sistem	37
Lampiran 3	Program Matlab Model Tanpa Waktu Tunda	38
Lampiran 4	Program Matlab Model dengan Waktu Tunda	40



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Interaksi antar populasi di alam digambarkan dalam suatu model rantai makanan. Salah satu interaksi pada rantai makanan adalah proses mangsa memangsa. Model matematika yang digunakan untuk menggambarkan pertumbuhan populasi dalam proses mangsa memangsa disebut model *predator prey*. *Prey* merupakan populasi yang dimangsa, sedangkan *predator* adalah populasi pemangsa.

Pada saat interaksi berlangsung, beberapa spesies *predator* atau spesies *prey* mampu menghasilkan suatu zat kimia yang bersifat sebagai penghambat atau perangsang perkembangan spesies lain. Interaksi *predator prey* tersebut disebut alelopati. Alelopati (*Allelopathy*) merupakan suatu interaksi antar populasi yang bersifat merangsang atau menghambat perkembangan tumbuhan dan mikroorganisme lain. Perangsangan atau penghambatan tersebut berupa pelepasan senyawa kimia yang disebut alelokimia. Sebagai contoh *dinoflagellata*, *dinoflagellata* merupakan jenis plankton yang hidup di perairan laut. Plankton ini dapat menghasilkan racun saraf atau neurotoksin yang berbahaya bagi makhluk hidup pada perairan laut. Pengeluaran toksin dari plankton ini menyebabkan gejala pasang merah air laut. Widayani (2012) telah mengkaji analisis dinamik model *predator prey* dengan perlindungan terhadap *prey* terinfeksi. Pada kajiannya hanya *prey* terinfeksi yang dapat dimangsa oleh *predator*, karena *prey* terinfeksi bergerak lebih lambat sehingga lebih mudah dimangsa oleh *predator*.

Pada skripsi ini dibahas bifurkasi Hopf pada model *predator prey* dengan pengaruh alelopati. Pada kajian skripsi ini disertakan waktu tunda sebagai waktu bagi *predator* untuk memproduksi alelokimia yang digunakan untuk menghambat perkembangan spesies *prey*. Model matematika yang terbentuk terdiri dari laju pertumbuhan spesies *predator* dan laju pertumbuhan spesies *prey*. Model matematika tersebut berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear dengan waktu tunda. Dari model tersebut dilakukan analisis dinamik dengan menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya. Persamaan diferensial dengan waktu tunda ini menghasilkan dinamika yang lebih kompleks daripada

persamaan diferensial biasa. Keadaan titik kesetimbangan yang stabil tanpa waktu tunda dapat berubah menjadi tak stabil dengan adanya waktu tunda yang melebihi waktu tunda kritis. Untuk membuktikan hasil analisis dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *software Matlab*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan yang dibahas pada skripsi ini adalah

1. bagaimana konstruksi model *predator prey* dengan pengaruh alelopati,
2. bagaimana syarat eksistensi titik kesetimbangan model *predator prey* dengan pengaruh alelopati,
3. bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model *predator prey* dengan pengaruh alelopati,
4. bagaimana simulasi numerik model *predator prey* dengan pengaruh alelopati.

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan skripsi ini dibatasi oleh beberapa hal sebagai berikut

1. spesies *predator* menghasilkan alelokimia yang dapat menghambat perkembangan spesies *prey*,
2. waktu tunda diskrit dinyatakan sebagai waktu bagi *predator* untuk memproduksi alelokimia,
3. pertumbuhan *prey* mengikuti pertumbuhan logistik,
4. spesies *predator* mengalami kematian alami.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. mengkonstruksi model *predator prey* dengan pengaruh alelopati,
2. menentukan syarat eksistensi titik kesetimbangan model *predator prey* dengan pengaruh alelopati,
3. menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model *predator prey* dengan pengaruh alelopati,
4. melakukan simulasi numerik model *predator prey* dengan pengaruh alelopati.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari beberapa fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat hanya satu peubah bebas. Persamaan diferensial biasa orde satu adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (2.1)$$

dengan x dan $\frac{dx}{dt}$ adalah fungsi dari t (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.3 (Persamaan Diferensial Biasa Linear)

Persamaan diferensial biasa orde satu dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x disebut linear, jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = F(t),$$

dengan $a_0(t)$, $a_1(t)$ dan $F(t)$ adalah fungsi linear yang hanya bergantung terhadap t (Nagle, dkk., 2012).

Definisi 2.1.4 (Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang mempunyai derajat atau pangkat dari turunan tertinggi persamaan tersebut lebih dari satu atau terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya (Nagle, dkk., 2012).

Definisi 2.1.5 (Sistem Persamaan Diferensial)

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem diferensial biasa yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi n adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.2 Sistem Dinamik

Definisi 2.2.1 (Sistem Dinamik)

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi pada masa sekarang atau masa lalu (Nagle, dkk., 2012).

Definisi 2.2.2 (Sistem Otonomous)

Sistem persamaan diferensial berbentuk

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\
\frac{dy}{dt} &= G(x, y),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan F dan G adalah fungsi bernilai riil yang tidak bergantung secara eksplisit pada variabel tak bebas t disebut sistem otonomous (Brauer dan Nohel, 1967).

Definisi 2.2.3 (Titik Kesetimbangan)

Diberikan suatu sistem otonomous (2.3). Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ yang memenuhi $F(x^*, y^*) = 0$ dan $G(x^*, y^*) = 0$ disebut titik kesetimbangan sistem (2.3) (Nagle, dkk., 2012).

Definisi 2.2.4 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ pada sistem otonomous (2.3) dikatakan

- a. **stabil**, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

- b. **stabil asimtotik**, jika (x^*, y^*) stabil dan $\exists \eta > 0$ sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \eta,$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

- c. **tidak stabil**, apabila titik tersebut tidak memenuhi (a) (Nagle, dkk., 2012).

2.2.1 Sistem Otonomus Linear

Suatu sistem otonomus linear dengan n persamaan berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \quad (2.4)$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem otonomus linear (2.4) dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika bagian riil $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ negatif,
2. **stabil tetapi bukan stabil asimtotik**, jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ memiliki bagian riil tak positif,
3. **tidak stabil**, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif.

(Edwards dan Penney, 2001).

2.2.2 Sistem Otonomous Nonlinear

Perhatikan sistem otonomous berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y),\end{aligned}\tag{2.5}$$

dengan fungsi F dan G adalah fungsi yang memiliki turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan (x^*, y^*) . Jika F dan G fungsi nonlinear, maka sistem dapat dilinearakan dengan deret Taylor.

Fungsi F dan G di sekitar titik kesetimbangan (x^*, y^*) adalah

$$F(x, y) = F(x^*, y^*) + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t}(x - x^*) + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t}(y - y^*) + \varphi_1(x, y),\tag{2.6}$$

$$G(x, y) = G(x^*, y^*) + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t}(x - x^*) + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t}(y - y^*) + \varphi_2(x, y),\tag{2.7}$$

dengan $\varphi_1(x, y)$ dan $\varphi_2(x, y)$ adalah suku sisa. Untuk hampiran orde satu terhadap F dan G , suku sisa memenuhi sifat

$$\begin{aligned}\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\varphi_1(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} &= 0, \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\varphi_2(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} &= 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*)^T$.

Dengan menggunakan persamaan (2.6) dan (2.7) serta mengingat $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x^*)}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}$, maka persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x^*, y^*) \\ G(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t}(x - x^*) + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t}(y - y^*) \\ \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t}(x - x^*) + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t}(y - y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F(x^*, y^*) \\ G(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t} & \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t} \\ \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t} & \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (y - y^*) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t} & \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t} \\ \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t} & \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial*

derivative matrix dan dinotasikan dengan $J(x^*, y^*)$. Karena

$F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$ dan jika dimisalkan $u = x - x^*$ dan $v = y - y^*$ maka $\vec{w} = (u, v)^T$, persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t} & \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial t} \\ \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t} & \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J(x^*, y^*)\vec{w} + \vec{\varphi}. \quad (2.10)$$

Untuk (x, y) yang berada cukup dekat dengan (x^*, y^*) , (u, v) bernilai kecil sehingga $\|\vec{\varphi}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, φ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.10) dapat dihampiri dengan sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J(x^*, y^*)\vec{w}. \quad (2.11)$$

Jika $x = x^*$, $y = y^*$ maka $(u^*, v^*) = (0, 0)$ sehingga sistem linear (2.11) memiliki titik kesetimbangan $(u^*, v^*) = (0, 0)$ (Boyce dan DiPrima, 2009).

Teorema 2.2

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.5) bersifat

1. **stabil**, jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah stabil,
2. **tidak stabil**, jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah tidak stabil.

(Edwards dan Penney, 2001).

2.3 Model Predator Prey Dua Spesies

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi antara dua spesies, yaitu spesies *predator* dan spesies *prey* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926 dan dikenal sebagai model *predator-prey* Lotka-Volterra. Populasi *prey* pada waktu t dinyatakan dengan $x(t)$ dan populasi *predator* pada waktu t dinyatakan dengan $y(t)$. *Prey* diasumsikan

tumbuh secara eksponensial saat tidak terjadi pemangsaan oleh *predator*. Pertumbuhan eksponensial *prey* dinyatakan dengan ax . Pemangsaan terhadap *prey* diasumsikan sama dengan laju interaksi *prey* dan *predator* yang dinyatakan dengan pxy . Jadi, laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = ax - pxy. \quad (2.12)$$

Pertumbuhan *predator* dinyatakan oleh laju interaksi *prey* dan *predator* yang dinyatakan dengan qxy . *Predator* akan mengalami kematian alami dengan laju yang dinyatakan dengan $-by$ saat *prey* tidak ada. Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *predator* dapat ditulis sebagai

$$\frac{dy}{dt} = -by + qxy. \quad (2.13)$$

Dari persamaan (2.12) dan (2.13) diperoleh model *predator prey* Lotka-Volterra berupa sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - pxy \\ \frac{dy}{dt} &= -by + qxy, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dengan

a = laju kelahiran alami *prey*,

p = laju interaksi pemangsaan *prey*,

b = laju kematian alami *predator*,

q = laju pertumbuhan *predator*.

Semua parameter a, p, b , dan q bernilai positif.

(Edwards dan Penney, 2001).

2.4 Model Pertumbuhan Logistik

Menurut Boyce dan DiPrima (2009), pertumbuhan populasi secara kontinu dengan sumber daya yang melimpah atau tidak terbatas dapat dimodelkan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad (2.15)$$

dengan $x = \phi(t)$ adalah jumlah populasi spesies pada saat t dan r adalah laju pertumbuhan atau penurunan populasi tergantung pada tanda positif atau negatif. Solusi persamaan (2.15) adalah

$$x(t) = x_0 e^{rt}.$$

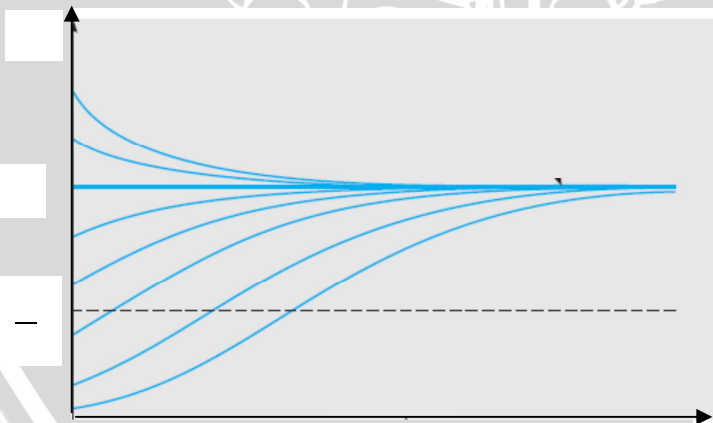
Model pertumbuhan di atas disebut pertumbuhan eksponensial. Namun, jelas bahwa kondisi ini tidak dapat terjadi terus menerus. Pada akhirnya keterbatasan ruang, makanan, atau sumber daya lain akan menghentikan tingkat pertumbuhan. Dengan menggantikan r pada persamaan (2.15) sebagai fungsi $r(N)$, maka diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) disebut persamaan Verhulst atau persamaan logistik. Persamaan logistik seringkali dituliskan

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (2.17)$$

dengan r menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi, K adalah *carrying capacity* (daya dukung lingkungan). Jika jumlah populasi awal N_0 , maka model logistik menyatakan bahwa ukuran populasi meningkat menuju *carrying capacity*. Grafik model ini memiliki titik belok di $N = \frac{K}{2}$, di mana grafik akan cekung ke atas jika $N < \frac{K}{2}$ dan cekung ke bawah jika $N > \frac{K}{2}$. Tetapi jika nilai awal $N_0 > K$, maka model logistik menyatakan bahwa jumlah populasi akan berkurang menuju *carrying capacity*, seperti diperlihatkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Kurva model pertumbuhan logistik

2.5 Kriteria Routh Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (2.18)$$

Solusi sistem otonomous tersebut akan stabil jika semua akar persamaan (2.18) bernilai negatif, atau dengan kata lain $\lambda_m < 0$, $m = 1, 2, \dots$. Persamaan (2.18) umumnya sulit untuk diselesaikan, sehingga sulit pula untuk menentukan nilai eigennya. Oleh karena itu digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan tanda nilai eigen, seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3

Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan karakteristik (2.18), dibangun m matriks sebagai berikut.

$$\begin{aligned} H_1 &= [a_1], \\ H_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \\ H_3 &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots, \\ H_m &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jika $\det(H_m) > 0$, maka $\lambda_m < 0$, $m = 1, \dots, n$. Untuk $n = 2$, persamaan (2.18) menjadi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \quad (2.19)$$

Sehingga diperoleh matriks koefisien-koefisien persamaan karakteristik (2.19) sebagai berikut.

$$H_1 = [a_1], \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Akar-akar persamaan (2.19) akan bernilai negatif jika dan hanya jika semua koefisien a_1 dan a_2 bernilai positif dan $a_1 a_2 > 0$ (Murray, 2002).

2.6 Persamaan Diferensial Tundaan

Persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0, \quad (2.20)$$

dengan τ adalah waktu tunda dan

$$\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t).$$

Misalkan $x(t) = e^{\lambda t}$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} &= 0 \\ e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) &= 0, \end{aligned}$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.21)$$

Persamaan (2.21) disebut persamaan karakteristik persamaan (2.20).

Misalkan

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad \text{dan} \quad P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.21) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda) e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.22)$$

Sistem persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x(t), x(t - \tau)) \\
 \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x(t), x(t - \tau)) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x(t), x(t - \tau))
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

(Kuang, 1993).

2.7 Eksistensi Nilai Tundaan Kritis

Jika $\tau = 0$ maka sistem persamaan (2.23) akan menjadi sistem persamaan diferensial biasa tanpa waktu tunda, di mana jenis kestabilannya dapat dianalisis menggunakan Teorema 2.2. Menurut Forde (2005), untuk $\tau \neq 0$ akar karakteristik λ akan mengalami perubahan. Misalkan $\lambda = \eta \pm i\omega$, sistem (2.23) bersifat stabil jika $\eta < 0$ dan tidak stabil jika $\eta > 0$. Penambahan waktu tunda pada sistem (2.23) mengakibatkan adanya nilai tundaan kritis. Nilai tundaan kritis ini menyebabkan terjadinya transisi dari $\eta < 0$ ke $\eta > 0$. Dengan demikian, untuk mengamati terjadinya perubahan tersebut dipilih $\eta = 0$. Oleh karena itu, akar persamaan karakteristik untuk sistem (2.23) akan menjadi akar karakteristik imajiner murni di mana bagian riil dari akar persamaan adalah nol, berdasarkan Teorema 2.1, jenis kestabilan pada sistem (2.23) tidak dapat ditentukan namun masih dapat dianalisis.

Misal akar persamaan (2.22) adalah $\lambda = i\omega > 0, \omega \in \mathbb{R}$, maka persamaan (2.22) menjadi $P_1(i\omega) + P_2(i\omega)e^{-i\omega\tau} = 0$.

Jika bagian polinomial dinyatakan dalam bagian riil dan imajiner serta suku eksponen diubah dalam bentuk trigonometri, maka diperoleh

$$R_1(\omega) + iQ_1(\omega) + (R_2(\omega) + iQ_2(\omega))(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) = 0, \tag{2.24}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 R_1(\omega) &= \sum_j (-1)^{j+1} a_{2j} \omega^{2j}, \\
 Q_1(\omega) &= \sum_j (-1)^j a_{j+1} \omega^{2j+1}, \\
 R_2(\omega) &= \sum_j (-1)^{j+1} b_{2j} \omega^{2j},
 \end{aligned}$$

$$Q_2(\omega) = \sum_j (-1)^j b_{j+1} \omega^{2j+1}.$$

Agar persamaan (2.24) berlaku, bagian riil dan imajiner harus sama dengan nol sehingga

$$\begin{aligned} R_1(\omega) + R_2(\omega) \cos \omega\tau + Q_2(\omega) \sin \omega\tau &= 0, \\ Q_1(\omega) - R_2(\omega) \sin \omega\tau + Q_2(\omega) \cos \omega\tau &= 0, \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} -R_1(\omega) &= R_2(\omega) \cos \omega\tau + Q_2(\omega) \sin \omega\tau, \\ Q_1(\omega) &= R_2(\omega) \sin \omega\tau - Q_2(\omega) \cos \omega\tau. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Jika persamaan (2.25) dikuadratkan, maka diperoleh

$$(R_1(\omega))^2 = (R_2(\omega))^2 \cos^2 \omega\tau + (Q_2(\omega))^2 \sin^2 \omega\tau + 2R_2(\omega)Q_2(\omega) \sin \omega\tau \cos \omega\tau \quad (2.26a)$$

dan

$$(Q_1(\omega))^2 = (R_2(\omega))^2 \sin^2 \omega\tau + (Q_2(\omega))^2 \cos^2 \omega\tau - 2R_2(\omega)Q_2(\omega) \sin \omega\tau \cos \omega\tau. \quad (2.26b)$$

Selanjutnya, persamaan (2.26a) dan (2.26b) dijumlahkan dan diperoleh

$$(R_1(\omega))^2 + (Q_1(\omega))^2 = (R_2(\omega))^2 + (Q_2(\omega))^2. \quad (2.27)$$

Misal ω_0 memenuhi persamaan (2.27) dan

$d = \sqrt{(R_2(\omega_0))^2 + (Q_2(\omega_0))^2}$, maka persamaan (2.25) dapat ditulis kembali dalam ω_0 sebagai

$$\begin{aligned} -R_1(\omega_0) &= d \left(\frac{R_2(\omega_0)}{d} \cos \omega_0\tau + \frac{Q_2(\omega_0)}{d} \sin \omega_0\tau \right), \\ Q_1(\omega_0) &= d \left(\frac{R_2(\omega_0)}{d} \sin \omega_0\tau + \frac{Q_2(\omega_0)}{d} \cos \omega_0\tau \right). \end{aligned}$$

Misal $\frac{R_2(\omega_0)}{d} = \cos \beta$ dan $\frac{Q_2(\omega_0)}{d} = \sin \beta$, maka

$$-R_1(\omega_0) = d(\cos \beta \cos \omega_0\tau + \sin \beta \sin \omega_0\tau) \quad (2.28a)$$

dan

$$Q_1(\omega_0) = d(\cos \beta \sin \omega_0\tau + \sin \beta \cos \omega_0\tau). \quad (2.28b)$$

Dengan menggunakan sifat-sifat trigonometri diperoleh

$$-R_1(\omega_0) = d \cos(\omega_0\tau - \beta)$$

dan

$$Q_1(\omega_0) = d \sin(\omega_0\tau - \beta).$$

Nilai tundaan kritis τ^* dapat diperoleh dari persamaan (2.28), yaitu dengan mengalikan (2.28a) dengan $\cos \beta$ dan (2.28b) dengan $\sin \beta$ kemudian kedua persamaan dikurangkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 -R_1(\omega_0) \cos \beta - Q_1(\omega_0) \sin \beta &= d \cos^2 \beta \cos \omega_0 \tau + d \sin^2 \beta \cos \omega_0 \tau \\
 -R_1(\omega_0) \cos \beta - Q_1(\omega_0) \sin \beta &= d \cos \omega_0 \tau \\
 \omega_0 \tau &= \arccos \left\{ \frac{-R_1(\omega_0) \cos \beta - Q_1(\omega_0) \sin \beta}{d} \right\} + 2j\pi, j = 0, 1, \dots \\
 \tau_j^* &= \frac{1}{\omega_0} \arccos \left\{ \frac{-R_1(\omega_0) \cos \beta - Q_1(\omega_0) \sin \beta}{d} \right\} + \frac{2j\pi}{\omega_0}, \quad (2.29) \\
 & \quad j = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

Persamaan (2.29) menunjukkan bahwa terdapat tak berhingga nilai tundaan kritis τ^* yang memenuhi persamaan (2.24). Karena terdapat tak berhingga nilai j , dipilih $j = 0$ agar efektif. Nilai tundaan $\tau^* = \tau_0$ inilah yang merupakan nilai tundaan kritis. Setelah nilai tundaan kritis τ^* ditemukan, selanjutnya akan ditentukan apakah nilai tundaan kritis τ^* memenuhi kondisi transversal.

2.8 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf adalah berubahnya jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial dikarenakan munculnya sepasang nilai eigen yang bernilai imajiner. Syarat-syarat terjadinya bifurkasi Hopf diberikan dalam Teorema 2.4.

Teorema 2.4 (Kondisi Transversal)

Pandang sistem dengan waktu tunda (2.23) yang bergantung pada parameter waktu tunda τ . Misalkan terdapat titik kesetimbangan \vec{x}^* dengan nilai eigen $\lambda(\tau) = \eta(\tau) \pm i\omega(\tau)$. Bila terdapat nilai tundaan kritis τ_0 , sehingga $\eta(\tau_0) = 0$ dan $\omega(\tau_0) = \omega_0$, serta

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0} \neq 0,$$

maka jenis kestabilan dari titik kesetimbangan $\vec{x}^*(x^*, y^*)$ akan berubah bila waktu tunda τ berubah di sekitar nilai tundaan kritis τ_0 (Robinson, 2004).

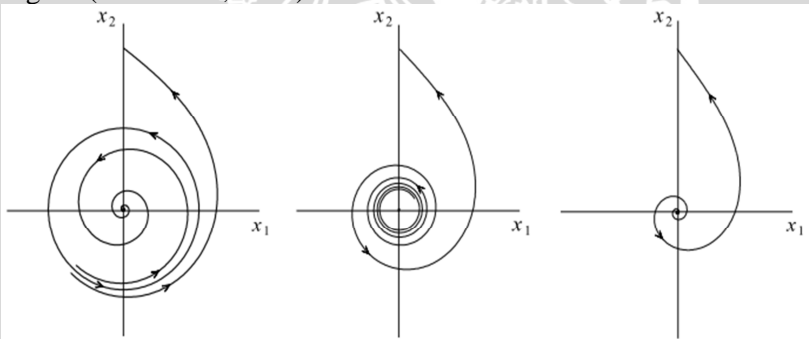
2.8.1 Bifurkasi Hopf *Subcritical*

Misalkan suatu sistem dengan waktu tunda memiliki persamaan karakteristik seperti pada persamaan (2.22). Jika terdapat waktu tunda sehingga muncul suatu *limit cycle* tak stabil pada sistem tersebut sebelum waktu tunda melewati nilai tundaan kritis maka sistem tersebut mengalami bifurkasi Hopf *Subcritical*.

Misalkan persamaan karakteristik (2.22) mempunyai sepasang nilai eigen pada , sehingga mempunyai struktur orbit yang ditunjukkan dalam Gambar 2.2.

Parameter waktu tunda menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai bentuk . Sama dengan bifurkasi Hopf *Supercritical*, struktur orbit dan *limit cycle* yang tak stabil dari sistem juga akan berubah seiring perubahan nilai parameter.

Bifurkasi Hopf membahas matriks Jacobi yang berkaitan dengan linearisasi sistem (2.23) yang mempunyai pasangan nilai eigen imajiner murni dan nilai eigen lainnya mempunyai bagian riil negatif (Kuznetsov, 1998).

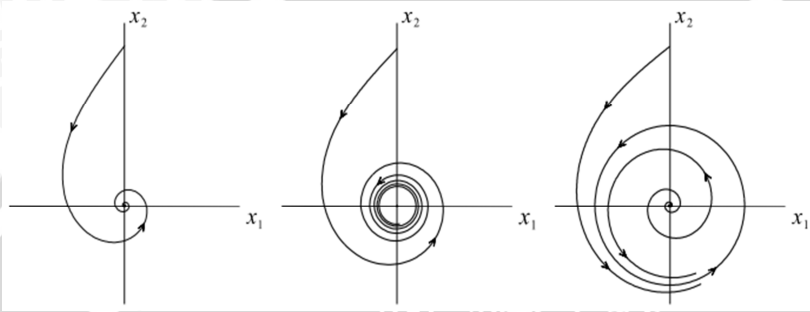


Gambar 2.2 Bifurkasi Hopf *subcritical*

2.8.2 Bifurkasi Hopf *Supercritical*

Misalkan suatu sistem dengan waktu tunda memiliki persamaan karakteristik seperti pada persamaan (2.22). Jika terdapat waktu tunda sehingga muncul suatu *limit cycle* stabil pada sistem tersebut ketika waktu tunda melewati nilai tundaan kritis maka sistem tersebut mengalami bifurkasi Hopf *Supercritical*.

Misalkan persamaan karakteristik (2.22) mempunyai sepasang nilai eigen pada , sehingga mempunyai struktur orbit yang ditunjukkan dalam Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Bifurkasi Hopf *supercritical*

Parameter waktu tunda menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai bentuk . Hal ini berakibat pada perubahan struktur orbit dan munculnya *limit cycle* stabil dari sistem seiring dengan perubahan nilai parameter (Kuznetsov, 1998).

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas model *predator prey* dengan pengaruh alelopati. Skripsi ini lebih membahas analisis dinamik yaitu penentuan titik kesetimbangan model dan kestabilan titik kesetimbangan model. Diasumsikan *predator* dapat menghasilkan alelokimia yang menghambat pertumbuhan atau perkembangan *prey*. Waktu tunda diskrit juga diberikan sebagai waktu produksi alelokimia oleh *predator*. Model pertumbuhan dua spesies ini diasumsikan mengikuti sistem *predator prey* Lotka Volterra. Pada tahap akhir pembahasan dilakukan simulasi numerik.

3.1 Konstruksi Model

3.1.1 Model populasi *prey*

Populasi *prey* pada saat t dinyatakan dengan $x(t)$. Jumlah *prey* pada populasi diasumsikan mengikuti pertumbuhan logistik dengan laju pertumbuhan *prey* sebesar k_1 dan daya dukung lingkungan sebesar $\frac{k_1}{\alpha_1}$, sehingga pertumbuhan populasi *prey* dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dx}{dt} = x(t)[k_1 - \alpha_1 x(t)].$$

Pertumbuhan *prey* dipengaruhi oleh interaksi antara *predator* dan *prey* dengan laju pemangsaan *prey* sebesar β_{12} . Sebelum berinteraksi dengan *prey*, *predator* dapat menghasilkan suatu alelokimia yang dapat menghambat pertumbuhan *prey*. *Predator* hanya mengeluarkan alelokimia saat *prey* ada. Laju penghambatan *prey* oleh *predator* dinyatakan sebesar $\gamma_1 xy$. Pada interaksi ini terdapat pengaruh waktu tunda pada populasi *predator*. Didapatkan pertumbuhan populasi *prey*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & x(t)[k_1 - \alpha_1 x(t)] - \beta_{12} x(t)y(t - \tau) \\ & - \gamma_1 x^2(t)y(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1.2 Model populasi *predator*

Populasi *predator* pada saat t dinyatakan dengan $y(t)$. Jumlah populasi *predator* berkurang karena kematian alami dengan laju

sebesar k_2 dan interaksi antarpredator sebesar β_{21} , sehingga pertumbuhan populasi predator dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dy}{dt} = y(t)[-k_2 - \beta_{21}y(t)].$$

Pertambahan populasi predator dipengaruhi oleh interaksi antara predator dan prey dengan laju interaksi sebesar α_2 . Pada interaksi ini terdapat pengaruh waktu tunda τ di populasi prey. Waktu tunda tersebut dinyatakan sebagai waktu tunda untuk proses kematian dari prey dikarenakan terkena alelokimia dari predator. Sehingga pertumbuhan populasi predator dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dy}{dt} = y(t)[-k_2 - \beta_{21}y(t)] + \alpha_2y(t)x(t - \tau). \quad (3.2)$$

3.1.3 Model predator prey dengan pengaruh alelopati

Model predator prey dengan pengaruh alelopati adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)[k_1 - \alpha_1x(t) - \beta_{12}y(t - \tau) - \gamma_1x(t)y(t - \tau)] \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)[-k_2 + \alpha_2x(t - \tau) - \beta_{21}y(t)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

dengan $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{21}, \gamma_1 > 0$.

3.2 Titik Kesetimbangan Sistem

Sistem persamaan (3.3) tanpa waktu tunda ($\tau = 0$) dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)[k_1 - \alpha_1x(t) - \beta_{12}y(t) - \gamma_1x(t)y(t)] \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)[-k_2 + \alpha_2x(t) - \beta_{21}y(t)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Titik kesetimbangan sistem (3.4) diperoleh saat $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, sehingga sistem (3.4) menjadi

$$x(t)[k_1 - \alpha_1x(t) - \beta_{12}y(t) - \gamma_1x(t)y(t)] = 0 \quad (3.5a)$$

$$y(t)[-k_2 + \alpha_2x(t) - \beta_{21}y(t)] = 0. \quad (3.5b)$$

Dari persamaan (3.5a) didapatkan

$$x = 0 \quad (3.6a)$$

atau

$$x = \frac{k_1 - \beta_{12}y}{\alpha_1 + \gamma_1y}. \quad (3.6b)$$

Dari persamaan (3.5b) didapatkan

$$y = 0 \quad (3.7a)$$

atau

$$y = \frac{-k_2 + \alpha_2 x}{\beta_{21}}. \quad (3.7b)$$

Kombinasi keempat solusi diatas menghasilkan 3 titik kesetimbangan yang eksis. Pada subbab 3.2.1 sampai 3.2.3 ditunjukkan cara memperoleh ketiga titik kesetimbangan tersebut.

3.2.1 Titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$

Titik kesetimbangan trivial E_0 diperoleh dari kombinasi solusi (3.6a) dan (3.7a). Karena $x = 0$ dan $y = 0$, maka $(x, y) = (0, 0)$.

3.2.2 Titik kesetimbangan $E_1\left(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0\right)$

Titik kesetimbangan bebas predator E_1 diperoleh dari kombinasi solusi (3.6b) dan (3.7a). Substitusi $y = 0$ ke dalam $x = \frac{k_1 - \beta_{12}y}{\alpha_1 + \gamma_1 y}$ menghasilkan $x = \frac{k_1}{\alpha_1}$, maka diperoleh $(x, y) = \left(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0\right)$.

3.2.3 Titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$

Titik kesetimbangan E_2 merupakan titik kesetimbangan interior. Titik kesetimbangan E_2 diperoleh dari kombinasi solusi (3.6b) dan (3.7b) atau $x = \frac{k_1 - \beta_{12}y}{\alpha_1 + \gamma_1 y}$ dan $y = \frac{-k_2 + \alpha_2 x}{\beta_{21}}$. Substitusi $x = \frac{k_1 - \beta_{12}y}{\alpha_1 + \gamma_1 y}$ ke dalam $y = \frac{-k_2 + \alpha_2 x}{\beta_{21}}$, yaitu

$$y = \frac{-k_2 + \alpha_2 \left(\frac{k_1 - \beta_{12}y}{\alpha_1 + \gamma_1 y}\right)}{\beta_{21}},$$

$$y\beta_{21} = -k_2 + \alpha_2 \left(\frac{k_1 - \beta_{12}y}{\alpha_1 + \gamma_1 y}\right),$$

$$y\beta_{21}(\alpha_1 + \gamma_1 y) = -k_2 + \alpha_2(k_1 - \beta_{12}y),$$

$$0 = -\beta_{21}\gamma_1 y^2 - (\beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12})y + (\alpha_2 k_1 - k_2\alpha_1).$$

Didapatkan

$$y_{1,2} = \frac{(\beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12})}{-2\beta_{21}\gamma_1} \pm \sqrt{\frac{(-(\beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12}))^2 + 4(\beta_{21}\gamma_1)(\alpha_2 k_1 - k_2\alpha_1)}{-2\beta_{21}\gamma_1}}$$

y akan bernilai positif jika $\alpha_2 k_1 - k_2 \alpha_1 > 0$, yaitu

$$y^* = \frac{(\beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12}) - \sqrt{-(\beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12})^2 + 4(\beta_{21}\gamma_1)(\alpha_2k_1 - k_2\alpha_1)}}{-2\beta_{21}\gamma_1} \quad (3.8)$$

Substitusi persamaan (3.8) ke dalam persamaan $x = \frac{k_1 - \beta_{12}y}{\alpha_1 + \gamma_1 y}$ menghasilkan

$$x^* = \frac{-(\beta_{21}\alpha_1 - k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12}) + \sqrt{(\beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12})^2 + 4(\beta_{21}\gamma_1)(\alpha_2k_1 - k_2\alpha_1)}}{2\alpha_2\gamma_1} \quad (3.9)$$

Diperoleh titik interior $E_2(x^*, y^*) = \left(\frac{-I_1 + \sqrt{I_3}}{2\alpha_2\gamma_1}, \frac{-I_2 + \sqrt{I_3}}{2\beta_{21}\gamma_1} \right)$,

dengan

$$I_1 = \beta_{21}\alpha_1 - k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12},$$

$$I_2 = \beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12},$$

$$I_3 = (\beta_{21}\alpha_1 + k_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_{12})^2 + 4(\beta_{21}\gamma_1)(\alpha_2k_1 - k_2\alpha_1).$$

3.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Sebelum menentukan kestabilan titik keseimbangan, terlebih dahulu dilakukan perhitungan matriks Jacobi dari sistem (3.4).

Matriks Jacobi dari sistem (3.4) adalah

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} k_1 - 2\alpha_1x - \beta_{12}y - 2\gamma_1xy & -\beta_{12}x - \gamma_1x^2 \\ \alpha_2y & -k_2 + \alpha_2x - 2\beta_{21}y \end{bmatrix}.$$

3.3.1 Titik keseimbangan $E_0(0, 0)$

Matriks Jacobi sistem (3.4) di E_0 adalah

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_0)$ adalah

$$(\lambda - k_1)(\lambda + k_2) = 0.$$

Akar karakteristik dari persamaan di atas adalah

$$\lambda_1 = k_1 > 0 \text{ atau } \lambda_2 = -k_2 < 0.$$

Dari penjelasan di atas titik keseimbangan E_0 pada sistem persamaan (3.4) bersifat tidak stabil pelana.

3.3.2 Titik kesetimbangan $E_1\left(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0\right)$

Matriks Jacobi dari sistem (3.4) di E_1 adalah

$$J\left(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0\right) = \begin{bmatrix} -k_1 & -\frac{\beta_{12}k_1}{\alpha_1} - \frac{\gamma_1 k_1^2}{\alpha_1^2} \\ 0 & -k_2 + \frac{\alpha_2 k_1}{\alpha_1} \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_1)$ adalah

$$(\lambda + k_1)\left(\lambda + k_2 - \frac{\alpha_2 k_1}{\alpha_1}\right) = 0.$$

Akar karakteristik dari persamaan di atas adalah

$$\lambda_1 = -k_1 < 0 \text{ atau } \lambda_2 = -k_2 + \frac{\alpha_2 k_1}{\alpha_1} > 0.$$

Dari penjelasan di atas titik kesetimbangan E_1 pada sistem (3.4) bersifat stabil jika memenuhi syarat $\alpha_2 k_1 - k_2 \alpha_1 < 0$.

3.3.3 Titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$

Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan E_2 dilakukan linearisasi sistem (3.3) dengan transformasi

$$x(t) = x^* + x_1(t)$$

$$y(t) = y^* + x_2(t)$$

Setelah dilakukan linierisasi seperti pada Lampiran 1, diperoleh hasil linierisasi

$$\frac{dU}{dt} = AU(t) + CU(t - \tau),$$

dengan

$$U(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dimana entri-entri A dan C adalah

$$a_{11} = M = -\alpha_1 x^* - \gamma_1 x^* y^*,$$

$$a_{22} = E = -\beta_{21} y^*,$$

$$c_{12} = N = -\beta_{21} x^* - \gamma_1 x^{*2},$$

$$c_{21} = D = \alpha_2 y^*.$$

Persamaan karakteristik dari hasil linearisasi sistem (3.3) (perhitungan dapat dilihat pada Lampiran 2) adalah

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + b_0e^{-2\lambda\tau} = 0, \quad (3.10)$$

dengan

$$\begin{aligned} b_0 &= -ND = (\beta_{21}x^* + \gamma_1x^{*2})\alpha_2y^* \\ a_0 &= ME = \beta_{21}y^*(\alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^*) \\ a_1 &= -(M + E) = \alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^* + \beta_{21}y^* \end{aligned}$$

3.3.3.1 Titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ tanpa waktu tunda ($\tau = 0$)

Untuk $\tau = 0$, persamaan karakteristik (3.10) menjadi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + b_0 = 0, \quad (3.11)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta_{21}y^*(\alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^*), a_1 = \alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^* + \beta_{21}y^*, \\ b_0 &= (\beta_{21}x^* + \gamma_1x^{*2})\alpha_2y^* \end{aligned}$$

Akar-akar dari persamaan (3.11) dianalisis dengan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan Teorema 2.3, titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ stabil jika dan hanya jika

- (i) $a_0, a_1 > 0$,
- (ii) $(a_0 + b_0)a_1 > 0$.

Karena semua parameter bernilai positif ($\beta_{21}, \alpha_1, \gamma_1 > 0$), maka

- (i) $a_0 > 0$ atau $\beta_{21}y^*(\alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^*) > 0$
 $a_1 > 0$ atau $\alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^* + \beta_{21}y^* > 0$
 $b_0 > 0$ atau $(\beta_{21}x^* + \gamma_1x^{*2})\alpha_2y^* > 0$
- (ii) $(a_0 + b_0)a_1 = (\beta_{21}y^*(\alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^*) + (\beta_{21}x^* + \gamma_1x^{*2})\alpha_2y^*)(\alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^* + \beta_{21}y^*) > 0$.

3.3.3.2 Titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ dengan waktu tunda ($\tau \neq 0$)

Persamaan karakteristik dari hasil linearisasi system (3.3) adalah persamaan (3.10)

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + b_0e^{-2\lambda\tau} = 0$$

dengan

$$\begin{aligned} b_0 &= (\beta_{21}x^* + \gamma_1x^{*2})\alpha_2y^*, \\ a_0 &= \beta_{21}y^*(\alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^*), \\ a_1 &= \alpha_1x^* + \gamma_1x^*y^* + \beta_{21}y^*. \end{aligned}$$

Perilaku kestabilan titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ ditentukan oleh tanda bagian real solusi persamaan (3.10). Misalkan $\lambda = \eta \pm i\omega$ adalah akar persamaan (3.10). Titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ akan stabil jika $\eta < 0$. Apabila terdapat suatu nilai tunda $\tau > 0$ yang menyebabkan $\eta(\tau) = 0$ sehingga $\lambda = i\omega(\tau)$ merupakan akar imajiner

murni persamaan (3.10), maka titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ mengalami perubahan kestabilan, jika disubstitusikan $\lambda = i\omega$ dengan $\omega > 0$ ke dalam persamaan (3.10) diperoleh,

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + b_0e^{-2\lambda\tau} &= 0 \\ (i\omega)^2 + a_1(i\omega) + a_0 + b_0e^{-2(i\omega)\tau} &= 0 \\ -\omega^2 + a_1i\omega + a_0 + b_0e^{-2i\omega\tau} &= 0 \\ -\omega^2 + a_1i\omega + a_0 + b_0(\cos 2\omega\tau - i\sin 2\omega\tau) &= 0 \\ -\omega^2 + a_1i\omega + a_0 + b_0\cos 2\omega\tau - b_0i\sin 2\omega\tau &= 0 \\ -\omega^2 + a_0 + b_0\cos 2\omega\tau + (a_1\omega - b_0\sin 2\omega\tau)i &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) akan bernilai nol jika bagian real dan imajinernya juga bernilai nol, yaitu

$$\begin{aligned} -\omega^2 + a_0 + b_0\cos 2\omega\tau &= 0 \\ \omega^2 - a_0 &= b_0\cos 2\omega\tau, \end{aligned} \quad (3.13)$$

dan

$$\begin{aligned} a_1\omega - b_0\sin 2\omega\tau &= 0 \\ a_1\omega &= b_0\sin 2\omega\tau \end{aligned} \quad (3.14)$$

Eliminasi terhadap τ dilakukan dengan mengkuadratkan persamaan (3.13) dan (3.14), sehingga diperoleh persamaan untuk menentukan ω sebagai berikut,

$$\begin{aligned} (a_0 - \omega^2)^2 &= (-b_0\cos 2\omega\tau)^2 \\ a_0^2 - 2a_0\omega^2 + \omega^4 &= b_0^2\cos^2 2\omega\tau \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} (a_1\omega)^2 &= (b_0\sin 2\omega\tau)^2 \\ (a_1\omega)^2 &= b_0^2\sin^2 2\omega\tau \end{aligned} \quad (3.16)$$

Kemudian jumlahkan persamaan (3.15) dengan (3.16) diperoleh

$$\begin{aligned} a_0^2 - 2a_0\omega^2 + \omega^4 + (a_1\omega)^2 &= b_0^2(\cos^2 2\omega\tau + \sin^2 2\omega\tau) \\ a_0^2 + (a_1^2 - 2a_0)\omega^2 + \omega^4 &= b_0^2 \\ \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0)\omega^2 + (a_0^2 - b_0^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dari persamaan (3.17) diperoleh

$$\omega^2 = \frac{-(a_1^2 - 2a_0) \pm \sqrt{(a_1^2 - 2a_0)^2 - 4(a_0^2 - b_0^2)}}{2} \quad (3.18)$$

Akan terdapat bilangan positif ω_0 yang memenuhi persamaan (3.12) jika $(a_0^2 - b_0^2) < 0$. Dengan demikian persamaan tersebut memiliki akar imajiner $i\omega_0$. Dengan mensubstitusikan ω_0 ke dalam persamaan (3.13) dan (3.14), diperoleh nilai tunda kritis τ_0 .

$$\begin{aligned}\omega_0^2 - a_0 &= b_0 \cos 2\omega_0 \tau, \\ a_1 \omega_0 &= b_0 \sin 2\omega_0 \tau.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Dengan mengalikan baris pertama dengan 1 dan baris kedua dengan 0, diperoleh

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - a_0)1 &= 1(b_0 \cos 2\omega_0 \tau) \\ (a_1 \omega_0)0 &= 0(b_0 \sin 2\omega_0 \tau),\end{aligned}$$

kemudian baris pertama dan kedua dikurangkan, diperoleh

$$(\omega_0^2 - a_0) = (b_0 \cos 2\omega_0 \tau),$$

$$\frac{(\omega_0^2 - a_0)}{b_0} = \cos 2\omega_0 \tau,$$

$$2\omega_0 \tau = \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - a_0}{b_0}\right) + 2j\pi,$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2\omega_0} \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - a_0}{b_0}\right).$$

Jadi dapat ditemukan nilai τ_0 yang memenuhi persamaan (3.10).

Karena pada nilai tunda kritis persamaan (3.10) memuat akar imajiner, maka dimungkinkan pada titik kritis tersebut terjadi bifurkasi. Bifurkasi terjadi jika persamaan (3.10) memenuhi kondisi transversal, yaitu kondisi dimana

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0} > 0.$$

Bukti:

Kuang (1993) menyatakan bahwa

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}\left\{\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\eta}\right\} &= \operatorname{sign}\left\{\left. \operatorname{Re}\left(\frac{d}{d\tau} \lambda(\tau)\right) \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\eta}\right\} \\ &= \operatorname{sign}\left\{\left. \operatorname{Re}\left(\frac{d}{d\tau} \lambda(\tau)\right)^{-1} \right|_{\tau=\tau_0}\right\}\end{aligned}$$

Untuk membuktikan bahwa kondisi transversal terpenuhi cukup dibuktikan bahwa

$$\left. \operatorname{Re}\left(\frac{d}{d\tau} \lambda(\tau)\right)^{-1} \right|_{\tau=\tau_0} > 0$$

Persamaan karakteristik dari sistem dengan waktu tunda adalah

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + b_0 e^{-2\lambda\tau} = 0.$$

Jika λ merupakan fungsi dalam τ , $\lambda = \lambda(\tau)$, $\frac{d\lambda}{d\tau}$ dapat dicari dengan menggunakan turunan implisit dari persamaan karakteristik di atas sebagai berikut.

$$(2\lambda + a_1 - 2\tau b_0 e^{-2\lambda\tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} - 2\lambda b_0 e^{-2\lambda\tau} = 0$$

$$(2\lambda + a_1 - 2\tau b_0 e^{-2\lambda\tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} = 2\lambda b_0 e^{-2\lambda\tau}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{2\lambda b_0 e^{-2\lambda\tau}}{(2\lambda + a_1 - 2\tau b_0 e^{-2\lambda\tau})}$$

$$\frac{d\lambda^{-1}}{d\tau} = \frac{(2\lambda + a_1 - 2\tau b_0 e^{-2\lambda\tau})}{2\lambda b_0 e^{-2\lambda\tau}}$$

$$\frac{d\lambda^{-1}}{d\tau} = \frac{2\lambda + a_1}{2\lambda b_0 e^{-2\lambda\tau}} - \frac{2\tau b_0 e^{-2\lambda\tau}}{2\lambda b_0 e^{-2\lambda\tau}}$$

$$\frac{d\lambda^{-1}}{d\tau} = \frac{(2\lambda + a_1)e^{2\lambda\tau}}{2\lambda b_0} - \frac{\tau}{\lambda}$$

Untuk $\tau = \tau_0$ nilai $\lambda(\tau_0) = i\omega_0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\lambda^{-1}}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} &= \frac{(2i\omega_0 + a_1)(\cos 2\omega_0\tau + i\sin 2\omega_0\tau)}{2i\omega_0 b_0} \frac{\tau}{i\omega_0} \\ &= \frac{2\omega_0 \cos 2\omega_0\tau i - 2\omega_0 \sin 2\omega_0\tau + a_1 \cos 2\omega_0\tau + a_1 i \sin 2\omega_0\tau}{2i\omega_0 b_0} \frac{\tau}{i\omega_0} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left(\left. \frac{d\lambda^{-1}}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} \right) = \frac{2\omega_0 \cos 2\omega_0\tau + a_1 \sin 2\omega_0\tau}{2\omega_0 b_0}$$

$$= \frac{2\omega_0 \frac{(\omega_0^2 - a_0)}{b_0} + a_1 \frac{(a_1 \omega_0)}{b_0}}{2\omega_0 b_0}$$

$$= \frac{2(\omega_0^2 - a_0) + a_1^2}{2b_0^2}$$

$$= \frac{2\omega_0^2 - 2a_0 + a_1^2}{2b_0^2} > 0$$

Persamaan karakteristik (3.10) memenuhi kondisi transversal, sehingga bagian real dari akar karakteristik akan berubah. Karena titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ memiliki nilai tunda kritis τ_0 dan memenuhi kondisi transversal, maka terjadi bifurkasi Hopf di sekitar titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$. Saat nilai tunda kritis $0 \leq \tau < \tau_0$,

titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ stabil asimtotik dengan orbit berbentuk spiral. Saat nilai tunda kritis $\tau = \tau_0$, titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ memiliki sepasang akar imajiner murni yang menyebabkan terjadinya orbit periodik di sekitar titik kesetimbangan tersebut. Saat nilai tunda kritis $\tau > \tau_0$, terbentuk suatu *limit cycle* di sekitar titik kesetimbangan $E_2(x^*, y^*)$ dikarenakan bagian real dari akar persamaan karakteristik bernilai positif. Pembahasan di atas dapat dirangkum dalam Tabel 3.1.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Tabel 3.1 Syarat Eksistensi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik tetap	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
MODEL TANPA TUNDAAN			
$E_0(0,0,)$	-	Tidak stabil pelana	-
$E_1(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0)$	-	Stabil	$\alpha_2 k_1 - k_2 \alpha_1 < 0$
$E_2(x^*, y^*)$	$\alpha_2 k_1 - k_2 \alpha_1 > 0$	Stabil	-
MODEL DENGAN TUNDAAN			
$E_0(0,0)$	-	-	-
$E_1(\frac{k_1}{\alpha_1}, 0)$	-	-	-
$E_2(x^*, y^*)$	$\alpha_2 k_1 - k_2 \alpha_1 > 0$	Stabil untuk $0 \leq \tau < \tau_0$ Tidak stabil untuk $\tau \geq \tau_0$	(i) $a_0^2 - b_0^2 < 0$ (ii) $\tau_0 = \frac{1}{2\omega_0} \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - a_0}{b_0}\right)$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



3.4 Simulasi Numerik dan Kajian Perilaku Solusi

Pada sub bab ini, disimulasikan suatu solusi dari sistem (3.3) tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda. Rangkuman dari hasil analisis model tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda terdapat pada Tabel 3.1. Untuk mensimulasikan hasil analisis model tanpa waktu tunda digunakan metode Runge Kutta orde 4 pada *software* MATLAB R2010a. *Source code* dari program dapat dilihat pada Lampiran 3. Sedangkan untuk *source code* dari program model dengan waktu tunda dapat dilihat pada Lampiran 4.

3.4.1 Simulasi model tanpa waktu tunda

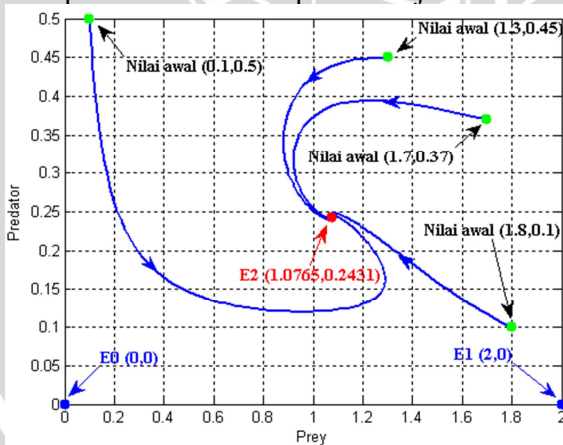
Pada simulasi model tanpa waktu tunda digunakan nilai parameter $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$, $\epsilon = 0.5$, dan $\zeta = 0.5$.

Pada Tabel 3.1 tampak jelas bahwa syarat kestabilan tidak terpenuhi karena

sehingga jelas titik kesetimbangan bersifat tidak stabil pelana.

Syarat eksistensi titik kesetimbangan terpenuhi karena

karena titik kesetimbangan stabil tanpa syarat maka titik kesetimbangan akan selalu bersifat stabil untuk nilai parameter yang diberikan pada simulasi ini seperti ditunjukkan Gambar 3.1.



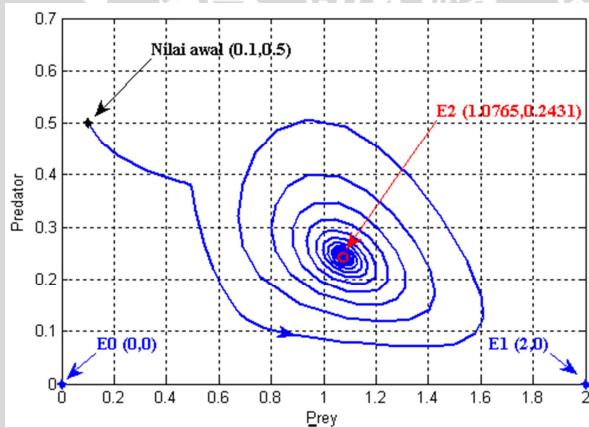
Gambar 3.1 Potret fase model tanpa waktu tunda

Dari Gambar 3.1 terlihat bahwa ketiga titik kesetimbangan eksis. Titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik dari berbagai nilai awal, namun titik kesetimbangan dan tidak stabil pelana. Dapat dilihat dari nilai awal, titik dan awalnya didekati tetapi kemudian dijauhi dan potret fase solusi mendekati titik kesetimbangan yang stabil. Gambar 3.1 menunjukkan bahwa nilai *prey* akan konvergen ke nilai kesetimbangannya, yakni 1.0765. Begitu pula dengan nilai *predator* akan menuju ke nilai stabil, yakni 0.2431. Hal ini berarti bahwa, jika parameter pada simulasi ini terjadi di alam maka dalam jangka panjang populasi *prey* dan populasi *predator* akan terus hidup berdampingan dalam suatu habitat.

3.4.2 Simulasi model dengan waktu tunda

Untuk nilai parameter yang diberikan pada simulasi 3.4.1, syarat kestabilan (i) terpenuhi, yakni

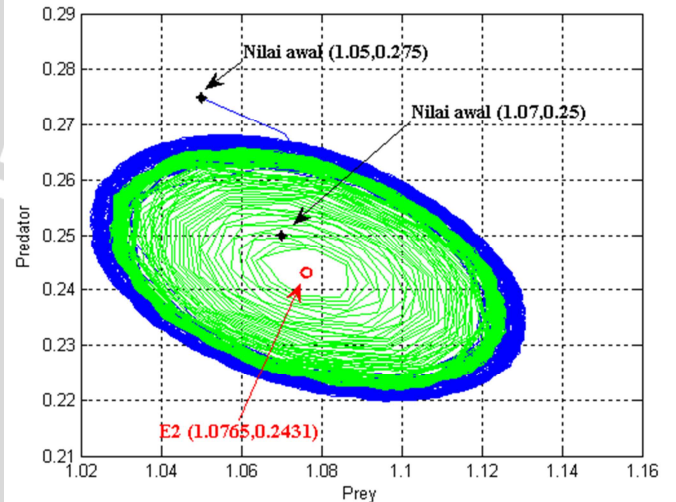
Dari hasil perhitungan diperoleh nilai tundaan kritis atau Hasil simulasi untuk atau diperlihatkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Potret fase model untuk

Dari Gambar 3.2 jelas terlihat bahwa titik bersifat stabil asimtotik karena didekati oleh trayektori di sekitarnya. Selain itu terlihat bahwa sifat kestabilan titik kesetimbangan dan adalah tidak stabil.

Simulasi untuk diambil saat . Potret fase saat ditunjukkan oleh Gambar 3.3. Dari Gambar 3.2 dan Gambar 3.3 tampak terjadi perubahan kestabilan dari akibat nilai yang meningkat dan melebihi nilai tunda kritis atau . Pada saat titik bersifat stabil asimtotik, tetapi saat pada Gambar 3.3 terlihat bahwa orbit solusi untuk nilai awal menuju ke *limit cycle*, sedangkan orbit solusi untuk nilai awal bergerak menjauhi titik dan mendekati *limit cycle*. Dari ilustrasi tersebut jelas terjadi bifurkasi dan jenis bifurkasi yang terjadi adalah bifurkasi *Hopf Supercritical*.



Gambar 3.3 Potret fase model untuk

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini yang telah diuraikan pada Bab I dan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat disimpulkan

1. Model *predator prey* dengan adanya pengaruh alelopati berupa sistem persamaan diferensial nonlinear dengan dua persamaan dan tujuh parameter.
2. Pada model tanpa waktu tunda diperoleh 3 titik kesetimbangan, yakni titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan bebas predator, dan titik kesetimbangan interior. Titik kesetimbangan trivial dan titik kesetimbangan bebas predator selalu eksis, namun titik kesetimbangan interior memerlukan syarat eksistensi. Titik kesetimbangan interior terjamin eksis apabila perbandingan laju kematian predator dan prey dengan laju kelahiran alami prey kurang dari laju interaksi antar predator prey.
3. Titik kesetimbangan trivial tidak pernah stabil, artinya populasi predator maupun populasi prey tidak akan pernah punah, sedangkan titik kesetimbangan bebas predator bersifat stabil asimtotik bila titik kesetimbangan interior tidak eksis. Pada model tanpa waktu tunda, kestabilan titik kesetimbangan interior terjamin tanpa syarat. Pada model dengan waktu tunda, titik kesetimbangan interior bersifat stabil asimtotik untuk semua $0 \leq \tau < \tau_0$ jika syarat kestabilan terpenuhi.
4. Simulasi numerik yang dilakukan baik untuk model tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis dan jenis bifurkasi yang dihasilkan adalah bifurkasi Hopf *supercritical*.

4.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya hal yang dapat dikembangkan dari skripsi ini adalah dapat meneliti lebih lanjut mengenai jenis bifurkasi yang terjadi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima, 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Ninth Edition*. John Willey & Sons, Inc. USA.
- Brauer, F. dan J. A. Nohel, 1967. *Ordinary Differential Equations A First Course*. W. A. Benjamin, Inc. New York.
- Edwards, C. H. dan D. E Penney, 2001. *Differential Equations & Linier Algebra*. Prentice Hall International, Inc. New Jersey.
- Finizio, N. dan G. Ladas, 1982. *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmont, California.
- Forde, J. E., 2005. *Delay Differential Models in Mathematical Biology*. Disertasi University of Michigan.
- Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Inc. London.
- Kuznetsov, Y. A., 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory, Second Edition*. Springer Verlag. New York.
- Murray, J. D., 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction Third Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider., 2012. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems Sixth Edition*. Pearson Education, Inc. USA.
- Robinson, R. C., 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continous and Discrete*. Pearson Education, Inc. USA.

Wang, X. dan L. Haihong., 2012. Hopf Bifurcation in a Predator-Prey System of Population Allelopathy with Discrete Delay. *Applied Mathematics*. 3:652-661.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Penurunan Linearisasi Model dengan Waktu Tunda

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(t)[k_1 - \alpha_1 x(t) - \beta_{12} y(t - \tau) - \gamma_1 x(t)y(t - \tau)] = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)[-k_2 + \alpha_2 x(t - \tau) - \beta_{21} y(t)] = g(x, y),\end{aligned}\quad (3.3)$$

Sistem (3.3) dilinearisasi dengan menggunakan transformasi

$$\begin{aligned}x(t) &= x^* + x_1(t) & x(t - \tau) &= x^* + x_1(t - \tau) \\ y(t) &= y^* + x_2(t) & y(t - \tau) &= y^* + x_2(t - \tau)\end{aligned}$$

Sehingga sistem (3.3) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{d(x^* + x_1(t))}{dt} &= (x^* + x_1(t))[k_1 - \alpha_1(x^* + x_1(t)) \\ &\quad - \beta_{12}(y^* + x_2(t - \tau)) \\ &\quad - \gamma_1(x^* + x_1(t))(y^* + x_2(t - \tau))], \\ \frac{d(y^* + x_2(t))}{dt} &= (y^* + x_2(t))[-k_2 - \alpha_2(x^* + x_1(t - \tau)) \\ &\quad - \beta_{21}(y^* + x_2(t))].\end{aligned}$$

Karena $\frac{dx^*}{dt} = \frac{dy^*}{dt} = 0$, $x^* \neq 0$, dan $y^* \neq 0$ maka

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= [-\alpha_1 x^* - \gamma_1 x^* y^*]x_1(t) + [-\beta_{12} x^* - \gamma_1 (x^*)^2]x_2(t - \tau) \\ &\quad + [-\alpha_1 - \gamma_1 y^*]x_1^2(t) + [-\beta_{12} - 2\gamma_1 x^*]x_1(t)x_2(t - \tau) \\ &\quad + [-\gamma_1]x_1^2(t)x_2(t - \tau) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= [\alpha_2 y^*]x_1(t - \tau) + [-\beta_{21} y^*]x_2(t) + [-\beta_{21}]x_2^2(t) \\ &\quad + [\alpha_2]x_1(t - \tau)x_2(t).\end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa nilai dari x_1 dan x_2 adalah nilai yang kecil, maka perkalian dari dua variabel $x_1 x_2$ dan perkalian x_1^2 dan x_2^2 diabaikan, sehingga diperoleh

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = [-\alpha_1 x^* - \gamma_1 x^* y^*]x_1(t) + [-\beta_{12} x^* - \gamma_1 (x^*)^2]x_2(t - \tau)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\beta_{21} y^* x_2(t) + \alpha_2 y^* x_1(t - \tau),$$

atau dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t) + CU(t - \tau),$$

dimana

$$U(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

dengan

$$a_{11} = -\alpha_1 x^* - \gamma_1 x^* y^*$$

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

$$a_{22} = -\beta_{21} y^*$$

$$c_{11} = c_{22} = 0$$

$$c_{12} = -\beta_{12} x^* - \gamma_1 (x^*)^2$$

$$c_{21} = \alpha_2 y^*.$$



Lampiran 2. Perhitungan Persamaan Karakteristik Sistem

$$\frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12}e^{-\lambda\tau} \\ b_{21}e^{-\lambda\tau} & a_{22} \end{bmatrix} U(t) = LU(t)$$

Persamaan karakteristik sebagai berikut

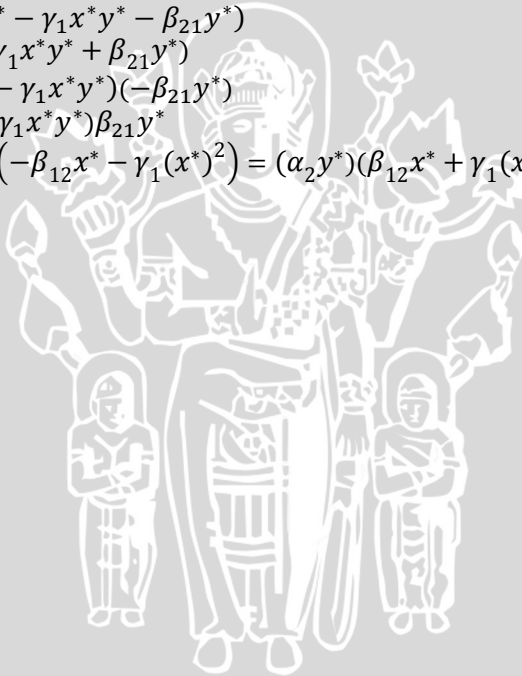
$$\begin{aligned} |L - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & b_{12}e^{-\lambda\tau} \\ b_{21}e^{-\lambda\tau} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\alpha_1 x^* - \gamma_1 x^* y^* & \alpha_2 y^* e^{-\lambda\tau} \\ -\beta_{21} y^* e^{-\lambda\tau} & -\beta_{12} x^* - \gamma_1 x^{*2} \end{vmatrix} = 0 \\ |L - \lambda I| &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - (b_{21}e^{-\lambda\tau})(b_{12}e^{-\lambda\tau}) = 0 \\ a_{11}a_{22} - (a_{11} + a_{22})\lambda + \lambda^2 - b_{21}b_{12}e^{-2\lambda\tau} &= 0 \\ \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + b_0e^{-2\lambda\tau} &= 0 \end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned} a_1 &= -(-\alpha_1 x^* - \gamma_1 x^* y^* - \beta_{21} y^*) \\ &= (\alpha_1 x^* + \gamma_1 x^* y^* + \beta_{21} y^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= (-\alpha_1 x^* - \gamma_1 x^* y^*)(-\beta_{21} y^*) \\ &= (\alpha_1 x^* + \gamma_1 x^* y^*)\beta_{21} y^* \end{aligned}$$

$$b_0 = -(\alpha_2 y^*)(-\beta_{12} x^* - \gamma_1 (x^*)^2) = (\alpha_2 y^*)(\beta_{12} x^* + \gamma_1 (x^*)^2)$$



Lampiran 3. Program Matlab Model Tanpa Waktu Tunda

```
%memasukkan nilai parameter dan persamaan
function dy=alelopati(t,y)
alpha1=2.5;
alpha2=1.2;
beta12=1;
beta21=1.2;
gamma1=2.6;
k1=2;
k2=1;
dy(1)=k1*y(1)-alpha1*(y(1)^2)-beta12*y(1)*y(2)-
gamma1*(y(1)^2)*y(2);
dy(2)=-k2*y(2)+alpha2*y(1)*y(2)-beta21*(y(2)^2);

%Perhitungan solusi sistem persamaan dengan Runge
Kutta Orde 4
function [T,Z]=rks4(alelopati,a,b,za,M)
h=(b-a)/M;
Z=zeros(M+1,length(za));
T=a:h:b;
Z(1,:)=za;
for j=1:M
    k1=h*feval(alelopati,T(j),Z(j,:));
    k2=h*feval(alelopati,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
    k3=h*feval(alelopati,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
    k4=h*feval(alelopati,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
    Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end;

%Program Utama
[t y]=rks4('alelopati',0,150,[0.9,0.2],1000);
alpha1=2.5;
alpha2=1.2;
beta12=1;
beta21=1.2;
gamma1=2.6;
k1=2;
k2=1;

figure(1);
plot(t,y,'Linewidth',2);
hold on;
xlabel('Waktu (t)');
```



```

ylabel('Jumlah Populasi');
grid on
axis square
legend('Prey', 'Predator');

figure(2);
plot(y(:,1),y(:,2), 'LineWidth', 2);
hold on
plot(y(1,1),y(1,2), 'g*', 'LineWidth', 5);
I1=beta21*alpha1+alpha2*beta12-gamma1*k2;
I2=beta21*alpha1+k2*gamma1+alpha2*beta12;
I3=sqrt((I2^2)+4*beta21*gamma1*(alpha2*k1-
k2*alpha1));
plot(0,0, 'b*', 'LineWidth', 5);
plot(k1/alpha1,0, 'r*', 'LineWidth', 5);
plot((-I1+I3)/(2*alpha2*gamma1), (I2-I3)/(-
2*beta21*gamma1), 'b*', 'LineWidth', 5);
hold off
hold on
xlabel('Prey');
ylabel('Predator');
grid on
axis([0 0.9 0 0.5])

```

Lampiran 4. Program Matlab Model dengan Waktu Tunda

```
function dydt=fungsitunda(t,y,Z)
ylag1=Z(:,1);
dydt=zeros(2,1);
alpha1=1;
alpha2=1.2;
beta12=1;
beta21=1.2;
gamma1=2.6;
k1=2;
k2=1;
dydt(1)=k1*y(1)-alpha1*(y(1)^2)-
beta12*y(1)*ylag1(2)-gamma1*(y(1)^2)*ylag1(2);
dydt(2)=-k2*y(2)+alpha2*ylag1(1)*y(2)-
beta21*(y(2)^2);
```

end

```
function ttk=alelopatitunda(t)
alpha1=1;
alpha2=1.2;
beta12=1;
beta21=1.2;
gamma1=2.6;
k1=2;
k2=1;
I1=beta21*alpha1+alpha2*beta12-gamma1*k2;
I2=beta21*alpha1+k2*gamma1+alpha2*beta12;
I3=sqrt((I2^2)+4*beta21*gamma1*(alpha2*k1-
k2*alpha1));
ttk(1)=(-I1+I3)/(2*alpha2*gamma1);
ttk(2)=(I2-I3)/(-2*beta21*gamma1);
```

end

```
clc;
clear;
alpha1=1;
alpha2=1.2;
beta12=1;
beta21=1.2;
gamma1=2;
k1=2;
k2=1;
I1=beta21*alpha1+alpha2*beta12-gamma1*k2
```

```

I2=beta21*alpha1+k2*gamma1+alpha2*beta12
I3=(I2^2)+4*beta21*gamma1*(alpha2*k1-k2*alpha1)
u=(-I1+sqrt(I3))/(2*alpha2*gamma1);
v=(I2-sqrt(I3))/(-2*beta21*gamma1);

```

```

figure(1);
%options=ddeaset('RelTol',1e-3,'AbsTol',1e-
6,'InitialY',[1.06,0.25]);
options=ddeaset('RelTol',1e-3,'AbsTol',1e-
6,'InitialY',[1.1,0.27]);
sol=dde23(@fungsitunda,1.43,@alelopatitunda,[0,2500
],options);
plot(sol.y(1,:),sol.y(2,),'g','LineWidth',1);
hold on
xlabel('Prey');
ylabel('Predator');
grid on;
hold on;
plot(u,v,'ro','LineWidth',2);% Plot titik E^*
%plot(1.06,0.25,'k*','LineWidth',2);
plot(1.1,0.27,'k*','LineWidth',2);
plot(0,0,'b*','LineWidth',2);
plot(k1/alpha1,0,'b*','LineWidth',2);
%axis([0 2 0 0.6])

```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

