ESTIMASI BATAS ATAS MINIMAL PADA MODULUS KOEFISIEN FUNGSI *STARLIKE*

SKRIPSI

oleh
CYNTHIA ALVIONITA FERIMA
0910940022-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013

ESTIMASI BATAS ATAS MINIMAL PADA MODULUS KOEFISIEN FUNGSI *STARLIKE*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh

CYNTHIA ALVIONITA FERIMA
0910940022-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

oleh
CYNTHIA ALVIONITA FERIMA
0910940022

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 28 Januari 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Prof. Dr. Marjono, M.Phil
NIP. 196211161988031004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**Cynthia Alvionita Ferima**
NIM	**:**	**0910940022**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis skrpsi berjudul	**:**	**Estimasi Batas Atas Minimal Pada Modulus Koefisien Fungsi *Starlike***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 28 Januari 2013
yang menyatakan,

Cynthia Alvionita Ferima
NIM 0910940022

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

ESTIMASI BATAS ATAS MINIMAL PADA MODULUS KOEFISIEN FUNGSI *STARLIKE*

ABSTRAK

Dalam fungsi univalen terdapat beberapa macam fungsi, yaitu fungsi basilevic, fungsi hadamard, fungsi konveks dan fungsi *starlike*. Pada skripsi ini dianalisis beberapa modulus koefisien fungsi *starlike* untuk memperoleh estimasi batas atas minimal koefisien tersebut menggunakan ketaksamaan segitiga dan transformasi Mobius.

Kata kunci : koefisien fungsi *starlike*, batas atas minimal, transformasi Mobius.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

ESTIMATION OF MINIMUM UPPER BOUNDARY ON THE MODULUS OF STARLIKE FUNCTION COEFFICIENT

ABSTRACT

The univalent function has many kind of functions such as basilevic function, hadamard function, convex function and starlike function. In this paper, the analysis of some modulus of starlike function coefficient for the result is estimation minimum upper boundary of coefficient use by triangle inequality and Mobius transformation.

Keywords : coefficients of starlike function, minimum upper boundary, Mobius transformation.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan, dan petunjuk-Nya, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Banyak pihak yang telah memberikan bantuan dalam penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. Marjono M, Phil. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Drs. M. Muslikh, M.Si. dan Ratno Bagus EW, SSi.,MSi.,Ph.D selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Al-Ghofari, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Sobri Abusini, MT. selaku Ketua Program Studi Matematika, dan Dra.Endang Wahyu Handamari,MSi. selaku dosen penasehat akademik.
4. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Heru Purnomo (Papa), Siti Kystiowati (Mama), Adek Iqbal dan Adek Alya yang selalu mengiringi penulis dengan segala doa, bantuan, dan motivasi.
6. Teman-teman seperjuangan Matematika B 2009, atas dukungan, bantuan, dan doanya.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan tidak pernah luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun, melalui email ke alamat calvionita@gmail.com.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 28 Januari 2013

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR SIMBOL xv
DAFTAR LAMPIRAN xvii

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penulisan 3

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1 Bilangan Kompleks dan Aljabarnya 5
2.1.1 Definisi Bilangan Kompleks 5
2.1.2 Sifat-Sifat Aljabar Bilangan Kompleks 5
2.1.3 Definisi Modulus 6
2.1.4 Definisi Sifat Ketaksamaan Segitiga 6
2.1.5 Definisi Cakram 6
2.1.6 Definisi Daerah Terbuka 7

2.2 Fungsi Kompleks 7
2.2.1 Definisi Fungsi Kompleks 7
2.2.2 Definisi Fungsi Analitik 7
2.2.3 Definisi Deret Taylor dan Maclaurin 8
2.2.4 Definisi Transformasi Mobius 8
2.2.5 Lemma A 8
2.2.6 Lemma B 8

2.3 Fungsi Univalen 9
2.3.1 Definisi Fungsi Univalen 9

2.3.2 Definisi Fungsi *Starlike* 9

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN 11
3.1 Teorema 3.1 11
3.2 Teorema 3.2..... 18

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN 25
4.1 Kesimpulan 25
4.2 Saran 25

DAFTAR PUSTAKA 27
LAMPIRAN 29

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$\in$	elemen / anggota
$\subseteq$	himpunan bagian
$\mathbb{C}$	himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{R}$	himpunan semua bilangan riil
S	himpunan fungsi univalen
$D(z_0, r)$	cakram dengan titik pusat z_0 berjari-jari r
D	cakram satuan di $\mathbb{C}$
G	daerah subset $\mathbb{C}$
k, n	himpunan bilangan bulat
S^*	himpunan fungsi *starlike*
z	variabel kompleks
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5	elemen dari $\mathbb{C}$
$\gamma, \eta, \mu, \xi, \zeta, r, \varepsilon$	elemen dari $\mathbb{R}$
$a, b, c, d, z_0, \overline{z_0}$	konstanta dari $\mathbb{C}$
p	titik pada D
$\blacksquare$	akhir dari pembuktian

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran Halaman
Lampiran 1 *Listing Program.* 29

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebuah fungsi $f(z)$ disebut univalen dalam sebuah domain G jika pemetaan satu-satu (onto) G ke dalam bayangannya $f(G)$ dan jika $f(z)$ memenuhi kondisi $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \in G, z_2 \in G$ maka $z_1 = z_2$. Fungsi univalen dapat dikatakan sebagai fungsi reguler (analitik) di dalam G dan dapat dikatakan sebagai fungsi yang terdefinisi pada cakram unit terbuka $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Jika $g(z)$ adalah reguler di dalam D maka $g(z)$ mempunyai ekspansi deret Maclaurin berikut.

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Sebagai langkah utama terhadap normalisasi pada deret Maclaurin di atas adalah membuat kondisi $b_0 = 0$ dan $b_1 = 1$ dengan cara mengurangi b_0 yakni $g(z) - b_0$. Akibatnya, jika $g'(z_0) = 0$ maka $g(z)$ tidak univalen di sekitar z_0, jika $g(z)$ univalen di D maka $b_1 = g'(0) \neq 0$. Oleh sebab itu,

$$f(z) \equiv \frac{(g(z) - b_0)}{b_1}$$

jika $g(z)$ univalen di G maka $f(z)$ univalen di domain yang sama dan sebaliknya, jika $f(z)$ adalah univalen di G maka $g(z)$ juga univalen. Keadaan $\frac{b_n}{b_1} = a_n$ dalam ekspansi deret Maclaurin disebut bentuk ‘normalisasi’ berikut.

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, z \in D. \qquad (1.1)$$

$f(z)$ disebut fungsi univalen ternormalisir karena berdasarkan konjektur Bieberbach jika memenuhi kondisi $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$ pada persamaan (1.1). Koleksi semua fungsi yang memiliki asumsi

bahwa semua fungsi dinormalisasi adalah reguler dan univalen di D dinotasikan dengan S

(Goodman, 1983).

Sebuah fungsi $f \in S$ dikatakan *starlike* (grafik fungsi *starlike* pada Lampiran) jika domain G adalah *starlike* sehubungan dengan daerah asal. Fungsi *starlike* dinotasikan oleh S^* dan $f \in S$ adalah *starlike* jika dan hanya jika memenuhi kondisi geometri sebagai berikut.

$$Re\ \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0. \tag{1.2}$$

Kondisi geometri di atas menunjukkan bahwa kuantitas $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ termasuk fungsi analitik ke kelas P di bawah ini

$$p(z) = 1 + \mathrm{c}_1\mathrm{z} + \mathrm{c}_2\mathrm{z}^2 + \mathrm{c}_3\mathrm{z}^3 + \cdots, \tag{1.3}$$

dengan $p(z)$ mempunyai bagian riil positif pada D

(Babalola, 2007).

Pada skripsi (Ramadhani, 2009) dibahas mengenai pertidaksamaan koefisien fungsi konveks dan *starlike*. Skripsi ini hanya membahas ketaksamaan koefisien pada fungsi *starlike* ternormal. Skripsi ini memperhitungkan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|$, $\left|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \eta a_2^3\right|$, $\left|a_5 - \mu a_2^2 a_3\right|$ dan $\left|a_5 - \xi a_2 a_4 - \zeta a_2^3\right|$ untuk suatu parameter $\gamma, \eta, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$ dengan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike* dan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|$, $\left|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \gamma a_2^3\right|$, $\left|a_5 - \gamma a_2^2 a_3\right|$ dan $\left|a_5 - \gamma a_2 a_4 - \gamma a_2^3\right|$ untuk suatu parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ dengan $(\gamma = \eta = \mu = \xi = \zeta)$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dari skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana perhitungan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|, |a_4 - \gamma a_2 a_3 - \eta a_2^3|, |a_5 - \mu a_2^2 a_3|$, dan $|a_5 - \xi a_2 a_4 - \zeta a_2^3|$ untuk suatu parameter $\gamma, \eta, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$ dan koefisien $a_1\, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike*,

2. Bagaimana perhitungan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|$, $|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \gamma a_2^3|$, $|a_5 - \gamma a_2^2 a_3|$, dan $|a_5 - \gamma a_2 a_4 - \gamma a_2^3|$ untuk suatu parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ dengan $(\gamma = \eta = \mu = \xi = \zeta)$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike*.

1.3 Tujuan Penulisan

Penulisan skripsi ini bertujuan sebagai berikut.

1. Untuk memperoleh perhitungan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|$, $|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \eta a_2^3|$, $|a_5 - \mu a_2^2 a_3|$ dan $|a_5 - \xi a_2 a_4 - \zeta a_2^3|$ untuk suatu parameter $\gamma, \eta, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike*,

2. Untuk memperoleh perhitungan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|$, $|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \gamma a_2^3|$, $|a_5 - \gamma a_2^2 a_3|$, dan $|a_5 - \gamma a_2 a_4 - \gamma a_2^3|$ untuk suatu parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ dengan $(\gamma = \eta = \mu = \xi = \zeta)$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan lemma yang mendukung dalam pembahasan skripsi ini yaitu, bilangan kompleks dan aljabarnya (subbab 2.1), fungsi kompleks (subbab 2.2), dan fungsi univalen (subbab 2.3).

2.1 Bilangan Kompleks dan Aljabarnya

Definisi 2.1.1 (Bilangan Kompleks)

Himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai keseluruhan semua besaran yang berbentuk $a + ib$ atau $a + bi$ dengan a dan b adalah bilangan riil dan $i^2 = -1$. Jika $z = a + ib$ merupakan suatu bilangan kompleks maka a dinamakan bagian riil (*real part*) z dinotasikan $Re(z)$ dan b dinamakan bagian imajiner (*imaginary part*) z dinotasikan $Im(z)$.

Oleh karena itu, $Re(z)$ dan $Im(z)$ adalah bilangan riil, jika $Re(z) = 0$ dan $Im(z) \neq 0$ maka z dinamakan imajiner murni (*pure imaginary*), misalnya bilangan $z = 3i$. Khususnya, jika $Re(z) = 0$ dan $Im(z) = 1$ maka $z = i$ dan bilangan ini dinamakan satuan imajiner (*imaginary unit*). Apabila $Im(z) = 0$ maka z menjadi bilangan riil $Re(z)$ dengan bilangan riil x sebagai bilangan kompleks dengan bentuk sebagai berikut.

$$z = x + 0i$$

dan $z_n = x_n + iy_n,\ n = 1, 2, 3$ menyatakan tiga bilangan kompleks sebarang

(Pallouras, 1975).

Sifat-Sifat 2.1.2 (Aljabar Bilangan Kompleks)

a. Hukum Komutatif

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$

$z_1 z_2 = z_2 z_1,$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ ,$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}\ ,$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$,

b. Hukum Asosiatif

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2)z_3$,

$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)$,

c. Hukum Distributif (penyebaran)

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$,

$\overline{z_1(z_2 + z_3)} = \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1 z_3}$,

d. $\bar{\bar{z}} = z$,

e. $z\bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

(Pallouras, 1975).

Definisi 2.1.3 (Modulus)

Jika untuk sebarang bilangan kompleks $z = a + ib$ maka modulus z ditulis sebagai $|z|$ dan didefinisikan sebagai panjang vektor z sebagai berikut.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definisi di atas menjelaskan bahwa modulus z merupakan jarak titik (0,0) ke titik (a, b) dan modulus z merupakan bilangan yang tidak negatif

(Pallouras, 1975).

Definisi 2.1.4 (Sifat Ketaksamaan Segitiga)

Misalkan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka akan berlaku sifat ketaksamaan segitiga sebagai berikut.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(Suryanto, 1993).

Bidang Kompleks 2.1.5 (Definisi Cakram)

Pada bidang kompleks $\mathbb{C}$, apabila titik $z_0 \in \mathbb{C}$ dan $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ maka himpunan titik-titik $D(z_0, r)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

dan disebut cakram terbuka dengan jari-jari r yang berpusat di z_0. Jika suatu himpunan titik-titik dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

maka himpunan titik-titik $\overline{D}(z_0, r)$ disebut cakram tertutup dengan jari-jari r yang berpusat di z_0. $D(0,1)$ disebut cakram satuan dan untuk selanjutnya akan dinotasikan dengan

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

(Graham dan Kohr, 2003).

Definisi 2.1.6 (Daerah Terbuka)

Himpunan $G \subseteq \mathbb{C}$ disebut daerah terbuka jika untuk setiap titik $z_0 \in G$ terdapat $D(z_0, r) \subseteq G$

(Suryanto, 1993).

2.2 Fungsi Kompleks

Definisi 2.2.1 (Fungsi Kompleks)

Dalam bentuk, definisi fungsi kompleks adalah mirip dengan definisi fungsi peubah riil. Jadi, dengan menggantikan peubah tak bebas x dengan z dan peubah bebas y dengan w, suatu definisi $y = f(x)$ dapat digunakan untuk mendefinisikan suatu fungsi kompleks $w = f(z)$

(Pallouras, 1975).

Definisi 2.2.2 (Fungsi Analitik)

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik di titik z_0 jika turunannya ada di semua titik pada suatu lingkungan z_0. Jadi, fungsi analitik selalu mempunyai turunan atau differensial sedangkan fungsi yang terdifferensial belum tentu analitik

(Pallouras, 1975).

Definisi 2.2.3. (Deret Taylor dan Maclaurin)

Misalkan $f(z)$ analitik dalam $G \subseteq \mathbb{C}$ dan $z_0 \in G$ maka $f(z)$ dapat diekspansikan menjadi deret pangkat yang koefisiennya ditentukan dengan cara menghitung turunan fungsi f pada z_0. Ekspansi deret Taylor dituliskan sebagai berikut.

$$f(z) = f(\mathrm{z}_0) + f'(\mathrm{z}_0)(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) + \frac{f''(\mathrm{z}_0)}{2!}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\mathrm{z}_0)}{\mathrm{n}!}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}} + \cdots$$

jika $z_0 = 0$ maka disebut dengan deret Maclaurin

(McMahon, 2008).

Definisi 2.2.4 (Transformasi Mobius)

Pemetaan $w = \frac{1+z}{1-z}$ dan $z = \frac{w-1}{w+1}$ dinamakan transformasi Mobius

(Goodman, 1983).

Lemma 2.2.5 (Lemma A)

Jika $p \in P$ dan $|c_k| \leq 2, k = 1,2,3,\ldots$. maka persamaan tersebut digunakan untuk mencapai transformasi Mobius berikut.

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} \tag{2.1}$$

(Babalola, 2007).

Lemma 2.2.6 (Lemma B)

Jika $p \in P$ maka

$$\left|c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right| \leq 2 - \frac{|c_1|^2}{2}. \tag{2.2}$$

Kesamaan berlaku untuk fungsi berikut.

$$p(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}\,(c_1 + \varepsilon\overline{c_1})z + \varepsilon z^2}{1 - \frac{1}{2}\,(c_1 - \varepsilon\overline{c_1})z - \varepsilon z^2}\,, |\varepsilon| = 1.$$

Dengan catatan bahwa ketaksamaan pada (2.2) dapat ditulis kembali menjadi persamaan berikut.

$$c_2 = \frac{1}{2}c_1^2 + \varepsilon\left(2 - \frac{1}{2}|c_1|^2\right), |\varepsilon| \leq 1. \tag{2.3}$$

(Babalola, 2007).

2.3 Fungsi Univalen

Definisi 2.3.1 (Fungsi Univalen)

Sebuah fungsi $f(z)$ disebut univalen dalam sebuah domain G jika pemetaan satu-satu (onto) G ke dalam bayangannya $f(G)$ dan $f(z)$ dikatakan univalen di dalam sebuah domain G jika memenuhi kondisi $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \in G, z_2 \in G$ maka $z_1 = z_2$

(Goodman, 1983).

Definisi 2.3.2 (Fungsi *Starlike*)

Sebuah fungsi $f \in S$ dikatakan *starlike* jika domain G adalah *starlike* sehubungan dengan daerah asal. Fungsi *starlike* dinotasikan dengan S^* dan fungsi $f \in S$ adalah *starlike* jika dan hanya jika memenuhi kondisi geometri sebagai berikut.

$$Re\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$$

(Duren, 1983).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas perhitungan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|$, $|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \eta a_2^3|$, $|a_5 - \mu a_2^2 a_3|$, dan $|a_5 - \xi a_2 a_4 - \zeta a_2^3|$ untuk suatu parameter $\gamma, \eta, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike* dan batas atas minimal dari beberapa modulus berikut $|a_4 - \gamma a_2 a_3|$, $|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \gamma a_2^3|$, $|a_5 - \gamma a_2^2 a_3|$, dan $|a_5 - \gamma a_2 a_4 - \gamma a_2^3|$ untuk suatu parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ dengan ($\gamma = \eta = \mu = \xi = \zeta$) dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike.*

Teorema 3.1

Misalkan $f(z)$ merupakan fungsi *starlike* yang diperoleh dari persamaan (1.1). Kemudian untuk suatu parameter $\gamma, \eta, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ seperti $1 - \gamma$, $1 - 2\mu$, $1 - \xi$, $1 - 2\zeta$, $1 - 2\xi - 2\zeta$ semua bilangan tidak negatif maka diperoleh beberapa ketaksamaan sebagai berikut.

$$|a_4 - \gamma a_2 a_3| \leq 4 - 6\gamma \,;\, \gamma \leq \frac{5}{9}, \tag{3.1}$$

$$|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \eta a_2^3| \leq 4 - 6\gamma - 8\eta \,;\, 3\gamma + 4\eta \leq \frac{5}{3}, \tag{3.2}$$

$$|a_5 - \mu a_2^2 a_3| \leq 5 - 12\mu \,;\, \mu \leq \frac{2}{9}, \tag{3.3}$$

$$|a_5 - \xi a_2 a_4 - \zeta a_3^2| \leq 5 - 8\xi - 9\zeta \,;\, 5\xi + 6\zeta \leq 2\,. \tag{3.4}$$

Bukti :

Diketahui bahwa $f(z)$ adalah *starlike* di mana $p \in P$ diperoleh sebagai berikut.

$$zf'(z) = p(z)f(z). \tag{3.5}$$

Beberapa koefisien dibandingkan pada kedua ruas dalam persamaan dengan menggunakan persamaan (1.1) dan persamaan (1.3).

Dari persamaan (3.5), diperoleh jika

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5 + \cdots$$

$$f'(z) = 1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + 5a_5z^4 + \cdots$$

maka hasilnya sebagai berikut.

$$zf'(z) = p(z)f(z).$$

$$\begin{aligned} z\,(1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + 5a_5z^4 + \cdots) \\ = (1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + \cdots)(z + a_2z^2 + \\ a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5 + \cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + 4a_4z^4 + 5a_5z^5 + \cdots) \\ = (z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5 + \cdots + \\ c_1z^2 + a_2c_1z^3 + a_3c_1z^4 + a_4c_1z^5 + a_5c_1z^6 + \cdots + \\ c_2z^3 + a_2c_2z^4 + a_3c_2z^5 + a_4c_2z^6 + a_5c_2z^7 + \cdots + \\ c_3z^4 + a_2c_3z^5 + a_3c_3z^6 + a_4c_3z^7 + a_5c_3z^8 + \cdots + \\ c_4z^5 + a_2c_4z^6 + a_3c_4z^7 + a_4c_4z^8 + a_5c_4z^9 + \cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + 4a_4z^4 + 5a_5z^5 + \cdots) \\ = (z + (a_2 + c_1)z^2 + (a_3 + a_2c_1 + c_2)z^3 + \\ (a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + c_3)z^4 + \\ (a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3 + c_4)z^5 + \cdots \end{aligned}$$

dengan cara menyetarakan koefisien antara ruas kiri dan ruas kanan maka diperoleh hasil sebagai berikut.

i). $$\begin{aligned} 2a_2 &= a_2 + c_1 \\ a_2 &= c_1 \end{aligned}$$

ii). $$\begin{aligned} a_3 + a_2c_1 + c_2 &= 3a_3 \\ c_1^2 + c_2 &= 2a_3 \\ a_3 &= \frac{c_1^2 + c_2}{2} \end{aligned}$$

iii). $a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + c_3 = 4a_4$

$$a_3c_1 + a_2c_2 + c_3 = 3a_4$$

$$\left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right)c_1 + c_1c_2 + c_3 = 3a_4$$

$$c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3 = 6a_4$$

$$\frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 = a_4$$

iv). $a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3 + c_4 = 5a_5$

$$a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3 + c_4 = 4a_5$$

$$\left(\frac{c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3}{6}\right)c_1 + \left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right)c_2 + c_1c_3 + c_4 = 4a_5$$

$$\left(\frac{c_1^4 + 3c_1^2c_2 + 2c_1c_3}{6}\right) + \left(\frac{c_1^2c_2 + c_2^2}{2}\right) + c_1c_3 + c_4 = 4a_5$$

$$\frac{1}{24}(c_1^4 + 3c_1^2c_2 + 2c_1c_3) + \frac{1}{8}(c_1^2c_2 + c_2^2) + \frac{1}{4}c_1c_3 + \frac{1}{4}c_4 = a_5$$

Jadi, dari perhitungan di atas diperoleh nilai koefisien-koefisien untuk a_2, a_3, a_4, dan a_5. Kemudian, nilai koefisien-koefisien tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan berikut.

$$\begin{aligned} a_4 - \gamma a_2a_3 &= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \gamma\left(c_1\left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \gamma\left(\frac{c_1^3 + c_1c_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \frac{1}{2}\gamma c_1^3 - \frac{1}{2}\gamma c_1c_2 \end{aligned}$$

$$= \frac{c_3}{3} + \frac{c_1 c_2 (1-\gamma)}{2} + \frac{c_1^3 (1-3\gamma)}{6}$$

$$= \frac{c_3}{3} + (1-\gamma)\frac{c_1}{2}\left\{c_2 + \frac{2(1-3\gamma)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right\}. \qquad (3.6)$$

$$a_4 - \gamma a_2 a_3 - \eta a_2^3 = \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1 c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \gamma c_1\left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right) - \eta c_1^3$$

$$= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1 c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \frac{1}{2}\gamma c_1^3 - \frac{1}{2}\gamma c_1 c_2 - \eta c_1^3$$

$$= \frac{c_3}{3} + \frac{1}{2}c_1 c_2 (1-\gamma) + c_1^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\gamma - \eta\right)$$

$$= \frac{c_3}{3} + (1-\gamma)\frac{c_1}{2}$$

$$\left(\left\{c_2 + \frac{2(1-3\gamma-6\eta)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right\}\right). \qquad (3.7)$$

$$a_5 - \mu a_2^2 a_3 = \frac{1}{24}(c_1^4 + 3c_1^2 c_2 + 2c_1 c_3) + \frac{1}{8}(c_1^2 c_2 + c_2^2) +$$

$$\frac{1}{4}c_1 c_3 + \frac{1}{4}c_4 - \mu c_1^2\left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{24}c_1^4 + \frac{1}{8}c_1^2 c_2 + \frac{1}{12}c_1 c_3 + \frac{1}{8}c_1^2 c_2 + \frac{1}{8}c_2^2 +$$

$$\frac{1}{4}c_1 c_3 + \frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{2}\mu c_1^4 - \frac{1}{2}\mu c_1^2 c_2$$

$$= \frac{c_4}{4} + \frac{c_1 c_3}{3} + \frac{c_2^2}{8} + (1-2\mu)\frac{c_1^2 c_2}{4} +$$

$$\frac{c_1^4}{24}(1-12\mu)$$

$$= \frac{c_4}{4} + \frac{c_1 c_3}{3} + \frac{c_2^2}{8} + (1-2\mu)$$

$$\left(\frac{c_1^2}{4}\left\{c_2 + \frac{1-12\mu}{3(1-2\mu)}\frac{c_1^2}{2}\right\}\right). \qquad (3.8)$$

$$
\begin{aligned}
a_5 - \xi a_2 a_4 - \zeta a_3^2 &= \frac{1}{24}(c_1^4 + 3c_1^2 c_2 + 2c_1 c_3) + \frac{1}{8}(c_1^2 c_2 + c_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{4} c_1 c_3 + \frac{1}{4} c_4 - \xi c_1 \left(\frac{c_1^3}{6} + \frac{c_1 c_2}{2} + \frac{c_3}{3} \right) - \\
&\quad \zeta \left(\frac{c_1^2 + c_2}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{24} c_1^4 + \frac{1}{8} c_1^2 c_2 + \frac{1}{12} c_1 c_3 + \frac{1}{8} c_1^2 c_2 + \frac{1}{8} c_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} c_1 c_3 + \frac{1}{4} c_4 - \frac{1}{6} \xi c_1^4 - \frac{1}{2} \xi {c_1}^2 c_2 - \\
&\quad \frac{1}{3} \xi c_1 c_3 - \frac{1}{4} \zeta c_1^4 - \frac{1}{2} \zeta c_1^2 c_2 - \frac{1}{4} \zeta c_2^2 \\
&= \frac{c_1^4}{4} \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{6} \xi - \zeta \right) + c_1^2 c_2 (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{2} \zeta) \\
&\quad + \frac{c_1 c_3}{3} (1 - \xi) + \frac{1}{4} c_2^2 \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) + \frac{c_4}{4} \\
&= \frac{c_4}{4} + (1 - \xi) \frac{c_1 c_3}{3} + (1 - 2\zeta) \frac{c_2^2}{8} + (1 - 2\xi \\
&\quad - 2\zeta) \frac{c_1^2}{4} \left\{ c_2 + \frac{1 - 4\xi - 6\zeta}{3(1 - 2\xi - 2\zeta)} \frac{c_1^2}{2} \right\}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Mengingat kembali dari pernyataan Teorema 3.1 beberapa bilangan riil, yaitu $1 - \gamma, 1 - 2\mu, 1 - \xi, 1 - 2\zeta,$ dan $1 - 2\xi - 2\zeta$ semua bilangan tidak bernilai negatif. Pada pembahasan kali ini, setiap c_2 (dalam tanda kurung kurawal) di eliminasi pada bentuk penyelesaian (3.6) − (3.9) menggunakan persamaan (2.3).

Pada penyelesaian (3.6),

$$
c_2 + \frac{2(1 - 3\gamma)}{3(1 - \gamma)} \frac{c_1^2}{2} = \frac{5 - 9\gamma}{3(1 - \gamma)} \frac{c_1^2}{2} + \varepsilon \left(2 - \frac{|c_1|^2}{2} \right) \qquad (3.10)
$$

di mana $2 - \frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.10) mencapai maksimum

untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $\gamma \leq \frac{5}{9}$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.1) dari Teorema 3.1). Jadi, modulus dari (3.10) sebagai berikut.

$$\left| c_2 + \frac{2(1-3\gamma)}{3(1-\gamma)} \frac{c_1^2}{2} \right| \leq \frac{2(5-9\gamma)}{3(1-\gamma)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.6) memberi hasil ketaksamaan (3.1) pada Teorema 3.1. Dengan cara yang sama untuk penyelesaian (3.7) – (3.9) menunjukkan masing-masing ketaksamaan (3.2) – (3.4) yang tertera pada Teorema 3.1.

Pada penyelesaian (3.7),

$$c_2 + \frac{2(1-3\gamma-6\eta)}{3(1-\gamma)} \frac{c_1^2}{2} = \frac{5-9\gamma-12\eta}{3(1-\gamma)} \frac{c_1^2}{2} + \varepsilon\left(2 - \frac{|c_1|^2}{2}\right) \tag{3.11}$$

di mana $2 - \frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.11) mencapai maksimum untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $3\gamma + 4\eta \leq \frac{5}{3}$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.2) dari Teorema 3.1). Jadi, modulus dari (3.11) sebagai berikut.

$$\left| c_2 + \frac{2(1-3\gamma-6\eta)}{3(1-\gamma)} \frac{c_1^2}{2} \right| \leq \frac{2(5-9\gamma-12\eta)}{3(1-\gamma)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.7) memberi hasil ketaksamaan (3.2) pada Teorema 3.1.

Pada penyelesaian (3.8),

$$c_2 + \frac{1-12\mu}{3(1-2\mu)} \frac{c_1^2}{2} = \frac{4-18\mu}{3(1-2\mu)} \frac{c_1^2}{2} + \varepsilon\left(2 - \frac{|c_1|^2}{2}\right) \tag{3.12}$$

di mana $2 - \frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.12) mencapai maksimum

untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $\mu \leq \frac{2}{9}$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.3) dari Teorema 3.1). Jadi, modulus dari (3.12) sebagai berikut.

$$\left| c_2 + \frac{1 - 12\mu}{3(1 - 2\mu)} \frac{c_1^2}{2} \right| \leq \frac{2(4 - 18\mu)}{3(1 - 2\mu)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.8) memberi hasil ketaksamaan (3.3) pada Teorema 3.1.

Pada penyelesaian (3.9),

$$c_2 + \frac{1 - 4\xi - 6\zeta}{3(1 - 2\xi - 2\zeta)} \frac{c_1^2}{2} = \frac{4 - 10\xi - 12\zeta}{3(1 - 2\xi - 2\zeta)} + \varepsilon\left(2 - \frac{|c_1|^2}{2}\right) \tag{3.13}$$

di mana $2 - \frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.13) mencapai maksimum untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $5\xi + 6\zeta \leq 2$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.4) dari Teorema 3.1). Jadi, modulus dari (3.13) sebagai berikut.

$$\left| c_2 + \frac{1 - 4\xi - 6\zeta}{3(1 - 2\xi - 2\zeta)} \frac{c_1^2}{2} \right| \leq \frac{2(4 - 10\xi - 12\zeta)}{3(1 - 2\xi - 2\zeta)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.9) memberi hasil ketaksamaan (3.4) pada Teorema 3.1. ■

Teorema 3.2

Misalkan $f(z)$ merupakan fungsi *starlike* yang diperoleh dari persamaan (1.1). Kemudian, jika untuk suatu parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ dengan $(\gamma = \eta = \mu = \xi = \zeta)$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ seperti $1 - \gamma$, $1 - 2\gamma$, dan $1 - 4\gamma$ semua bilangan tidak negatif maka diperoleh beberapa ketaksamaan sebagai berikut.

$$|a_4 - \gamma a_2 a_3| \leq 4 - 6\gamma \; ; \; \gamma \leq \frac{5}{9}, \tag{3.14}$$

$$|a_4 - \gamma a_2 a_3 - \gamma a_2^3| \leq 4 - 14\gamma \; ; \gamma \leq \frac{5}{21}, \tag{3.15}$$

$$|a_5 - \gamma a_2^2 a_3| \leq 5 - 12\gamma \; ; \gamma \leq \frac{2}{9}, \tag{3.16}$$

$$|a_5 - \gamma a_2 a_4 - \gamma a_3^2| \leq 5 - 17\gamma \; ; \gamma \leq \frac{2}{11}. \tag{3.17}$$

Bukti :

Diketahui bahwa $f(z)$ adalah *starlike* di mana $p \in P$ diperoleh dari persamaan (3.5). Beberapa koefisien dibandingkan pada kedua ruas dalam persamaan dengan menggunakan persamaan (1.1) dan persamaan (1.3). Dari persamaan (3.5), diperoleh jika

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \cdots$$

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + 5a_5 z^4 + \cdots$$

maka hasilnya sebagai berikut.

$$zf'(z) = p(z)f(z).$$

$$z\,(1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + 5a_5 z^4 + \cdots)$$
$$= (1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \cdots)(z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \cdots)$$

$$
\begin{aligned}
&(z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + 4a_4z^4 + 5a_5z^5 + \cdots) \\
&\quad = (z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5 + \cdots + \\
&\qquad c_1z^2 + a_2c_1z^3 + a_3c_1z^4 + a_4c_1z^5 + a_5c_1z^6 + \cdots + \\
&\qquad c_2z^3 + a_2c_2z^4 + a_3c_2z^5 + a_4c_2z^6 + a_5c_2z^7 + \cdots + \\
&\qquad c_3z^4 + a_2c_3z^5 + a_3c_3z^6 + a_4c_3z^7 + a_5c_3z^8 + \cdots + \\
&\qquad c_4z^5 + a_2c_4z^6 + a_3c_4z^7 + a_4c_4z^8 + a_5c_4z^9 + \cdots)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + 4a_4z^4 + 5a_5z^5 + \cdots) \\
&\quad = (z + (a_2 + c_1)z^2 + (a_3 + a_2c_1 + c_2)z^3 + \\
&\qquad (a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + c_3)z^4 + \\
&\qquad (a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3 + c_4)z^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

dengan cara menyetarakan koefisien antara ruas kiri dan ruas kanan maka diperoleh hasil sebagai berikut.

i). $2a_2 = a_2 + c_1$

$a_2 = c_1$

ii). $a_3 + a_2c_1 + c_2 = 3a_3$

$c_1^2 + c_2 = 2a_3$

$a_3 = \dfrac{c_1^2 + c_2}{2}$

iii). $a_4 + a_3c_1 + a_2c_2 + c_3 = 4a_4$

$a_3c_1 + a_2c_2 + c_3 = 3a_4$

$\left(\dfrac{c_1^2 + c_2}{2}\right)c_1 + c_1c_2 + c_3 = 3a_4$

$c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3 = 6a_4$

$\dfrac{1}{6}c_1^3 + \dfrac{1}{2}c_1c_2 + \dfrac{1}{3}c_3 = a_4$

iv). $a_5 + a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3 + c_4 = 5a_5$

$a_4c_1 + a_3c_2 + a_2c_3 + c_4 = 4a_5$

$$\left(\frac{c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3}{6}\right)c_1 + \left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right)c_2 + c_1c_3 + c_4 = 4a_5$$

$$\left(\frac{c_1^4 + 3c_1^2c_2 + 2c_1c_3}{6}\right) + \left(\frac{c_1^2c_2 + c_2^2}{2}\right) + c_1c_3 + c_4 = 4a_5$$

$$\frac{1}{24}(c_1^4 + 3c_1^2c_2 + 2c_1c_3) + \frac{1}{8}(c_1^2c_2 + c_2^2) + \frac{1}{4}c_1c_3 + \frac{1}{4}c_4 = a_5$$

Jadi, dari perhitungan di atas diperoleh nilai koefisien-koefisien untuk $a_2, a_3, a_4,$ dan a_5. Kemudian, nilai koefisien-koefisien tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
a_4 - \gamma a_2 a_3 &= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \gamma\left(c_1\left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \gamma\left(\frac{c_1^3 + c_1c_2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \frac{1}{2}\gamma c_1^3 - \frac{1}{2}\gamma c_1c_2 \\
&= \frac{c_3}{3} + \frac{c_1c_2(1-\gamma)}{2} + \frac{c_1^3(1-3\gamma)}{6} \\
&= \frac{c_3}{3} + (1-\gamma) \\
&\quad \left(\frac{c_1}{2}\left\{c_2 + \frac{2(1-3\gamma)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right\}\right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$
\begin{aligned}
a_4 - \gamma a_2 a_3 - \gamma a_2^3 &= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \gamma c_1\left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right) - \gamma c_1^3 \\
&= \frac{1}{6}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1c_2 + \frac{1}{3}c_3 - \frac{1}{2}\gamma c_1^3 - \frac{1}{2}\gamma c_1c_2 - \gamma c_1^3 \\
&= \frac{c_3}{3} + \frac{1}{2}c_1c_2(1-\gamma) + c_1^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\gamma - \gamma\right) \\
&= \frac{c_3}{3} + (1-\gamma)\frac{c_1}{2} \\
&\quad \left(\left\{c_2 + \frac{2(1-9\gamma)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right\}\right).
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5 - \gamma a_2^2 a_3 &= \frac{1}{24}(c_1^4 + 3c_1^2c_2 + 2c_1c_3) + \frac{1}{8}(c_1^2c_2 + c_2^2) + \\
&\quad \frac{1}{4}c_1c_3 + \frac{1}{4}c_4 - \gamma c_1^2\left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{24}c_1^4 + \frac{1}{8}c_1^2c_2 + \frac{1}{12}c_1c_3 + \frac{1}{8}c_1^2c_2 + \frac{1}{8}c_2^2 + \\
&\quad \frac{1}{4}c_1c_3 + \frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{2}\gamma c_1^4 - \frac{1}{2}\gamma c_1^2c_2 \\
&= \frac{c_4}{4} + \frac{c_1c_3}{3} + \frac{c_2^2}{8} + (1-2\gamma)\frac{c_1^2c_2}{4} + \\
&\quad \frac{c_1^4}{24}(1-12\gamma) \\
&= \frac{c_4}{4} + \frac{c_1c_3}{3} + \frac{c_2^2}{8} + (1-2\gamma) \\
&\quad \left(\frac{c_1^2}{4}\left\{c_2 + \frac{1-12\gamma}{3(1-2\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right\}\right).
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5 - \gamma a_2 a_4 - \gamma a_3^2 &= \frac{1}{24}(c_1^4 + 3c_1^2 c_2 + 2c_1 c_3) + \frac{1}{8}(c_1^2 c_2 + c_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{4}c_1 c_3 + \frac{1}{4}c_4 - \gamma c_1 (\frac{c_1^3}{6} + \frac{c_1 c_2}{2} + \frac{c_3}{3}) - \\
&\quad \gamma \left(\frac{c_1^2 + c_2}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{24}c_1^4 + \frac{1}{8}c_1^2 c_2 + \frac{1}{12}c_1 c_3 + \frac{1}{8}c_1^2 c_2 + \\
&\quad \frac{1}{8}c_2^2 + \frac{1}{4}c_1 c_3 + \frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{6}\gamma c_1^4 - \frac{1}{2}\gamma c_1^2 c_2 - \\
&\quad \frac{1}{3}\gamma c_1 c_3 - \frac{1}{4}\gamma c_1^4 - \frac{1}{2}\gamma c_1^2 c_2 - \frac{1}{4}\gamma c_2^2 \\
&= \frac{c_1^4}{4}\left(\frac{1}{6} - \frac{4}{6}\gamma - \gamma\right) + c_1^2 c_2 (\frac{1}{4} - \gamma) + \\
&\quad \frac{c_1 c_3}{3}(1-\gamma) + \frac{1}{4}c_2^2\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + \frac{c_4}{4} \\
&= \frac{c_4}{4} + (1-\gamma)\frac{c_1 c_3}{3} + (1-2\gamma)\frac{c_2^2}{8} + \\
&\quad (1-4\gamma)\frac{c_1^2}{4}\left\{c_2 + \frac{1-10\gamma}{3(1-4\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Mengingat kembali dari pernyataan Teorema 3.2 beberapa bilangan riil, yaitu $1-\gamma, 1-2\gamma$, dan $1-4\gamma$ semua bilangan tidak bernilai negatif. Pada pembahasan kali ini, setiap c_2 (dalam tanda kurung kurawal) di eliminasi pada bentuk penyelesaian (3.18) $-$ (3.21) menggunakan persamaan (2.3).

Pada penyelesaian (3.18),

$$
c_2 + \frac{2(1-3\gamma)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2} = \frac{5-9\gamma}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2} + \varepsilon\left(2 - \frac{|c_1|^2}{2}\right) \tag{3.22}
$$

di mana $2-\frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.22) mencapai maksimum untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $\gamma \leq \frac{5}{9}$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.14) dari Teorema 3.2). Jadi, modulus dari (3.22) sebagai berikut.

$$\left|c_2 + \frac{2(1-3\gamma)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right| \leq \frac{2(5-9\gamma)}{3(1-\gamma)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.18) memberi hasil ketaksamaan (3.14) pada Teorema 3.2. Dengan cara yang sama untuk penyelesaian (3.19) – (3.21) menunjukkan masing-masing ketaksamaan (3.15) – (3.17) yang tertera pada Teorema 3.2.

Pada penyelesaian (3.19),

$$c_2 + \frac{2(1-9\gamma)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2} = \frac{5-21\gamma}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2} + \varepsilon\left(2-\frac{|c_1|^2}{2}\right) \tag{3.23}$$

di mana $2-\frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.23) mencapai maksimum untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $\gamma \leq \frac{5}{21}$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.15) dari Teorema 3.2). Jadi, modulus dari (3.23) sebagai berikut.

$$\left|c_2 + \frac{2(1-9\gamma)}{3(1-\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right| \leq \frac{2(5-21\gamma)}{3(1-\gamma)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.19) memberi hasil ketaksamaan (3.15) pada Teorema 3.2.

Pada penyelesaian (3.20),

$$c_2 + \frac{1-12\gamma}{3(1-2\gamma)}\frac{c_1^2}{2} = \frac{4-18\gamma}{3(1-2\gamma)}\frac{c_1^2}{2} + \varepsilon\left(2-\frac{|c_1|^2}{2}\right) \tag{3.24}$$

di mana $2-\frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.24) mencapai maksimum untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $\gamma \leq \frac{2}{9}$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.16) dari Teorema 3.2). Jadi, modulus dari (3.24) sebagai berikut.

$$\left|c_2 + \frac{1-12\gamma}{3(1-2\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right| \leq \frac{2(4-18\gamma)}{3(1-2\gamma)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.20) memberi hasil ketaksamaan (3.16) pada Teorema 3.2.

Pada penyelesaian (3.21),

$$c_2 + \frac{1-10\gamma}{3(1-4\gamma)}\frac{c_1^2}{2} = \frac{4-22\gamma}{3(1-4\gamma)} + \varepsilon\left(2-\frac{|c_1|^2}{2}\right) \tag{3.25}$$

di mana $2-\frac{|c_1|^2}{2} \geq 0$, modulus dari (3.25) mencapai maksimum untuk $|c_1| = 2$ dengan syarat $\gamma \leq \frac{2}{11}$ (yang mana kondisi tersebut diberikan pada ketaksamaan (3.17) dari Teorema 3.2). Jadi, modulus dari (3.25) sebagai berikut.

$$\left|c_2 + \frac{1-10\gamma}{3(1-4\gamma)}\frac{c_1^2}{2}\right| \leq \frac{2(4-22\gamma)}{3(1-4\gamma)},$$

dengan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5, penyelesaian (3.21) memberi hasil ketaksamaan (3.17) pada Teorema 3.2. ■

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model analisis pada Teorema 3.1 diperhitungkan batas atas minimal dari keempat modulus untuk suatu parameter $\gamma, \eta, \mu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike* sehingga diperoleh hasil estimasi batas atas minimal pada modulus koefisien fungsi *starlike* dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5 maka penyelesaian (3.6) − (3.9) terbukti pada Teorema 3.1.

2. Model analisis pada Teorema 3.2 diperhitungkan batas atas minimal dari keempat modulus untuk suatu parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ dengan $(\gamma = \eta = \mu = \xi = \zeta)$ dan koefisien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ pada fungsi *starlike* sehingga diperoleh hasil estimasi batas atas minimal pada modulus koefisien fungsi *starlike* dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dan lemma 2.2.5 maka penyelesaian pada (3.18) − (3.21) terbukti pada Teorema 3.2.

4.2. Saran

Pada pembahasan selanjutnya terdapat beberapa hal yang masih dapat dikembangkan dari skripsi ini, yakni membentuk model analisis estimasi batas atas minimal dengan koefisien a_6, a_7, a_8 dan sampai tak terhingga.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR PUSTAKA

Babalola, K.O. 2007. *On Some Functionals Associated With Certain Coefficient Problems.*Journal of The Nigerian Association of Mathematics Physics 11 pages 63-66

Duren, P.L. 1983. *Univalent Functions.* Springer. New York.

Goodman, A. W., (1983), *Univalent Functions Volume 1*,University Of Wales University College Of Swansea. Florida, hal. 12-15.

Graham, I. and Gabriela K. 2003. *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*. Marcel Dekker, Inc. New York.

McMahon, D. 2008. *Complex Variables Demistified.* McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

Pallouras, John D. 1975. *Complex Variables For Scientists And Engineers*. Jakarta : Erlangga, hal. 3, 5, 9-10, 32, 54, 95.

Ramadhani, Akbar. 2009. *Pertidaksamaan Koefisien Fungsi Starlike Dan Konveks Ternormal*. Skripsi FMIPA Universitas Brawijaya. Malang, hal. 3, 4, 6.

Suryanto. 1993. *Pengantar Analisis Kompleks*. Bandung : ITB

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

LAMPIRAN

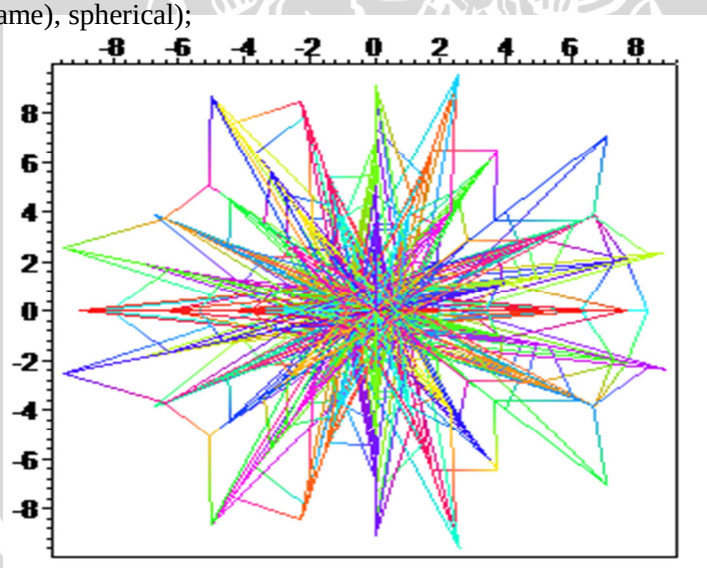
Lampiran 1

Listing Program

```
> restart;
> with(plots);
```

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *dualaxisplot*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*]

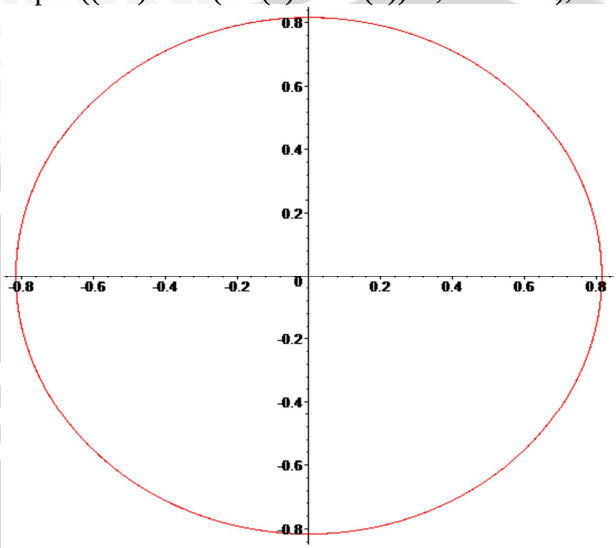
```
>f:=proc(z) local w; w:=Re(z)*exp(Im(z)*I);
w+2*w^2+3*w^3+4*w^4+5*w^5 end proc:
>changecoords(complexplot3d(f,0..10+2*Pi*I,axes=boxed,style=wir
eframe), spherical);
```



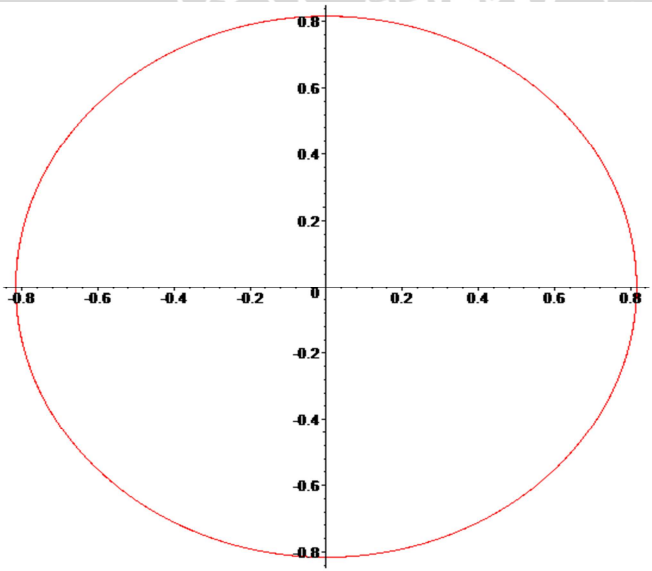
Grafik Fungsi *Starlike*

Gambar modulus koefisien pada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2.

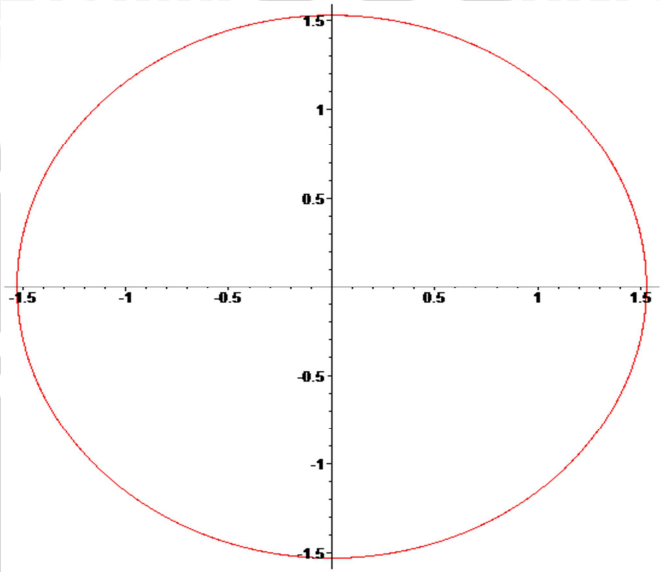
```
> with(plots):
> complexplot((2/3)^0.5*(cos(x)-I*sin(x))^2,x= -Pi..Pi);
```



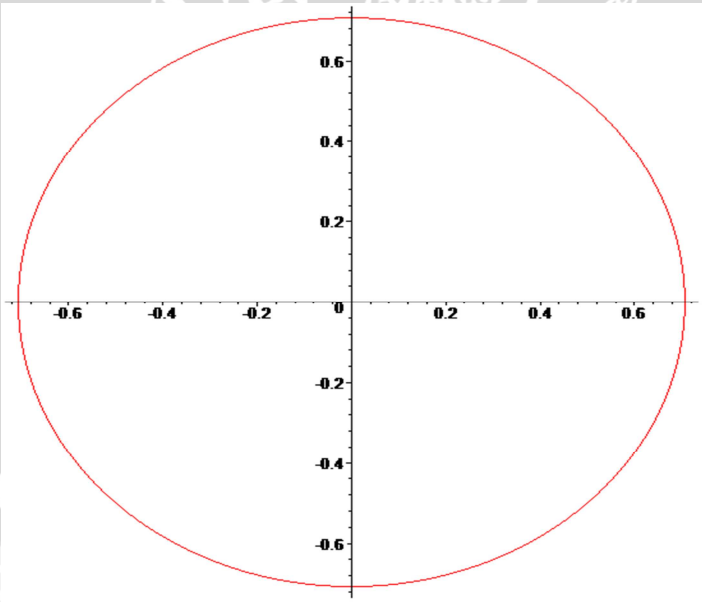

```
> with(plots):
> complexplot((2/3)^0.5*(cos(x)-I*sin(x))^2,x= -Pi..Pi);
```



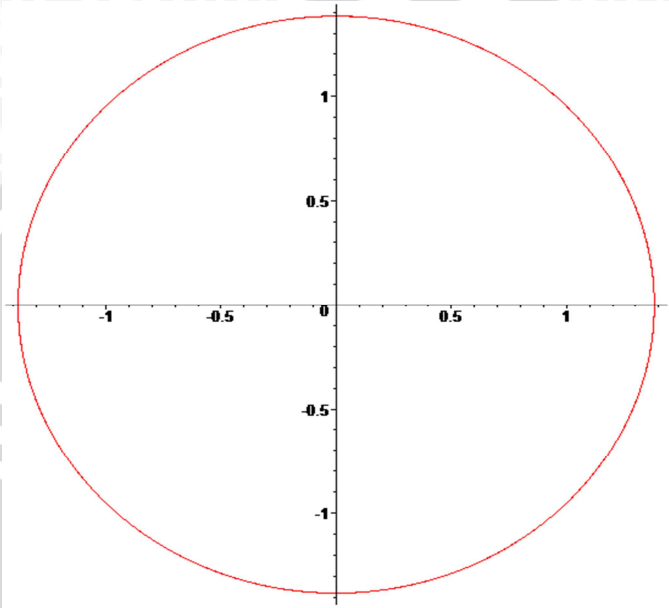
```
> with(plots):
> complexplot((7/3)^0.5*(cos(x)-I*sin(x))^2,x= -Pi..Pi);
```




```
> complexplot((2-8*3+7.5*3)^0.5*exp(I*x),x= -Pi..Pi);
```



```
> with(plots):
> complexplot((21/11)^0.5*(cos(x)-I*sin(x))^2,x= -Pi..Pi);
```



Program fungsi *starlike* dengan modulus koefisien pada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2.

```
> a1:=4/9;
```

$$a1 := \frac{4}{9}$$

```
> a2:=5/9;
```

$$a2 := \frac{5}{9}$$

```
> a3:=187/162;
```

$$a3 := \frac{187}{162}$$

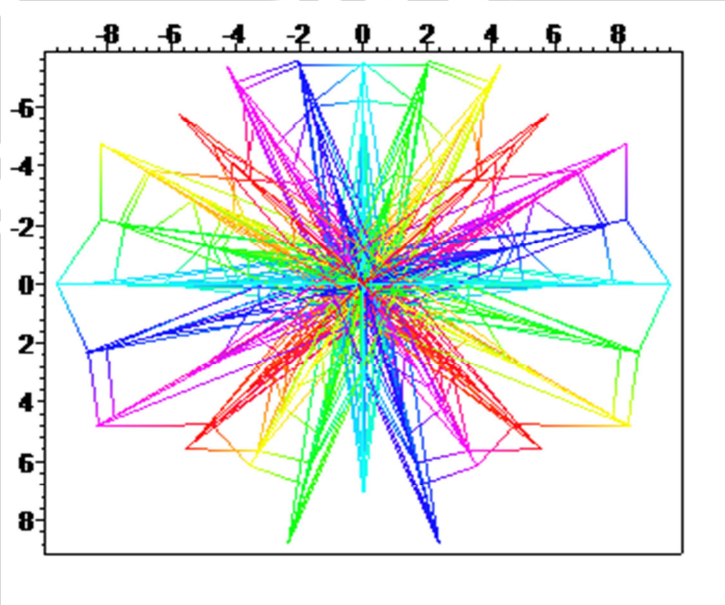
```
> a4:=1-2*y;
```

$$a4 := \frac{935}{486}$$

> a5:=1/5+2*y/5;

$$a5 := \frac{37}{2430}$$

>f:=proc(z) local w; w :=Re(z)*exp(Im(z)*I);
a1*w+a2*w^2+a3*w^3+a4*w^4+a5*w^5 end proc:
> changecoords(complexplot3d(f, 0..10+2*Pi*I,
axes=boxed,style=wireframe), spherical);



UNIVERSITAS BRAWIJAYA