

**MODEL MATEMATIKA ENDEMI FLU BABI
DENGAN KARANTINA**

SKRIPSI

oleh
DONNY HANGGORO HANGGOWO MUKTI
0810940033



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**MODEL MATEMATIKA ENDEMI FLU BABI
DENGAN KARANTINA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh

DONNY HANGGORO HANGGOWO MUKTI

0810940033



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**MODEL MATEMATIKA ENDEMI FLU BABI
DENGAN KARANTINA**

oleh

DONNY HANGGORO HANGGOWO MUKTI
0810940033-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal
17 Januari 2013 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk
memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Telah diperiksa dan disahkan oleh:

Pembimbing I

Pembimbing II

Dr. Wuryansari M.K., M.Si.
NIP. 196607281993032001

Dra. Endang Wahyu H., M.Si.
NIP. 196611121991032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Donny Hanggoro Hanggowo Mukti
NIM : 0810940033
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Model Matematika Endemi Flu
Babi dengan Karantina

dengan ini menyatakan bahwa:

1. skripsi ini adalah benar-benar karya sendiri, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.
2. Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 17 Januari 2013
yang menyatakan,

Donny Hanggoro H. M.
NIM 0810940033

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



MODEL MATEMATIKA ENDEMI FLU BABI DENGAN KARANTINA

ABSTRAK

Flu babi (*swine influenza*) adalah penyakit pernafasan yang disebabkan oleh virus flu tipe A. Penyakit ini ditularkan melalui batuk atau bersin. Gejala paling umum penyakit flu babi antara lain demam, batuk, sakit tenggorokan, sakit kepala, muntah dan diare. Dalam tulisan ini dibahas konstruksi model endemi flu babi dengan probabilitas penularan pada populasi pasien dengan gejala (*symptomatic*) dan pasien tanpa gejala (*asymptomatic*) yang berbeda. Ditambahkan pula variabel karantina untuk menentukan pengaruh karantina terhadap tingkat penyebaran flu babi. Kestabilan titik kesetimbangan model dianalisa menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Hasil analisa tersebut kemudian dikaji untuk mengetahui pengaruh karantina. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

Kata kunci: model endemi flu babi, karantina, titik kesetimbangan, kriteria Routh-Hurwitz.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

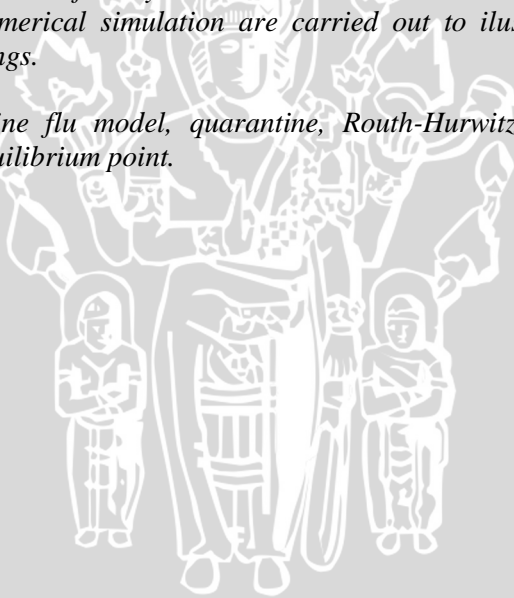


MATHEMATICAL MODEL OF SWINE FLU WITH QUARANTINE

ABSTRACT

Swine flu is a respiratory disease caused by type A influenza virus. This disease is transmitted through coughing or sneezing. The most common symptom of swine flu are fever, cough, sore throat, headache, vomiting, and diarrhea. This paper discuss the construction of swine flu model with different probability transmission of symptomatic population and asymptomatic population. The quarantine variable is also added to determine the effect of quarantine to encounter the spread of swine flu. The stability of equilibrium points is analyzed by using Routh-Hurwitz criteria. The results of analysis is studied to determine the effect of quarantine. Numerical simulation are carried out to illustrate the analytical findings.

Keywords: *swine flu model, quarantine, Routh-Hurwitz criteria, equilibrium point.*



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan dan petunjuk-Nya sehingga skripsi dengan judul “**Model Matematika Endemi Flu Babi dengan Karantina**” dapat diselesaikan dengan baik.

Banyak pihak yang telah memberikan dukungan baik moral maupun spiritual secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian skripsi ini. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku pembimbing I dan Dra. Endang Wahyu H., M.Si selaku pembimbing II, atas segala bimbingan dan motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Dr. Ratno Bagus E. W., M.Si selaku dosen penguji, atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, MT selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan sarana dan fasilitas,
4. seluruh bapak / ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. Bapak, Ibu, Fian, Fina yang selalu mengiringi penulis dengan segala doa, nasehat, perhatian, motivasi, dan dukungan hingga terselesaikannya skripsi ini,
6. sahabat - sahabatku, Rizal, Muhid, teman - teman seperjuangan matematika atas dukungan, bantuan dan doanya,
7. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis dengan senang hati menerima masukan, saran dan kritik yang membangun. Akhir kata, semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis khususnya serta semua pihak pada umumnya.

Malang, 17 Januari 2013

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	I
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	Iii
LEMBAR PERNYATAAN	V
ABSTRAK	Vii
ABSTRACT	Ix
KATA PENGANTAR	Xi
DAFTAR ISI	Xiii
DAFTAR GAMBAR	Xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Sistem Otonomus.....	3
2.2 Linearisasi Sistem Otonomus Nonlinear.....	5
2.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz.....	7
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	9
3.1 Formulasi Model.....	9
3.1.1 Laju Perubahan Populasi Rentan (<i>Susceptible</i>)	10
3.1.2 Laju Perubahan Populasi Terdeteksi (<i>Exposed</i>).....	11
3.1.3 Laju Perubahan Populasi Terinfeksi (<i>Infectives</i>).....	12
3.1.4 Laju Perubahan Populasi Terkarantina (<i>Quarantine</i>)..	12
3.1.5 Laju Perubahan Populasi Sembuh (<i>Recovered</i>).....	13
3.2 Titik Kesetimbangan Model.....	16
3.2.1 Model Endemi dengan Karantina.....	16
3.2.2 Model Endemi tanpa Karantina.....	17
3.3 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan.....	18
3.3.1 Model Endemi dengan Karantina.....	18
3.3.1.1 Titik Kesetimbangan $G_1 = (1,0,0,0,0)$	19

3.3.1.2	Titik Kesetimbangan $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$	20
3.3.2	Model Endemi tanpa Karantina.....	21
3.3.2.1	Titik Kesetimbangan $H_1 = (1,0,0,0)$	21
3.3.2.2	Titik Kesetimbangan $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$	22
3.4	Simulasi Numerik dan Interpretasi Model.....	23
3.4.1	Simulasi Numerik Model Endemi dengan Karantina..	23
3.4.1.1	Simulasi Numerik untuk $K_0 < 1$	23
3.4.1.2	Simulasi Numerik untuk $K_0 > 1$	24
3.4.2	Simulasi Numerik Model Endemi tanpa Karantina.....	25
3.4.2.1	Simulasi Numerik untuk $L_0 < 1$	25
3.4.2.2	Simulasi Numerik untuk $L_0 > 1$	26
3.4.3	Simulasi Numerik Pengaruh Karantina.....	27
BAB IV KESIMPULAN		31
DAFTAR PUSTAKA		33
LAMPIRAN		35



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Model kompartemen SEIQR.....	9
Gambar 3.2 Grafik solusi $K_0 < 1$	24
Gambar 3.3 Grafik solusi $K_0 > 1$	25
Gambar 3.4 Grafik solusi $L_0 < 1$	26
Gambar 3.5 Grafik solusi $L_0 > 1$	27
Gambar 3.6 Perilaku kelas <i>recovered</i>	28



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan model endemi dengan karantina sistem persamaan (3.8).....	23
Tabel 3.2 Syarat eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan model endemi tanpa karantina sistem persamaan (3.9).....	23



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Penurunan Model.....	35
Lampiran 2. Perhitungan Titik Keseimbangan Model Endemi dengan Karantina.....	39
Lampiran 3. Perhitungan Titik Keseimbangan Model Endemi tanpa Karantina.....	43
Lampiran 4. Perhitungan Analisa Kestabilan Titik G_2	47
Lampiran 5. Perhitungan Analisa Kestabilan Titik H_2	51
Lampiran 6. <i>Listing</i> Program Model Endemi dengan Karantina.....	55
Lampiran 7. <i>Listing</i> Program Model Endemi tanpa Karantina..	57



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini, berbagai macam penyakit mengalami perkembangan yang cukup memprihatinkan dan muncul begitu cepat seiring dengan perkembangan jaman yang semakin modern. Salah satu penyakit yang menjadi wabah yang tersebar di seluruh dunia, termasuk Indonesia, adalah wabah penyakit flu babi.

Flu babi pertama kali terdeteksi di sebuah pertanian di Meksiko pada tahun 2009. Di Indonesia, flu babi sudah terdeteksi hampir 25 propinsi dengan jumlah korban terinfeksi mencapai 1.127 orang. Mudahnya penyebaran flu babi dikarenakan kurangnya informasi warga mengenai penyakit flu babi yang pada saat itu masih merupakan penyakit baru (Aditama, 2010).

Flu babi adalah infeksi yang disebabkan oleh salah satu atau beberapa jenis *Swine Influenza Virus* (SIV) yang pada awalnya terjangkit pada babi. Flu babi adalah penyakit yang cukup berbahaya karena virus ini tergolong virus baru.

Pada umumnya, penularan virus flu babi dari babi ke manusia terjadi pada manusia yang melakukan kontak langsung dengan babi. Faktor resiko yang mungkin berkontribusi langsung pada transmisi virus flu babi dari babi ke manusia, seperti tidak mengenakan masker dan tidak mengenakan sarung tangan saat bekerja dengan hewan sakit, menjadi penyebab mudahnya penyebaran endemi flu babi. Saat ini, virus flu babi tampaknya dapat menyebar antar manusia melalui batuk dan bersin dari penderita. Virus menyebar ketika percikan ludah (*droplet*) dari batuk atau bersin ditransmisikan melalui udara dan tersimpan pada mulut atau hidung orang yang berjarak kurang lebih satu meter. Setelah terinfeksi, biasanya dibutuhkan waktu satu sampai empat hari sebelum seseorang menjadi sakit. Gejala-gejala flu babi mirip dengan penyakit seperti influenza pada umumnya, yaitu demam, batuk, sakit tenggorokan, nyeri otot, sakit kepala, pilek, menggigil, dan kelelahan. Beberapa orang yang terinfeksi juga dilaporkan muntah dan diare (Pongsumpun dan Tang, 2011).

Sejak tahun 2009 telah dikaji model-model matematika mengenai endemi flu babi. Pada tahun 2009 Victor Rusu dan Shlomo Ta'asan memodelkan endemi flu babi dengan memperhatikan

populasi yang terdeteksi (*exposed population*) (Victor dan Ta'asan, 2009). Pada tahun 2010, Pongsumpun, memodelkan endemi tersebut dengan membagi populasi menjadi dua subpopulasi, yaitu populasi dengan resiko (*risk*) dan tanpa resiko (*non-risk*) terinfeksi (Pongsumpun, P. 2010).

Berbeda dari kajian yang dilakukan sebelumnya, pada skripsi ini dilakukan analisis terhadap model endemi flu babi dengan memperhitungkan aspek populasi terinfeksi dengan gejala dan tanpa gejala infeksi, serta pengaruh karantina terhadap populasi terinfeksi. Dengan menggunakan analisis sistem otonomus, ditentukan titik kesetimbangan dan perilaku kestabilan di setiap titik kesetimbangan. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik untuk mengetahui perilaku solusi model.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika endemi flu babi dengan karantina?
2. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana hasil simulasi dan interpretasi model?

1.3 Batasan Masalah

Skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Populasi bersifat tertutup.
2. Kematian akibat flu babi tidak diperhatikan dalam model.
3. Probabilitas transmisi flu babi terhadap manusia yang kemudian menjadi populasi dengan gejala infeksi berbeda dari yang tanpa gejala infeksi.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah

1. memperoleh model endemi flu babi dengan karantina,
2. memperoleh kestabilan titik kesetimbangan model,
3. memperlihatkan hasil simulasi dan interpretasi model.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Otonomus

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Boyce dan DiPrima, 2000).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (Boyce dan DiPrima, 2000).

Definisi 2.1.3 (Orde Persamaan Diferensial)

Orde persamaan diferensial adalah tingkat turunan tertinggi dalam suatu persamaan diferensial (Boyce dan DiPrima, 2000).

Definisi 2.1.4 (Persamaan Diferensial Biasa Linear)

Suatu persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y disebut linear dengan orde n , jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

dengan $a_0 \neq 0$ (Boyce dan DiPrima, 2000).

Definisi 2.1.5 (Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Boyce dan DiPrima, 2000).

Definisi 2.1.6 (Sistem Persamaan Diferensial)

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui di mana $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear berdimensi n adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bentuk (2.1) dapat ditulis secara singkat sebagai,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

atau dalam bentuk matriks sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t),$$

dengan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, dan $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Disini A disebut matriks koefisien (Boyce dan DiPrima, 2000).

Definisi 2.1.7 (Sistem Otonomus)

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan fungsi f_i tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu $t, \forall i = 1, \dots, n$ disebut sistem persamaan diferensial yang bersifat otonomus (Boyce dan DiPrima, 2000).

Definisi 2.1.8 (Titik Keseimbangan)

Pandang sistem otonomus (2.2). Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ yang memenuhi

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0, \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0
 \end{aligned}$$

disebut titik kritis sistem otonomus (2.2). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.2) yang bernilai konstan, sebab $\frac{dx_i}{dt} = 0, i = 1, \dots, n$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx_i}{dt} = 0, i = 1, \dots, n$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan.

Bentuk umum sistem otonomus linear adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan a_{ij} adalah konstanta riil, untuk $i, j = 1, \dots, n$. Persamaan (2.3) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

dimana $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan $A = [a_{ij}]$.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks A dari sistem otonomus linear (2.3) dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan sistem (2.3) bersifat.

1. Stabil asimtotik jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ memiliki bagian riil negatif.
2. Stabil jika semua $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ memiliki bagian riil tak positif.
3. Tidak stabil jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif (Boyce dan DiPrima, 2000).

2.2 Linearisasi Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Jika fungsi $F_i, i = 1, \dots, n$ mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik \vec{x}^* , maka deret Taylor fungsi F_i di sekitar titik tetap \vec{x}^* adalah

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = F_i(\vec{x}^*) + \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \eta_i(x_1, \dots, x_n), \quad (2.5)$$

dengan $\eta_i(x_1, \dots, x_n)$ adalah suku sisa untuk $i = 1, \dots, n$.

Karena $\frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i - x_i^*)}{dt}$, maka persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + J(\vec{x}^*) \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

$$\text{Matriks } J(\vec{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix (derivative matrix)*.

Misalkan $\hat{x}_i = x_i - x_i^*$, $i = 1, \dots, n$ dan $\vec{w} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$. Mengingat $F_i(\vec{x}^*) = 0$, maka persamaan (2,6) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{x}_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J(\vec{x}^*)\vec{w} + \vec{\eta}.$$

Jika (\vec{x}) yang berada cukup dekat dengan (\vec{x}^*) , maka $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ bernilai kecil, sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem otonomus nonlinear (2.4) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}$$

(Robinson, 2004).

Hubungan antara sifat kestabilan sistem otonomus nonlinear dan sifat kestabilan sistem yang dilinearkan sebagai berikut.

1. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.4) bersifat **stabil asimtotik lokal** jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan stabil asimtotik.
2. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.4) bersifat **tak stabil** jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan tidak stabil (Robinson, 2004).

2.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika matriks koefisien suatu sistem otonomus linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.7)$$

maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* tanpa harus menentukan nilai eigennya.

Routh-Hurwitz menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.7) untuk membangun n matriks *Routh-Hurwitz* H_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ yaitu

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots, H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Titik kesetimbangan sistem bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks *Routh-Hurwitz* positif, yakni

$$\det(H_i) > 0 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

(Murray, 2002).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

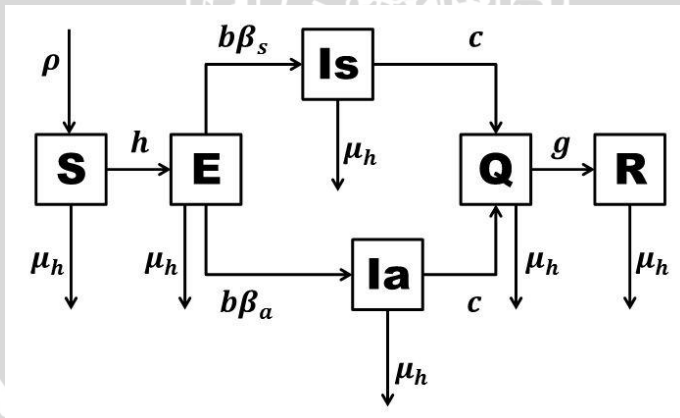


BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model

Model endemi penyakit yang dibahas dalam skripsi ini adalah model endemi SEIQR dimana populasi terinfeksi terbagi menjadi dua, yaitu *symptomatic* dan *asymptomatic Infectives*. Dengan demikian populasi terbagi menjadi enam subpopulasi, yaitu *susceptible*, *exposed*, *symptomatic infectives*, *asymptomatic infectives*, *quarantine*, dan *recovered*.

Kelas *susceptible* merupakan kelompok individu yang rentan terhadap penyakit, dan kelas *exposed* merupakan kelompok individu yang terdeteksi menderita penyakit. Sedangkan kelas *symptomatic infectives* merupakan kelompok individu yang terinfeksi dengan gejala dan dapat menularkan penyakit ke individu lain, dan kelas *asymptomatic infectives* merupakan kelompok individu yang terinfeksi tanpa gejala dan dapat menularkan penyakit ke individu lain. Kelas *quarantine* merupakan kelompok individu yang dikarantina agar tidak dapat menularkan penyakit ke individu lain, serta kelas *recovered* merupakan kelompok individu yang sembuh dari suatu penyakit. Alur penyebaran endemi flu babi tersebut digambarkan sebagai model kompartemen seperti diperlihatkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Model kompartemen SEIQR

dengan

S : populasi rentan (*Susceptible*)

E : populasi terdeteksi (*Exposed*)

I_s : populasi dengan gejala infeksi (*Symptomatic Infectives*)

I_a : populasi dengan tanpa gejala infeksi (*Asymptomatic Infectives*)

Q : populasi yang dikarantina (*Quarantine*)

R : populasi sembuh (*Recovered*)

ρ : laju kelahiran populasi manusia

μ_h : laju kematian populasi manusia

h : laju transmisi flu babi

β_s : probabilitas transmisi flu babi ke manusia yang membuat manusia menjadi individu terinfeksi dengan gejala

β_a : probabilitas transmisi flu babi ke manusia yang membuat manusia menjadi individu terinfeksi tanpa gejala

$b = \frac{1}{IP}$: IP atau *Incubation Period* adalah masa inkubasi flu babi di dalam tubuh manusia

c : laju penambahan populasi yang dikarantina

g : laju kesembuhan pasien.

3.1.1 Laju Perubahan Populasi Rentan (*Susceptible*)

Laju perubahan subpopulasi rentan terhadap waktu dipengaruhi oleh parameter ρ , h , dan μ_h . Dalam subpopulasi rentan, ρN menyatakan banyaknya kelahiran alami dan seluruh individu yang baru lahir mempunyai kemungkinan terinfeksi. Akibatnya, seluruh individu yang baru lahir masuk ke subpopulasi rentan. Laju perubahan subpopulasi rentan yang berbanding lurus dengan laju kelahiran alami pada waktu t adalah

$$\frac{dS}{dt} = \rho N.$$

Subpopulasi rentan dapat berkurang oleh kematian alami yaitu kematian yang terjadi bukan karena infeksi flu babi dengan laju sebesar

$$\frac{dS}{dt} = -\mu_h S.$$

Penyebaran infeksi flu babi dalam populasi manusia terjadi

melalui kontak langsung antara subpopulasi rentan dengan subpopulasi yang terinfeksi. Kondisi ini mengakibatkan berkurangnya subpopulasi rentan dengan laju h . Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi rentan berbanding lurus dengan proporsi manusia yang terinfeksi dan yang rentan, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{hS(I_S + I_a)}{N}.$$

Dengan demikian laju perubahan subpopulasi rentan terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \rho N - \frac{hS(I_S + I_a)}{N} - \mu_h S. \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju Perubahan Populasi Terdeteksi (*Exposed*)

Laju perubahan subpopulasi terdeteksi terhadap waktu dipengaruhi oleh parameter h, β_s, β_a, b , dan μ_h . Jumlah subpopulasi terdeteksi dapat bertambah jika terdapat subpopulasi rentan yang terinfeksi penyakit. Bertambahnya subpopulasi tersebut dikarenakan kontak langsung dengan subpopulasi terinfeksi. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi terdeteksi berbanding lurus dengan subpopulasi rentan dan yang terinfeksi penyakit, yaitu

$$\frac{dE}{dt} = \frac{hS(I_S + I_a)}{N}.$$

Berkurangnya subpopulasi terdeteksi pada saat masa inkubasi, membuat subpopulasi terdeteksi menjadi subpopulasi terinfeksi yang dipengaruhi oleh parameter $b = \frac{1}{IP}$, dimana IP adalah masa inkubasi flu babi di manusia. Subpopulasi terinfeksi terbagi menjadi 2 subpopulasi yang masing – masing dipengaruhi oleh probabilitas transmisi yang berbeda, yaitu *asymptomatic infectives* dengan peluang β_a , dan *symptomatic infectives* dengan peluang β_s . Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi terdeteksi berbanding lurus dengan individu yang terinfeksi penyakit, yaitu

$$\frac{dE}{dt} = -(\beta_s + \beta_a)bE.$$

Jumlah subpopulasi terdeteksi dapat berkurang karena kematian alami dengan laju konstan μ_h , yaitu

$$\frac{dE}{dt} = -\mu_h E.$$

Dengan demikian laju perubahan subpopulasi terdeteksi terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dE}{dt} = \frac{hS(I_s+I_a)}{N} - (\beta_s + \beta_a)bE - \mu_h E. \quad (3.2)$$

3.1.3 Laju Perubahan Populasi Terinfeksi (*Infectives*)

Laju perubahan subpopulasi terinfeksi terhadap waktu dipengaruhi oleh parameter c, β_s, β_a, b , dan μ_h . Subpopulasi terinfeksi terbagi menjadi *symptomatic infectives* dan *asymptomatic infectives*. *Symptomatic infectives* adalah subpopulasi terinfeksi dengan gejala. Bertambahnya subpopulasi ini dipengaruhi akibat perubahan subpopulasi terdeteksi menjadi subpopulasi *symptomatic infectives* dengan probabilitas β_s dan dipengaruhi oleh parameter b . *Asymptomatic infectives* adalah subpopulasi terinfeksi tanpa gejala, dengan probabilitas β_a dan dipengaruhi juga oleh parameter b . Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasinya masing – masing, yaitu

$$\frac{dI_s}{dt} = \beta_s bE \text{ dan } \frac{dI_a}{dt} = \beta_a bE.$$

Jumlah subpopulasi *symptomatic* dan *asymptomatic infectives* dapat berkurang karena kematian alami dengan laju konstan μ_h . Berkurangnya populasi tersebut juga dikarenakan pemindahan subpopulasi terinfeksi ke subpopulasi terkarantina dengan laju konstan c , yaitu

$$\frac{dI_s}{dt} = -\mu_h I_s - cI_s \text{ dan } \frac{dI_a}{dt} = -\mu_h I_a - cI_a.$$

Dengan demikian laju perubahan subpopulasi *symptomatic* dan *asymptomatic infectives* terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_s}{dt} = \beta_s bE - \mu_h I_s - cI_s \quad (3.3)$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \beta_a bE - \mu_h I_a - cI_a. \quad (3.4)$$

3.1.4 Laju Perubahan Populasi Terkarantina (*Quarantine*)

Laju perubahan subpopulasi terkarantina terhadap waktu dipengaruhi oleh parameter c, g , dan μ_h . Perpindahan subpopulasi

terinfeksi ke subpopulasi terkarantina menyebabkan bertambahnya subpopulasi terkarantina dengan laju c , yaitu dari subpopulasi *asymptomatic* dan *symptomatic infectives*. Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi terkarantina berbanding lurus dengan jumlah subpopulasi terinfeksi pada waktu t , yaitu

$$\frac{dQ}{dt} = c(I_s + I_a).$$

Jumlah subpopulasi terkarantina dapat berkurang karena kematian alami dengan laju konstan μ_h , dan juga akibat kesembuhan dengan laju konstan g , yaitu

$$\frac{dQ}{dt} = -(\mu_h + g)Q.$$

Dengan demikian laju perubahan subpopulasi terkarantina terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dQ}{dt} = c(I_s + I_a) - (\mu_h + g)Q. \quad (3.5)$$

3.1.5 Laju Perubahan Populasi Sembuh (*Recovered*)

Laju perubahan subpopulasi sembuh terhadap waktu dipengaruhi oleh parameter g , dan μ_h . Perubahan subpopulasi yang terkarantina menjadi subpopulasi sembuh, menyebabkan bertambahnya subpopulasi sembuh dengan laju g . Oleh karena itu, laju perubahan subpopulasi sembuh berbanding lurus dengan jumlah subpopulasi terkarantina pada waktu t , yaitu

$$\frac{dR}{dt} = gQ.$$

Jumlah subpopulasi sembuh dapat berkurang karena kematian alami dengan laju konstan μ_h , yaitu

$$\frac{dR}{dt} = -\mu_h R.$$

Dengan demikian laju perubahan subpopulasi sembuh terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dR}{dt} = gQ - \mu_h R. \quad (3.6)$$

Persamaan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), dan (3.6) menghasilkan model endemi flu babi dengan karantina, yaitu

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \rho N - \frac{hS(I_s + I_a)}{N} - \mu_h S \\
 \frac{dE}{dt} &= \frac{hS(I_s + I_a)}{N} - (\beta_s + \beta_a)bE - \mu_h E \\
 \frac{dI_s}{dt} &= \beta_s bE - \mu_h I_s - cI_s \\
 \frac{dI_a}{dt} &= \beta_a bE - \mu_h I_a - cI_a \\
 \frac{dQ}{dt} &= c(I_s + I_a) - (\mu_h + g)Q \\
 \frac{dR}{dt} &= gQ - \mu_h R
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

dengan $N = S + E + I_s + I_a + Q + R$.

Jika diasumsikan laju kelahiran sama dengan laju kematian, yaitu $\rho = \mu_h$ dan dilakukan permisalan $Ns = S$, $Ne = E$, $Ni_s = I_s$, $Ni_a = I_a$, $Nq = Q$, $Nr = R$, maka sistem (3.7) dapat ditulis ulang sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s \\
 \frac{de}{dt} &= hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e \\
 \frac{di_s}{dt} &= \beta_s be - \mu_h i_s - ci_s \\
 \frac{di_a}{dt} &= \beta_a be - \mu_h i_a - ci_a \\
 \frac{dq}{dt} &= c(i_s + i_a) - (\mu_h + g)q \\
 \frac{dr}{dt} &= gq - \mu_h r.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Penurunan persamaan (3.8) secara rinci dapat dilihat di Lampiran 1. Jika dalam model endemi tidak dilakukan karantina maka tidak

terdapat kompartemen Q pada Gambar 3.1, sehingga diperoleh model dengan lima persamaan berikut ini

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s \\
 \frac{de}{dt} &= hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e \\
 \frac{di_s}{dt} &= \beta_s be - \mu_h i_s - gi_s \\
 \frac{di_a}{dt} &= \beta_a be - \mu_h i_a - gi_a \\
 \frac{dr}{dt} &= g(i_s + i_a) - \mu_h r.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) adalah model endemi flu babi tanpa karantina, yang akan dibandingkan dengan model endemi dengan karantina untuk menyelidiki pengaruh karantina.

Perhatikan sistem persamaan (3.8) dan (3.9), lima persamaan pertama pada (3.8) tidak bergantung pada variabel r . Begitu pula dengan persamaan (3.9), empat persamaan pertama pada (3.9) tidak bergantung pada r . Sehingga dalam melakukan analisis pada persamaan (3.8) cukup dipandang sistem lima persamaan tanpa variabel r , sedangkan pada persamaan (3.9) cukup dipandang sistem empat persamaan tanpa variabel r . Berdasarkan persamaan (3.8) dan (3.9), perilaku $r(t)$ dapat diketahui dari solusi $q(t)$ pada persamaan (3.8) dan pada persamaan (3.9) perilaku $r(t)$ dapat diketahui dari solusi $i_s(t)$ dan $i_a(t)$. Oleh karena itu, cukup dibahas untuk sistem persamaan dengan karantina

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s \\
 \frac{de}{dt} &= hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e \\
 \frac{di_s}{dt} &= \beta_s be - \mu_h i_s - ci_s \\
 \frac{di_a}{dt} &= \beta_a be - \mu_h i_a - ci_a \\
 \frac{dq}{dt} &= c(i_s + i_a) - (\mu_h + g)q
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

dan sistem persamaan tanpa karantina

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s \\ \frac{de}{dt} &= hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e \\ \frac{di_s}{dt} &= \beta_s be - \mu_h i_s - gi_s \\ \frac{di_a}{dt} &= \beta_a be - \mu_h i_a - gi_a.\end{aligned}\quad (3.11)$$

3.2 Titik Kesetimbangan Model

3.2.1 Model Endemi dengan Karantina

Titik kesetimbangan persamaan (3.10) diperoleh dengan menentukan s, e, i_s, i_a, q , dan r yang memenuhi

$$\mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s = 0 \quad (3.12a)$$

$$hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e = 0 \quad (3.12b)$$

$$\beta_s be - \mu_h i_s - ci_s = 0 \quad (3.12c)$$

$$\beta_a be - \mu_h i_a - ci_a = 0 \quad (3.12d)$$

$$c(i_s + i_a) - (\mu_s + g)q = 0 \quad (3.12e)$$

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu

$$G_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

dan

$$G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$$

dengan

$$s^* = \frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)}{b(\beta_s + \beta_a)h}$$

$$e^* = \frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s \mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{(\mu_h + c)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a \mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{(\mu_h + c)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$q^* = \frac{c\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{h((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)(\mu_h + g)}.$$

Perhatikan bahwa nilai e^* , i_s^* , i_a^* , dan q^* bernilai positif jika nilai $h > (\mu_h + c)$, sehingga $h > (\mu_h + c)$ digunakan sebagai syarat eksistensi titik G_2 . Jika dilakukan penyederhanaan pada e^* , maka

$$\begin{aligned} e^* &= \frac{(\mu_h + c)}{b(\beta_s + \beta_a)} \left(\frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c)h} \right) \\ &= \frac{(\mu_h + c)}{b(\beta_s + \beta_a)} \left(\frac{b(\beta_s + \beta_a)\mu_h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c)} - \frac{\mu_h}{h} \right) \\ &= \frac{(\mu_h + c)\mu_h}{b(\beta_s + \beta_a)h} \left(\frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Misalkan $K_0 = \frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c)}$, maka

$$e^* = \frac{(\mu_h + c)\mu_h}{b(\beta_s + \beta_a)h} (K_0 - 1).$$

Perhatikan bahwa jika $K_0 < 1$ maka e^* bernilai negatif sehingga mustahil. Dengan demikian eksistensi e^* ditentukan oleh bilangan

$$K_0 = \frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c)},$$

yang disebut bilangan reproduksi dasar, yaitu bilangan yang menentukan ada tidaknya penyebaran penyakit pada suatu populasi.

3.2.2 Model Endemi tanpa Karantina

Titik kesetimbangan persamaan (3.11) diperoleh dengan menentukan s , e , i_s , i_a , dan r yang memenuhi

$$\mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s = 0 \quad (3.13a)$$

$$hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e = 0 \quad (3.13b)$$

$$\beta_s be - \mu_h i_s - gi_s = 0 \quad (3.13c)$$

$$\beta_a be - \mu_h i_a - gi_a = 0 \quad (3.13d)$$

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 3, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu

$$H_1 = (1,0,0,0)$$

dan

$$H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$$

dengan

$$s^* = \frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + g)}{b(\beta_s + \beta_a)h}$$

$$e^* = \frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s \mu_h [\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{(\mu_h + g)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a \mu_h [\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{(\mu_h + g)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

Perhatikan bahwa nilai e^* , i_s^* , dan i_a^* bernilai positif jika nilai $h > (\mu_h + g)$, sehingga $h > (\mu_h + g)$ digunakan sebagai syarat eksistensi titik H_2 . Seperti halnya model endemi dengan karantina, untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar dilakukan penyederhanaan pada e^* .

$$\begin{aligned} e^* &= \frac{(\mu_h + g)}{b(\beta_s + \beta_a)} \left(\frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g)h} \right) \\ &= \frac{(\mu_h + g)}{b(\beta_s + \beta_a)} \left(\frac{b(\beta_s + \beta_a)\mu_h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g)} - \frac{\mu_h}{h} \right) \\ &= \frac{(\mu_h + g)\mu_h}{b(\beta_s + \beta_a)h} \left(\frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Jika dimisalkan $L_0 = \frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g)}$, maka

$$e^* = \frac{(\mu_h + g)\mu_h}{b(\beta_s + \beta_a)h} (L_0 - 1).$$

Perhatikan bahwa jika $L_0 < 1$ maka e^* bernilai negatif sehingga mustahil. Dengan demikian eksistensi e^* , ditentukan oleh bilangan

$$L_0 = \frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g)}$$

3.3 Analisa Kestabilan Titik Keseimbangan

3.3.1 Model Endemi dengan Karantina

Untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan, perlu ditentukan matriks Jacobi sistem persamaan (3.8), yaitu

$$J(s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*) = \begin{bmatrix} -M_1 & 0 & -hs^* & -hs^* & 0 \\ h(i_s^* + i_a^*) & -M_2 & hs^* & hs^* & 0 \\ 0 & \beta_s b & -M_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_4 \end{bmatrix},$$

dengan

$$M_1 = h(i_s^* + i_a^*) + \mu_h$$

$$M_2 = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h$$

$$M_3 = (\mu_h + c)$$

$$M_4 = (\mu_h + g).$$

3.3.1.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan $G_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik $G_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ pada matriks Jacobi didapatkan

$$J(s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -h & -h & 0 \\ 0 & -M_2 & h & h & 0 \\ 0 & \beta_s b & -M_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_4 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$[J - \lambda I] = \begin{bmatrix} -\mu_h - \lambda & 0 & -h & -h & 0 \\ 0 & -M_2 - \lambda & h & h & 0 \\ 0 & \beta_s b & -M_3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -M_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_4 - \lambda \end{bmatrix}.$$

$$\det[J - \lambda I] = (-\mu_h - \lambda) \begin{vmatrix} -M_2 - \lambda & h & h & 0 \\ \beta_s b & -M_3 - \lambda & 0 & 0 \\ \beta_a b & 0 & -M_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = (\mu_h + \lambda)(M_4 + \lambda) \begin{vmatrix} -M_2 - \lambda & h & h \\ \beta_s b & -M_3 - \lambda & 0 \\ \beta_a b & 0 & -M_3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$0 = (\mu_h + \lambda)(M_4 + \lambda)[(-M_2 - \lambda)(-M_3 - \lambda)(-M_3 - \lambda) - (\beta_a b)(-M_3 - \lambda)(h) - (-M_3 - \lambda)(\beta_s b)(h)]$$

$$0 = (\mu_h + \lambda)(M_4 + \lambda)(M_3 + \lambda)[-(M_2 + \lambda)(M_3 + \lambda) + (\beta_a b)(h) + (\beta_s b)(h)]$$

$$0 = (\mu_h + \lambda)(M_4 + \lambda)(M_3 + \lambda)(\lambda^2 + (b(\beta_s + \beta_a) + c + 2\mu_h)\lambda + (b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c) - b(\beta_s + \beta_a)h).$$

Diperoleh nilai eigen berikut

$$\lambda_1 = -\mu_h, \lambda_2 = -g - \mu_h, \lambda_3 = -c - \mu_h,$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{1}{2}[-(b(\beta_s + \beta_a) + c + 2\mu_h) \pm$$

$$\sqrt{(b(\beta_s + \beta_a) + c + 2\mu_h)^2 - 4((b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c) - b(\beta_s + \beta_a)h)}].$$

Terlihat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ selalu bernilai negatif, mengingat seluruh parameter bernilai positif.

Berdasarkan nilai $K_0 < 1$, yaitu

$$K_0 = \frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c)} < 1$$

diperoleh $b(\beta_s + \beta_a)h < (b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c)$, sehingga $(b(\beta_s + \beta_a) + c + 2\mu_h)$ bernilai lebih besar dari

$$\sqrt{(b(\beta_s + \beta_a) + c + 2\mu_h)^2 - 4((b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c) - b(\beta_s + \beta_a)h)}.$$

Oleh karena itu, λ_4, λ_5 bernilai negatif untuk $K_0 < 1$, sehingga titik $G_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ stabil asimtotik untuk $K_0 < 1$.

3.3.1.2 Titik Kesetimbangan $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$

Misalkan

$$v = h(i_s^* + i_a^*)$$

$$w = v + \mu_h$$

$$x = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h$$

$$y = (\mu_h + c)$$

$$z = (\mu_h + g).$$

Dalam perhitungan titik kesetimbangan pada Lampiran 4, didapatkan

$$\lambda^5 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda^1 + A_5 = 0$$

dengan

$$A_1 = w + x + 2y + z$$

$$A_2 = wz + xz + 2yz + 2wy + 2xy + wx + y^2 + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)$$

$$A_3 = 2wyz + 2xyz + wxz + y^2z + wy^2 + xy^2 + 2wxy$$

$$+ (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(w + y + z)$$

$$+ (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)v$$

$$A_4 = wy^2z + xy^2z + 2wxyz + wxy^2 \\ + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(yz + wy + wz) \\ + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)v(y + z)$$

$$A_5 = wxy^2z + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(wyz) + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)(vyz).$$

Dalam menentukan kestabilan titik $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$, digunakan kriteria Routh Hurwitz sebagai berikut

- 1) $A_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$
- 2) $A_1A_2A_3 > A_3^2 + A_1^2A_4$
- 3) $(A_1A_4 - A_5)(A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4) > A_5(A_1A_2 - A_3)^2 + A_1A_5^2$.

Terlihat bahwa kondisi (1) terpenuhi, jika $\beta_a > \beta_s$. Karena sulitnya menyatakan kondisi (2) dan (3) dalam parameter-parameter model, maka kondisi (2) dan (3) diperlihatkan sebagai syarat kestabilan untuk titik kesetimbangan $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$ dalam simulasi numerik.

3.3.2 Model Endemi Tanpa Karantina

Matriks Jacobi dari sistem persamaan (3.9) adalah

$$J(s^*, e^*, i_s^*, i_a^*) = \begin{bmatrix} -M_1 & 0 & -hs^* & -hs^* \\ h(i_s^* + i_a^*) & -M_2 & hs^* & hs^* \\ 0 & \beta_s b & -M_3 & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -M_3 \end{bmatrix},$$

dengan

$$M_1 = h(i_s^* + i_a^*) + \mu_h$$

$$M_2 = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h$$

$$M_3 = (\mu_h + g).$$

3.3.2.1 Titik Kesetimbangan $H_1 = (1, 0, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik $H_1 = (1, 0, 0, 0)$ pada matriks Jacobi didapatkan

$$J(s^*, e^*, i_s^*, i_a^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -h & -h \\ 0 & -M_2 & h & h \\ 0 & \beta_s b & -M_3 & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -M_3 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$[J - \lambda I] = \begin{bmatrix} -\mu_h - \lambda & 0 & -h & -h \\ 0 & -M_2 - \lambda & h & h \\ 0 & \beta_s b & -M_3 - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -M_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[J - \lambda I] = (-\mu_h - \lambda) \begin{vmatrix} -M_2 - \lambda & h & h \\ \beta_s b & -M_3 - \lambda & 0 \\ \beta_a b & 0 & -M_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = (-\mu_h - \lambda)[(-M_2 - \lambda)(-M_3 - \lambda)(-M_3 - \lambda) - (\beta_a b)(-M_3 - \lambda)(h) - (-M_3 - \lambda)(\beta_s b)(h)]$$

$$0 = (\mu_h + \lambda)(M_3 + \lambda)[- (M_2 + \lambda)(M_3 + \lambda) + (\beta_a b)(h) + (\beta_s b)(h)]$$

$$0 = (\mu_h + \lambda)(M_3 + \lambda)(\lambda^2 + (b(\beta_s + \beta_a) + c + 2\mu_h)\lambda + (b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + c) - b(\beta_s + \beta_a)h)$$

Diperoleh nilai eigen berikut

$$\lambda_1 = -\mu_h, \lambda_2 = -g - \mu_h,$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} [-(b(\beta_s + \beta_a) + g + 2\mu_h) \pm$$

$$\sqrt{(b(\beta_s + \beta_a) + g + 2\mu_h)^2 - 4((b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g) - b(\beta_s + \beta_a)h)}].$$

Terlihat λ_1, λ_2 selalu bernilai negatif, mengingat seluruh parameter bernilai positif.

Berdasarkan nilai $L_0 < 1$, yaitu

$$L_0 = \frac{b(\beta_s + \beta_a)h}{(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g)} < 1$$

diperoleh $b(\beta_s + \beta_a)h < (b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g)$, sehingga $(b(\beta_s + \beta_a) + g + 2\mu_h)$ bernilai lebih besar dari

$$\sqrt{(b(\beta_s + \beta_a) + g + 2\mu_h)^2 - 4((b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)(\mu_h + g) - b(\beta_s + \beta_a)h)}.$$

Oleh karena itu, λ_3, λ_4 bernilai negatif untuk $L_0 < 1$, sehingga titik $H_1 = (1, 0, 0, 0)$ stabil asimtotik untuk $L_0 < 1$.

3.3.2.2 Titik Keseimbangan $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$

Misalkan

$$v = h(i_s^* + i_a^*)$$

$$w = v + \mu_h$$

$$x = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h$$

$$y = (\mu_h + g).$$

Dalam perhitungan titik kesetimbangan pada Lampiran 6, didapatkan $\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0$ dengan

$$A_1 = w + x + 2y$$

$$A_2 = 2wy + 2xy + wx + y^2 + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)$$

$$A_3 = wy^2 + xy^2 + 2wxy + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(y + w) + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)v$$

$$A_4 = wxy^2 + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(wy) + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)(vy)$$

Dalam menentukan kestabilan titik $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$, digunakan kriteria Routh Hurwitz sebagai berikut

- 1) $A_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$
- 2) $A_1A_2 > A_3$
- 3) $A_1A_2A_3 > A_3^2 + A_1^2A_4$

Terlihat bahwa kondisi (1) terpenuhi, jika $\beta_a > \beta_s$. Seperti halnya pada titik G_2 yang dikarenakan sulitnya membuktikan kondisi (2) dan (3), maka kondisi (2) dan (3) diperlihatkan sebagai syarat kestabilan untuk titik kesetimbangan $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$ dalam simulasi numerik.

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan model endemi dengan karantina sistem persamaan (3.8)

Titik Tetap	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
G_1	-	• $K_0 < 1$
G_2	• $K_0 > 1$ • $h > (\mu_h + c)$	• $\beta_a > \beta_s$ • $A_1A_2A_3 > A_3^2 + A_1^2A_4$ • $(A_1A_4 - A_5)(A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4) > A_5(A_1A_2 - A_3)^2 + A_1A_5^2$

Tabel 3.2 Syarat eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan model endemi tanpa karantina sistem persamaan (3.9)

Titik Tetap	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
H_1	-	• $L_0 < 1$
H_2	• $L_0 > 1$ • $h > (\mu_h + g)$	• $\beta_a > \beta_s$ • $A_1A_2 > A_3$ • $A_1A_2A_3 > A_3^2 + A_1^2A_4$

3.4 Simulasi Numerik dan Interpretasi Model

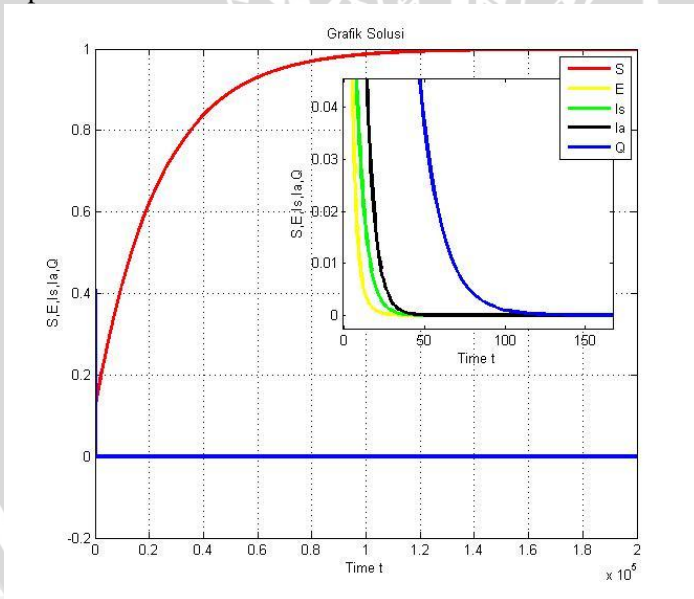
Untuk memberikan gambaran tentang dinamika infeksi flu babi pada manusia, dilakukan simulasi numerik dengan bantuan *software Matlab*. Dalam skripsi ini dilakukan simulasi dengan menggunakan nilai parameter sebagai berikut

$$\mu_h = 0.000042, \beta_s = 0.25, \beta_a = 0.75, b = 0.4, c = 0.2, g = 0.07$$

3.4.1 Simulasi Numerik Model Endemi dengan Karantina

3.4.1.1 Simulasi Numerik untuk $K_0 < 1$

Pada simulasi ini digunakan parameter $h = 0.07$, sehingga diperoleh nilai $K_0 = 0.34988 < 1$. Berdasarkan syarat eksistensi untuk $K_0 < 1$ hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas endemi $G_1 = (1,0,0,0,0)$ yang stabil. Grafik solusi dengan nilai awal $(0.15, 0.3, 0.0825, 0.2475, 0.12, 0.1)$ dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Grafik solusi untuk $K_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 3.2, grafik solusi dengan nilai awal tersebut menuju titik kesetimbangan $G_1 = (1,0,0,0,0)$. Dengan kata

lain, titik $G_1 = (1,0,0,0,0)$ stabil untuk $K_0 < 1$. Jika dikaitkan dengan kondisi nyata, dapat dikatakan bahwa pada populasi tersebut tidak terjadi penyebaran penyakit. Mengingat semua populasi kecuali populasi s menuju 0 pada Gambar 3.2.

3.4.1.2 Simulasi Numerik untuk $K_0 > 1$

Pada simulasi ini digunakan parameter $h = 0.45$, sehingga diperoleh nilai $K_0 = 2.24928 > 1$. Berdasarkan syarat eksistensi dan analisa pada subbab 3.3.1 untuk $K_0 > 1$ terdapat dua titik kesetimbangan namun hanya titik $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$ yang stabil dengan syarat kestabilan yang terpenuhi berikut

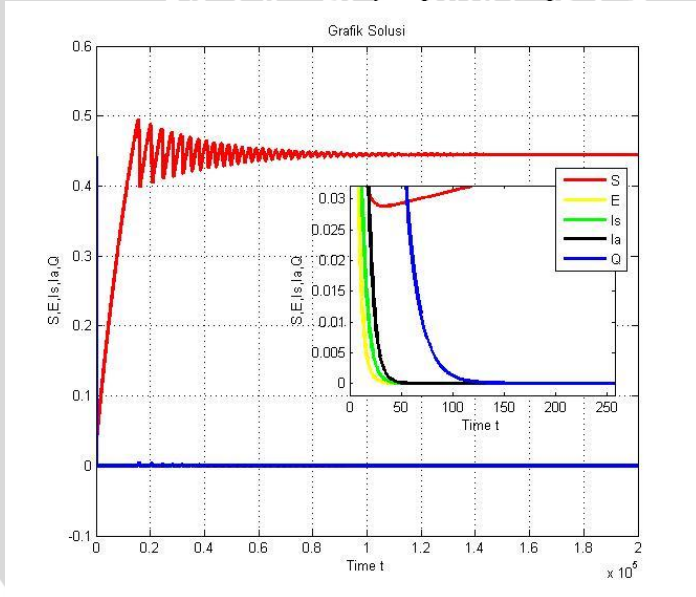
$$\beta_a = 0.75 > \beta_s = 0.25,$$

$$A_1 A_2 A_3 = 0.01069 > A_3^2 + A_1^2 A_4 = 0.00301,$$

$$(A_1 A_4 - A_5)(A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4) = 0.00001$$

$$> A_5(A_1 A_2 - A_3)^2 + A_1 A_5^2 = 0.00000002.$$

Grafik solusi titik $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$ dengan nilai awal $(0.15, 0.3, 0.0825, 0.2475, 0.12, 0.1)$ dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Grafik solusi untuk $K_0 > 1$

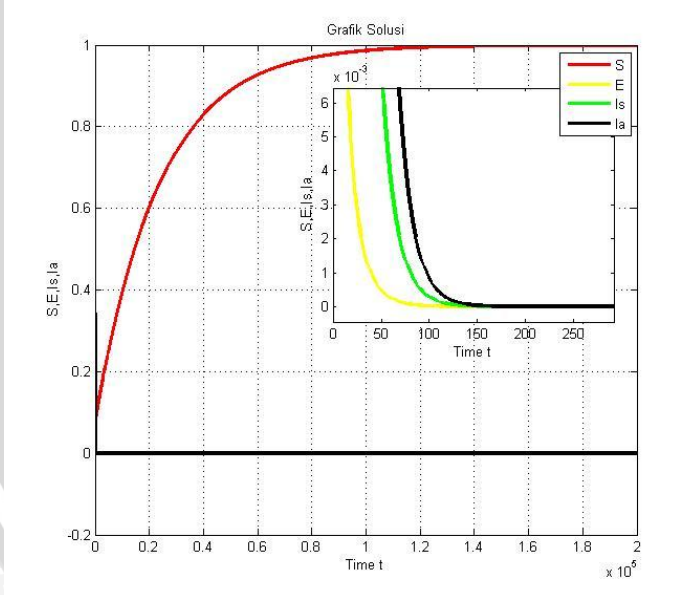
Berdasarkan Gambar 3.3, grafik solusi menuju titik

$G_2 = (0.444458, 0.00005, 0.00007, 0.00021, 0.00032)$. Sehingga dapat dikatakan titik $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$ stabil untuk $K_0 > 1$. Pada grafik solusi, terlihat populasi s mulai stabil ketika proporsi penyebaran penyakit flu babi menurun mendekati titik 0. Begitu pula dengan populasi q , dimana proporsi populasi q menurun seiring dengan berkurangnya proporsi penyebaran penyakit pada populasi tersebut.

3.4.2 Simulasi Numerik Model Endemi tanpa Karantina

3.4.2.1 Simulasi Numerik untuk $L_0 < 1$

Pada simulasi ini digunakan parameter $h = 0.07$, sehingga diperoleh nilai $L_0 = 0.97931 < 1$. Berdasarkan syarat eksistensi untuk $L_0 < 1$ dan analisa pada subbab 3.3.2 hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas endemi $H_1 = (1,0,0,0)$ yang stabil. Grafik solusi dengan nilai awal $(0.15, 0.3, 0.1125, 0.3375, 0.1)$ dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Grafik solusi untuk $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 3.4, grafik solusi menuju titik kesetimbangan $H_1 = (1,0,0,0)$, sehingga titik $H_1 = (1,0,0,0)$ stabil

untuk $L_0 < 1$. Pada grafik solusi, terlihat semua populasi kecuali populasi s menuju titik 0. Jika dikaitkan dengan grafik solusi pada Gambar 3.2, proporsi populasi s lebih kecil pada saat $t < 0.5$ jika dibandingkan dengan populasi s pada pada Gambar 3.2. Hal ini membuktikan adanya pengaruh karantina terhadap penyebaran penyakit pada populasi tersebut.

3.4.2.2 Simulasi Numerik untuk $L_0 > 1$

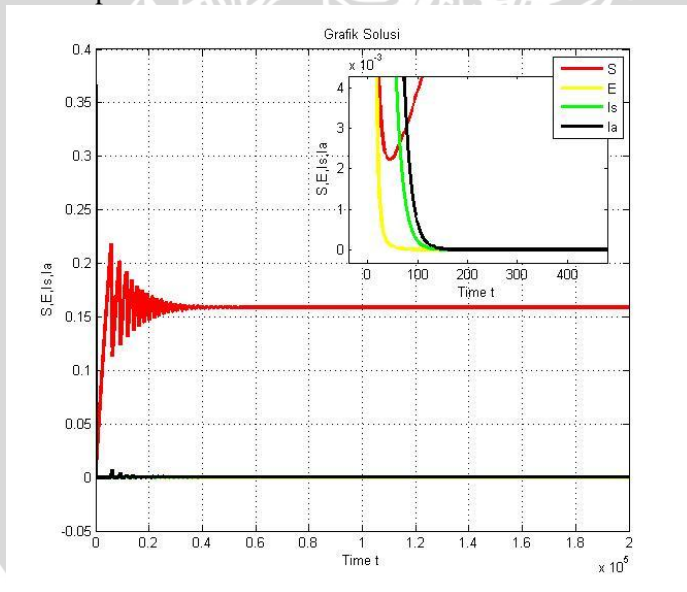
Pada simulasi ini digunakan parameter $h = 0.45$, sehingga diperoleh nilai $L_0 = 6.295621 > 1$. Berdasarkan syarat eksistensi dan analisa pada subbab 3.3.2 untuk $L_0 > 1$ terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis namun hanya titik $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$ yang stabil dengan syarat kestabilan yang terpenuhi berikut

$$\beta_a = 0.75 > \beta_s = 0.25,$$

$$A_1 A_2 = 0.0418 > A_3 = 0.0412,$$

$$A_1 A_2 A_3 = 0.00013 > A_3^2 + A_1^2 A_4 = 0.00001.$$

Grafik solusi dengan nilai awal $(0.15, 0.3, 0.1125, 0.3375, 0.1)$ dapat dilihat pada Gambar 3.5.

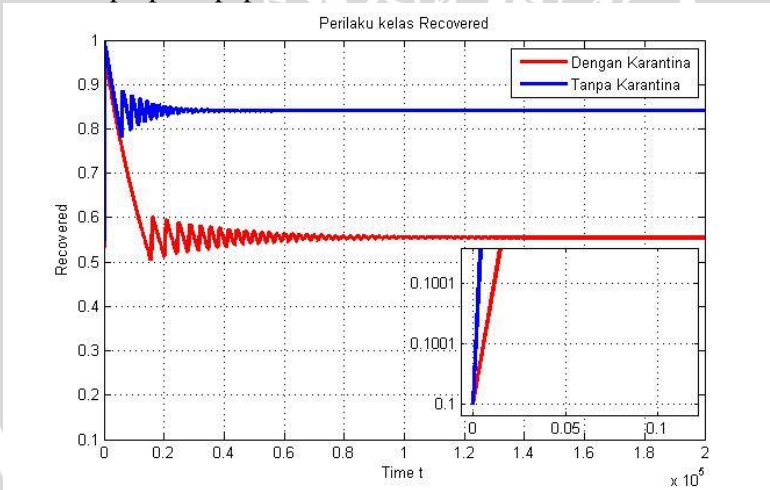


Gambar 3.5 Grafik solusi untuk $L_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3.5, grafik solusi menuju titik kesetimbangan $H_2 = (0.15884, 0.00008, 0.00031, 0.00093)$. Sehingga dapat dikatakan, titik $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$ stabil untuk $L_0 > 1$. Pada Gambar 3.5, terlihat populasi s stabil ketika proporsi penyebaran penyakit menurun menuju titik 0. Apabila dibandingkan dengan Gambar 3.3, terlihat proporsi populasi s lebih kecil jika dibandingkan dengan populasi s pada Gambar 3.3. Dari sini dapat terlihat adanya pengaruh karantina terhadap penyebaran penyakit pada populasi tersebut.

3.4.3 Simulasi Numerik Pengaruh Karantina

Untuk memperlihatkan pengaruh karantina, dilakukan simulasi numerik dengan memperhatikan perilaku proporsi populasi *recovered* terhadap waktu t pada kedua model. Hasil Simulasi diperlihatkan pada gambar 3.6 yang memperlihatkan besarnya perbedaan proporsi populasi *recovered* dari kedua model.



Gambar 3.6 Perilaku kelas *recovered*

Terlihat bahwa proporsi populasi *recovered* tanpa karantina dengan laju kesembuhan sebesar $g = 0.07$ stabil menuju 0.8406. Sedangkan grafik proporsi populasi *recovered* dengan karantina lebih rendah daripada tanpa karantina dan stabil menuju 0.5549. Pada model dengan karantina digunakan laju penambahan populasi terkarantina sebesar $c = 0.2$ dan laju kesembuhan $g = 0.07$.

Perbedaan proporsi yang terjadi, disebabkan oleh pengaruh karantina yang memperkecil laju penyebaran penyakit pada populasi tersebut, sehingga proporsi populasi yang terinfeksi lebih sedikit daripada populasi tanpa karantina. Akibatnya, proporsi populasi yang sembuh pun lebih sedikit.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini yang diuraikan pada Bab I dan hasil pembahasan pada Bab III, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

1. Model endemi flu babi dengan karantina berupa sistem otonomus nonlinear dengan enam persamaan dan delapan parameter. Pada model endemi flu babi tanpa karantina, terdapat lima persamaan yang dikaji dengan tujuh parameter.
2. Terdapat dua titik kesetimbangan untuk model endemi dengan karantina, yakni titik kesetimbangan $G_1 = (1,0,0,0,0)$ dan $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$, dengan eksistensi titik – titik tersebut dipengaruhi oleh bilangan reproduksi dasar K_0 . Pada model endemi tanpa karantina terdapat dua titik kesetimbangan, yakni titik kesetimbangan $H_1 = (1,0,0,0)$ dan $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$. Eksistensi titik-titik tersebut juga dipengaruhi oleh bilangan reproduksi dasar L_0 .
3. Pada model endemi dengan karantina, hasil analisa kesetimbangan untuk titik bebas endemi $G_1 = (1,0,0,0,0)$ bersifat stabil asimtotik untuk $K_0 < 1$. Untuk titik endemi $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$, dari hasil analisa menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* diketahui titik endemi bersifat stabil untuk $K_0 > 1$. Pada model endemi tanpa karantina, titik $H_1 = (1,0,0,0)$ bersifat stabil asimtotik untuk $L_0 < 1$ dan titik $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$ bersifat stabil untuk $L_0 > 1$.
4. Hasil simulasi numerik yang diperoleh sesuai dengan hasil analisa untuk setiap titik kesetimbangan.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Aditama, T. Y. 2010. *Situasi Terkini Influenza Baru A H1N1 di Indonesia*. Departemen Kesehatan Republik Indonesia, Indonesia.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition. John Wiley & Sons. New York.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction Third Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Pongsumpun, P. 2010. *Swine Flu Transmission Model in Risk and Non-Risk Human Population*, World Academy of Science, Engineering and Technology, 68, hal. 1166-1171.
- Pongsumpun, P. dan Tang, I. M. 2011. *Mathematical Model of the Symptomatic and Asymptomatic Infectives of Swine Flu*, International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2, hal. 247-254.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey. Prentice Hall Education.
- Rusu, V. dan S. Ta'asan. 2009. *Modelling the Spread of Influenza A H1N1*. Indiana University.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Penurunan Model

$$\frac{dS}{dt} = \rho N - \frac{hS(I_s + I_a)}{N} - \mu_h S \quad (i)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{hS(I_s + I_a)}{N} - (\beta_s + \beta_a)bE - \mu_h E \quad (ii)$$

$$\frac{dI_s}{dt} = \beta_s bE - \mu_h I_s - cI_s \quad (iii)$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \beta_a bE - \mu_h I_a - cI_a \quad (iv)$$

$$\frac{dQ}{dt} = c(I_s + I_a) - (\mu_h + g)Q \quad (v)$$

$$\frac{dR}{dt} = gQ - \mu_h R \quad (vi)$$

Jika diasumsikan laju kelahiran sama dengan laju kematian, yaitu $\rho = \mu_h$ dan dilakukan permisalan $Ns = S$, $Ne = E$, $Ni_s = I_s$, $Ni_a = I_a$, $Nq = Q$, $Nr = R$ sehingga dari persamaan (i) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \rho N - \frac{hS(I_s + I_a)}{N} - \mu_h S \\ \frac{dS}{dsN} &= \rho N - \frac{hsN(i_s N + i_a N)}{N} - \mu_h sN \\ \frac{dS}{dt} &= \rho N - hs(i_s N + i_a N) - \mu_h sN \\ \frac{dS}{ds} &= \frac{\rho N - hs(i_s N + i_a N) - \mu_h sN}{N} \\ \frac{dS}{ds} &= \rho - hs(i_s + i_a) - \mu_h s \\ \frac{dS}{ds} &= \mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s. \end{aligned}$$

Dari persamaan (ii) diperoleh

$$\frac{dE}{dt} = \frac{hS(I_s + I_a)}{N} - (\beta_s + \beta_a)bE - \mu_h E$$

$$\frac{deN}{dt} = \frac{hsN(i_sN + i_aN)}{N} - (\beta_s + \beta_a)beN - \mu_h eN$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{hs(i_sN + i_aN) - (\beta_s + \beta_a)beN - \mu_h eN}{N}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{hs(i_sN + i_aN) - (\beta_s + \beta_a)beN - \mu_h eN}{N}$$

$$\frac{de}{dt} = hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e.$$

Dari persamaan (iii) diperoleh

$$\frac{dI_s}{dt} = \beta_s bE - \mu_h I_s - cI_s$$

$$\frac{di_sN}{dt} = \beta_s beN - \mu_h i_sN - ci_sN$$

$$\frac{di_s}{dt} = \frac{\beta_s beN - \mu_h i_sN - ci_sN}{N}$$

$$\frac{di_s}{dt} = \beta_s be - \mu_h i_s - ci_s.$$

Dari persamaan (iv) diperoleh

$$\frac{dI_a}{dt} = \beta_a bE - \mu_h I_a - cI_a$$

$$\frac{di_aN}{dt} = \beta_a beN - \mu_h i_aN - ci_aN$$

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{\beta_a beN - \mu_h i_aN - ci_aN}{N}$$

$$\frac{di_a}{dt} = \beta_a be - \mu_h i_a - ci_a.$$

Dari persamaan (v) diperoleh

$$\frac{dQ}{dt} = c(I_s + I_a) - (\mu_h + g)Q$$

$$\frac{dqN}{dt} = c(i_sN + i_aN) - (\mu_h + g)qN$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{c(i_sN + i_aN) - (\mu_h + g)qN}{N}$$

$$\frac{dq}{dt} = c(i_s + i_a) - (\mu_h + g)q.$$

Dari persamaan (vi) diperoleh

$$\frac{dR}{dt} = gQ - \mu_h R$$

$$\frac{drN}{dt} = gqN - \mu_h rN$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{gqN - \mu_h rN}{N}$$

$$\frac{dr}{dt} = gq - \mu_h r.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 2. Perhitungan Titik Kesetimbangan Model Endemi dengan Karantina

Titik kesetimbangan persamaan (3.10) diperoleh dengan menentukan s, e, i_s, i_a, q , yang memenuhi

$$\mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s = 0 \quad (3.12a)$$

$$hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e = 0 \quad (3.12b)$$

$$\beta_s be - \mu_h i_s - ci_s = 0 \quad (3.12c)$$

$$\beta_a be - \mu_h i_a - ci_a = 0 \quad (3.12d)$$

$$c(i_s + i_a) - (\mu_h + g)q = 0 \quad (3.12e)$$

Dari persamaan (3.12c) diperoleh

$$0 = \beta_s be - \mu_h i_s - ci_s$$

$$\mu_h i_s + ci_s = \beta_s be$$

$$i_s(\mu_h + c) = \beta_s be$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s be^*}{\mu_h + c}. \quad (i)$$

Dari persamaan (3.12d) diperoleh

$$0 = \beta_a be - \mu_h i_a - ci_a$$

$$\mu_h i_a + ci_a = \beta_a be$$

$$i_a(\mu_h + c) = \beta_a be$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a be^*}{\mu_h + c}. \quad (ii)$$

Dari persamaan (3.12e) diperoleh

$$0 = c(i_s + i_a) - (\mu_h + g)q$$

$$(\mu_h + g)q = c(i_s + i_a)$$

$$q^* = \frac{c(i_s^* + i_a^*)}{(\mu_h + g)}. \quad (iii)$$

Substitusikan persamaan (i) dan (ii) ke persamaan (3.12b), diperoleh

$$0 = hs^*(i_s^* + i_a^*) - (\beta_s + \beta_a)be^* - \mu_h e^*$$

$$0 = hs^* \left(\frac{\beta_s be^*}{\mu_h + c} + \frac{\beta_a be^*}{\mu_h + c} \right) - (\beta_s + \beta_a)be^* - \mu_h e^*$$

$$0 = \frac{hs^*be^*(\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + c} - (\beta_s + \beta_a)be^* - \mu_h e^*$$

$$0 = e^* \left[\frac{hs^*b(\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + c} - (\beta_s + \beta_a)b - \mu_h \right]$$

$e^* = 0$ atau

$$\frac{hs^*b(\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + c} - (\beta_s + \beta_a)b - \mu_h = 0. \quad (iv)$$

Dengan mensubstitusikan $e^* = 0$ pada persamaan (3.12c), (3.12d) dan kemudian disubstitusikan hasilnya pada persamaan (3.12e) diperoleh titik bebas penyakit $G_1 = (1,0,0,0,0)$.

Dari persamaan (iv) diperoleh

$$\frac{hs^*b(\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + c} - (\beta_s + \beta_a)b - \mu_h = 0$$

$$\frac{hs^*b(\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + c} = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h$$

$$hs^*b(\beta_s + \beta_a) = (\mu_h + c)((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)$$

$$s^* = \frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)}{b(\beta_s + \beta_a)h}. \quad (v)$$

Substitusikan persamaan (v) ke persamaan (3.12a), diperoleh

$$0 = \mu_h - hs^*(i_s^* + i_a^*) - \mu_h s^*$$

$$hs^*(i_s^* + i_a^*) = \mu_h - \mu_h s^*$$

$$(i_s^* + i_a^*) = \frac{\mu_h - \mu_h s^*}{hs^*}$$

$$(i_s^* + i_a^*) = \frac{\mu_h}{hs^*} - \frac{\mu_h}{h}$$

$$(i_s^* + i_a^*) = \frac{\mu_h}{\left[\frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)}{b(\beta_s + \beta_a)} \right]} - \frac{\mu_h}{h}$$

$$(i_s^* + i_a^*) = \frac{b(\beta_s + \beta_a)\mu_h}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)} - \frac{\mu_h}{h}$$

$$(i_s^* + i_a^*) = \frac{\mu_h [\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)h}. \quad (vi)$$

Substitusikan persamaan (vi) ke persamaan (3.12e), diperoleh

$$0 = c(i_s^* + i_a^*) - (\mu_h + g)q^*$$

$$(\mu_h + g)q^* = c(i_s^* + i_a^*)$$

$$q^* = \frac{c(i_s^* + i_a^*)}{(\mu_h + g)}$$

$$q^* = \frac{c}{(\mu_h + g)} \left[\frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)h} \right]$$

$$q^* = \frac{c\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{h((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)(\mu_h + g)}$$

Substitusikan persamaan (v) dan (vi) ke persamaan (3.12b), diperoleh

$$0 = hs^*(i_s^* + i_a^*) - (\beta_s + \beta_i)be^* - \mu_h e^*$$

$$(\beta_s + \beta_i)be^* + \mu_h e^* = hs^*(i_s^* + i_a^*)$$

$$e^*((\beta_s + \beta_i)b + \mu_h) = hs^*(i_s^* + i_a^*)$$

$$e^* = \frac{hs^*(i_s^* + i_a^*)}{((\beta_s + \beta_i)b + \mu_h)}$$

$$e^* = \frac{h \left[\frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)}{b(\beta_s + \beta_a)h} \right] \left[\frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)h} \right]}{((\beta_s + \beta_i)b + \mu_h)}$$

$$e^* = \frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_i) + \mu_h)} \quad (vii)$$

Substitusikan persamaan (vii) ke persamaan (3.12c) dan (3.12d), diperoleh

$$i_s^* = \frac{\beta_s be^*}{\mu_h + c}$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s \mu_h [\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{(\mu_h + c)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_i) + \mu_h)}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a be^*}{\mu_h + c}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a \mu_h [\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{(\mu_h + c)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_i) + \mu_h)}$$

Sehingga didapatkan titik endemik $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$ dengan

$$s^* = \frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)}{b(\beta_s + \beta_a)h}$$

$$e^* = \frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s \mu_h [\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{(\mu_h + c)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a \mu_h [\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{(\mu_h + c)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$q^* = \frac{c\mu_h[\mu_h(\mu_h + c) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + c))]}{h((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + c)(\mu_h + g)}$$



Lampiran 3. Perhitungan Titik Kesetimbangan Model Endemi tanpa Karantina

Titik kesetimbangan persamaan (3.11) diperoleh dengan menentukan s, e, i_s, i_a yang memenuhi

$$\mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s = 0 \quad (3.13a)$$

$$hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e = 0 \quad (3.13b)$$

$$\beta_s be - \mu_h i_s - gi_s = 0 \quad (3.13c)$$

$$\beta_a be - \mu_h i_a - gi_a = 0 \quad (3.13d)$$

Dari persamaan (3.13c) diperoleh

$$0 = \beta_s be - \mu_h i_s - gi_s$$

$$\mu_h i_s + gi_s = \beta_s be$$

$$i_s(\mu_h + g) = \beta_s be$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s be^*}{\mu_h + g} \quad (i)$$

Dari persamaan (3.13d) diperoleh

$$0 = \beta_a be - \mu_h i_a - gi_a$$

$$\mu_h i_a + gi_a = \beta_a be$$

$$i_a(\mu_h + g) = \beta_a be$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a be^*}{\mu_h + g} \quad (ii)$$

Substitusikan persamaan (i) dan (ii) ke persamaan (3.13b), diperoleh

$$0 = hs^*(i_s^* + i_a^*) - (\beta_s + \beta_a)be^* - \mu_h e^*$$

$$0 = hs^* \left(\frac{\beta_s be^*}{\mu_h + g} + \frac{\beta_a be^*}{\mu_h + g} \right) - (\beta_s + \beta_a)be^* - \mu_h e^*$$

$$0 = \frac{hs^* be^* (\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + g} - (\beta_s + \beta_a)be^* - \mu_h e^*$$

$$0 = e^* \left[\frac{hs^* b (\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + g} - (\beta_s + \beta_a)b - \mu_h \right]$$

$$e^* = 0 \text{ atau}$$

$$\frac{hs^* b (\beta_s + \beta_a)}{\mu_h + g} - (\beta_s + \beta_a)b - \mu_h = 0 \quad (iii)$$

Dengan mensubstitusikan $e^* = 0$, pada persamaan (3.13c) dan (3.13d) dan kemudian disubstitusikan hasilnya pada persamaan (3.13a) diperoleh titik bebas penyakit $H_1 = (1,0,0,0)$.

Dari persamaan (iii) diperoleh

$$\begin{aligned} &hs^*b(\beta_s + \beta_a) - (\beta_s + \beta_a)b - \mu_h = 0 \\ &\frac{\mu_h + g}{hs^*b(\beta_s + \beta_a)} = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h \\ &hs^*b(\beta_s + \beta_a) = (\mu_h + g)((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h) \\ &s^* = \frac{(\mu_h + g)((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)}{b(\beta_s + \beta_a)h} \end{aligned} \quad (iv)$$

Substitusikan persamaan (iv) ke persamaan (3.13a), diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_h - hs^*(i_s^* + i_a^*) - \mu_h s^* \\ hs^*(i_s^* + i_a^*) &= \mu_h - \mu_h s^* \\ (i_s^* + i_a^*) &= \frac{\mu_h - \mu_h s^*}{hs^*} \\ (i_s^* + i_a^*) &= \frac{\mu_h}{hs^*} - \frac{\mu_h}{h} \\ (i_s^* + i_a^*) &= \frac{\mu_h}{\left[\frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + g)}{b(\beta_s + \beta_a)} \right]} - \frac{\mu_h}{h} \\ (i_s^* + i_a^*) &= \frac{b(\beta_s + \beta_a)\mu_h}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + g)} - \frac{\mu_h}{h} \\ (i_s^* + i_a^*) &= \frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + g)h} \end{aligned} \quad (v)$$

Substitusikan persamaan (iv) dan (v) ke persamaan (3.13b), diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= hs^*(i_s^* + i_a^*) - (\beta_s + \beta_a)be^* - \mu_h e^* \\ (\beta_s + \beta_a)be^* + \mu_h e^* &= hs^*(i_s^* + i_a^*) \\ e^*((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h) &= hs^*(i_s^* + i_a^*) \\ e^* &= \frac{hs^*(i_s^* + i_a^*)}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)} \end{aligned}$$

$$e^* = \frac{h \left[\frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + g)}{b(\beta_s + \beta_a)h} \right] \left[\frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + g)h} \right]}{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)}$$

$$e^* = \frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)} \quad (vi)$$

Substitusikan persamaan (vi) ke persamaan (i) dan (ii), diperoleh

$$i_s^* = \frac{\beta_s b e^*}{\mu_h + g}$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s \mu_h [\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{(\mu_h + g)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a b e^*}{\mu_h + g}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a \mu_h [\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{(\mu_h + g)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

Sehingga didapatkan titik endemi $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$ dengan

$$s^* = \frac{((\beta_s + \beta_a)b + \mu_h)(\mu_h + g)}{b(\beta_s + \beta_a)h}$$

$$e^* = \frac{\mu_h[\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_s^* = \frac{\beta_s \mu_h [\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{(\mu_h + g)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

$$i_a^* = \frac{\beta_a \mu_h [\mu_h(\mu_h + g) + b(\beta_s + \beta_a)(h - (\mu_h + g))]}{(\mu_h + g)b(\beta_s + \beta_a)h(b(\beta_s + \beta_a) + \mu_h)}$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 4. Perhitungan Analisa Kestabilan Titik G_2

Persamaan

$$\frac{ds}{dt} = \mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s$$

$$\frac{de}{dt} = hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e$$

$$\frac{di_s}{dt} = \beta_s be - \mu_h i_s - ci_s$$

$$\frac{di_a}{dt} = \beta_a be - \mu_h i_a - ci_a$$

$$\frac{dq}{dt} = c(i_s + i_a) - (\mu_h + g)q,$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matrik Jacobian

$$J(s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*) = \begin{bmatrix} -h(i_s^* + i_a^*) - \mu_h & 0 & -hs^* & -hs^* & 0 \\ h(i_s^* + i_a^*) & -(\beta_s + \beta_a)b - \mu_h & hs^* & hs^* & 0 \\ 0 & \beta_s b & -(\mu_h + c) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -(\mu_h + c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_h + g) \end{bmatrix}$$

Untuk $G_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*, q^*)$, misalkan

$$v = h(i_s^* + i_a^*)$$

$$w = v + \mu_h$$

$$x = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h$$

$$y = (\mu_h + c)$$

$$z = (\mu_h + g)$$

$$[J - \lambda I] = \begin{bmatrix} -w - \lambda & 0 & -hs^* & -hs^* & 0 \\ v & -x - \lambda & hs^* & hs^* & 0 \\ 0 & \beta_s b & -y - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[J - \lambda I] = (-w - \lambda) \begin{bmatrix} -x - \lambda & hs^* & hs^* & 0 \\ \beta_s b & -y - \lambda & 0 & 0 \\ \beta_a b & 0 & -y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix}$$

$$+ (-hs^*) \begin{bmatrix} v & -x - \lambda & hs^* & 0 \\ 0 & \beta_s b & 0 & 0 \\ 0 & \beta_a b & -y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix}$$

$$- (-hs^*) \begin{bmatrix} v & -x - \lambda & hs^* & 0 \\ 0 & \beta_s b & -y - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$0 = (-w - \lambda) \left[(-x - \lambda) \begin{bmatrix} -y - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix} \right.$$

$$- (hs^*) \begin{bmatrix} \beta_s b & 0 & 0 \\ \beta_a b & -y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix}$$

$$+ (hs^*) \begin{bmatrix} \beta_s b & -y - \lambda & 0 \\ \beta_a b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix}$$

$$+ (-hs^*) \left(v \begin{bmatrix} \beta_s b & 0 & 0 \\ \beta_a b & -y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$\left. - (-hs^*) \left(v \begin{bmatrix} \beta_s b & -y - \lambda & 0 \\ \beta_a b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z - \lambda \end{bmatrix} \right) \right]$$

$$0 = (-w - \lambda) [(-x - \lambda)(-y - \lambda)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$- (hs^*)(\beta_s b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$+ (hs^*)(\beta_a b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)]$$

$$+ (-hs^*)(v)(\beta_s b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$+ (-hs^*)(v)(\beta_a b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$0 = (-w - \lambda)(-x - \lambda)(-y - \lambda)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$- (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_s b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$+ (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_a b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$+ (-hs^*)(v)(\beta_s b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$+ (-hs^*)(v)(\beta_a b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)$$

$$\begin{aligned}
0 &= (-w - \lambda)(-x - \lambda)(-y - \lambda)(-y - \lambda)(-z - \lambda) \\
&\quad - (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_s b)(-y - \lambda)(-z - \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_a b)(-y - \lambda)(-z - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_s b)(-y - \lambda)(-z - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_a b)(-y - \lambda)(-z - \lambda)
\end{aligned}$$

kalikan dengan (-1)

$$\begin{aligned}
0 &= (w + \lambda)(x + \lambda)(y + \lambda)(y + \lambda)(z + \lambda) \\
&\quad - (hs^*)(w + \lambda)(\beta_s b)(y + \lambda)(z + \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(w + \lambda)(\beta_a b)(y + \lambda)(z + \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(v)(\beta_s b)(y + \lambda)(z + \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(v)(\beta_a b)(y + \lambda)(z + \lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda^5 + \lambda^4(w + x + 2y + z) \\
&\quad + \lambda^3(wz + xz + 2yz + 2wy + 2xy + wx + y^2) \\
&\quad + \lambda^2(2wyz + 2xyz + wxz + y^2z + wy^2 + xy^2 \\
&\quad + 2wxy) + \lambda(wy^2z + xy^2z + 2wxyz + wxy^2) \\
&\quad + wxy^2z) \\
&\quad - (hs^*)(\beta_s b)(\lambda^3 + \lambda^2(w + y + z) + \lambda(yz + wy + wz) + wyz) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_a b)(\lambda^3 + \lambda^2(w + y + z) + \lambda(yz + wy + wz) + wyz) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_s b)(v\lambda^2 + v\lambda(y + z) + vyz) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_a b)(v\lambda^2 + v\lambda(y + z) + vyz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^5 + \lambda^4(w + x + 2y + z) \\
&\quad + \lambda^3(wz + xz + 2yz + 2wy + 2xy + wx + y^2 + (hs^*)b(\beta_a \\
&\quad \quad - \beta_s)) \\
&\quad + \lambda^2(2wyz + 2xyz + wxz + y^2z + wy^2 + xy^2 + 2wxy \\
&\quad \quad - (hs^*)(\beta_s b)(w + y + z) \\
&\quad \quad + (hs^*)(\beta_a b)(w + y + z) + (hs^*)(\beta_s b)v \\
&\quad \quad + (hs^*)(\beta_a b)v) \\
&\quad + \lambda(wy^2z + xy^2z + 2wxyz + wxy^2 \\
&\quad \quad - (hs^*)(\beta_s b)(yz + wy + wz) \\
&\quad \quad + (hs^*)(\beta_a b)(yz + wy + wz) \\
&\quad \quad + (hs^*)(\beta_s b)v(y + z) + (hs^*)(\beta_a b)v(y + z)) \\
&\quad + (wxy^2z - (hs^*)(\beta_s b)(wyz) + (hs^*)(\beta_a b)(wyz) \\
&\quad \quad + (hs^*)(\beta_s b)(vyz) + (hs^*)(\beta_a b)(vyz))
\end{aligned}$$

atau $\lambda^5 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda^1 + A_5 = 0$

dengan

$$A_1 = w + x + 2y + z$$

$$A_2 = wz + xz + 2yz + 2wy + 2xy + wx + y^2 + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)$$

$$A_3 = 2wyz + 2xyz + wxz + y^2z + wy^2 + xy^2 + 2wxy \\ + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(w + y + z) \\ + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)v$$

$$A_4 = wy^2z + xy^2z + 2wxyz + wxy^2 \\ + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(yz + wy + wz) \\ + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)v(y + z)$$

$$A_5 = wxy^2z + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(wyz) + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)(vyz)$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 5. Perhitungan Analisa Kestabilan Titik H_2

Persamaan

$$\frac{ds}{dt} = \mu_h - hs(i_s + i_a) - \mu_h s$$

$$\frac{de}{dt} = hs(i_s + i_a) - (\beta_s + \beta_a)be - \mu_h e$$

$$\frac{di_s}{dt} = \beta_s be - \mu_h i_s - gi_s$$

$$\frac{di_a}{dt} = \beta_a be - \mu_h i_a - gi_a$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matrik jacobian

$$J(s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$$

$$= \begin{bmatrix} -h(i_s^* + i_a^*) - \mu_h & 0 & -hs^* & -hs^* \\ h(i_s^* + i_a^*) & -(\beta_s + \beta_a)b - \mu_h & hs^* & hs^* \\ 0 & \beta_s b & -(\mu_h + g) & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -(\mu_h + g) \end{bmatrix}$$

Untuk $H_2 = (s^*, e^*, i_s^*, i_a^*)$, misalkan

$$v = h(i_s^* + i_a^*)$$

$$w = v + \mu_h$$

$$x = (\beta_s + \beta_a)b + \mu_h$$

$$y = (\mu_h + g)$$

$$[J - \lambda I] = \begin{bmatrix} -w - \lambda & 0 & -hs^* & -hs^* \\ v & -x - \lambda & hs^* & hs^* \\ 0 & \beta_s b & -y - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_a b & 0 & -y - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det[J - \lambda I] &= (-w - \lambda) \begin{bmatrix} -x - \lambda & hs^* & hs^* \\ \beta_s b & -y - \lambda & 0 \\ \beta_a b & 0 & -y - \lambda \end{bmatrix} \\ &+ (-hs^*) \begin{bmatrix} v & -x - \lambda & hs^* \\ 0 & \beta_s b & 0 \\ 0 & \beta_a b & -y - \lambda \end{bmatrix} \\ &- (-hs^*) \begin{bmatrix} v & -x - \lambda & hs^* \\ 0 & \beta_s b & -y - \lambda \\ 0 & \beta_a b & 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (-w - \lambda) \left[(-x - \lambda) \begin{bmatrix} -y - \lambda & 0 \\ 0 & -y - \lambda \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - (hs^*) \begin{bmatrix} \beta_s b & 0 \\ \beta_a b & -y - \lambda \end{bmatrix} + (hs^*) \begin{bmatrix} \beta_s b & -y - \lambda \\ \beta_a b & 0 \end{bmatrix} \right] \\
&\quad + (-hs^*) \begin{bmatrix} (v) \begin{bmatrix} \beta_s b & 0 \\ \beta_a b & -y - \lambda \end{bmatrix} \\ - (-hs^*) \begin{bmatrix} (v) \begin{bmatrix} \beta_s b & -y - \lambda \\ \beta_a b & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
0 &= (-w - \lambda) [(-x - \lambda)(-y - \lambda)(-y - \lambda) - (hs^*)(\beta_s b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_a b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_s b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_a b)(-y - \lambda) \\
0 &= (-w - \lambda)(-x - \lambda)(-y - \lambda)(-y - \lambda) \\
&\quad - (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_s b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_a b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_s b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_a b)(-y - \lambda) \\
0 &= (-w - \lambda)(-x - \lambda)(-y - \lambda)(-y - \lambda) \\
&\quad - (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_s b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(-w - \lambda)(\beta_a b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_s b)(-y - \lambda) \\
&\quad + (-hs^*)(v)(\beta_a b)(-y - \lambda) \\
0 &= (w + \lambda)(x + \lambda)(y + \lambda)(y + \lambda) - (hs^*)(w + \lambda)(\beta_s b)(y + \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(w + \lambda)(\beta_a b)(y + \lambda) \\
&\quad + (hs^*)(v)(\beta_s b)(y + \lambda) + (hs^*)(v)(\beta_a b)(y + \lambda) \\
0 &= (\lambda^4 + \lambda^3(w + x + 2y) + \lambda^2(2wy + 2xy + wx + y^2) \\
&\quad + \lambda(wy^2 + xy^2 + 2wxy) + wxy^2) \\
&\quad - (hs^*)(\beta_s b)(\lambda^2 + \lambda(y + w) + wy) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_a b)(\lambda^2 + \lambda(y + w) + wy) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_s b)(v\lambda + vy) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_a b)(v\lambda + vy) \\
0 &= \lambda^4 + \lambda^3(w + x + 2y) \\
&\quad + \lambda^2(2wy + 2xy + wx + y^2 - (hs^*)(\beta_s b) + (hs^*)(\beta_a b)) \\
&\quad + \lambda(wy^2 + xy^2 + 2wxy - (hs^*)(\beta_s b)(y + w) \\
&\quad + (hs^*)(\beta_a b)(y + w) + (hs^*)(\beta_s b)v \\
&\quad + (hs^*)(\beta_a b)v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(wxy^2 - (hs^*)(\beta_s b)(wy) + (hs^*)(\beta_a b)(wy) \\
 &\quad + (hs^*)(\beta_s b)(vy) + (hs^*)(\beta_a b)(vy)) \\
 \text{atau } &\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4 = 0 \\
 \text{dengan} & \\
 A_1 &= w + x + 2y \\
 A_2 &= 2wy + 2xy + wx + y^2 + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s) \\
 A_3 &= wy^2 + xy^2 + 2wxy + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(y + w) \\
 &\quad + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)v \\
 A_4 &= wxy^2 + (hs^*)b(\beta_a - \beta_s)(wy) + (hs^*)b(\beta_s + \beta_a)(vy)
 \end{aligned}$$



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 6. Listing Program Model Endemi dengan Karantina

```
function epid = epidemikg(t,y)
h = 0.45;
mh = 1/(65*365); bs = 0.25 ; ba =0.75;
b = 1/2.5; c = 1/5; g = 1/14;
epid= [mh-h*y(1)*(y(3)+y(4))-mh*y(1);
       h*y(1)*(y(3)+y(4))-(bs+ba)*b*y(2)-mh*y(2);
       bs*b*y(2)-mh*y(3)-c*y(3);
       ba*b*y(2)-mh*y(4)-c*y(4);
       c*(y(3)+y(4))-(mh+g)*y(5);
       g*y(5)-mh*y(6)];

function epidemi
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-7);
figure(1);
[t,y] = ode23(@epidemikg,[0 200000],[0.15 0.3
0.0825 0.2475 0.12 0.1],options);
plot(t,y(:,1),'r',t,y(:,2),'y',t,y(:,3),'g',t,y(:,4)
),'k',t,y(:,5),'b','LineWidth',2.5);
title('Grafik Solusi');
xlabel('Time t');
ylabel('S,E,Is,Ia,Q');grid;
legend('S','E','Is','Ia','Q');

figure(2);
[t,y] = ode23(@epidemikg,[0 200000],[0.15 0.3
0.0825 0.2475 0.12 0.1],options);
plot(t,y(:,6),'r','LineWidth',2.5);
title('Perilaku kelas Recovered dengan karantina
terhadap waktu');
xlabel('Time t');
ylabel('Recovered');grid;
```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 7. Listing Program Model Endemi tanpa Karantina

```
function epid = epidemikn(t, y)
h = 0.45;
mh = 1/(65*365); bs = 0.25 ; ba =0.75;
b = 1/2.5; g = 1/14;
epid= [mh-h*y(1)*(y(3)+y(4))-mh*y(1);
       h*y(1)*(y(3)+y(4))-(bs+ba)*b*y(2)-mh*y(2);
       bs*b*y(2)-mh*y(3)-g*y(3);
       ba*b*y(2)-mh*y(4)-g*y(4);
       g*(y(3)+y(4))-mh*y(5)];
```

```
function epidemi2
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-7);
figure(3);
[t,y] = ode23(@epidemikn,[0 200000],[0.15 0.3
0.1125 0.3375 0.1],options);
plot(t,y(:,1),'r',t,y(:,2),'y',t,y(:,3),'g',t,y(:,4)
),'k','LineWidth',2.5);
title('Grafik Solusi');
xlabel('Time t');
ylabel('S,E,Is,Ia');grid;
legend('S','E','Is','Ia');

figure(4);
[t,y] = ode23(@epidemikn,[0 200000],[0.15 0.3
0.1125 0.3375 0.1],options);
plot(t,y(:,5),'r','LineWidth',2.5);
title('Perilaku kelas Recovered tanpa karantina
terhadap waktu');
xlabel('time t');
ylabel('Recovered');grid;
```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

