BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. *Generalized Structured Component Analysis* (GSCA)

Generalized structured component analysis (GSCA) adalah metode alternatif dari *Partial Least Square* (PLS) untuk analisis jalur dengan komponen. Berbeda dengan PLS, GSCA menghasilkan *global optimization* untuk menduga parameter. Oleh karena itu, metode GSCA menghindari kelemahan PLS. Metode GSCA menawarkan *Global Least Squares Optimization Criterion* yang artinya secara konsisten diminimumkan untuk mendapatkan penduga dari parameter model. Optimasi global menghasilkan model fit secara keseluruhan yang bermanfaat untuk evaluasi model pengembangan dan tujuan perbandingan. Metode GSCA juga tetap mempertahankan kelebihan dari PLS yaitu tidak adanya asumsi distribusi, seperti normal multivariat dan solusi yang dihasilkan selalu unik (Hwang, DeSarbo, dan Takane, 2007).

Metode GSCA dapat menyelesaikan hubungan yang kompleks antar variabel (rekursif dan tidak rekursif), melibatkan komponen *higher-order* (*second order*, *third order*, dst) dan multi-kelompok (Hwang dan Takane, 2004).

GSCA lebih disukai dibandingkan dua pendekatan tradisional (Analisis Struktur Kovarian (CSA) dan *Partial Least Square* (PLS)) untuk pendugaan SEM. Kelebihan GSCA dibandingkan dua pendekatan tradisional yaitu:

1. GSCA lebih baik dibanding PLS dalam hal pemulihan parameter, memiliki keuntungan PLS, dan keseluruhan ukuran model Fit.
2. Apabila spesifikasi model tidak dapat dipastikan, GSCA lebih unggul karena dapat melakukan pemulihan parameter apabila terjadi *missspecification* (Hwang dkk, 2010).

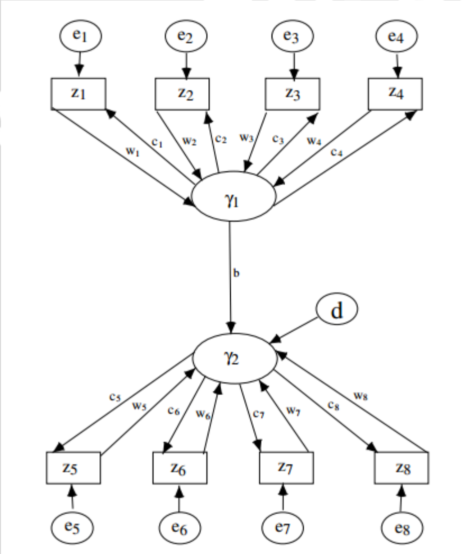
GSCA dapat diterapkan pada banyak bidang psikologi dan beragam disiplin ilmu pengetahuan karena beberapa alasan, diantaranya (Hwang dan Takane, 2010):

1. GSCA tidak memiliki asumsi menyebar normal multivariat.
2. GSCA dapat diduga meski sampel yang dimiliki sedikit.
3. GSCA menghasilkan solusi yang dapat diterima.
4. GSCA memiliki solusi unik dari skor variabel laten yang dapat digunakan untuk analisis berikutnya.

5. GSCA memiliki optimasi global yang dapat digunakan untuk perbandingan.

2.1.1. Bentuk Umum GSCA

Gambar 2.1. merupakan diagram jalur secara umum GSCA. Kotak merupakan indikator yang menggambarkan variabel yang diamati, lingkaran atau oval menggambarkan komponen (γ_i) atau sisaan (e_i dan d).



Gambar 2.1. Hubungan Variabel dan Indikator dalam GSCA

keterangan :

z_i : variabel indikator untuk pengamatan ke- i
γ_i : variabel laten untuk pengamatan ke- i
w_i : bobot komponen untuk variabel eksogen ke- i
c_i : *loading* hubungan variabel laten dengan indikator ke- i
b : koefisien jalur pengaruh variabel eksogen terhadap variabel endogen
d : sisaan variabel eksogen terhadap variabel endogen
e_i : sisaan indikator terhadap variabel laten ke- i
i : $1,2,\dots,j$
J : banyak indikator

Gambar 2.1. menunjukkan model GSCA secara umum, model tersebut terdiri dari satu variabel endogen yaitu γ_2 dan satu variabel eksogen yaitu γ_1. Berdasarkan Gambar 2.1, model pengukuran reflektif secara matematis dapat ditulis seperti berikut:

$z_1 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_1}$ $\quad$ $z_5 = \boldsymbol{C'\gamma_2 + e_5}$

$z_2 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_2}$ $\quad$ $z_6 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_6}$

$z_3 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_3}$ $\quad$ $z_7 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_7}$

$z_4 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_4}$ $\quad$ $z_8 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_8}$

dan model pengukuran formatif dapat dituliskan seperti berikut:

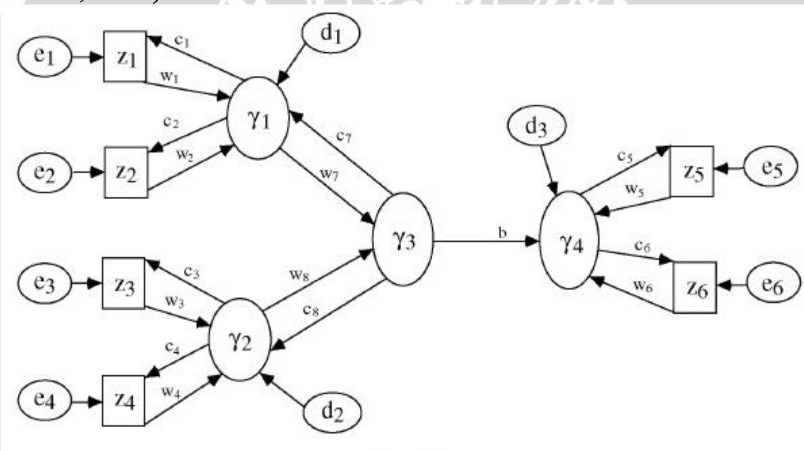
$\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{W_3}'\boldsymbol{z}_3 + \boldsymbol{W_4}'\boldsymbol{z}_4$

$\boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{W_5}'\boldsymbol{z}_5 + \boldsymbol{W_6}'\boldsymbol{z}_6 + \boldsymbol{W_7}'\boldsymbol{z}_7 + \boldsymbol{W_8}'\boldsymbol{z}_8$

dan model struktural untuk gambar 2.1 yaitu:

$\boldsymbol{\gamma_2 = B'\gamma_1 + d}$

Tidak setiap variabel dapat langsung dijelaskan oleh indikator, bisa juga indikator masih dijelaskan lagi oleh butir, hal seperti itu disebut *second order* (Kenny, 2011). Berikut diagram jalur dengan *second order* digambarkan pada gambar 2.2 (Hwang dan Takane, 2004):



Gambar 2.2. Model GSCA dengan *Second Order*

Dalam gambar 2.2 ada 4 variabel laten yang digambarkan dengan γ_1, γ_2, γ_3, γ_4. Model memiliki satu variabel eksogen (γ_3) yang digambarkan dengan dua indikator yang merupakan *second order* (γ_1, γ_2). Variabel endogen (γ_4) dipengaruhi oleh variabel eksogen (γ_3). Berdasarkan gambar 4.2, model pengukuran reflektif secara matematis dapat ditulis seperti berikut:

$z_1 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_1}$ $\quad$ $z_4 = \boldsymbol{C'\gamma_2 + e_4}$

$z_2 = \boldsymbol{C'\gamma_1 + e_2}$ $\quad$ $z_5 = \boldsymbol{C'\gamma_4 + e_5}$

$z_3 = \boldsymbol{C'\gamma_2 + e_3}$ $\quad$ $z_6 = \boldsymbol{C'\gamma_4 + e_6}$

dan model pengukuran formatif dapat dituliskan seperti berikut:

$\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{W_1}'\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{W_2}'\boldsymbol{z}_2$

$\boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{W_3}'\boldsymbol{z}_3 + \boldsymbol{W_4}'\boldsymbol{z}_4$

$\boldsymbol{\gamma}_4 = \boldsymbol{W_5}'\boldsymbol{z}_5 + \boldsymbol{W_6}'\boldsymbol{z}_6$

$\boldsymbol{\gamma}_3 = \boldsymbol{W_7}'\boldsymbol{z}_7 + \boldsymbol{W_8}'\boldsymbol{z}_8$

dan model struktural untuk gambar 2.2 yaitu:

$\boldsymbol{\gamma_4} = \boldsymbol{B_3}'\boldsymbol{\gamma_3} + \boldsymbol{d_3}$

$\boldsymbol{\gamma_1} = \boldsymbol{B_1}'\boldsymbol{\gamma_3} + \boldsymbol{d_1}$

$\boldsymbol{\gamma_2} = \boldsymbol{B_2}'\boldsymbol{\gamma_3} + \boldsymbol{d_2}$

2.1.2. Analisis Faktor dan Analisis Komponen Utama

Analisis faktor adalah mengekstraksi sejumlah faktor bersama (*common factors*) dari gugusan variabel asal $X_1, X_2, \dots, X_p$. Analisis faktor konfirmatori pada GSCA digunakan untuk mengonfirmasikan faktor-faktor yang paling dominan dalam satu kelompok variabel. Pada penelitian ini analisis faktor konfirmatori digunakan untuk uji indikator yang membentuk variabel laten. Dalam konstruk reflektif indikator-indikator memiliki nilai korelasi yang tinggi karena didasarkan pada konsep yang sama. Penghilangan satu atau beberapa indikator tidak mempengaruhi penggambaran dari variabel laten itu sendiri (Gudono, 2012).

Output yang dihasilkan dari analisis faktor konfirmatori adalah skor faktor yang merupakan gabungan (komposit) dari indikator, dengan besarnya bobot ditentukan oleh nilai *loading* faktor.

Untuk menentukan jumlah faktor yang terbentuk ada 2 hal yang diperhatikan yaitu:

1. Nilai eigen >1
2. Atau presentase kumulatif berada di kisaran 50–75% (Overall dan Klett, 1972).

Menurut Afifi dan Clark (1990) dalam pembentukan faktor bersama yang terbentuk dengan melihat nilai eigen >1 atau presentase kumulatif >70%.

Misal terdapat variabel $X_1, X_2, \dots, X_p$ yang menyebar normal dengan vektor nilai tengah (μ) dan matriks kovarian (Σ), $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$. Model analisis faktor adalah (Johnson dan Wichern, 2002):

$$X_1 - \mu_1 = c_{11}F_1 + c_{12}F_2 + \cdots + c_{1m}F_m + \varepsilon_1$$
$$X_2 - \mu_2 = c_{21}F_1 + c_{22}F_2 + \cdots + c_{2m}F_m + \varepsilon_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$X_p - \mu_p = c_{p1}F_1 + c_{p2}F_2 + \cdots + c_{pm}F_m + \varepsilon_p \tag{2.1}$$

keterangan:

$X_1, X_2, \ldots, X_p$: variabel asal

$F_1, F_2, \ldots, F_m$: faktor bersama

c_{ij} : bobot *loading* dari variabel asal ke-i pada faktor ke-j

ε_i : *error*

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{CF} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.2}$$

keterangan:

$\boldsymbol{X}$: matriks variabel asal berukuran $p \times 1$

$\boldsymbol{C}$: matriks *loading factor*, berukuran $p \times m$

$\boldsymbol{F}$: matriks faktor bersama berukuran $m \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}$: matriks sisaan $p \times 1$

p : banyak variabel asal

m : banyak faktor bersama

Model persamaan (2.2) menggambarkan hubungan khusus kovarian dengan asumsi vektor **F** dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ acak, dibuktikan dengan:

$$E(\boldsymbol{F}) = 0, Cov(\boldsymbol{F}) = E[\boldsymbol{FF}'] = \boldsymbol{I}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = E[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'] = \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Psi_{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

sehingga vektor **F** dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ saling bebas yaitu $Cov\,(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{F}) = E(\boldsymbol{\varepsilon F}) = 0$. Model faktor orthogonal menunjukkan struktur kovarian X, yaitu:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})' &= (\boldsymbol{CF} + \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{CF} + \boldsymbol{\varepsilon})' \\ &= (\boldsymbol{CF} + \boldsymbol{\varepsilon})\big((\boldsymbol{CF})' + (\boldsymbol{\varepsilon})'\big) \\ &= \boldsymbol{CF}(\boldsymbol{CF})' + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{CF})' + \boldsymbol{CF\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}\Sigma &= Cov\,(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})' \\ &= \boldsymbol{C}E(\boldsymbol{FF}')\boldsymbol{C}' + E(\boldsymbol{\varepsilon F}')\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}E(\boldsymbol{F\varepsilon}') + E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') \\ &= \boldsymbol{CC}' + \boldsymbol{\Psi}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Metode pendugaan parameter yang digunakan adalah komponen utama. Kovarian **X** memiliki nilai eigen dan vektor eigen yang berpasangan $(\boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{e}_i)$, dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$, maka:

$$\boldsymbol{C} = \left[\sqrt{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_1}\hat{\boldsymbol{e}}_1 \vdots \sqrt{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_2}\hat{\boldsymbol{e}}_2 \vdots \cdots \vdots \sqrt{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_m}\hat{\boldsymbol{e}}_m\right] \tag{2.5}$$

dengan nilai eigen didapatkan dari:

$$det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = 0 \tag{2.6}$$

di mana **A** adalah matrik kovarian atau matriks korelasi.

Analisis faktor merupakan upaya mendapatkan variabel baru atau variabel tak teramati. Dengan demikian variabel baru tersebut menghasilkan data yang baru yaitu skor faktor. Apabila input merupakan matriks korelasi (**R**), maka (Johnson dan Wichern, 2002):

$$\hat{\boldsymbol{f}}_j = \hat{\boldsymbol{C}}_z{}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z}_j \quad (2.7)$$

sedangkan apabila input matriks kovarian (**S**), maka:

$$\hat{\boldsymbol{f}}_j = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x}_j - \overline{\boldsymbol{x}}) \quad (2.8)$$

keterangan:

$\widehat{\boldsymbol{f}*}_j$: skor faktor ($\boldsymbol{X}'\hat{\boldsymbol{f}}_j$)

$\boldsymbol{z}_j$: $\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{D}^{-1/2}(\boldsymbol{x}_j - \overline{\boldsymbol{x}})$, untuk data yang distandardisasi.

j : 1,2,…, n

Analisis komponen utama pada GSCA digunakan pada variabel laten yang dipengaruhi oleh indikator (konstruk formatif). Ciri-ciri konstruk formatif yang kadang disebut skor komposit adalah nilainya secara konseptual merupakan kombinasi nilai indikatornya (Gudono, 2012).

Analisis komponen utama merupakan kombinasi linier dari matrik varian kovarian yang digunakan untuk mereduksi data. Secara matematis, misal terdapat p variabel X, yaitu $X_1, X_2, \dots, X_p$, maka dapat dibuat kombinasi linier dapat digambarkan seperti berikut (Johnson dan Wichern, 2002):

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \boldsymbol{a_1}'X = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1p}X_p \\
Y_2 &= \boldsymbol{a_2}'X = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2p}X_p \\
&\vdots \\
Y_p &= \boldsymbol{a_p}'X = a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + \cdots + a_{pp}X_p
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Rumus ragam dan peragam untuk variabel **Y** adalah:

$Var(Y_i) = \boldsymbol{\alpha_i}'\Sigma\boldsymbol{\alpha_i}$ i = 1,2,…,p

$Cov(Y_i, Y_k) = \boldsymbol{\alpha_i}'\Sigma\boldsymbol{\alpha_k}$ i,k = 1,2,…,p

di mana Σ memiliki nilai eigen dan vektor eigen yang berpasangan $(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{e}_1)$, $(\boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{e_2})$, ... $(\boldsymbol{\lambda}_p, \boldsymbol{e_p})$, , dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

Maka komponen utama ke-i ditunjukkan oleh:

$$Y_i = \boldsymbol{e_i}'\boldsymbol{X} = e_{i1}X_1 + e_{i2}X_2 + \cdots + e_{ip}X_p \quad (2.10)$$

dengan pilihan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&Var(Y_i) = \boldsymbol{e_i'}\Sigma\boldsymbol{e_i} = \lambda_i && i = 1,2,\dots,p \\
&Cov(Y_i, Y_k) = \boldsymbol{e_i'}\Sigma\boldsymbol{e_k} = 0 && i,k = 1,2,\dots,p
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Dalam komponen utama, vektor koefisien $\boldsymbol{e_i}$ didapatkan agar ragam komponen utama maksimum dengan syarat $\boldsymbol{e_i'}\boldsymbol{e_i} = 1$. Hal ini diselesaikan dengan fungsi Lagrange, sebagai berikut:

$$L = \boldsymbol{e_i'}\Sigma\boldsymbol{e_i} - \lambda_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{e_i'}\boldsymbol{e_i}) \quad (2.12)$$

Apabila L diturunkan terhadap $\boldsymbol{e_i}$ dan disamadenganakan 0, maka diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial e} = \boldsymbol{2e_i}\Sigma - \boldsymbol{2\lambda_i e_i}$$

$$\boldsymbol{2}(\Sigma - \boldsymbol{\lambda_i I})\boldsymbol{e_i} = 0$$

$$(\Sigma - \boldsymbol{\lambda_i I})\boldsymbol{e_i} = 0 \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) akan menghasilkan jawaban yang bersifat unik atau khas apabila matriks $(\sum - \lambda_i \boldsymbol{I})$ merupakan matriks singular, yaitu determinan dari matriks tersebut sama dengan nol

$$det(\Sigma - \boldsymbol{\lambda_i I}) = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) akan menghasilkan akar-akar karakteristik (nilai eigen) yaitu $\lambda_{\boldsymbol{i}}$. Setiap akar karakteristik λ_i akan menentukan vektor karakteristik (vektor eigen) $\boldsymbol{e_i}$. Penentuan akar karakteristik yang akan digunakan pada komponen utama pertama adalah

$$\Sigma\boldsymbol{e_i} - \boldsymbol{\lambda_i I e_i} = 0$$

$$(\Sigma - \boldsymbol{\lambda_i})\boldsymbol{e_i} = 0$$

$$\Sigma\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{\lambda_i I e_i} \quad (2.15)$$

Jika kedua sisi persamaan (2.15) digandakan dengan $\boldsymbol{e_i'}$ maka diperoleh persamaan $\boldsymbol{e_i'}\boldsymbol{\Sigma e_i} = \lambda_i$, menunjukkan bahwa ragam setiap komponen utama merupakan nilai eigen terbesar dari matriks kovarian ($\boldsymbol{\Sigma}$). Dengan menggunakan pengganda Lagrange, diperoleh $e_1, e_2, \ldots, e_p$ sebagai vektor ciri yang berpadanan dengan akar ciri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$ dari matriks peragam Σ. Analisis komponen utama menghasilkan keragaman terbesar pada λ_1, kemudian terbesar ke-2 λ_2 begitu seterusnya.

Menurut Overall dan Klett (1972) untuk mengetahui komponen utama yang digunakan ada 2 cara yaitu:

1. Nilai eigen atau akar ciri (λ) yang >1.
2. Atau kumulatif keragaman >75%.

Meskipun, skor komposit yang terbentuk merupakan data yang tereduksi, tetapi menggunakan analisis komponen utama didapatkan:

1. Proporsi keragaman yang dipertahankan minimal 70%

2. Skor komposit yang terbentuk saling bebas satu sama lain sehingga tidak ada multikolinieritas (Johnson dan Wichern, 2002).

Nilai eigen dan presentase kumulatif dihasilkan dari analisis komponen utama, kedua hal tersebut dapat digunakan untuk menentukan komponen utama yang digunakan. Pengambilan keputusan yang didapatkan dari berbagai sumber menyatakan setidaknya komponen utama mampu mempertahankan informasi dalam data >80%. Namun, dalam banyak kasus hal tersebut tidak dapat terpenuhi, sehingga peneliti seringkali berkompromi bahkan hingga 65% (Afifi dan Clark, 1990).

Berdasarkan contoh dalam buku *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* yang ditulis oleh Anderson (1958) presentase kumulatif keragaman yang digunakan adalah 78%.

2.1.3. Model GSCA

Model GSCA dibagi menjadi dua yaitu model pengukuran dan model struktural. Model pengukuran menggambarkan hubungan antara variabel laten dan indikator, sedangkan model struktural menggambarkan hubungan antar variabel laten (Loehlin, 2004).

Model pengukuran apabila model bersifat reflektif secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut (Hwang dkk, 2009):

$$\boldsymbol{z_i} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{\gamma_i} + \boldsymbol{e_i} \tag{2.16}$$

keterangan:

$\boldsymbol{z_i}$: vektor indikator pengamatan ke-i (berukuran $J \times 1$)
$\boldsymbol{C}$: matriks *component loading* hubungan variabel laten dengan indikator (berukuran $T \times J$)
$\boldsymbol{\gamma_i}$: vektor variabel laten untuk pengamatan ke-i (berukuran $T \times 1$)
$\boldsymbol{e_i}$: matriks sisaan pengamatan ke- i (berukuran $J \times 1$)
T : banyak variabel laten

Model pengukuran apabila model bersifat formatif secara matematis ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\gamma_i} = \boldsymbol{W}'\boldsymbol{z_i} \tag{2.17}$$

keterangan:

$\boldsymbol{W}$: matriks bobot komponen untuk variabel eksogen (berukuran J x T)

Model struktural secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\gamma_i} = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\gamma_i} + \boldsymbol{d} \tag{2.18}$$

keterangan:

$\boldsymbol{B}$: matriks koefisien jalur (pengaruh variabel eksogen terhadap variabel endogen) (berukuran T x T)

$\boldsymbol{d}$: matriks sisaan (berukuran T x 1)

Model pengukuran (reflektif) dan model struktural digabung untuk membentuk model tunggal, menjadi seperti persamaan (2.19):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z_i} \\ \boldsymbol{\gamma_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C'} \\ \boldsymbol{B'} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma_i} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_i} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Kemudian pada persamaan (2.19) $\boldsymbol{\gamma_i}$ disubtitusi seperti persamaan (2.17), sehingga membentuk persamaan (2.20):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{W'} \end{bmatrix} \boldsymbol{z_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C'} \\ \boldsymbol{B'} \end{bmatrix} \boldsymbol{W_i}'\boldsymbol{z_i} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_i} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Kemudian agar lebih mudah, $[\boldsymbol{I}, \boldsymbol{W'}]$ di lambangkan dengan $\boldsymbol{V'}$dan $[\boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B'}]$ dilambangkan dengan $\boldsymbol{A'}$.

$$\boldsymbol{V'z_i} = \boldsymbol{A'W'z_i} + \boldsymbol{E} \quad (2.21)$$

Persamaan (2.21) dapat ditulis menjadi $\boldsymbol{ZV} = \boldsymbol{ZWA} + \boldsymbol{E}$ apabila semua vektor $\boldsymbol{z_i}$ digabung menjadi matriks kemudian ditranspose, sehingga dapat dilambangkan dengan matriks $\boldsymbol{Z}$ berukuran NxJ. Matriks $\boldsymbol{Z}$ merupakan matriks semua indikator dengan obyek sebanyak N dan indikator sebanyak J. Kemudian matriks ($\boldsymbol{V'}$) ditranspose sehingga $\boldsymbol{V'Z}$ menjadi menjadi $\boldsymbol{ZV}$. Jika dalam suatu persamaan ruas kiri ditranspose maka ruas kanan juga ditranspose, sehingga matriks $(\boldsymbol{A'W'Z})'$ menjadi $\boldsymbol{ZWA}$.

Matriks indikator endogen $[\boldsymbol{ZV}]$ dilambangkan dengan $\boldsymbol{\Psi}$ dan untuk matriks indikator eksogen $[\boldsymbol{ZW}]$ dilambangkan dengan $\boldsymbol{\Gamma}$, sehingga persamaan (2.21) menjadi persamaan tunggal (2.22)

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Gamma A} + \boldsymbol{E} \quad (2.22)$$

keterangan:

$\boldsymbol{Z}$: matriks indikator (berukuran N x J)

$\boldsymbol{I}$: matriks identitas

$\boldsymbol{\Psi}$: matriks untuk semua indikator dari variabel endogen (berukuran N x T)

$\boldsymbol{\Gamma}$: matriks untuk semua indikator dari variabel eksogen (berukuran N x T)

$\boldsymbol{V}$: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{W} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}$: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{E}$: matriks sisaan (berukuran T x T)

N : banyak obyek

Untuk model GSCA dengan variabel *second order*, GSCA menggunakan model sebagai berikut (Hwang dan Takane, 2004):

$$\boldsymbol{ZV} = \boldsymbol{Z\widetilde{W}A} + \boldsymbol{E} \quad (2.23)$$

di mana :

$$\widetilde{W} = \prod_{h=1}^{H} W^{h} \quad (2.24)$$

$\boldsymbol{W^h}$: matriks komponen dari bobot komponen yang berhubungan dengan banyak *component order*

h : 1, ..., H (banyak *order*)

2.1.4. Pendugaan Parameter GSCA

Parameter yang diduga adalah **V, W,** dan **A**. Pendugaan parameter dilakukan dengan meminimumkan jumlah kuadrat sisaan, dengan $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{ZV} - \boldsymbol{ZWA} = \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Gamma A}$. Jumlah kuadrat sisaan untuk pendugaan parameter variabel *second order* adalah sebagai berikut :

$$f = (\boldsymbol{ZV} - \boldsymbol{ZWA})'(\boldsymbol{ZV} - \boldsymbol{ZWA})$$

$$f = (\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Gamma A})'(\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Gamma A}) \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) tidak dapat diselesaikan secara analitis, di mana **V, W,** dan **A** dapat tersusun atas angka nol atau elemen tetap lainnya. Oleh karena itu, algoritma *Alternating Least Square* (ALS) digunakan untuk meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. ALS dapat dilihat sebagai salah satu jenis algoritma *fixed point (*FP), di mana *fixed point* merupakan nilai akumulasi dari fungsi yang sudah dioptimalkan. Algoritma ALS dalam GSCA terdiri dari 2 langkah, yaitu (de Leeuw, Young, dan Takane, 1976):

1. Parameter **A** diduga dari parameter **V** dan $\boldsymbol{W}$ yang tetap.
2. Parameter **V** dan $\boldsymbol{W}$ diduga dari parameter **A** yang tetap.

Parameter yang didapat konvergen ketika penurunan nilai fungsi berkurang dibawah nilai permulaan sebesar 10^{-4} (Hwang dan Takane, 2004).

2.2. Kebaikan Model

Ukuran kebaikan model dalam GSCA dibagi dalam 3 model, yaitu kebaikan model pengukuran, model struktural, dan model keseluruhan.

2.2.1. Model Pengukuran

Kebaikan model pengukuran bertujuan untuk mengetahui validitas dan reliabilitas dari instrumen penelitian. Validitas dilihat dengan menggunakan *discriminant validity* dan reliabilitas dilihat dengan menggunakan *composite reliability*.

1. *Discriminant Validity*

Dalam *discriminat validity* menggunakan pendekatan analisis *Average Variance Extracted* (AVE). Pembuktian bahwa indikator-indikator yang dikembangkan terbukti benar-benar mengukur variabel laten adalah nilai AVE >0.5. AVE membandingkan nilai *square root* dari AVE setiap variabel laten dengan korelasi antar variabel laten lainnya dalam model. Jika *square root* dari AVE variabel laten lebih besar dari korelasi dengan seluruh variabel laten maka dapat dikatakan bahwa model memiliki *discriminant validity* yang baik (Adriana dan Elena, 2011).

$$AVE = \frac{(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2)}{(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2)+\sum_{i=1}^{p}(1-\lambda_i^2)} \tag{2.33}$$

keterangan:

λ_i : *factor loading* pada butir ke-i

p : banyak variabel asal

2. *Composite Reliability*

Composite reliability ≥ 0.6 maka kelompok indikator yang mengukur sebuah variabel memiliki reliabilitas komposit yang baik, meskipun bukan merupakan standar absolut (Abell *et. al.*, 2009).

$$\rho_{ii} = \frac{(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i)^2}{(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i)^2+\sum_{i=1}^{p}(1-\lambda^2)} \tag{2.34}$$

keterangan:

λ_i : *factor loading* pada butir ke-i

p : banyak variabel asal

ρ_{ii} : *composite reliability*

2.2.2. Model struktural (R^2)

Ukuran kebaikan untuk model struktural menggunakan koefisien determinasi (R^2) pada variabel laten. Koefisien determinasi adalah pengujian untuk mengetahui proporsi keragaman total dari variabel endogen yang dapat dijelaskan oleh variabel eksogen di dalam model persamaan (Ahmadi, 2013).

Bentuk umum untuk koefisien determinasi adalah (Gujarati, 1978):

$$R^2 = \frac{\boldsymbol{\hat{\beta}'X'y - N\bar{Y}^2}}{\boldsymbol{y'y - N\bar{Y}^2}} = \frac{JKregresi}{JKtotal} \tag{2.35}$$

keterangan:

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$: matriks nilai duga koefisien jalur berukuran (mX1)

$\boldsymbol{X}$: matriks variabel x berukuran (nXm)

$\boldsymbol{y}$: matriks variabel y berukuran (nX1)

$\boldsymbol{N\bar{Y}}$: koreksi rata-rata

n : banyak obyek/individu yang diamati

m : banyak nilai duga koefisien regresi

2.2.3. Model Keseluruhan

Ukuran kebaikan model keseluruhan diukur dengan menggunakan Fit dan Adjusted Fit (AFit). Fit menggambarkan keragaman total variabel endogen yang dapat dijelaskan oleh spesifikasi model tertentu. Nilai Fit berkisar antara 0 hingga 1, semakin besar nilai Fit maka semakin besar keragaman yang dijelaskan oleh model. Model secara keseluruhan dikatakan baik apabila ≥ 0.6. AFit dalam regresi sederhana serupa dengan R^2 *adjusted*. Dalam GSCA, AFit dapat digunakan untuk per-bandingan model, nilai AFit yang lebih besar menunjukkan model yang lebih baik. Berikut model matematis untuk Fit (Hwang, DeSarbo, dan Takane, 2007):

$$Fit = 1 - \frac{SS(\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Gamma A})}{SS(\boldsymbol{\Psi})} \qquad (2.36)$$

sedangkan model matematis untuk AFit adalah sebagai berikut:

$$\text{AFit} = 1 - (1 - Fit)\frac{df\,0}{df\,1} \qquad (2.37)$$

keterangan:

dfo: *NJ* adalah derajat bebas untuk model nol di mana semua parameter adalah sama dengan nol,

*df*1: *NJ* – *g* adalah derajat bebas untuk model yang diuji, di mana *g* adalah jumlah parameter bebas.

2.3. Uji Hipotesis

Uji hipotesis koefisien yang diduga dalam model struktural dapat dihipotesiskan sebagai berikut (Ahmadi, 2013):

H_0: βi=0 Vs H_1: βi≠0

Parameter model struktural untuk variabel laten adalah θ_a. Statistik uji yang digunakan adalah *Critical Ratio* (CR), yaitu :

$$CR = \frac{(\widehat{\beta_\iota})}{Se(\widehat{\beta_\iota})} \qquad (2.38)$$

keterangan:

β_i : parameter yang diduga

Se$(\widehat{\beta_i})$: salah baku untuk parameter yang diduga

Statistik uji CR diperoleh dari hasil *Bootstrap*, dengan melakukan pendekatan terhadap sebaran *t*. Kriteria pengambilan keputusan berdasarkan statistik uji *t* dengan nilai tabel $t\alpha/_{2,df}$ atau melihat nilai p dan α. Hipotesis nol diterima apabila statistik uji t < nilai tabel $t\alpha/_{2,df}$ atau nilai p > α , artinya tidak ada hubungan antar variabel laten. Derajat bebas atau *degree of freedom* (df) secara matematis diperoleh dari :

$$df = \frac{1}{2}[(p)(p+1)] - k \qquad (2.39)$$

keterangan:

p: banyak obyek/individu yang diamati

k: banyak indikator yang diduga

Salah baku dalam analisis GSCA didapatkan dengan metode *resampling Bootstrap*. Metode *resampling Bootstrap* juga dapat digunakan untuk memperoleh pendugaan parameter yang terbaik (Hwang dan Takane, 2004).

2.4. Asumsi Linieritas

Pada analisis GSCA asumsi yang harus dipenuhi adalah hubungan antar variabel laten dalam model struktural adalah linier. Untuk melihat hubungan linier antar variabel laten dapat digunakan *curve estimation* atau menggunakan statistik uji F dengan hipotesis (Ahmadi, 2013):

H_0: Model Tidak Linier Vs H_1: Model Linier

$$F\ hitung = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \qquad (2.40)$$

keterangan:

k: banyak variabel bebas n: banyak pengamatan

2.5. Metode *Bootstrap*

Dalam GSCA *bootsrap* diperlukan untuk pendekatan pada sebaran t, sehingga salah baku data dihitung dan parameter dapat diduga (Hwang dan Takane, 2004).

Bootstrap pertama kali diperkenalkan oleh Efron dan Tibshirani pada tahun 1979. Metode *Bootstrap* didasarkan pada prosedur *resampling* yaitu penarikan contoh acak secara berulang yang dilakukan dengan pengembalian. Pandang sebuah contoh asli X berukuran n yang terdiri dari $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ kemudian sebanyak B contoh *bootsrap* berukuran n diambil dengan pengembalian dari contoh asli X sehingga diperoleh data *bootsrap* yaitu $X_1^*, X_2^*, X_3^*, \ldots, X_B^*$ yang terdiri dari data anggota asli dan data hasil *resampling* yang ditandai dengan (*), B adalah banyak *resampling* pada *Bootstrap* berukuran n.

Banyak *resampling* dalam *Bootstrap* (B) adalah untuk mengevaluasi $\widehat{se}_B$, pendugaan ideal *Bootstrap* $\widehat{se}_\infty$, anggap B=∞, maka $\widehat{se}_\infty$ setara dengan pendugaan $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$. Berdasarkan penelitian Efron dan Tibshirani (1993), terdapat dua aturan secara singkat mengenai banyak *resampling* (B):

1. Meskipun banyak *resampling* dari *Bootstrap* , katakan B=25 masih dapat digunakan sebagai informasi. B=50 seringkali dikatakan cukup untuk mendapat pendugaan $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ yang baik.
2. Jarang sekali banyak *resampling* lebih dari B=200 *replication* yang dibutuhkan untuk menduga *standard error*. (dibutuhkan semakin besar B untuk pendugaan selang kepercayaan untuk *Bootstrap*).

Pendugaan parameter dengan metode *Bootstrap* adalah sebagai berikut (Efron dan Tibshirani, 1993):

$$\hat{\theta}^*(.) = \frac{\sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}^*(b)}{B} \tag{2.41}$$

dan

$$\hat{S}e_{bootstrap} = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^{B} [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(.)]^2}{B-1}} \tag{2.42}$$

keterangan:

$\hat{\theta}^*(b)$: hasil pendugaan parameter dengan *Bootstrap*

$\hat{\theta}^*(.)$: penduga parameter yang diperoleh dari algoritma *alternating least square* pada *Bootstrap* ke-b

B : banyak *resampling* pada *Bootstrap* berukuran n

$\hat{S}e_{bootstrap}$: penduga salah baku *resampling* sebanyak B