

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Komunitas ialah kumpulan berbagai populasi yang hidup pada suatu waktu dan daerah tertentu yang saling berinteraksi dan mempengaruhi satu sama lain. Antara komunitas dan lingkungannya selalu terjadi interaksi. Interaksi ini menciptakan kesatuan ekologi yang disebut ekosistem. Komponen penyusun ekosistem adalah produsen, konsumen, dan dekomposer/pengurai. Tumbuhan hijau berperan sebagai produsen, herbivora, karnivora, dan omnivora berperan sebagai konsumen, sedangkan mikroorganisme berperan sebagai pengurai.

Dalam suatu ekosistem terjadi proses saling memangsa dan dimangsa. Model matematika yang menggambarkan proses tersebut adalah model *predator-prey*. *Predator* merupakan populasi pemangsa, sebaliknya populasi yang dimangsa predator disebut *prey*. Model *predator-prey* sering disebut model Lotka-Volterra karena ditemukan pertama kali oleh Lotka dan Volterra (Boyce dan DiPrima, 2009).

Banyak peneliti menggunakan model *predator-prey* untuk mengkaji penelitiannya. Stone (1990) mengkaji model ekosistem mikroorganisme lautan yang berjudul “*Phytoplankton–Bacteria–Protozoa Interaction: a Qualitative Model Portraying Indirect Effect*”. Dalam kajiannya, Stone (1990) membahas interaksi beberapa komponen laut. Komponen laut yang dibahas berupa mikroba, contohnya bakteri, fitoplankton, zooplankton, protozoa dan nutrisi.

Hadley dan Forbes (2009) mendapat ide untuk menguji model yang telah dikaji Stone (1990) untuk kasus saat konsentrasi nutrisi konstan. Hal itu membuat Hadley dan Forbes (2009) melakukan pendekatan masalah tersebut menggunakan sistem dinamik. Pada *paper* berikutnya Hadley dan Forbes (2009) menambahkan fungsi respon Holling tipe II pada laju pertumbuhan nutrisi.

Sketsa ini mengulas permasalahan yang berkaitan dengan fungsi respon Holling tipe II yang dibahas oleh Hadley dan Forbes (2009). Namun, pada pembahasan Hadley dan Forbes (2009) terjadi kesalahan perhitungan salah satu kestabilan titik kesetimbangannya,

sehingga pada skripsi ini digunakan fungsi respon Holling tipe I agar analisa tidak terlalu rumit.

Model matematika yang terbentuk didasari oleh model ekosistem yang dikaji Stone (1990). Model tersebut berupa sistem otonomus nonlinear. Penskalaan dilakukan guna mempermudah proses perhitungan sementara. Analisis dinamik dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan. Kemudian hasil analisis tersebut disimulasikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Hal tersebut dilakukan untuk mempermudah interpretasi hasil analisis.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana syarat eksistensi titik kesetimbangan model?
2. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model?

1.3 Batasan Masalah

Skripsi ini dibatasi oleh hal-hal berikut.

1. Ekosistem diasumsikan hanya terdiri dari spesies bakteri, fitoplankton, zooplankton dan protozoa.
2. Konsentrasi nutrisi tidak konstan.
3. Tidak ada kompetisi internal.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah

1. menentukan syarat eksistensi titik kesetimbangan model,
2. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model,
3. mengetahui hasil simulasi numerik model.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (*Boyce dan DiPrima, 2009*).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (*Boyce dan DiPrima, 2009*).

Definisi 2.1.3 (Persamaan Diferensial Biasa Linear)

Suatu persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x disebut linear dengan orde n , jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t)$$

dengan $a_0(t) \neq 0$ (*Finizio dan Ladas, 1981*).

Definisi 2.1.4 (Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (*Boyce dan DiPrima, 2009*).

Definisi 2.1.5 (Sistem Persamaan Diferensial)

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui di mana $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear n dimensi adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bentuk (2.1) dapat ditulis secara singkat sebagai,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t); i = 1, 2, \dots, n,$$

atau dalam bentuk matriks sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t),$$

$$\text{dengan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \text{ dan } \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

(Finizio dan Ladas, 1981).

2.2 Model Predator-Prey Dua Spesies

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi antara spesies *prey* dan *predator* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926 dan dikenal sebagai model Lotka-Volterra (Boyce dan DiPrima, 2009).

Prey diasumsikan memiliki makanan yang berlebih dan tumbuh secara eksponensial kecuali terjadi pemangsaan. Misalkan x menyatakan kepadatan populasi *prey* dan y menyatakan kepadatan populasi *predator* setiap saat. Pertumbuhan eksponensial *prey* dinyatakan dengan ax . Pemangsaan terhadap *prey* diasumsikan sama dengan laju interaksi *prey* dan *predator* yang dinyatakan dengan bxy . Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy. \quad (2.2)$$

Pertumbuhan populasi *predator* dinyatakan oleh δxy yang tidak harus sama dengan besarnya pemangsaan terhadap *prey* bxy . *Predator* akan mengalami kematian alami secara eksponensial dengan laju cy , sehingga laju pertumbuhan populasi predator adalah

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \delta xy. \quad (2.3)$$

Dari (2.2) dan (2.3) diperoleh model Lotka-Volterra berupa sistem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = -cy + \delta xy,\end{aligned}$$

dengan

a = laju kelahiran alami prey,

b = koefisien interaksi pemangsaan prey,

c = laju kematian alami predator,

δ = koefisien perkembangbiakan predator,

dan semua parameter a, b, c , dan δ bernilai positif

(Boyce dan Diprima, 2009).

2.3 Fungsi Respon

Menurut Skalski dan Gilliam (2001), pemahaman hubungan antara predator dan prey merupakan dasar utama dalam mempelajari ilmu ekologi. Salah satu komponen penting dalam hubungan tersebut adalah laju predator memangsa prey. Laju memangsa per kapita predator terhadap prey atau sering disebut fungsi respon, memberikan dasar teori predator-prey.

Seiring dengan pengembangan penelitian terhadap model predator-prey, diperoleh bentuk umum

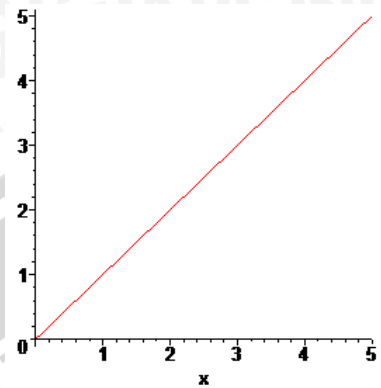
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p(x) - aq(x, y)y \\ \frac{dy}{dt} &= q(x, y)y - \mu y,\end{aligned}$$

di mana $q(x, y)$ menyatakan fungsi respon dan parameter a menyatakan efisiensi pemangsaan. Fungsi respon menjelaskan perpindahan energi yang terjadi pada tingkat pemangsa.

Bentuk umum fungsi respon Holling tipe I adalah

$$q(x, y) = cx,$$

dengan $c \in \mathbb{R}^+$. Misal diberikan nilai $c = 1$, maka grafik $q(x, y) = cx$ akan terus naik secara linear. Grafik untuk fungsi respon Holling tipe I diperlihatkan oleh Gambar 2.1.

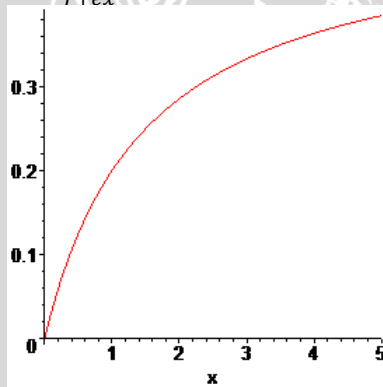


Gambar 2.1 Grafik fungsi respon Holling tipe I

Sedangkan bentuk umum fungsi respon Holling tipe II adalah

$$q(x, y) = \frac{cx}{r + ex}$$

dengan $c, r, e \in \mathbb{R}^+$. Misal diberikan nilai $c = 1$, $r = 3$, dan $e = 2$ maka grafik $q(x, y) = \frac{cx}{r + ex}$ bisa dilihat pada Gambar 2.2.

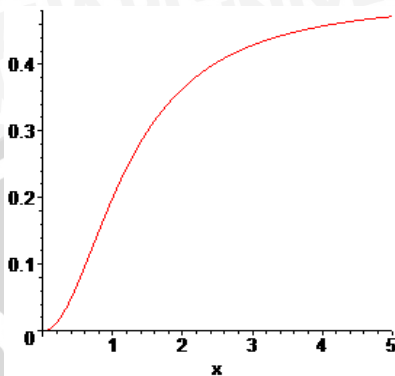


Gambar 2.2 Grafik fungsi respon Holling tipe II

Bentuk umum fungsi respon Holling tipe III adalah

$$q(x, y) = \frac{cx^2}{r + ex^2}$$

dengan $c, r, e \in \mathbb{R}^+$. Misal diberikan nilai $c = 1$, $r = 3$, dan $e = 2$ maka grafik $q(x, y) = \frac{cx^2}{r + ex^2}$ bisa dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Grafik fungsi respon Holling tipe III

2.4 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu (*Nagle dkk, 2012*).

Terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu. Bentuk sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t); t \in \mathbb{Z} \vee t \in \mathbb{N}.$$

Apabila t kontinu, bentuk sistem dinamik dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x); t \in \mathbb{R}.$$

2.5 Sistem Otonomus

Definisi 2.5.1

Finizio dan Ladas (1981) mendefinisikan sistem otonomus sebagai suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan fungsi F_1, F_2, \dots, F_n adalah fungsi bernilai riil yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu t .

Definisi 2.5.2 (Titik Keseimbangan)

Pandang sistem otonomus (2.4). Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ yang memenuhi $F_1(\vec{x}^*) = \dots = F_n(\vec{x}^*) = 0$ disebut titik kritis sistem otonomus (2.4). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.4) yang bernilai konstan, sebab pada \vec{x}^* , $\frac{dx_1}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx_1}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik keseimbangan (*Finizio dan Ladas, 1981*).

Definisi 2.5.3 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik keseimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ dikatakan

1. **stabil**, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. **stabil asimtotik**, jika stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga sebuah solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

bersifat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. **tak stabil** apabila tidak memenuhi kriteria pertama (*Boyce dan DiPrima, 2009*).

2.6 Sistem Otonomus Linear

Secara umum, suatu sistem otonomus linear dengan n persamaan berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\quad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, di mana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan $|A| \neq 0$.

Teorema 2.6.1

Misalkan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks A . Titik kesetimbangan $(x_1^*, \dots, x_n^*) = (0, \dots, 0)$ sistem (2.5) bersifat

1. **stabil**, jika semua nilai eigen matriks A mempunyai bagian riil tak positif,
2. **tidak stabil**, jika sedikitnya satu nilai eigen matriks A memiliki bagian riil yang positif

(Boyce dan DiPrima, 2009).

2.7 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}); \quad i = 1 \dots n. \quad (2.6)$$

Misalkan \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan sistem (2.6). Jika diasumsikan bahwa fungsi f_i mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik \vec{x}^* , maka deret Taylor fungsi f_i di sekitar \vec{x}^* adalah

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), \quad (2.7)$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ adalah suku sisa dan $i = 1, \dots, n$.

Untuk hampiran orde satu tersebut, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\lim_{(\vec{x}) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0; \quad \forall i = 1, \dots, n;$$

dengan $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) = (\vec{x} - \vec{x}^*)$.

Berdasarkan persamaan (2.7), serta mengingat $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(\vec{x}-\vec{x}^*)}{dt}$, maka persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial*

derivative matrix dan dinotasikan dengan $J(\vec{x}^*)$ atau J saja bila dianggap jelas.

Karena

$$f_i(\vec{x}^*) = 0 ; \forall i = 1, \dots, n;$$

persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{dw_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dw_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}.$$

Untuk \vec{x} yang berada cukup dekat dengan \vec{x}^* , \vec{w} bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.6) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.9)$$

Untuk $\vec{x} = \vec{x}^*$ diperoleh $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$ sehingga sistem linear (2.9) memiliki titik kesetimbangan $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$ (Boyce dan DiPrima, 2009).

Teorema 2.7.1

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.6) bersifat

1. **stabil** jika semua nilai eigen titik kesetimbangan sistem hasil linierisasi bernilai negatif,
2. **tak stabil** jika salah satu nilai eigen titik kesetimbangan sistem hasil linierisasi bernilai positif

(Edward dan Penney, 2008).

2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (2.10)$$

untuk $a_n > 0$, maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa harus menentukan nilai eigennya.

Definisi 2.8.1

Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.10) dibangun matriks

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix},$$
$$H_i = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & a_{2i-3} & a_{2i-4} & \dots & a_i \end{bmatrix}, \dots, H_m = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_m \end{bmatrix},$$

dengan $n = 2m - 1$. Titik kesetimbangan sistem bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks *Routh-Hurwitz* positif, yakni

$$|H_i| > 0 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

(Brauer dan Chavez, 2001).

Secara khusus, untuk persamaan karakteristik berderajat lima diperoleh sifat berikut.

Misalkan suatu sistem linear 5 dimensi mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

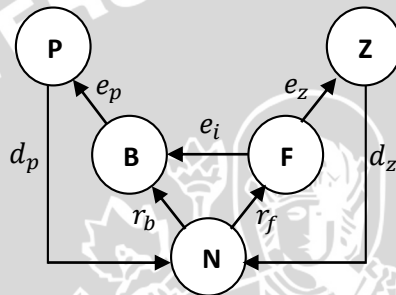
$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0.$$

Titik kesetimbangan $(0, \dots, 0)$ bersifat stabil jika

- (i) $|H_1| = a_1 > 0$,
- (ii) $|H_2| = a_1 a_2 - a_3 > 0$,
- (iii) $|H_3| = a_1(a_2 a_3 + a_5 - a_1 a_4) - a_3^2 > 0$.

2.9 Model Interaksi Plankton

Model ini pertama kali dicetuskan oleh Stone (1990) dalam paper-nya yang berjudul “*Phytoplankton – Bacteria - Protozoa Interaction: a Qualitative Model Portraying Indirect Effect*”.



Gambar 2.4 Interaksi antar plankton.

Pada Gambar 2.1 dijelaskan model interaksi 5 populasi, dengan B, F, Z, P , dan N berturut-turut merupakan populasi bakteri, fitoplankton, zooplankton, protozoa, dan nutrien. Model tersebut mengasumsikan bahwa tidak terdapat interaksi antara protozoa dengan fitoplankton maupun zooplankton dengan bakteri.

Pertumbuhan populasi bakteri dinyatakan dengan

$$\frac{dB}{dt} = r_b B, \quad (2.11)$$

dimana r_b merupakan laju pertumbuhan bakteri. Sesuai dengan latar belakang, digunakan fungsi respon Holling tipe I, sehingga diperoleh

$$r_b = k_b N, \quad (2.12)$$

dengan k_b merupakan konstanta.

Hadley dan Forbes mengasumsikan bahwa pada awalnya konsentrasi nutrien konstan yaitu N_0 . Sehingga dengan menggunakan persamaan (2.12) diperoleh

$$k_b = \frac{r_{b0}}{N_0}. \quad (2.13)$$

Jika persamaan (2.13) dan (2.12) disubstitusikan ke persamaan (2.11) maka

$$\frac{dB}{dt} = r_{b_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) B. \quad (2.14)$$

Selain itu, berdasarkan Gambar 2.1, terjadi interaksi antara bakteri dengan protozoa yang mengakibatkan populasi bakteri berkurang, sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{dB}{dt} = -e_p PB, \quad (2.15)$$

dimana e_p menyatakan interaksi antara bakteri dengan protozoa. Persamaan yang menggambarkan interaksi antara bakteri dengan fitoplankton ialah

$$\frac{dB}{dt} = e_i FB, \quad (2.16)$$

e_i merupakan koefisien interaksi bakteri dengan fitoplankton.

Dari persamaan (2.14), (2.15), dan (2.16) diperoleh laju pertumbuhan populasi bakteri sebagai berikut

$$\frac{dB}{dt} = r_{b_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) B - e_r PB + e_i FB.$$

Pertumbuhan populasi fitoplankton dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dF}{dt} = r_f(N)F,$$

$r_f(N)$ merupakan rata-rata pertumbuhan fitoplankton yang bergantung pada nutrisi. Karena asumsi yang digunakan untuk $r_f(N)$ pada fitoplankton sama dengan $r_b(N)$ pada bakteri, secara langsung dapat diperoleh

$$\frac{dF}{dt} = r_{f_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) F. \quad (2.17)$$

Persamaan yang menggambarkan pemangsaan populasi fitoplankton oleh zooplankton dan bakteri adalah sebagai berikut.

$$\frac{dF}{dt} = -e_z FZ - e_i FB, \quad (2.18)$$

dengan e_z merupakan koefisien interaksi fitoplankton dengan zooplankton dan e_i merupakan koefisien interaksi fitoplankton dengan bakteri.

Dari persamaan (2.17) dan (2.18) diperoleh laju pertumbuhan populasi fitoplankton yaitu

$$\frac{dF}{dt} = r_{f_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) F - e_z FZ - e_i FB.$$

Pada Gambar 2.1, nampak bahwa laju populasi zooplankton bertambah karena dipengaruhi oleh fitoplankton dan berkurang akibat terjadinya kematian. Dengan demikian secara langsung dapat ditentukan

$$\frac{dZ}{dt} = e_z FZ - d_z Z,$$

dengan e_z merupakan koefisien interaksi antara zooplankton dengan fitoplankton, sedangkan d_z merupakan rata-rata kematian zooplankton.

Berbeda dari zooplankton, laju pertumbuhan populasi protozoa hanya dipengaruhi oleh bakteri dan populasi protozoa berkurang seiring bertambahnya waktu akibat kematian, sehingga

$$\frac{dP}{dt} = e_p PB - d_p P,$$

dengan e_p merupakan koefisien interaksi antara protozoa dengan bakteri, sedangkan d_p merupakan rata-rata kematian protozoa.

Pada model ini semua komponen, yaitu bakteri, fitoplankton, zooplankton, dan protozoa mempengaruhi laju konsentrasi nutrisi. Bakteri dan fitoplankton membutuhkan nutrisi untuk berkembangbiak, sedangkan nutrisi bertambah akibat kematian dari zooplankton dan protozoa. Dari penjelasan tersebut didapatkan

$$\frac{dN}{dt} = m \left(-r_{b_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) B - r_{f_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) F + d_p P + d_z Z \right),$$

dimana m merupakan massa nutrisi yang dimuat pada tiap-tiap organisme.

Sistem persamaan laju pertumbuhan populasi bakteri, fitoplankton, zooplankton, protozoa, dan nutrisi dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r_{b_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) B - e_p PB + e_i FB, \\ \frac{dF}{dt} = r_{f_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) F - e_z FZ - e_i FB, \\ \frac{dZ}{dt} = e_z FZ - d_z Z, \\ \frac{dP}{dt} = e_p PB - d_p P, \\ \frac{dN}{dt} = m \left(-r_{b_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) B - r_{f_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) F + d_p P + d_z Z \right) \end{cases}$$

(Hadley dan Forbest, 2009).



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model

Pada bagian ini dibahas lebih lanjut model populasi plankton yang sebelumnya telah dipaparkan pada Sub bab 2.8. sistem persamaan nonlinear yang menggambarkan interaksi antar plankton adalah

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r_{b_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) B - e_p PB + e_i FB, \\ \frac{dF}{dt} = r_{f_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) F - e_z FZ - e_i FB, \\ \frac{dZ}{dt} = e_z FZ - d_z Z, \\ \frac{dP}{dt} = e_p PB - d_p P, \\ \frac{dN}{dt} = m \left(-r_{b_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) B - r_{f_0} \left(\frac{N}{N_0} \right) F + d_p P + d_z Z \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

Sistem (3.1) memiliki 9 parameter (r_{b_0} , r_{f_0} , e_z , e_p , e_i , d_z , d_p , m , dan N_0) yang membuat analisis menjadi rumit. Untuk menyederhanakan sistem (3.1) dilakukan penskalaan parameter sistem dengan menggunakan persamaan-persamaan

$$B = b \frac{r_{f_0}}{e_p},$$

$$F = f \frac{r_{f_0}}{e_p},$$

$$Z = z \frac{r_{f_0}}{e_p},$$

$$P = p \frac{r_{f_0}}{e_p},$$

$$N = n N_0,$$

$$t = \frac{\tau}{r_{f_0}}.$$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\tau} &= \frac{db}{dB} \frac{dB}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{e_p}{r_{f_0}} \left(r_{b_0}(n)b \frac{r_{f_0}}{e_p} - e_p p \frac{r_{f_0}}{e_p} b \frac{r_{f_0}}{e_p} + e_i b \frac{r_{f_0}}{e_p} f \frac{r_{f_0}}{e_p} \right) \frac{1}{r_{f_0}} \\ &= \frac{r_{b_0}}{r_{f_0}} nb - pb + \frac{e_i}{e_p} fb. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Kemudian dilakukan hal yang sama untuk menentukan $\frac{df}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, $\frac{dp}{d\tau}$, dan $\frac{dn}{d\tau}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\tau} &= nf - \frac{e_z}{e_p} fz - \frac{e_i}{e_p} fb, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{e_z}{e_p} fz - \frac{d_z}{r_{f_0}} z, \\ \frac{dp}{d\tau} &= pb - \frac{d_p}{r_{f_0}} p, \\ \frac{dn}{d\tau} &= \frac{m}{N_0} \frac{r_{f_0}}{e_p} \left(-\frac{r_{b_0}}{r_{f_0}} nb - nf + \frac{d_p}{r_{f_0}} p + \frac{d_z}{r_{f_0}} zn \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Persamaan (3.2) dan (3.3) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{cases} \frac{db}{d\tau} = \beta nb - pb + \eta fb, \\ \frac{df}{d\tau} = nf - \alpha fz - \eta fb, \\ \frac{dz}{d\tau} = \alpha fz - \delta z, \\ \frac{dp}{d\tau} = pb - \gamma p, \\ \frac{dn}{d\tau} = \mu(-\beta nb - nf + \gamma p + \delta z), \end{cases} \quad (3.4)$$

dengan

$$\alpha = \frac{e_z}{e_p}, \beta = \frac{r_{b_0}}{r_{f_0}}, \gamma = \frac{d_p}{r_{f_0}}, \delta = \frac{d_z}{r_{f_0}}, \eta = \frac{e_i}{e_p}, \mu = \frac{m}{N_0} \frac{r_{f_0}}{e_p}.$$

3.2 Titik Kesetimbangan Sistem

Titik kesetimbangan sistem (3.4) diperoleh ketika

$$\frac{db}{d\tau} = \frac{df}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} = \frac{dn}{d\tau} = 0.$$

Sehingga

$$b(\beta n - p + \eta f) = 0,$$

$$f(n - \alpha z - \eta b) = 0,$$

$$z(\alpha f - \delta) = 0,$$

$$p(b - \gamma) = 0,$$

$$\beta n b + n f = \gamma p + \delta z,$$

yang ekuivalen dengan

$$b = 0 \text{ atau } \beta n - p + \eta f = 0,$$

$$f = 0 \text{ atau } n - \alpha z - \eta b = 0,$$

$$z = 0 \text{ atau } f = \frac{\delta}{\alpha}, \tag{3.5}$$

$$p = 0 \text{ atau } b = \gamma,$$

$$\beta n b + n f = \gamma p + \delta z.$$

Titik kesetimbangan E_1 diperoleh dari kombinasi $b = 0$, $f = 0$, $z = 0$, $p = 0$, dan $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$ sehingga n bernilai sembarang, misal n^* .

Pada titik kesetimbangan $E_1(0,0,0,0,n^*)$ semua spesies punah, sedangkan konsentrasi nutrien bergantung pada nilai awal konsentrasinya.

Titik kesetimbangan E_2 diperoleh dari kombinasi kemungkinan $\beta n - p + \eta f = 0$, $f = 0$, $z = 0$, $b = \gamma$, dan $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$. Dari kombinasi tersebut n bernilai sembarang, misal n^* , sehingga $p = \beta n^*$. Karena semua parameter bernilai positif, maka titik kesetimbangan $E_2(\gamma, 0, 0, \beta n^*, n^*)$ eksis.

Selanjutnya, pada titik kesetimbangan E_3 , kombinasi kemungkinan yang digunakan yaitu $b = 0$, $n - \alpha z - \eta b = 0$, $f = \frac{\delta}{\alpha}$, $p = 0$, dan $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$. Dari kelima persamaan tersebut

diperoleh nilai n sembarang, sehingga $z = \frac{n^*}{\alpha}$. Karena semua parameter bernilai positif, titik kesetimbangan $E_3 \left(0, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^*}{\alpha}, 0, n^*\right)$ eksis.

Berbeda dari sebelumnya, titik kesetimbangan ini lebih rumit karena terdiri dari kemungkinan-kemungkinan

$$\beta n - p + \eta f = 0,$$

$$n - \alpha z - \eta b = 0,$$

$$f = \frac{\delta}{\alpha},$$

$$b = \gamma,$$

$$\beta n b + n f = \gamma p + \delta z.$$

Karena $f = \frac{\delta}{\alpha}$ maka $p = \beta n + \frac{\eta f}{\alpha}$. Karena $b = \gamma$ maka $z = \frac{n - \eta \gamma}{\alpha}$. Jika nilai-nilai f, p, b , dan z disubstitusikan ke persamaan $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \beta n(\gamma) + n \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) &= \gamma \left(\beta n + \eta \frac{\delta}{\alpha}\right) + \delta \left(\frac{n - \eta \gamma}{\alpha}\right) \\ \beta n \gamma + \frac{n \delta}{\alpha} &= \gamma \beta n + \frac{\gamma \delta \eta}{\alpha} + \frac{n \delta}{\alpha} - \frac{\delta \eta \gamma}{\alpha}, \end{aligned}$$

yang selalu benar untuk sembarang nilai n , sebut saja n^* . Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan E_4 yaitu $(b, f, z, p, n) = \left(\gamma, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^* - \eta \gamma}{\alpha}, \beta n^* + \frac{\eta \delta}{\alpha}, n^*\right)$. Syarat eksistensi titik kesetimbangan ini dipenuhi apabila $n^* > \eta \gamma$.

Titik kesetimbangan E_5 terjadi karena kombinasi kemungkinan $\beta n - p + \eta f = 0$, $f = 0$, $z = 0$, $p = 0$, $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$. Sehingga diperoleh $n = 0$ dan b bernilai sembarang, misal b^* .

Titik kesetimbangan E_6 diperoleh dari kombinasi kemungkinan $b = 0$, $n - \alpha z - \eta b = 0$, $z = 0$, $p = 0$, dan $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$. Dari kemungkinan tersebut diperoleh nilai $n = 0$ dan b bernilai sembarang, misal f^* .

Pada titik kesetimbangan E_7 digunakan kombinasi kemungkinan

$$\beta n - p + \eta f = 0,$$

$$n - \alpha z - \eta b = 0,$$

$$z = 0,$$

$$b = \gamma,$$

$$\beta n b + n f = \gamma p + \delta z.$$

Karena $z = 0$ maka $n = \eta \gamma$. Karena $b = \gamma$ maka $p = \beta \eta \gamma + \eta f$. Nilai-nilai z , n , b , dan p disubstitusikan ke persamaan $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$ menghasilkan

$$\beta(\eta \gamma)(\gamma) + (\eta \gamma)f = \gamma(\beta \eta \gamma + \eta f) + \delta(0)$$

$$\beta \eta \gamma^2 + \eta \gamma f = \beta \eta \gamma^2 + \eta \gamma f.$$

Perhitungan tersebut bernilai benar untuk sembarang nilai f , misal f^* . Sehingga diperoleh titik kesetimbangan E_7 yaitu $(b, f, z, p, n) = (\gamma, f^*, 0, \beta \eta \gamma + \eta f^*, \eta \gamma)$.

Sama halnya dengan titik kesetimbangan E_7 , kombinasi persamaan yang digunakan adalah

$$\beta n - p + \eta f = 0,$$

$$n - \alpha z - \eta b = 0,$$

$$z = 0,$$

$$b = \gamma,$$

$$\beta n b + n f = \gamma p + \delta z.$$

Nilai $z = 0$ membuat $n = \eta \gamma$. Yang membuat beda dari titik kesetimbangan E_7 adalah jika $b = \gamma$ maka $f = \frac{p}{\eta} - \beta \gamma$. Nilai-nilai tersebut disubstitusikan ke persamaan $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$ menghasilkan

$$\beta(\eta \gamma)(\gamma) + (\eta \gamma)\left(\frac{p}{\eta} - \beta \gamma\right) = \gamma(p) + \delta(0)$$

$$\beta \eta \gamma^2 + \gamma p - \beta \eta \gamma^2 = \gamma p,$$

yang bernilai benar untuk sembarang nilai p , sebut saja p^* . Titik kesetimbangan E_8 eksis apabila $\frac{p_0}{\eta} > \beta \gamma$.

Berdasarkan uraian pada halaman 17-19, diperoleh 16 kemungkinan dan delapan titik kesetimbangan yang diringkaskan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Titik kesetimbangan dan eksistensi

Kombinasi	Titik Kesetimbangan
$b = 0 \wedge f = 0 \wedge z = 0 \wedge$ $p = 0 \wedge \beta n b + n f = \gamma p + \delta z$	$E_1 (0,0,0,0, n^*)$
$n - \alpha z - \eta b = 0 \wedge f = 0 \wedge$ $z = 0 \wedge b = \gamma \wedge \beta n b + n f =$ $\gamma p + \delta z$	$E_2 (\gamma, 0, 0, \beta n^*, n^*)$
$b = 0 \wedge n - \alpha z - \eta b = 0 \wedge$ $f = \frac{\delta}{\alpha} \wedge p = 0 \wedge \beta n b + n f =$ $\gamma p + \delta z$	$E_3 \left(0, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^*}{\alpha}, 0, n^* \right)$
$\beta n - p + \eta f = 0 \wedge n - \alpha z$ $-\eta b = 0 \wedge f = \frac{\delta}{\alpha} \wedge b = \gamma \wedge$ $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$	$E_4 \left(\gamma, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^* - \eta \gamma}{\alpha}, \beta n_0 + \frac{\eta \delta}{\alpha}, n^* \right)$
$\beta n - p + \eta f = 0 \wedge f = 0 \wedge$ $z = 0 \wedge p = 0 \wedge \beta n b + n f =$ $\gamma p + \delta z$	$E_5 (b^*, 0, 0, 0, 0)$
$b = 0 \wedge n - \alpha z - \eta b = 0 \wedge$ $z = 0 \wedge p = 0 \wedge \beta n b + n f =$ $\gamma p + \delta z$	$E_6 (0, f^*, 0, 0, 0)$
$\beta n - p + \eta f = 0 \wedge n - \alpha z$ $-\eta b = 0 \wedge z = 0 \wedge b = \gamma \wedge$ $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$	$E_7 (\gamma, f^*, 0, \beta \eta \gamma + \eta f^*, \eta \gamma)$ atau $E_8 \left(\gamma, \frac{p^*}{\eta} - \beta \gamma, 0, p^*, \eta \gamma \right)$
$\beta n - p + \eta f = 0 \wedge n - \alpha z$ $-\eta b = 0 \wedge z = 0 \wedge p = 0 \wedge$ $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$	Tidak eksis $\left(\frac{n^*}{\eta}, -\frac{\beta n^*}{\eta}, 0, 0, n^* \right)$
$\beta n - p + \eta f = 0 \wedge n - \alpha z$ $-\eta b = 0 \wedge f = \frac{\delta}{\alpha} \wedge p = 0 \wedge$ $\beta n b + n f = \gamma p + \delta z$	Tidak eksis $\left(b^*, \frac{\delta}{\alpha}, -\eta \beta - \frac{\eta \delta}{\alpha \beta}, 0, -\frac{\eta \delta}{\alpha \beta} \right)$
Sisanya	Tidak diketahui

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Untuk menentukan kestabilan setiap titik kesetimbangan, terlebih dahulu ditentukan matriks Jacobi sistem (3.4), yaitu

$$J(b, f, z, p, n) = \begin{bmatrix} \beta n - p + \eta f & \eta b & 0 & -b & \beta b \\ -\eta f & n - az + \eta b & -af & 0 & f \\ 0 & az & af - \delta & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & b - \gamma & 0 \\ -\mu\beta n & -\mu n & \mu\delta & \mu\gamma & -\mu(\beta b + f) \end{bmatrix}$$

3.3.1 Titik kesetimbangan $E_1 (0, 0, 0, 0, n^*)$

Matriks Jacobi untuk titik $E_1 (0, 0, 0, 0, n^*)$ adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} \beta n^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ -\mu\beta n^* & -\mu n^* & \mu\delta & \mu\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = \beta n^*$, $\lambda_2 = n^*$, $\lambda_3 = -\delta$, $\lambda_4 = -\gamma$, dan $\lambda_5 = 0$. Jelas bahwa λ_1 dan λ_2 positif sehingga E_1 tidak stabil.

3.3.2 Titik kesetimbangan $E_2 (\gamma, 0, 0, \beta n^*, n^*)$

Matriks Jacobi untuk titik $E_2 (\gamma, 0, 0, \beta n^*, n^*)$ adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & \eta\gamma & 0 & -\gamma & \beta\gamma \\ 0 & n^* - \eta\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ \beta n^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu\beta n^* & -\mu n^* & \mu\delta & \mu\gamma & -\mu\beta\gamma \end{bmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik

$$\lambda(\delta + \lambda)(\lambda - (n^* - \eta\gamma))(\lambda^2 + \mu\beta\gamma\lambda + \mu\beta^2 n^*\gamma + \beta n^*\gamma) = 0.$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\delta$, $\lambda_3 = n^* - \eta\gamma$, dan $\lambda_{4,5} = \frac{-\mu\beta\gamma \pm \sqrt{(\mu\beta\gamma)^2 - 4(\mu\beta^2 n^*\gamma + \beta n^*\gamma)}}{2}$. Berdasarkan nilai eigen tersebut,

diperoleh 2 kasus untuk menentukan kestabilan titik E_2 yaitu :

1. $n^* < \eta\gamma$ dan jika $(\mu\beta\gamma)^2 \geq 4(\mu\beta^2 n^*\gamma + \beta n^*\gamma)$ maka $\lambda_{4,5}$ bernilai riil negatif, sehingga E_2 stabil.
2. $n^* < \eta\gamma$ dan jika $(\mu\beta\gamma)^2 < 4(\mu\beta^2 n^*\gamma + \beta n^*\gamma)$ maka $\lambda_{4,5}$ bernilai kompleks dengan riil negatif, sehingga E_2 stabil.

3.3.3 Titik kesetimbangan $E_3 \left(0, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^*}{\alpha}, 0, n^*\right)$

Matriks Jacobi untuk titik $E_3 \left(0, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^*}{\alpha}, 0, n^*\right)$ adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\eta\delta}{\alpha} & 0 & -\delta & 0 & \frac{\delta}{\alpha} \\ 0 & n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ -\mu\beta n^* & -\mu n^* & \mu\delta & \mu\gamma & -\mu\frac{\delta}{\alpha} \end{bmatrix},$$

dengan persamaan karakteristik

$$\lambda(\lambda + \gamma) \left(\lambda - \left(\beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha} \right) \right) \left(\lambda^2 + \frac{\mu\delta}{\alpha} \lambda + n^* \delta + \frac{\mu n^* \delta}{\alpha} \right) = 0.$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\gamma$, $\lambda_3 = \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha}$, $\lambda_{4,5} = \frac{-\frac{\mu\delta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu\delta}{\alpha}\right)^2 - 4\left(n^* \delta + \frac{\mu n^* \delta}{\alpha}\right)}}{2}$. Karena $\lambda_3 > 0$ maka titik kesetimbangan E_3 tidak stabil.

3.3.4 Titik kesetimbangan $E_4 \left(\gamma, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^* - \eta\gamma}{\alpha}, \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha}, n^*\right)$

Matriks Jacobi untuk titik $E_4 \left(\gamma, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^* - \eta\gamma}{\alpha}, \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha}, n^*\right)$ ialah

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\gamma & \beta\gamma \\ -\frac{\eta\delta}{\alpha} & 0 & -\delta & 0 & \frac{\delta}{\alpha} \\ 0 & e_{32} & 0 & 0 & 0 \\ e_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu\beta n_0 & -\mu n_0 & \mu\delta & \mu\gamma & -e_{55} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} e_{32} &= n^* - \eta\gamma, \\ e_{41} &= \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha}, \\ e_{55} &= \mu \left(\beta\gamma + \frac{\delta}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik matriks $J(E_4)$ adalah (perhitungan dapat dilihat pada lampiran 1)

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda = 0. \quad (3.23)$$

Koefisien persamaan (3.23) yaitu

$$\begin{aligned} a_1 &= e_{55}, \\ a_2 &= e_{41}\gamma + e_{32}\delta + \mu\beta^2n^*\gamma + \frac{\eta^2\delta\gamma}{\alpha} + \frac{\mu n^*\delta}{\alpha}, \\ a_3 &= \frac{e_{41}\gamma\mu\beta\delta}{\alpha} + e_{32}\gamma\mu\beta\delta + \frac{e_{55}\eta^2\delta\gamma}{\alpha}, \\ a_4 &= e_{32}e_{41}\gamma\delta + e_{32}n^*\mu\beta^2\gamma\delta + \frac{e_{41}n^*\gamma\mu\delta}{\alpha} + \frac{e_{32}\delta^2\eta\gamma\mu\beta}{\alpha} \\ &\quad - \frac{e_{41}\gamma^2\mu\eta\delta}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Titik kesetimbangan $E_4 \left(\gamma, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^* - \eta\gamma}{\alpha}, \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha}, n^* \right)$ stabil apabila memenuhi kriteria Routh-Hurwitz berikut

- i. $u_1 = a_1 > 0$,
- ii. $u_2 = a_1a_2 - a_3 > 0$,
- iii. $u_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2 > 0$.

3.3.5 Titik kesetimbangan $E_5 (b^*, 0, 0, 0, 0)$

Matriks Jacobi untuk titik $E_5 (b^*, 0, 0, 0, 0)$ adalah

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} 0 & \eta b^* & 0 & b^* & \beta b^* \\ 0 & -\eta b^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^* - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mu\delta & \mu\gamma & -\mu\beta b^* \end{bmatrix},$$

dengan persamaan karakteristik

$$\lambda(\lambda + \eta b^*)(\lambda + \delta)(\lambda - (b^* - \gamma))(\lambda + \mu\beta b^*) = 0.$$

Diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = b^* - \gamma$, $\lambda_3 = -\delta$, $\lambda_4 = b^* - \gamma$, dan $\lambda_5 = -\eta b^*$. Titik kesetimbangan E_5 stabil apabila $b^* < \gamma$.

3.3.6 Titik kesetimbangan $E_6(0, f^*, 0, 0, 0)$

Matriks Jacobi titik $E_6(0, f^*, 0, 0, 0)$ adalah

$$J(E_6) = \begin{bmatrix} \eta f^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta f^* & 0 & -\alpha f^* & 0 & f^* \\ 0 & 0 & \alpha f^* - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mu \delta & \mu \gamma & -\mu f^* \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = \eta f^*$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \alpha f^* - \delta$, $\lambda_4 = -\gamma$, dan $\lambda_5 = -\mu f^*$. Karena $\lambda_1 > 0$ maka titik E_6 tidak stabil.

3.3.7 Titik kesetimbangan $E_7(\gamma, f^*, 0, \beta\eta\gamma + \eta f^*, \eta\gamma)$

Matriks Jacobi titik $E_7(\gamma, f^*, 0, \beta\eta\gamma + \eta f^*, \eta\gamma)$ adalah

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} 0 & \eta\gamma & 0 & -\gamma & \beta\gamma \\ -\eta f^* & 0 & -\alpha f^* & 0 & f^* \\ 0 & 0 & -e_{33} & 0 & 0 \\ e_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu\beta\eta\gamma & -\mu\eta\gamma & \mu\delta & \mu\gamma & -e_{55} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} e_{33} &= \delta - \alpha f^*, \\ e_{41} &= \beta\eta\gamma + \eta f^*, \\ e_{55} &= \mu(\beta\gamma + f^*). \end{aligned}$$

Kemudian dari matriks $J(E_7)$ didapatkan persamaan karakteristik (perhitungan terlampir pada lampiran 2)

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda = 0, \quad (3.27)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= e_{55} + e_{33}, \\ a_2 &= e_{33}e_{55} + e_{41}\gamma + \mu\eta\gamma f^* + \gamma f^* + \mu\beta^2\eta\gamma^2, \\ a_3 &= e_{33}\mu\eta\gamma f^* + e_{33}\eta^2\gamma f^* + e_{55}\eta^2\gamma f^* + e_{33}e_{41}\gamma \\ &\quad + e_{41}\mu\gamma f^* + e_{33}\mu\beta^2\eta\gamma^2, \\ a_4 &= e_{33}e_{55}\eta^2\gamma f^* + e_{33}e_{41}\mu\gamma f^*. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Titik kesetimbangan $E_7 (\gamma, f^*, 0, \beta\eta\gamma + \eta f^*, \eta\gamma)$ stabil apabila memenuhi kriteria Routh-Hurwitz berikut

- i. $v_1 = a_1 > 0$,
- ii. $v_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$,
- iii. $v_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0$.

3.3.8 Titik kesetimbangan $E_8 \left(\gamma, \frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma, 0, p^*, \eta\gamma \right)$

Matriks Jacobi titik $E_8 \left(\gamma, \frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma, 0, p^*, \eta\gamma \right)$ adalah

$$J(E_8) = \begin{bmatrix} 0 & \eta\gamma & 0 & -\gamma & \beta\gamma \\ -\eta e_{25} & 0 & -\alpha e_{25} & 0 & e_{25} \\ 0 & 0 & -e_{33} & 0 & 0 \\ p^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu\beta\eta\gamma & -\mu\eta\gamma & \mu\delta & \mu\gamma & -\frac{\mu p^*}{\eta} \end{bmatrix},$$

dengan

$$e_{25} = \frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma,$$

$$e_{33} = \delta - \alpha \left(\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma \right).$$

Dari matriks $J(E_8)$ didapatkan persamaan karakteristik (perhitungan dapat dilihat pada lampiran 3)

$$\lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda = 0. \quad (3.31)$$

Dimana

$$a_1 = e_{33} + \frac{\mu p^*}{\eta},$$

$$a_2 = e_{25} \eta \mu \gamma + p^* \gamma + \mu \eta \beta^2 \gamma^2 + e_{25} \eta^2 \gamma + \frac{e_{33} \mu p^*}{\eta},$$

$$a_3 = e_{33} \gamma p^* + e_{33} e_{25} \eta \mu \gamma + e_{25} \gamma \eta \mu p^* + e_{25} \mu \gamma p^* + e_{33} \eta \mu \gamma^2 \beta^2 + e_{25} e_{33} \eta^2 \gamma, \quad (3.32)$$

$$a_4 = e_{33} e_{25} \gamma \mu p^* + e_{25} e_{33} \gamma \eta \mu p^*,$$

Titik kesetimbangan $E_8 \left(\gamma, \frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma, 0, p^*, \eta\gamma \right)$ stabil apabila memenuhi kriteria Routh-Hurwitz berikut

- i. $w_1 = a_1 > 0$,
- ii. $w_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$,
- iii. $w_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0$.

Rangkuman seluruh hasil analisis yang telah dilakukan disajikan pada tabel 3.2 yang menjelaskan seluruh titik kesetimbangan yang diperoleh syarat eksistensi dan kestabilannya.

3.4 Simulasi Numerik dan Kajian Perilaku Solusi

Pada sub bab ini, diperlihatkan hasil simulasi numerik berdasarkan hasil analisis yang telah terangkum pada Tabel 3.2. Di sini dilakukan tiga kelompok simulasi numerik, yaitu

- 1) Simulasi I, memperlihatkan kestabilan kedua titik kesetimbangan E_2 dan E_4 dengan mengubah nilai awal nutrien.
- 2) Simulasi II, memperlihatkan kestabilan beberapa titik kesetimbangan tanpa adanya perubahan parameter.
- 3) Simulasi III, memperlihatkan kemungkinan-kemungkinan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 ketika nilai awal dan parameternya diubah-ubah.

Tabel 3.2 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan

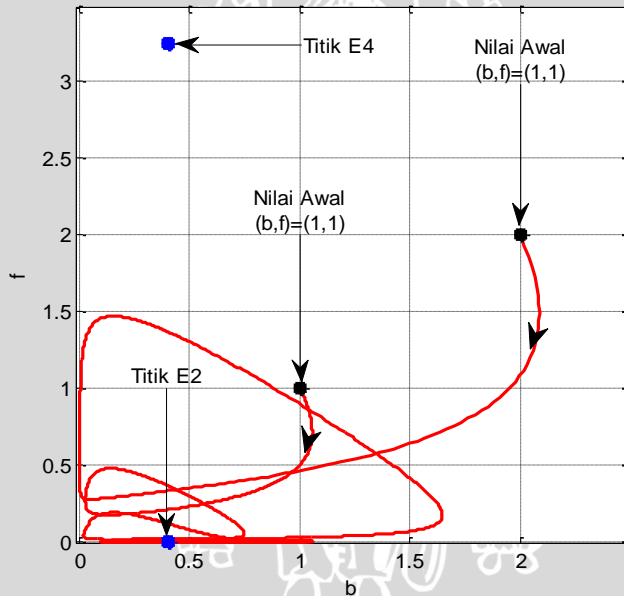
Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_1 (0,0,0, n^*)$	Tidak ada	Tidak stabil	Tidak ada
$E_2 (\gamma, 0,0, \beta n^*, n^*)$	Tidak ada	Stabil	$n^* < \eta\gamma$
$E_3 \left(0, \frac{\delta n^*}{\alpha}, \frac{\eta\delta}{\alpha}, 0, n^*\right)$	Tidak ada	Tidak stabil	Tidak ada
$E_4 \left(\gamma, \frac{\delta n^* - \eta\gamma}{\alpha}, \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha}, n^*\right)$	$n^* > \eta\gamma$	Stabil	$u_1 > 0, u_2 > 0$, dan $u_3 > 0$, dengan u_1, u_2 , dan u_3 merupakan koefisien persamaan (3.24)
$E_5 (b^*, 0,0,0,0)$	Tidak ada	Stabil	$b^* < \gamma$
$E_6 (0, f^*, 0,0,0)$	Tidak ada	Tidak stabil	Tidak ada

Titik Keseimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_7 (\gamma, f^*, \beta m\gamma + \eta f^*, m\gamma)$	Tidak ada	Stabil	$v_1 > 0$, $v_2 > 0$, dan $v_3 > 0$, dengan v_1, v_2 , dan v_3 merupakan koefisien persamaan (3.28)
$E_8 \left(\gamma, \frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma, 0, p^*, m\gamma \right)$	$\frac{p^*}{\eta} > \beta\gamma$	Stabil	$w_1 > 0$, $w_2 > 0$, dan $w_3 > 0$, dengan w_1, w_2 , dan w_3 merupakan koefisien persamaan (3.32)

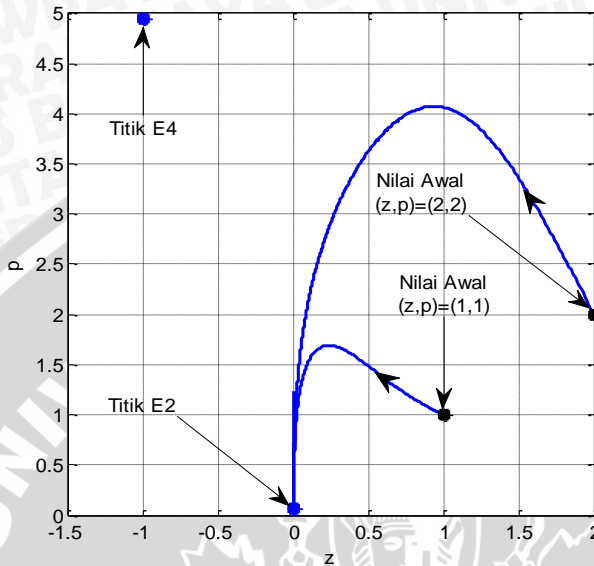
3.4.1 Simulasi I

Untuk simulasi pertama digunakan nilai parameter $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.34$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 1.3$, $\eta = 1.5$, dan $\mu = 0.005$. Dari parameter tersebut akan dipenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_2(\gamma, 0, 0, \beta n^*, n^*)$ dan titik kesetimbangan $E_4\left(\gamma, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n^* - \eta\gamma}{\alpha}, \beta n^* + \frac{\eta\delta}{\alpha}, n^*\right)$. Kedua titik kesetimbangan tersebut akan stabil tergantung pada nilai awal n^* . Ketika nilai awal $n^* < \eta\gamma$, titik kesetimbangan E_2 stabil dan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_4 tidak terpenuhi, sebaliknya jika $n^* > \eta\gamma$ maka syarat eksistensi titik kesetimbangan E_4 terpenuhi dan E_2 tidak stabil. Misal diambil nilai $n_0 = 0.2$ sehingga

$$n^* = 0.2 < \eta\gamma = 0.6.$$



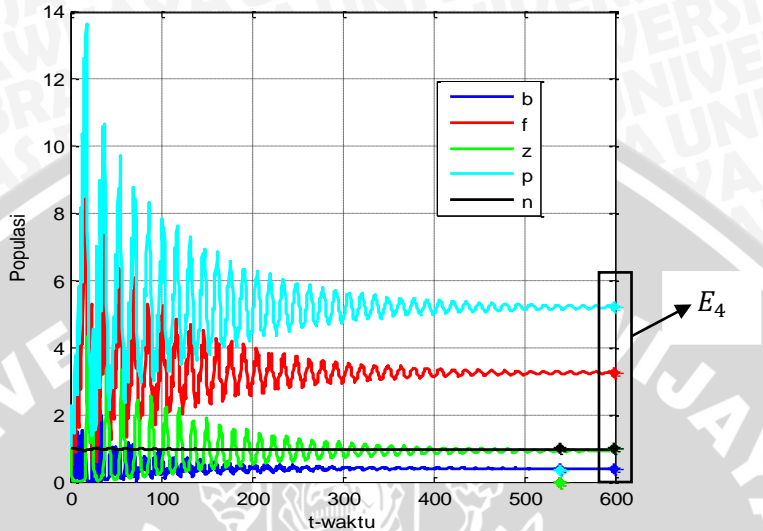
Gambar 3.1 Potret fase model simulasi I untuk koordinat b, f



Gambar 3.2 Potret fase model simulasi I untuk koordinat z, p

Dari Gambar 3.1 dan 3.2 terlihat bahwa titik E_2 (0,4,0,0,0,0.068,0.2) bersifat stabil asimtotik dengan nilai awal (1,1,1,1,0.2) maupun (2,2,2,2,0.2). Dari gambar tersebut juga diperlihatkan titik kesetimbangan E_4 tidak eksis karena berada pada koordinat negatif.

Lain halnya jika nilai $n_0 = 1$, sehingga $n^* = 1 > \eta\gamma = 0.6$. Hal tersebut menyebabkan titik kesetimbangan E_4 eksis. Untuk memeriksa kestabilannya, perlu diperiksa nilai u_1, u_2 , dan u_3 , yaitu $u_1 = 0.0338 > 0$, $u_2 = 0.0655 > 0$, dan $u_3 = 0.0067 > 0$. Jadi titik kesetimbangan E_4 stabil seperti terlihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Grafik solusi simulasi I untuk titik kesetimbangan E_4

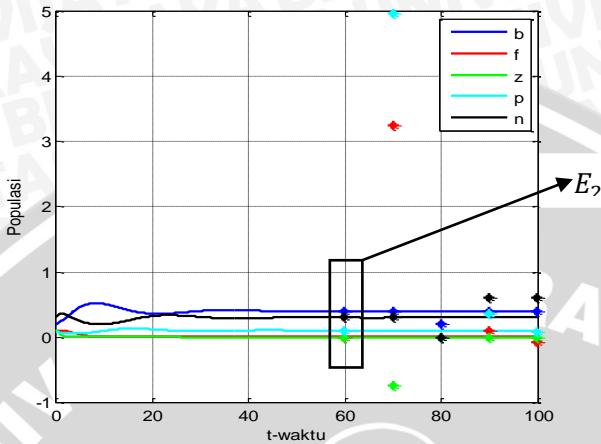
Pada Gambar 3.3 terlihat bahwa seiring berjalannya waktu semua populasi bergerak menuju titik kesetimbangan E_4 . Pada titik kesetimbangan E_4 ini populasi didominasi oleh protozoa, karena rata-rata kematian protozoa (γ) cukup rendah (0.4). Selain itu nilai awal masing-masing spesies juga menentukan besar kecilnya populasi spesies.

3.4.2 Simulasi II

Pada simulasi ke dua ini digunakan nilai parameter $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.34$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 1.3$, $\eta = 1.5$, dan $\mu = 1$. Nilai-nilai parameter tersebut dipilih guna memenuhi syarat eksistensi dan kestabilan sebagian titik kesetimbangan, yakni E_2 , E_4 , E_5 , E_7 , dan E_8 . Dipilih beberapa nilai awal yang akan menentukan eksistensi dan kestabilan titik-titik kesetimbangan tersebut.

Misalkan dipilih nilai awal $b_0 = 0.2$, $f_0 = 0.1$, $z_0 = 0.122$, $p_0 = 0.08$, dan $n_0 = 0.3$. Nilai awal tersebut membuat titik kesetimbangan E_2 stabil, karena syarat kestabilannya terpenuhi, yaitu

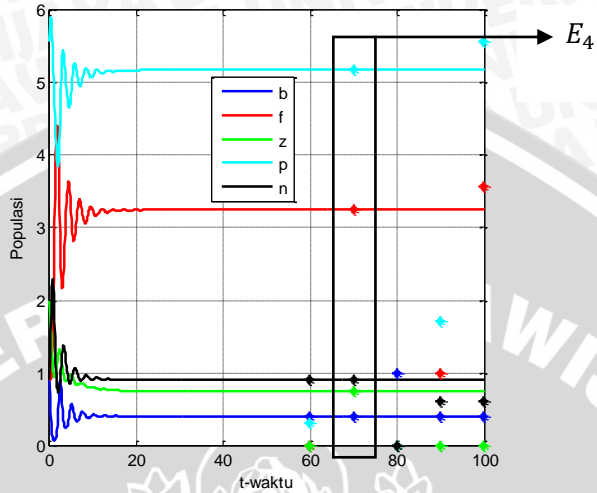
$$n^* = 0.3 < \eta\gamma = 0.6.$$



Gambar 3.4 Grafik solusi simulasi II untuk titik kesetimbangan E_2

Seperti yang telah ditunjukkan pada Gambar 3.4, dengan nilai awal tersebut titik kesetimbangan E_2 stabil. Simulasi ini memiliki kesamaan dengan simulasi I, di mana titik kesetimbangan E_2 dan E_4 memenuhi kondisi kestabilan pada simulasi I walaupun dengan parameter dan nilai awal yang berbeda. Pada titik kesetimbangan ini spesies bakteri dan protozoa serta unsur nutrisi saling membentuk rantai makanan, sedangkan spesies fitoplankton dan zooplankton punah.

Berbeda dari sebelumnya saat diberikan nilai awal $b_0 = 1$, $f_0 = 1$, $z_0 = 2$, $p_0 = 5.57$, dan $n_0 = 0.895$ yang menyebabkan titik kesetimbangan E_4 eksis, namun syarat kestabilan titik kesetimbangan E_2 tidak terpenuhi, sehingga titik kesetimbangan E_2 tidak stabil. Titik kesetimbangan E_4 eksis dan stabil karena $n^* = 0.895 > \eta\gamma = 0.6$, dan $u_1 = 3.386 > 0$, $u_2 = 15.961 > 0$, serta $u_3 = 95.629 > 0$.

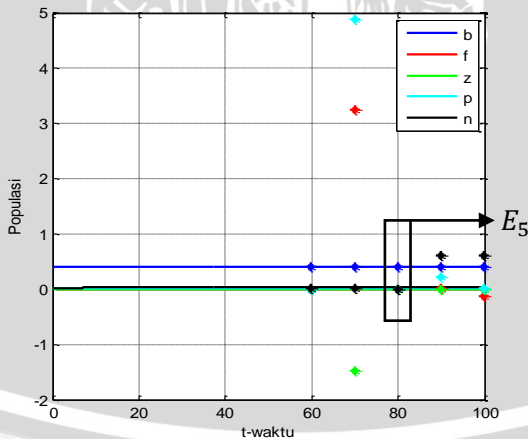


Gambar 3.5 Grafik solusi simulasi II untuk titik kesetimbangan E_4

Berdasarkan Gambar 3.5, nampak bahwa titik kesetimbangan E_4 stabil dan titik kesetimbangan yang lain tidak stabil. Berbeda dari simulasi I, kali ini tingginya populasi protozoa disebabkan oleh nilai awal yang tinggi, yaitu 5.57.

Selanjutnya jika diberikan nilai awal $b_0 = 0.39$, $f_0 = 0.01$, $z_0 = 0.01$, $p_0 = 0.01$, dan $n_0 = 0.01$, maka kondisi kestabilan titik kesetimbangan E_5 akan terpenuhi karena nilai

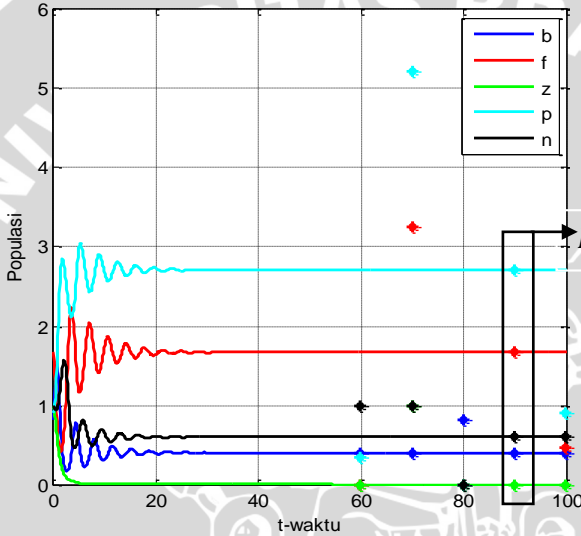
$$b^* = 0.39 < \gamma = 0.4.$$



Gambar 3.6 Grafik solusi simulasi II untuk titik kesetimbangan E_5

Dari Gambar 3.6 nampak bahwa ada 2 titik kesetimbangan yang stabil yaitu titik kesetimbangan E_2 dan titik kesetimbangan E_5 .

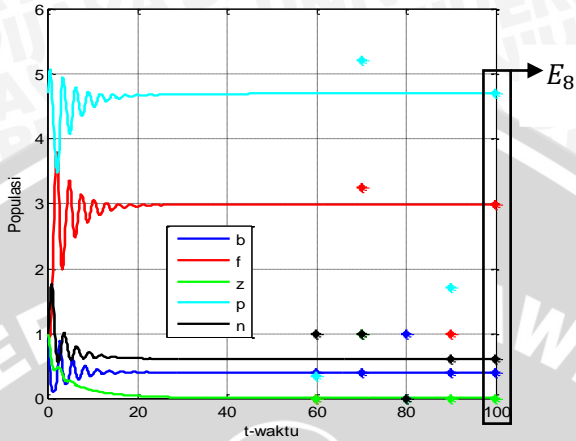
Misalkan diberikan nilai awal $b_0 = 0.81$, $f_0 = 1.671$, $z_0 = 1$, $p_0 = 0.9$, dan $n_0 = 1$. Untuk menghitung kestabilan titik kesetimbangan E_7 perlu diperiksa nilai v_1 , v_2 , dan v_3 , yakni $v_1 = 2.438 > 0$, $v_2 = 2.755 > 0$, dan $v_3 = 1.762 > 0$. Karena semuanya bernilai positif, maka grafik solusi bergerak menuju titik kesetimbangan E_7 .



Gambar 3.7 Grafik solusi simulasi II untuk titik kesetimbangan E_7

Pada titik kesetimbangan E_7 ini, dalam jangka panjang spesies zooplankton akan punah.

Pada saat nilai awal $b_0 = 1$, $f_0 = 1$, $z_0 = 1$, $p_0 = 4.704$, dan $n_0 = 1$, perilaku kestabilan bergerak menuju titik kesetimbangan E_8 karena syarat eksistensi dan kestabilannya terpenuhi untuk titik kesetimbangan E_8 yakni $\frac{p^*}{\eta} = 3.136 > \beta\gamma = 0.136$, dan $w_1 = 3.236 > 0$, $w_2 = 7.002 > 0$, serta $w_3 = 88.529 > 0$.



Gambar 3.8 Grafik solusi simulasi II untuk titik kesetimbangan E_8

Berdasarkan Gambar 3.4 sampai 3.8, dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan satu nilai parameter didapatkan beragam grafik solusi, keberagaman grafik solusi disebabkan nilai awal yang berbeda-beda.

3.4.3 Simulasi III

Pada simulasi yang ketiga dibahas kemungkinan-kemungkinan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 jika nilai awal parameternya diubah-ubah.

Tabel 3.3 Kemungkinan kestabilan titik kesetimbangan

No.	Titik Kesetimbangan		
	E_4	E_7	E_8
1.	Stabil	Stabil	Stabil
2.	Stabil	Stabil	Tidak Stabil
3.	Stabil	Tidak Stabil	Stabil
4.	Stabil	Tidak Stabil	Tidak Stabil
5.	Tidak Stabil	Stabil	Stabil
6.	Tidak Stabil	Stabil	Tidak Stabil
7.	Tidak Stabil	Tidak stabil	Stabil
8.	Tidak Stabil	Tidak Stabil	Tidak Stabil

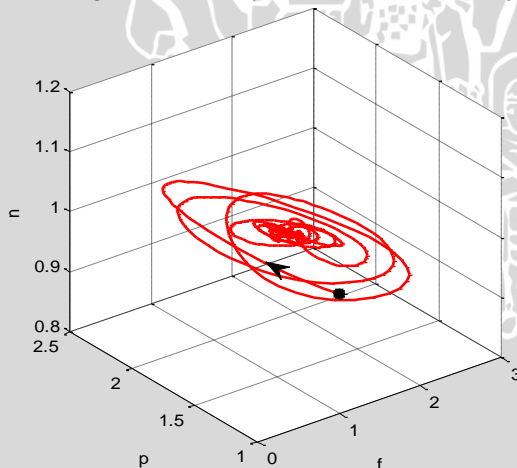
Berdasarkan Tabel 3.3 didapatkan 8 kombinasi kestabilan 3 titik kesetimbangan yang disebabkan oleh berubahnya nilai parameter.

Simulasi untuk kemungkinan yang pertama menggunakan parameter $\alpha = 1.4, \beta = 0.8, \gamma = 0.4, \delta = 1.9, \eta = 0.6,$ dan $\mu = 0.1.$ Nilai awal yang digunakan yaitu $b_0 = f_0 = z_0 = p_0 = n_0 = 1.$ Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan $E_4, E_7,$ dan E_8 diberikan pada Tabel 3.4.

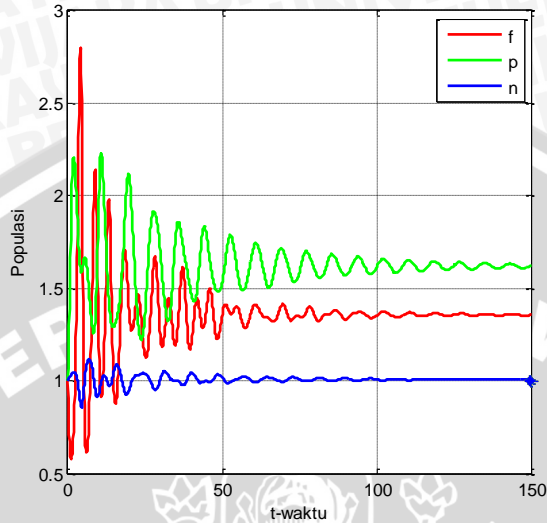
Tabel 3.4 Syarat eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan pertama

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 0.76 > 0$	i. $u_1 = 0.167 > 0$ ii. $u_2 = 0.261 > 0$ iii. $u_3 = 0.007 > 0$
E_7	-	i. $v_1 = 0.632 > 0$ ii. $v_2 = 0.217 > 0$ iii. $v_3 = 0.054 > 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 1.347 > 0$	i. $w_1 = 0.181 > 0$ ii. $w_2 = 0.019 > 0$ iii. $w_3 = 0.002 > 0$

Berdasarkan Tabel 3.4, semua syarat kestabilan titik kesetimbangan bernilai positif, artinya semua titik stabil. Namun menuju kemanakah grafik solusinya? $E_4, E_7,$ ataukah $E_8.$



Gambar 3.9 Potret fase model kemungkinan ke-1



Gambar 3.10 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-1

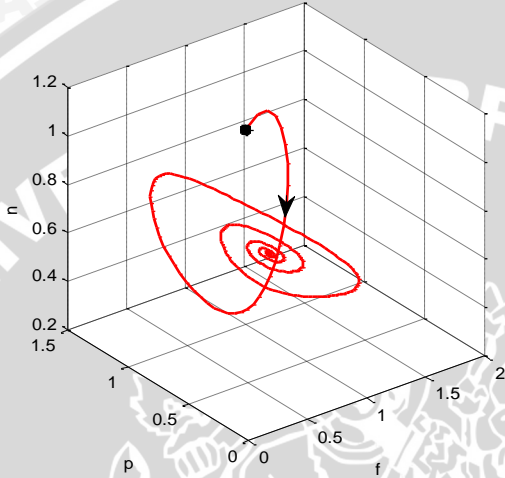
Berdasarkan Gambar 3.9 dan 3.10 nampak bahwa grafik solusi $n(t)$ bergerak menuju keadaan stabil, yang tidak lain bahwa titik kesetimbangan E_4 stabil.

Sedangkan simulasi untuk kemungkinan yang ke dua menggunakan parameter $\alpha = 1.3$, $\beta = 1.3$, $\gamma = 2.4$, $\delta = 1.3$, $\eta = 0.1$, dan $\mu = 1$, dengan nilai awal yang sama dengan kemungkinan pertama yaitu $b_0 = f_0 = z_0 = p_0 = n_0 = 1$. Pengujian syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 diberikan pada Tabel 3.5.

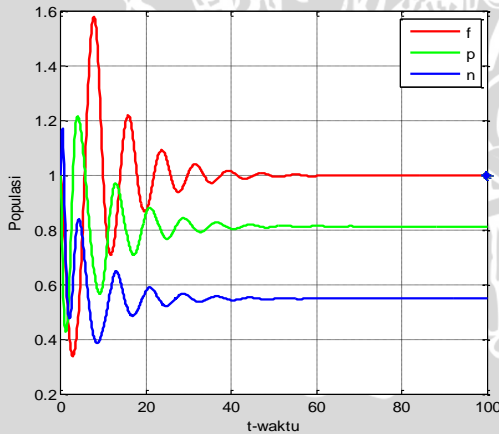
Tabel 3.5 Syarat eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan ke dua

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 0.76 > 0$	i. $u_1 = 4.12 > 0$ ii. $u_2 = 31.294 > 0$ iii. $u_3 = 31.819 > 0$
E_7	-	i. $v_1 = 4.12 > 0$ ii. $v_2 = 17.873 > 0$ iii. $v_3 = 19.44 > 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 6.88 > 0$	i. $w_1 = 2.356 > 0$ ii. $w = -146.35 < 0$ iii. $w_3 = 3918.43 > 0$

Berdasarkan Tabel 3.5, salah satu syarat kestabilan titik kesetimbangan E_8 bernilai negatif, mengakibatkan titik kesetimbangan E_8 tidak stabil. Lain halnya dengan titik kesetimbangan E_4 dan E_7 yang semua syarat kestabilannya terpenuhi sehingga keduanya stabil.



Gambar 3.11 Potret fase model kemungkinan ke-2



Gambar 3.12 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-2

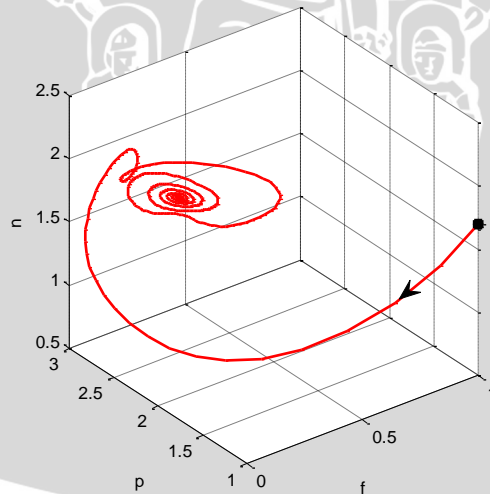
Berdasarkan Gambar 3.11 dan 3.12 nampak bahwa grafik solusi $f(t)$ bergerak menuju keadaan stabil, yang tidak lain bahwa titik kesetimbangan E_7 stabil.

Untuk memenuhi kemungkinan yang ke tiga, parameter yang digunakan yaitu $\alpha = 1.7$, $\beta = 1.3$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$, $\eta = 1.1$, dan $\mu = 1$. Sedangkan nilai awal yang digunakan yaitu $b_0 = f_0 = z_0 = p_0 = 1$ dan $n_0 = 1.7$. Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 untuk kemungkinan ke tiga diberikan pada Tabel 3.6.

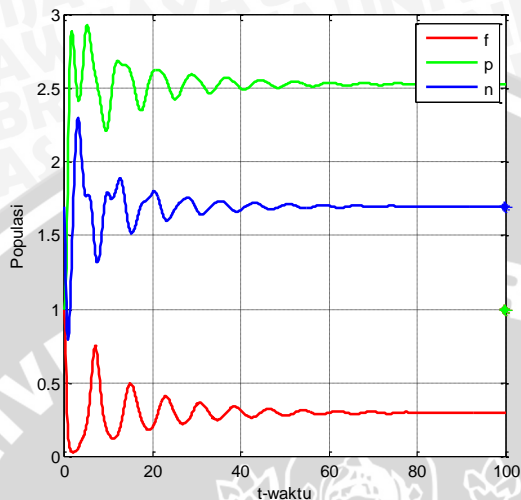
Tabel 3.6 Syarat eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan ke tiga

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 1.15 > 0$	i. $u_1 = 0.944 > 0$ ii. $u_2 = 2.709 > 0$ iii. $u_3 = 0.411 > 0$
E_7	-	i. $v_1 = 0.45 > 0$ ii. $v_2 = 1.325 > 0$ iii. $v_3 = -1.031 < 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 0.259 > 0$	i. $w_1 = 0.968 > 0$ ii. $w_2 = 0.929 > 0$ iii. $w_3 = 0.307 > 0$

Dari Tabel 3.6 terlihat bahwa hanya titik kesetimbangan E_7 yang tidak stabil karena syarat kestabilannya terpenuhi, sedangkan titik kesetimbangan E_4 dan E_8 stabil.



Gambar 3.13 Potret fase model kemungkinan ke-3



Gambar 3.14 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-3

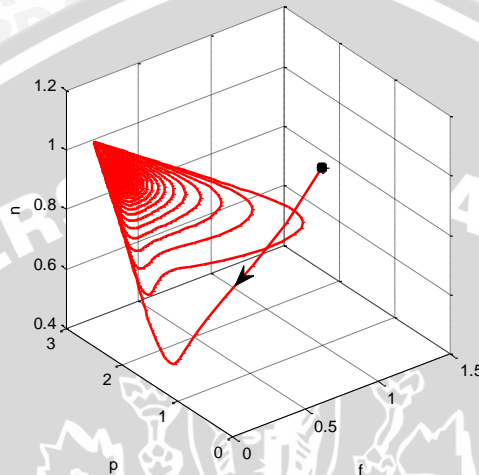
Berdasarkan Gambar 3.14 terlihat semua grafik solusi tidak ada yang stabil walaupun pada perhitungan analitik titik kesetimbangan E_4 dan E_8 stabil.

Parameter yang digunakan pada kemungkinan yang ke empat yaitu $\alpha = 3.3$, $\beta = 2.3$, $\gamma = 1.4$, $\delta = 1.3$, $\eta = 0.1$, dan $\mu = 1$. Sedangkan nilai awal yang digunakan yaitu $b_0 = f_0 = z_0 = p_0 = n_0 = 1$. Tabel 3.7 memperlihatkan hasil perhitungan syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 .

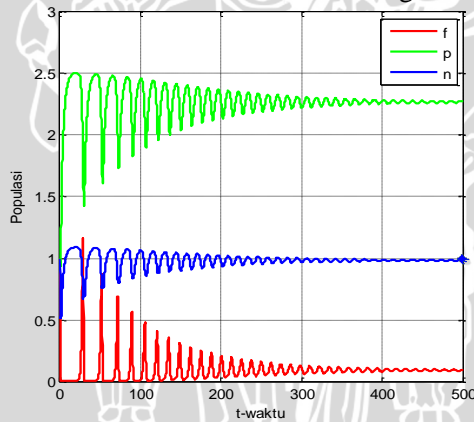
Tabel 3.7 Syarat eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan ke empat

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 0.86 > 0$	i. $u_1 = 3.614 > 0$ ii. $u_2 = 37.5 > 0$ iii. $u_3 = 64.56 > 0$
E_7	-	i. $v_1 = 2.22 > 0$ ii. $v_2 = -8.8 < 0$ iii. $v_3 = 32.018 > 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 6.78 > 0$	i. $w_1 = -11.074 < 0$ ii. $w_2 = 2358.1 > 0$ iii. $w_3 = -121379.7 < 0$

Dari Tabel 3.7 terlihat bahwa hanya titik kesetimbangan E_4 yang stabil karena syarat kestabilannya terpenuhi, sedangkan titik kesetimbangan E_7 dan E_8 tidak stabil.



Gambar 3.15 Potret fase model kemungkinan ke-4



Gambar 3.16 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-4

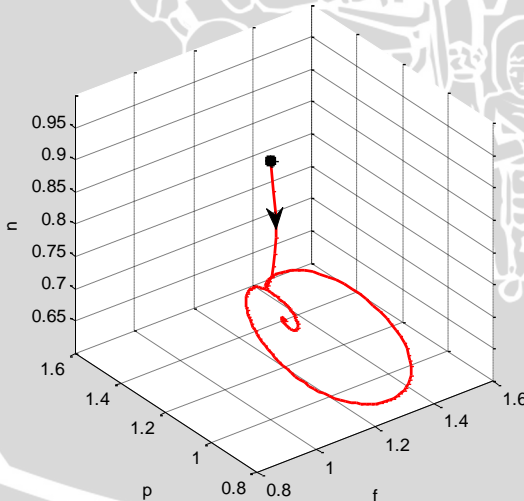
Pada kemungkinan yang ke-4 karena hanya titik kesetimbangan E_4 yang stabil, maka grafik solusi $n(t)$ bergerak menuju titik kesetimbangan E_4 seperti nampak pada Gambar 3.16.

Pada kemungkinan ke lima ini, parameter yang digunakan yaitu $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.7$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 0.3$, $\eta = 0.4$, dan $\mu = 1$. Nilai awal yang digunakan yaitu $b_0 = f_0 = z_0 = p_0 = n_0 = 1$. Hasil perhitungan syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 diperlihatkan pada Tabel 3.8.

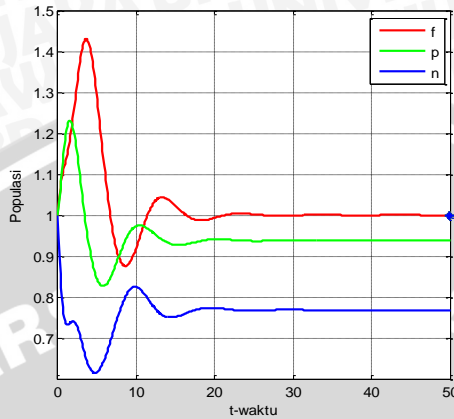
Tabel 3.8 Syarat Eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan ke lima

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 0.68 > 0$	i. $u_1 = 1.56 > 0$ ii. $u_2 = 3.132 > 0$ iii. $u_3 = -0.17 < 0$
E_7	-	i. $v_1 = 1.56 > 0$ ii. $v_2 = 2.023 > 0$ iii. $v_3 = 1.414 > 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 1.94 > 0$	i. $w_1 = 2.218 > 0$ ii. $w_2 = 0.75 > 0$ iii. $w_3 = 4.264 > 0$

Berbeda dari kemungkinan yang ke empat, kali ini pada tabel tersebut terlihat bahwa hanya titik kesetimbangan E_4 yang tidak stabil karena salah satu syarat kestabilannya tidak terpenuhi, sedangkan titik kesetimbangan E_7 dan E_8 stabil.



Gambar 3.17 Potret fase model kemungkinan ke-5



Gambar 3.18 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-5

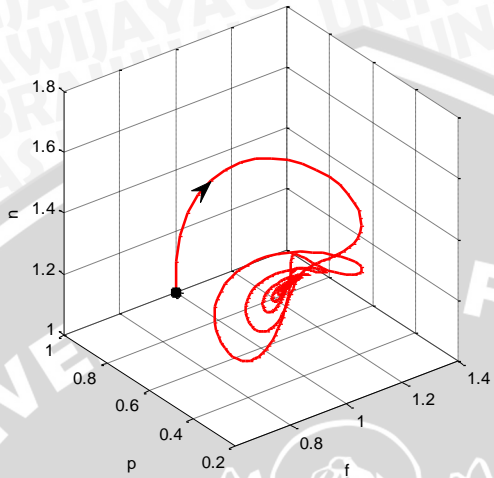
Pada Gambar 3.17 dan 3.18 nampak grafik solusi $f(t)$ yang cenderung bergerak menuju titik kestabilan walaupun titik kesetimbangan E_8 juga stabil.

Pada simulasi untuk kemungkinan ke enam ini parameter yang digunakan yaitu $\alpha = 1.3$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1.4$, $\delta = 1.3$, $\eta = 0.1$, dan $\mu = 1$. Dengan nilai awal $b_0 = f_0 = z_0 = p_0 = n_0 = 1$. Tabel 3.9 memperlihatkan hasil perhitungan syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 .

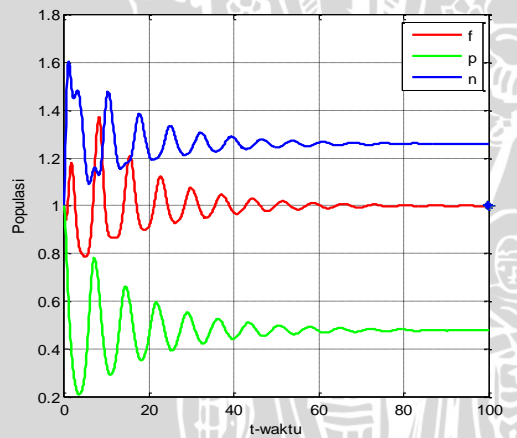
Tabel 3.9 Syarat eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan ke enam

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 0.86 > 0$	i. $u_1 = 1.42 > 0$ ii. $u_2 = 3.344 > 0$ iii. $u_3 = -0.777 < 0$
E_7	-	i. $v_1 = 1.42 > 0$ ii. $v_2 = 2.275 > 0$ iii. $v_3 = 0.498 > 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 9.58 > 0$	i. $w_1 = -1.154 < 0$ ii. $w_2 = 142.9 > 0$ iii. $w_3 = -2283.62 < 0$

Pada kemungkinan ke enam, titik kesetimbangan E_7 stabil karena syarat kestabilannya terpenuhi.



Gambar 3.19 Potret fase model kemungkinan ke-6



Gambar 3.20 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-6

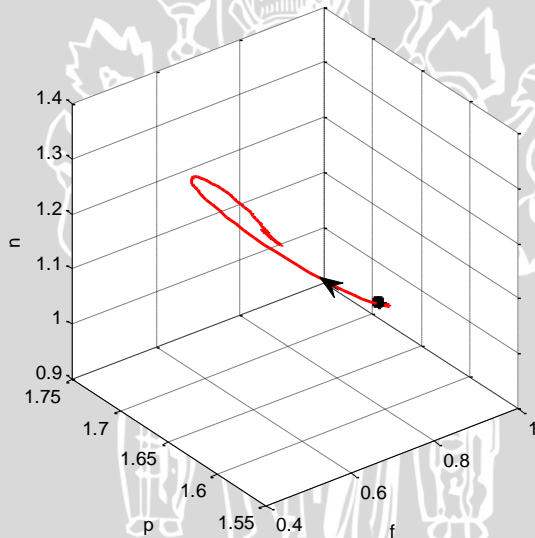
Pada kemungkinan ini, grafik solusi fungsi $f(t)$ bergerak menuju titik kestabilan E_7 , seperti diperlihatkan pada Gambar 3.20.

Simulasi untuk kemungkinan ke tujuh menggunakan parameter $\alpha = 3.5$, $\beta = 0.9$, $\gamma = 1.1$, $\delta = 2.3$, $\eta = 0.9$, dan $\mu = 1$. Dengan nilai awal $b_0 = 1$, $f_0 = 0.92$, $z_0 = 0.1$, $p_0 = 1.66$, dan $n_0 = 0.99$. Perhitungan syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 diberikan pada Tabel 3.10.

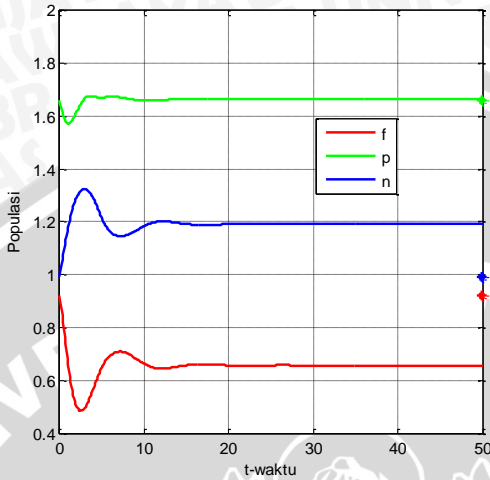
Tabel 3.10 Syarat eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan ke tujuh

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 0.001 > 0$	i. $u_1 = 1.647 > 0$ ii. $u_2 = 4.246 > 0$ iii. $u_3 = -4.762 < 0$
E_7	-	i. $v_1 = 0.99 > 0$ ii. $v_2 = 3.747 > 0$ iii. $v_3 = -0.159 < 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 0.854 > 0$	i. $w_1 = 1.153 > 0$ ii. $w_2 = 3.525 > 0$ iii. $w_3 = 2.67 > 0$

Pada kemungkinan ke tujuh, titik kesetimbangan E_8 stabil karena syarat kestabilannya terpenuhi.



Gambar 3.21 Potret fase model kemungkinan ke-7



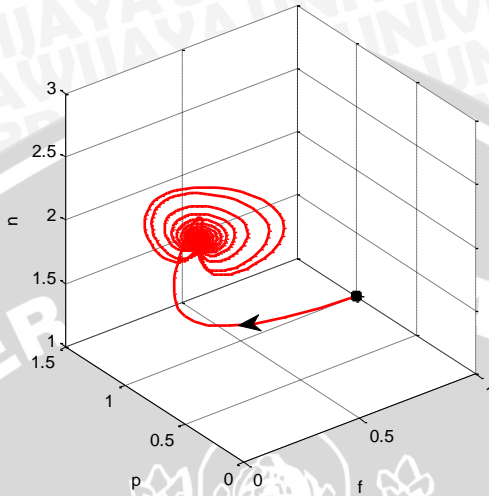
Gambar 3.22 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-7

Simulasi untuk kemungkinan yang ke delapan menggunakan parameter $\alpha = 2.3$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1.1$, $\delta = 0.4$, $\eta = 0.3$, dan $\mu = 1$, dengan nilai awal yang sama dengan kemungkinan pertama yaitu $b_0 = f_0 = z_0 = p_0 = n_0 = 1$. Pengujian syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan E_4 , E_7 , dan E_8 diberikan pada Tabel 3.11.

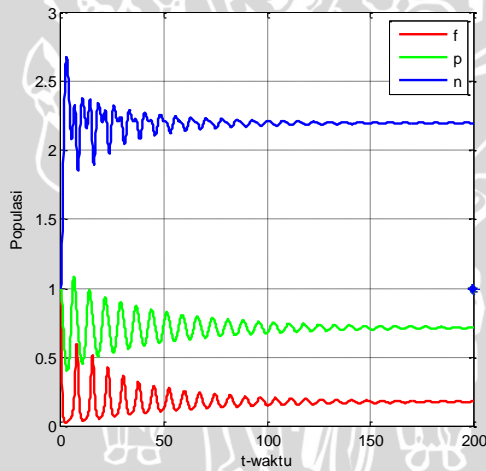
Tabel 3.11 Syarat eksistensi dan kestabilan untuk kemungkinan ke delapan

Titik	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
E_4	$n^* - \eta\gamma = 0.67 > 0$	i. $u_1 = 0.504 > 0$ ii. $u_2 = 0.36 > 0$ iii. $u_3 = -0.022 < 0$
E_7	-	i. $v_1 = -0.57 < 0$ ii. $v_2 = 1.5 > 0$ iii. $v_3 = -1.36 < 0$
E_8	$\frac{p^*}{\eta} - \beta\gamma = 3 > 0$	i. $w_1 = -3.174 < 0$ ii. $w_2 = 72.63 > 0$ iii. $w_3 = -550.83 < 0$

Pada kemungkinan ini semua titik kesetimbangan tidak stabil. Hal tersebut jelas terlihat pada Gambar 3.24.



Gambar 3.23 Potret fase model kemungkinan ke-8



Gambar 3.24 Grafik solusi $f(t)$, $p(t)$, dan $n(t)$ kemungkinan ke-8

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini yang telah diuraikan pada Bab I dan hasil dari pembahasan pada Bab III, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Model rantai makanan lima unsur ekosistem laut berupa sistem otonomus nonlinier dengan lima persamaan dan sembilan parameter. Setelah dilakukan penskalaan diperoleh lima persamaan dengan enam parameter dimana semua parameter bernilai positif.
2. Dari kelima persamaan diperoleh 8 titik kesetimbangan, yakni titik $E_1 (0,0,0,0, n_0)$, $E_2 (\gamma, 0,0, \beta n_0, n_0)$, $E_3 (0, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n_0}{\alpha}, 0, n_0)$, $E_4 (\gamma, \frac{\delta}{\alpha}, \frac{n_0 - \eta\gamma}{\alpha}, \beta n_0 + \frac{\eta\delta}{\alpha}, n_0)$, $E_5 (b_0, 0,0,0,0)$, $E_6 (0, f_0, 0,0,0)$, $E_7 (\gamma, f_0, 0, \beta\eta\gamma + \eta f_0, \eta\gamma)$, dan $E_8 (\gamma, \frac{p_0}{\eta} - \beta\gamma, 0, p_0, \eta\gamma)$. Untuk titik kesetimbangan E_4 dan E_8 eksis dengan syarat tertentu.
3. Dari kedelapan titik kesetimbangan hanya tiga yang tidak stabil yakni E_1 , E_3 , dan E_6 . Titik kesetimbangan E_2 stabil jika syarat eksistensi titik kesetimbangan E_4 tidak terpenuhi. Pada intinya semua titik kesetimbangan stabil dengan syarat kestabilannya masing-masing kecuali E_1 , E_3 , dan E_6 .
4. Beberapa simulasi numerik yang telah dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji kemungkinan terjadinya bifurkasi Hopf seperti yang dilakukan pada Hadley dan Forbes (2009).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce dan DiPrima. 2009. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Ninth Ed. John Willey & Sons Inc. New York.
- Brauer, F. dan C. C. Chavez. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer-Verlag, New York Inc. New York.
- Edward, C.H. dan D. E. Penney. 2008. *Differential Equation and Linear Algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey.
- Finizio dan G. Ladas. 1981. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi Kedua. Terjemahan Widiarti Santoso. Erlangga. Jakarta.
- Hadley, S. dan Forbes L. K.. 2009. Dynamical System Analysis of a Five Dimensional Trophic Food Web in the Southern Oceans. *Journal of Applied Mathematics*, 2009, hal. 37-54.
- Nagle, R.K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamental of Differential Equation and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company. USA.
- Skalski, G.T. dan J.F. Gilliam. 2001. *Functional Responses with Predator Interference : viable alternatives to the Holling Type II Model*. *Ecology* 82:11. 3083-3092.
- Stone, L.. 1990. Phytoplankton-Bacteria-Protozoa Interactions : a Qualitative Model Portraying Indirect Effect. *Marine Ecology Progress Series*, 64 (90), 137-145.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

